

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

物理科

科別：物理科

組別：高中組

作品名稱：先聲奪人——從共鳴管到共振子

關鍵詞：赫爾姆霍茲共振子、駐波、共振

編號：040109

學校名稱：

高雄市立高雄女子高級中學

作者姓名：

江文馨、林佳燕、陳怡文、陳怡雯

指導老師：

邱崑山、胡玉傳



摘要

本實驗利用音效處理軟體混合各頻率 $\sin$ 波，作為強迫共振系統聲源，測出容器的共振頻率，發現圓柱形的窄頸容器具有一系列泛音，但其中的基音頻率變化卻符