

物理科

科別：物理科

組別：高中組

作品名稱：簡單運動的深入探討—這也是彈性碰撞？

關鍵詞：正向彈性碰撞、純滾動、靜摩擦

編號：040113

學校名稱：

國立嘉義女子高級中學

作者姓名：

陳怡如、蘇盈盈、劉欣瑜、黃婉菱

指導老師：

彭春南、郭俐蘭

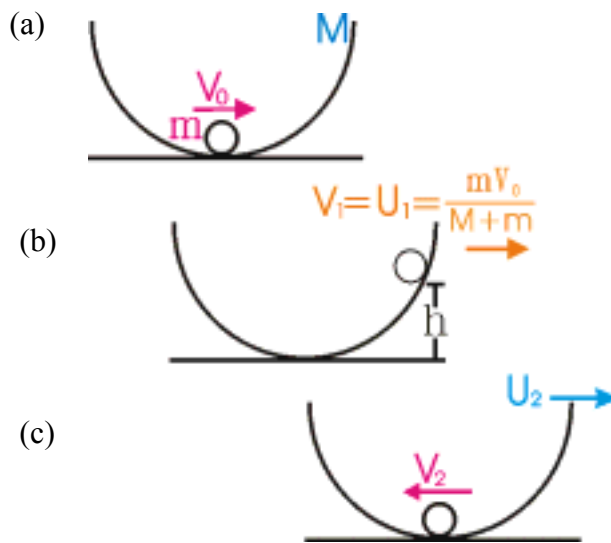


摘要

參考書上的一題：「質量 M 之光滑半球碗以等速度在光滑水平面上運動，今將一質量 m 的小球輕放於碗底，試求小球第一次滑回碗底時，碗與小球之速度各為何？」其解答過程，視球在碗內為純滑動（因無摩擦力）。今把問題複雜化，設球與碗面間有靜摩擦力，致使球作純滾動時，則所求答案應如何改變？我們先引用高二物理課程中所學過的：靜摩擦、相對運動、力學能守恆、動量守恆、迎面彈性碰撞、圓弧面的純滾動及轉動力學等原理來推演公式，再設計實驗以驗證所推得的公式，最後並試做實驗誤差的分析與討論。

壹、研究動機

曾經做過一變相彈性碰撞（見附件一）的講義題型，為了方便實驗操作起見，將原題改成如下：「一質量 M 的碗，內壁為光滑，原靜止於光滑無摩擦水平面上。今有一質量為 m 的小球，以 V_0 之速度，由碗底開始向上滑行，則小球再滑回碗底時之球速與碗速各為何？」。其解法為：



圖一 球與碗完成一次迎面彈性碰撞的過程

圖一所示為球與碗之系統完成一次迎面彈性碰撞的過程，途中系統質心恆以 $\frac{mV_0}{M+m}$ 的速度向右運動， h 則為球在碗內可達到的最大高度。由於系統受外界水平淨力為零，故水平方向動量守恆，且由於所有接觸面為光滑無摩擦，故此系統力學能守恆，在此情況下又假設小球為純滑動（不考慮球的轉動），則可列出下式

$$mV_0 = mV_1 + MU_1 = mV_2 + MU_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MU_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}MU_2^2 \quad (2)$$

可解得
$$V_2 = \frac{m-M}{M+m}V_0, \quad U_2 = \frac{2m}{M+m}V_0 \quad (3)$$

比較(3)與迎面彈性碰撞(Elastic Collision)的公式解

$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_2 \quad (4)$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_2 \quad (5)$$

如果 $V_2 = 0$ 則
$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_1, \quad V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1 \quad (6)$$

由(6)之結果，與(3)式相互比較，發現此為迎面彈性碰撞的一個特例！一般的經驗上，我們並不容易將此狀況與迎面彈性碰撞聯想在一起，由於彈性碰撞最常見的模型是利用彈力或電磁力作為碰撞期間物體之交互作用力，使碰撞期間系統減少的總動能，以彈力或電磁力位能的型式儲存，而上題則以重力位能的型式儲存所減少的總動能。這引起我們高度的好奇心。

在真實的環境中，如果要研究這個問題，則需檢討上題所設定的兩個狀況：

- 一、碗與水平面間可能會有摩擦力。(使用氣墊軌道即可解決)
- 二、小球與碗間必有摩擦，使小球在碗內運動是滾動而非滑動。

於是，我們想引入靜摩擦、相對運動、力學能守恆、動量守恆、迎面彈性碰撞、圓弧面的純滾動及轉動力學等觀念，來重新深入探討這個變相的彈性碰撞問題。學以致用，我們樂於做個小嘗試。

貳、研究目的

- 一、圓弧面與水平面上的純滾動公式是否相同？
- 二、小圓柱與在移動中的碗面上做純滾動的條件為何？
- 三、如何測量小圓柱與碗面間的最大靜摩擦力 f_s 與靜摩擦係數 μ_s ？
- 四、由相關理論，推演小圓柱與碗完成一次迎面彈性碰撞的公式。
- 五、設計實驗來測量相關數值，以驗證所推演公式的正確性。
- 六、探討影響實驗誤差的因素。

參、理論探討

一、圓弧面上的純滾動公式：

如圖二，假設半徑為 r 之小圓柱在半徑為 R 之球殼內純滾動，在一段極短之時間內，小圓柱之質心位置由 O 到 O' ，其對大球殼球心 C 的角位移為 θ ，而小圓柱上與大球殼的接觸點 P 已轉到 P'' 的位置，圓柱與球殼的接觸點對小圓柱圓心所轉的角度 $\alpha = \angle SO'P''$ ，而實際上在此過程中， P 點對小圓柱僅自轉 $f = \angle P'O'P''$ 。由圖二可知：

$$\phi = \alpha - \theta \quad (7)$$

$$Q_{\theta\theta} = (R - r)q \quad (8)$$

$$\text{則 } \frac{d}{dt}(Q_{\theta\theta}) = V_0 = (R - r) \frac{dq}{dt} \quad (9)$$

由於小圓柱在球殼上純滾動，所以

$$PS = Rq = ra \quad (10)$$

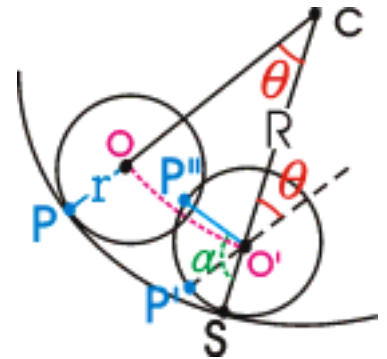
由(10)可解得 $a = \frac{R}{r}q$ ，將其代回(7)則

$$f = \frac{(R - r)}{r}q \quad (11)$$

$$\text{由於小圓柱的轉動角速度 } w = \frac{df}{dt} \quad (12)$$

$$\text{由(11)、(12)可得 } w = \frac{(R - r)}{r} \frac{dq}{dt} \text{ 或 } \frac{dq}{dt} = \frac{r}{(R - r)} w \quad (13)$$

$$\text{由(9)、(13)可導證出小圓柱之質心速度 } V_0 = r\omega \quad (14)$$



圖二 $\angle P'O'P'' = \alpha - \theta$

二、小圓柱在移動的碗面上做純滾動條件的推演過程：

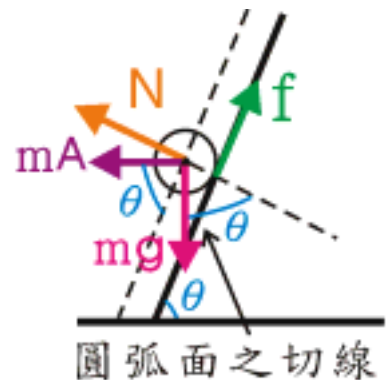
以下假設

M ：碗質量

N ：小圓柱與碗間的正向力

A ：碗對地的加速度，由圖四可知，其方向為向右

I ：小圓柱對軸心的轉動慣量，其值等於 $\frac{1}{2}mr^2$



圖三 小圓柱的受力圖

m ：小圓柱質量

f ：小圓柱與碗間的靜摩擦力

f_s ：小圓柱與碗間的最大靜摩擦力

a ：小圓柱對碗的加速度

θ ：小圓柱所在碗上接觸點的切平面斜角

見圖三，以碗為參考座標系，小圓柱應受到向左的假力 mA 的作用。小圓柱在垂直碗面方向受合力為 0，即

$$mA \sin \theta + N - mg \cos \theta = 0 \quad (15)$$

由運動定律，小圓柱在平行碗面方向有加速度

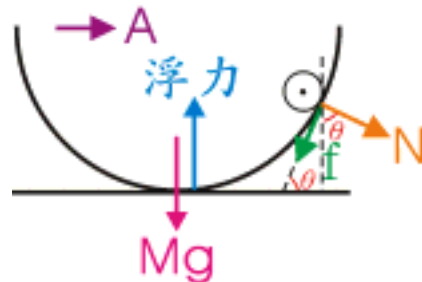
$$mA \cos \theta + mg \sin \theta - f = ma \quad (16)$$

小圓柱純滾動的條件

$$a = r\alpha \quad (17)$$

由轉動定律，小圓柱有角加速度

$$\tau = fr = \frac{1}{2}mr^2\alpha \quad (18)$$



圖四 碗的受力圖

上式中 $\frac{1}{2}mr^2$ 為小圓柱的轉動慣量 I

見圖四，由運動定律，碗在平行地面方向有加速度

$$N \sin \theta - f \cos \theta = MA \quad (19)$$

將 (17) 代入 (18) 得

$$f = \frac{1}{2}ma \quad (20)$$

由 (15) 得

$$N = mg \cos \theta - mA \sin \theta \quad (21)$$

將 (20)、(21) 分別代入 (16)、(19) 可得到下列二式

$$\frac{3}{2}ma = mA \cos \theta + mg \sin \theta \quad (22)$$

$$(mg \cos \theta - mA \sin \theta) \sin \theta - \frac{1}{2}ma \cos \theta = MA \quad (23)$$

$$\text{由 (23) 可得} \quad \frac{1}{2}ma \cos \theta = mg \cos \theta \sin \theta - (m \sin^2 \theta + M)A \quad (24)$$

由 (22) 除以 (24) 可得

$$\frac{3}{\cos \theta} = \frac{mA \cos \theta + mg \sin \theta}{mg \cos \theta \sin \theta - (m \sin^2 \theta + M)A} \quad (25)$$

由 (25) 可得

$$A = \frac{2mg \sin \theta \cos \theta}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \quad (26)$$

將 (26) 代入 (22)

$$a = \frac{(M + m)2g \sin \theta}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \quad (27)$$

將 (26) 代入 (15)

$$\begin{aligned}
N &= mg \cos \theta - m \sin \theta \frac{2mg \sin \theta \cos \theta}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \\
&= mg \cos \theta \frac{3M + 2m \sin^2 \theta + m - 2m \sin^2 \theta}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \\
\therefore N &= \left(\frac{3M + m}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \right) mg \cos \theta
\end{aligned} \tag{28}$$

將 (27) 代入 (20)

$$f = \frac{1}{2} m (2g \sin \theta) \left(\frac{M + m}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \right) = \left(\frac{M + m}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \right) mg \sin \theta \tag{29}$$

為滿足純滾動的條件， f 須為靜摩擦（接觸點瞬時相對速度為 0）故 $f < f_s = \mu_s N$ ，將 (28)、(29) 式代入上式可得

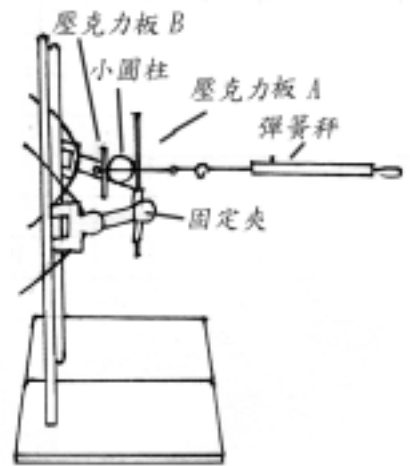
$$\begin{aligned}
\left(\frac{M + m}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} \right) mg \sin \theta &< \mu_s \left(\frac{3M + m}{3M + 2m \sin^2 \theta + m} mg \cos \theta \right) \\
\mu_s &> \left(\frac{M + m}{3M + m} \right) \tan \theta
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\theta < \tan^{-1} \left(\frac{3M + m}{M + m} \mu_s \right) \tag{31}$$

三、最大靜摩擦 f_s 與靜摩擦係數 μ_s 的測量原理：

見圖五，有兩片壓克力板 A 與 B，其內側貼上砂紙（120K）。此二片中央的水平方向有兩個小孔，其間距離為 2.8cm。先將較大的 A 片用滴定夾固定之，再以細線穿過兩個小孔，把此二片壓克力板夾住，細線另端則接一彈簧秤。然後進行以下步驟：

- （一）把重量為 m 的小圓柱塞入上述二板中間，並拉緊彈簧秤，小圓柱被夾住而不能動。
- （二）緩慢放鬆彈簧秤，直至小圓柱開始下滑，記錄此時彈簧秤的讀數 N ，而此時小圓柱與兩板面間的摩擦力為最大靜摩擦 f_s 。



圖五 測量 μ_s 的裝置

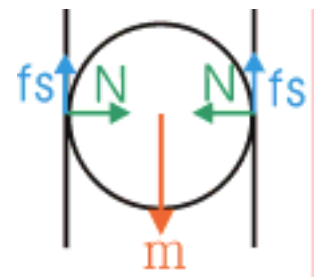
見圖六，由靜力平衡的原理可知

$$2f_s = m \tag{32}$$

$$\text{又 } f_s = \mu_s N \tag{33}$$

由 (32)、(33) 式可得

$$\mu_s = \frac{m}{2N} \tag{34}$$

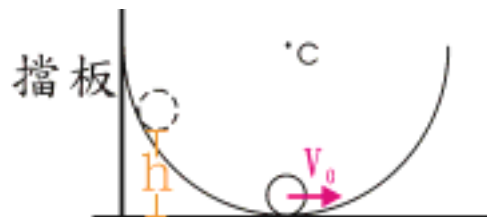


圖六 小圓柱的受力圖

四、碰撞公式的推演

(一) 滾下的小圓柱獲得初速 V_0 ：

如圖七，假設以小圓柱取代小球，並使其在碗內的滾動方式為純滾動，且整個系統係置放在氣墊軌道上。設 m 表示小圓柱質量、 V 表示小圓柱質心速度、 I 表示小圓柱轉動慣量、 ω 表示小圓柱角速度、 M 表示碗的質量、 U 表示碗的速度，公式推導如下：



圖七 滾下的小圓柱獲得初速 V_0

如圖七，在系統左端置一擋板，使小圓柱在落下的過程中，碗保持靜止。當小圓柱第一次滾到最低點時獲得初速 V_0 ，小圓柱所滾落的高度為 h ，由力學能守恆列出下式：

$$mgh = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \quad (35)$$

由純滾動之公式

$$V_0 = r\omega_0 \quad (36)$$

由於小圓柱之轉動慣量 I 可表為

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (37)$$

綜合(35)到(37)式之結果可得

$$V_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad (38)$$

詳細過程可參考拾壹、附錄一。

(二) 小圓柱與碗完成一次迎面彈性碰撞的速度公式：

自小圓柱第一次滾到最低點起，碗就開始向右運動，也就是碰撞作用的開始，見圖一所示。今以 V_2 與 U_2 分別表示小圓柱與碗在小圓柱第二次通過最低點時之速度，也就是碰撞作用的結束。則根據力學能守恆、相對運動、圓弧面的純滾動及動量守恆可列出下面幾個式子：

$$mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}MU_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \quad (39)$$

$$V_2 - U_2 = r\omega_2 \quad (40)$$

$$mV_0 = mV_2 + MU_2 \quad (41)$$

綜合 (39) 到 (41) 式及 (37) 式，可以解出小圓柱與碗經過一次迎面彈性碰撞後的碗之速度 U_2 及小圓柱之速度 V_2 如下：

$$U_2 = \frac{2m}{m+M}V_0 \quad \text{式中 } V_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad (44)$$

$$V_2 = \frac{m-M}{m+M} V_0 \quad (45)$$

詳細過程可參考拾壹、附錄二。

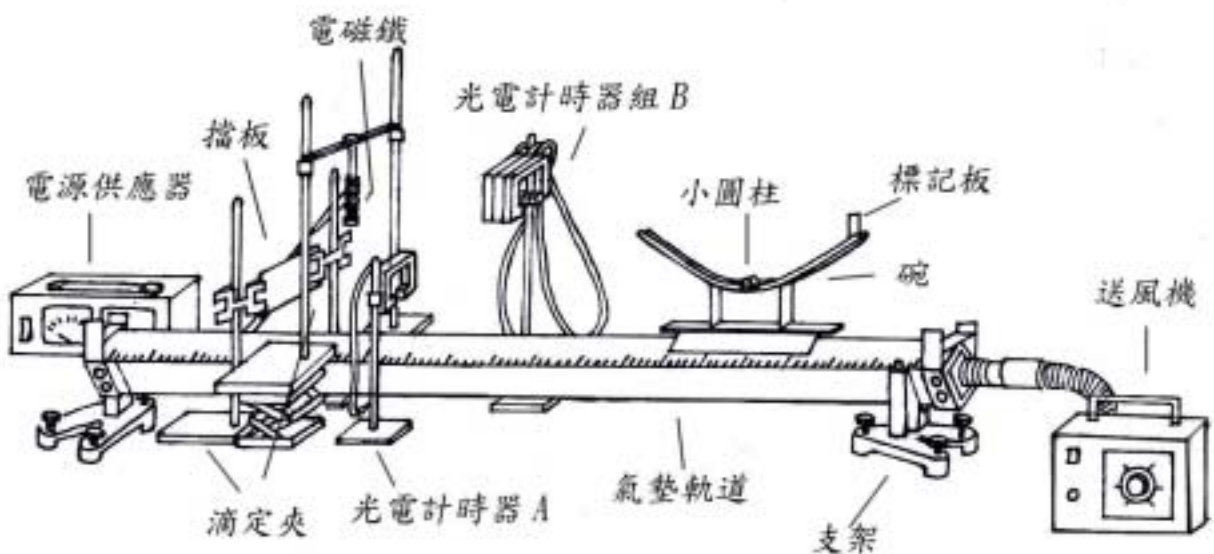
肆、實驗設計

爲了符合上面公式推導中所假設之狀況，以及顧及實驗的準確性，圖八所示爲我們所設計之實驗裝置圖，以下分別就裝置圖中各部份進行細項的探討：

- 一、使碗與接觸面間無摩擦—在排除由碗與接觸面間摩擦力的問題，將採用氣墊軌道。但由於氣墊軌道有載重的問題，故小圓柱與碗之總重不可超過氣墊軌道送風機之負荷。
- 二、“球”的選擇——一開始曾經想用小正立方體使其純滑動，但如此一來摩擦力必會做功，而使系統之力學能損失。後來考慮使用球體進行實驗，由於球體無法避免滾動，只要球對碗之運動形式爲純滾動，其接觸點對碗之瞬時相對速度即爲零，故摩擦力不做功。但由於球體滾動時方向不甚固定，所以最後決定採用小圓柱以達到較理想的效果。
- 三、碗底與碗的形狀—因欲使用光電計時器測量碗的速度，而計時器中二光電管間的距離約爲 6.6cm，故須將碗設計成寬度爲 2.4cm 的圓弧形軌道，使碗能順利通過二光電管間的空隙。爲了使小圓柱能作純滾動，須在圓軌道上貼上砂紙，以增大靜摩擦係數 μ_s 。小圓柱在軌道上任何位置時，都須滿足肆、理論探討二、中純滾動的條件，才不會發生滑動現象。其條件如下式：

$$\mu_s > \frac{M+m}{3M+m} \tan \theta \quad (\text{其中 } \theta \text{ 爲軌道上該點的切平面斜角}) \quad (30)$$

- 四、使小圓柱由靜止而穩定滾下—爲使小圓柱由一特定高度靜止而滾下且使其盡可能不受人爲因素影響，故採用電磁鐵當作小圓柱滾落的開關，當其通電時，會使小圓柱被吸住且停留在欲滾下之位置，當切斷電源時小圓柱即開始自由滾下。
- 五、碗速在小球第一次落下期間爲零—欲使小圓柱第一次滾到最低點前，阻止碗向左運動，僅需以擋板緊靠在碗的左邊即可。
- 六、圓柱第一次滾至最低點時速度 V_0 之測定—以一組光電計時器 A 置於碗底的側邊且對準小圓柱質心即可測得，如圖八所示。
- 七、碗對地速度之測定—使用 V8 記錄小圓柱第二次滾到最低點時碗上標記板的位置，將光電閘擺在其處。光電閘由三組光電計時器 B 綁在一起，當小圓柱第二次滾到最低位置時的碗速 u_2 是碗運動全程中的最大速度，所以碗上標記板通過光電閘的時間應最小，調整光電閘組的位置，當中央光電閘記錄到的時間小於兩側光電閘所記錄到的時間，則採用中央光電閘的數據，可算得 U_2 。



圖八 實驗裝置圖

伍、實驗過程

一、實驗器材：

- (一) 氣墊軌道含送風機(風速可變)
- (二) 電磁鐵(包含直流電源供應器、軟鐵心、漆包線及鱷魚夾連接線)
- (三) 鐵製圓柱體，規格如下：

表一 各種小圓柱的質量

半徑 $r(\text{cm})$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40
質量 $m(\text{g})$	49.3	59.2	70.2	82.6	96.1

- (四) 圓弧面軌道(碗)：透明壓克力板製成。其質量 $M=137.2\text{g}$
- (五) 光電計時器四架(分成 A 與 B 組，分別用於測小圓柱與碗的速度)
- (六) 滴定夾(4 組)
- (七) 砂紙(120k)
- (八) 擋板
- (九) 標記板(寬 $x=1.42\text{cm}$)
- (十) V8
- (十一) 彈簧秤、壓克力板 A (12×10cm)、壓克力板 B (5×3cm)

二、實驗步驟：

(一) 前置實驗：

利用圖五之裝置，測量小圓柱與碗面間之最大靜摩擦力 f_s ，再利用(34)式計算靜摩擦係數 μ_s ；最後利用(31)式計算小圓柱在碗面間做純滾動時，碗

$$\text{面之最大斜角 } \theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{3M+m}{M+m} \mu_s \right)。$$

(二) 主要實驗：

1. 首先確認氣墊軌道是否水平？送風機之風速足夠把系統浮起嗎？
 - (1) 固定待測小圓柱於碗中央，給系統一初速，觀察其是否保持等速。
 - (2) 如果不能等速，可試著調整風速或軌道之傾斜度，直到系統運動保持等速為止。
2. 用電磁鐵吸住小圓柱，用滴定夾調整高度將小圓柱固定於預定高度的碗面上，並令碗之一側接觸擋板，使其保持穩定平衡。
3. 切斷電源供應器開關，小圓柱即開始滾下，此時應注意運動中的小圓柱不可碰觸到軌道上的兩側。當第一次滾到最低點系統開始向右走，且系統質心恆以 $\frac{mV_0}{M+m}$ 的速度向右運動。
4. 重複試驗三次，看系統是否如預期中走到軌道盡頭，若無則須再重複步驟 1 及 2，並注意風速是否適當，剛開始時碗與擋板的接觸是否緊密，且注意小圓柱滾下時不可碰觸到兩側，務使達到預期效果。
5. 調整光電計時器(A)之高度，使二光電管連線對在小圓柱中心線上，以確定所測得的是小圓柱質心通過計時器 A 的時間 t_A 。
6. 設小圓柱的直徑為 $2r$ ，則 $V_0 = \frac{2r}{t_A}$ 。 (46)
7. 先試驗數次，以 V8 拍攝運動的過程，以估計當小圓柱第二次滾到碗底時，碗上標記板在氣墊軌道上的位置，將光電計時器組 B 擺放此位置。試驗數次並調整光電計時器組 B 的位置，直到中央光電閘測到最短時間 t_B 為止。
8. 設標記板寬 x ，即得 $U_2 = \frac{x}{t_B}$ 。 ($x=1.42\text{cm}$) (47)

陸、實驗數據

一、摩擦係數 μ_s 與碗面最大斜角 θ_m 之測量及計算結果：

表二 μ_s 與 θ_m 的演算結果

m(gw)	N(gw)	$\mu_s = \frac{m}{2N}$	$\theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{3M+m}{M+m} \mu_s \right)$
49.3	29.9	0.825	64°
96.1	57.9	0.833	61°
M=137.2g		μ_s 之平均值= 0.83	

例如：

$$\theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{3 \times 137.2 + 49.3}{137.2 + 49.3} \times 0.83 \right) = \tan^{-1} 2.05 = 64^\circ$$

$$\theta_m = \tan^{-1} \left(\frac{3 \times 137.2 + 96.1}{137.2 + 96.1} \times 0.83 \right) = \tan^{-1} 1.81 = 61^\circ$$

二、 V_0 、 U_2 之理論值演算：

由(38)式，小圓柱第一次到最低點時速度之理論值可利用下式計算之。

$$V_0 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

由(44)式，小圓柱第二次到最低點時碗速之理論值可利用下式計算之。

$$U_2 = \frac{2m}{m+M} V_0$$

計算結果如表三所示

表三 V_0 與 U_2 的理論值

h (cm)	r=1.00(cm)		r=1.10(cm)		r=1.20(cm)		r=1.30(cm)		r=1.40(cm)	
	V_0	U_2	V_0	U_2	V_0	U_2	V_0	U_2	V_0	U_2
5.75	85.66	45.22	85.56	51.50	85.46	57.77	85.36	64.07	85.25	70.14
5.42	83.11	43.87	83.00	49.96	82.90	56.04	82.79	62.14	82.69	68.03
5.20	81.36	42.95	81.25	48.91	81.15	54.85	81.04	60.82	80.93	66.59
4.99	79.66	42.05	79.55	47.88	79.44	53.70	79.33	59.54	79.22	65.18
4.67	76.99	40.64	76.87	46.27	76.76	51.89	76.65	57.53	76.53	62.97
4.40	74.66	39.41	74.54	44.87	74.43	50.31	74.31	55.77	74.19	61.04
4.08	71.81	37.90	71.68	43.15	71.56	48.37	71.44	53.62	71.32	58.68

三、 V_0 、 U_2 之測量值與誤差百分率之演算：

(一) 由(46)式與(47)式相關的測量值可利用下式計算之 $V_0 = \frac{2r}{t_A}$, $U_2 = \frac{x}{t_B}$ 。

(二) $V_0\%$ 表示 V_0 的誤差百分率即 $V_0\% = \frac{V_0(\text{測量值}) - V_0(\text{理論值})}{V_0(\text{理論值})}$

$U_2\%$ 表示 U_2 的誤差百分率即 $U_2\% = \frac{U_2(\text{測量值}) - U_2(\text{理論值})}{U_2(\text{理論值})}$

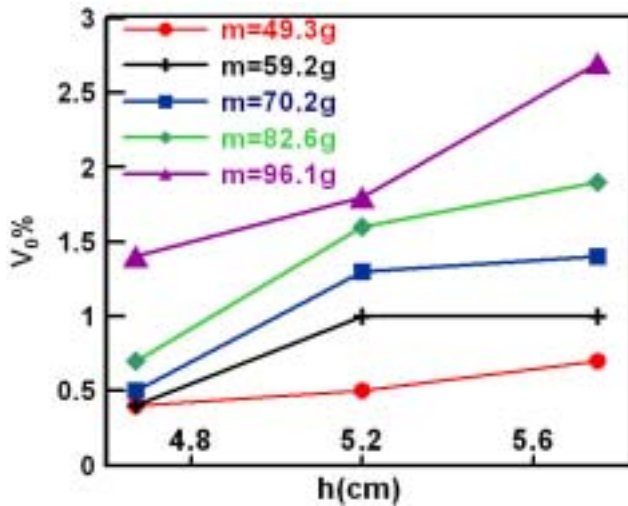
計算結果如表四所示

表四 V_0 、 U_2 之測量值與誤差百分率

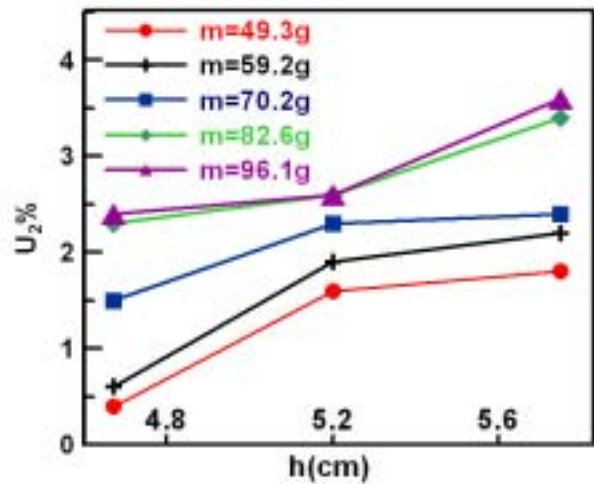
r(cm)	h(cm)	t_A (s)	V_0 (cm/s)	t_B (s)	U_2 (cm/s)	V_0 %	U_2 %
1.00	5.75	0.023	86.3	0.032	44.4	0.7	-1.8
	5.20	0.024	81.8	0.034	42.3	0.5	-1.6
	4.67	0.026	77.3	0.035	40.5	0.4	-0.4
1.10	5.75	0.025	86.4	0.028	50.4	1.0	-2.2
	5.20	0.027	82.1	0.030	48.0	1.0	-1.9
	4.67	0.029	77.1	0.031	46.0	0.4	-0.6
1.20	5.75	0.028	86.7	0.025	56.4	1.4	-2.4
	5.20	0.029	82.2	0.027	53.6	1.3	-2.3
	4.67	0.031	77.2	0.028	51.1	0.5	-1.5
1.30	5.75	0.030	87.0	0.023	61.9	1.9	-3.4
	5.20	0.032	82.3	0.024	59.2	1.6	-2.6
	4.67	0.034	77.2	0.025	56.2	0.7	-2.3
1.40	5.75	0.032	87.5	0.021	67.6	2.7	-3.6
	5.20	0.034	82.3	0.022	64.9	1.8	-2.6
	4.67	0.036	77.6	0.023	61.5	1.4	-2.4
平均百分誤差						1.2	-2.1

四、測量值的誤差百分率與高度 h 及小圓柱質量 m 的關係圖：

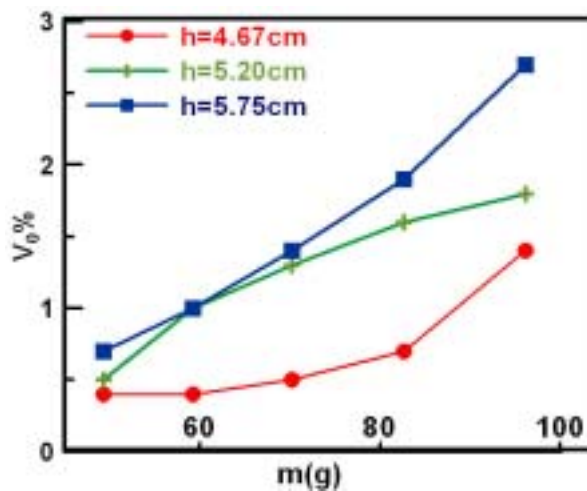
由表四的數據，可製成圖九至圖十二之關係圖：



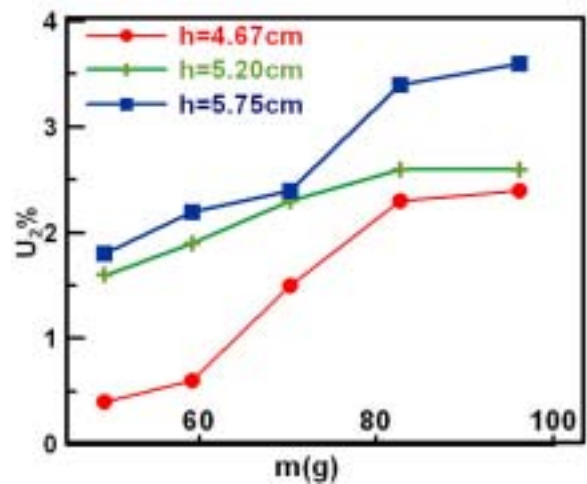
圖九 V_0 之百分誤差與高度關係圖



圖十 U_2 之絕對百分誤差與高度關係圖



圖十一 V_0 之百分誤差與小圓柱質量關係圖



圖十二 U_2 之絕對百分誤差與小圓柱質量關係圖

柒、誤差分析及結論

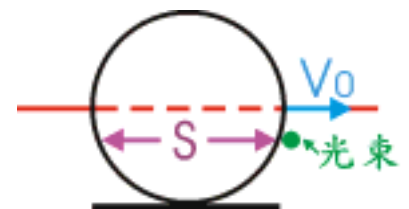
一、 誤差分析：

(一) 由表四，知 V_0 的平均百分誤差僅為 1.2%，甚為理想。

但測量值為何都稍大於理論值？其原因可說明如下：這是因為光電計時器的光束沒有正確對在小圓柱質心的運動直線上，如圖十三所示，故光電計時器所測得的時間 t_A ，實為 s 的距離通過光束的時間，而我

們以 $V_0 = \frac{2r}{t_A}$ ，當然就會偏大。

(二) 在圖九、十中可見得 V_0 與 U_2 對同一質量的小圓柱，有高度越高百分誤差越大的趨勢；在圖十一、十二中可見得 V_0 與



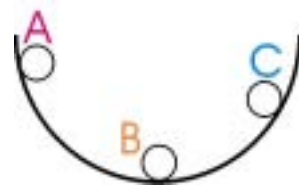
圖十三 光電計時器 A 的高度偏低了



圖十四 系統的微小傾斜效應

U_2 對同一高度的小圓柱，也有質量越大百分誤差越大的趨勢。這是因為小圓柱滾到碗的右側時，系統重量與浮力造成的力偶矩，會使系統順時針方向傾斜，見圖十四所示，致造成系統運動的微小不穩定。小圓柱的質量 m 愈大，在愈大的高度 h 滾下時，會有較大的傾斜效應，致使測量值的百分誤差趨大。

- (三)小圓柱在碗中滾動時，有時會與軌道兩側輕微擦撞，而造 成力學能的損失。見圖十五所示，測量 U_2 時小圓柱在軌道中的路程(A-B-C-B)，大約是測量 V_0 時小圓柱路程(A-B)的三倍，小圓柱與碗壁擦撞的機率較高，故 U_2 的誤差百分率(-2.1%)稍大於 V_0 的誤差百分率(1.2%)，且由於能量的損失，故 U_2 之誤差百分率為負值。



圖十五 小圓柱在
碗中滾動的路程

二、結論：

- (一)由肆、理論探討一 知，小圓柱在圓弧面上或在水平面上作純滾動時，兩者的運動公式完全是一樣的，即

$$V_0 = r\omega \quad (14)$$

其中 V_0 為球心對地之速度， r 為小圓柱之半徑， ω 為小圓柱自轉的角速度。

- (二)由表二知，小圓柱與碗軌道間的靜摩擦係數 $\mu_s = 0.83$ ，小圓柱在軌道上作純滾動時的最大斜角 $\theta_m = 61^\circ$ ，而我們所設計碗軌道其最大斜角僅為 30° ，故本實驗中的小圓柱確作純滾動而絕不會發生滑動現象。

- (三)使用傳統的方法無法測量小圓柱與碗面間的最大靜摩擦力，因對小圓柱施力時，它就滾動了。今使用圖五的裝置，即可順利測得 f_s 與 μ_s 了。

- (四)表四實驗數據中，打有 * 記號者為最佳數據， V_0 與 U_2 的百分誤差絕對值皆為 0.4%，而其所有數據的平均誤差亦僅為 1.2% 與 -2.1%，可見公式(38)與(44)的理論值與測量值極為吻合。

- (五)承(四)之結論，一方面表示，我們把問題深入化（把純滑動改為純滾動）後，所推得的公式(38)與(44)為正確，另一方面表示，碗與小圓柱的運動關係可視為一種迎面彈性碰撞。

- (六)影響本實驗測量值準確度的因素有：

1. 置放光電計時器的位置正確否？
2. 小圓柱的質量不可太大，且小圓柱的運動範圍不可離碗底較遠（即 h 較大），這會造成系統的不穩定。
3. 小圓柱在碗中滾動時不可碰撞到碗壁，致造成能量的損失。

捌、展望

在伍、實驗設計七中，雖然將三個光電計時器緊密並列，但它們之間仍有約 1cm 的間隔，所以測量 U_2 的位置能可能有些誤差。若能在碗上裝一調頻器，使發出單一頻率的聲波，在碗運動延線方向置一測頻器，並記下全程的頻率變化。則可由都卜勒效應

公式計算出全程的碗速。其中碗速的最大值即為 U_2 。

玖、參考資料

- 一、林明瑞 物質科學物理篇（下）南一書局（92年出版，第106頁~107頁）
- 二、張仁甫、張仁昌 高中物理（2）建宏出版社（84年2月最新版 第7-86~7-90頁）
- 三、HALLIDAY/RESNICK/WALKER 黃崢瑜等編譯 物理（上）全華科技圖書（91年出版 第12-2~12-6頁）
- 四、ROBERT A.BECKER Introduction to Theoretical Mechanics 亞東書局（第206頁）
- 五、感謝國立中正大學物理學系 梁贊全 副教授在「圓弧面上的純滾動公式」之指導。

拾、附錄一理論公式的詳細推演過程

一、滾下的小圓柱獲得之初速 V_0 ：

$$mgh = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \quad (35)$$

$$V_0 = r\omega_0 \quad (36)$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 \quad (37)$$

由(36)、(37)代入(35)得

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{V_0^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{2}mV_0^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ gh &= \frac{3}{4}V_0^2 \\ \Rightarrow V_0 &= 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \end{aligned} \quad (38)$$

二、小圓柱與碗完成一次迎面彈性碰撞的速度公式：

$$mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}MU_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 \quad (39)$$

$$V_2 - U_2 = r\omega_2 \quad (40)$$

$$mV_0 = mV_2 + MU_2 \quad (41)$$

由(41)式得

$$V_2 = V_0 - \frac{M}{m}U_2 \quad (42)$$

將(42)代入(40)得

$$\omega_2 = \frac{V_0 - \frac{M+m}{m}U_2}{r} \quad (43)$$

由 (37)、(42)、(43) 代入 (39) 得

$$\begin{aligned}
 mgh &= \frac{1}{2}m \left(V_0 - \frac{M}{m}U_2 \right)^2 + \frac{1}{2}MU_2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \left(\frac{V_0 - \frac{M+m}{m}U_2}{r} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m \left(V_0^2 - \frac{2M}{m}V_0U_2 + \frac{M^2}{m^2}U_2^2 \right) + \frac{1}{2}MU_2^2 + \frac{1}{4}mr^2 \left[\frac{V_0^2 - \frac{2(M+m)}{m}V_0U_2 + \frac{(M+m)^2}{m^2}U_2^2}{r^2} \right] \\
 &= U_2^2 \left[\frac{1}{2}M + \frac{M^2}{2m} + \frac{(M+m)^2}{4m} \right] + U_2 \left[-MV_0 - \frac{(M+m)V_0}{2} \right] + \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{mV_0^2}{4}
 \end{aligned}$$

將上式中之 mgh 移到等號右邊，並利用(38)式消去 h 可得

$$0 = U_2^2 \left[\frac{1}{2}M + \frac{M^2}{2m} + \frac{(m+M)^2}{4m} \right] + U_2 \left[-MV_0 - \frac{(m+M)V_0}{2} \right]$$

在第一次碰撞期間，碗皆被加速行進，故 $U_2 \neq 0$ ，

所以，

$$0 = U_2 \left[\frac{1}{2}M + \frac{M^2}{2m} + \frac{(m+M)^2}{4m} \right] + \left[-MV_0 - \frac{(m+M)V_0}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \therefore U_2 &= \frac{MV_0 + \frac{(m+M)V_0}{2}}{\frac{1}{2}M + \frac{M^2}{2m} + \frac{(m+M)^2}{4m}} = \frac{4mMV_0 + 2m(m+M)V_0}{2mM + 2M^2 + m(m+M)^2} \\
 &= \frac{2mV_0[2M + (m+M)]}{2M(m+M) + (m+M)^2} = \frac{2mV_0[2M + (m+M)]}{(m+M)[2M + (m+M)]} \\
 &= \frac{2mV_0}{m+M}
 \end{aligned} \tag{44}$$

將(44)代入(42)可得

$$\begin{aligned}
 V_2 &= V_0 - \frac{M}{m} \times \frac{2mV_0}{m+M} = V_0 \left[1 - \frac{2M}{m+M} \right] = V_0 \frac{m+M-2M}{m+M} \\
 &= \frac{m-M}{m+M} V_0
 \end{aligned} \tag{45}$$

評語

彈性碰撞牽涉動量、能量守恆，是物理重要基本概念的應用，作者以重力位能和動能的交換，取代一般以彈力位能和動能間交換的彈性碰撞問題使學生能以不同的角度看類似的問題，頗具創意。利用純滾動不耗散能量的原理來構思問題，顯示作者對相關問題有深入的了解。另驗證實驗的實驗設計亦相當生動，並可獲得甚佳的實驗數據，是件好作品，少部份的理論分析，似超出學生的能力範圍。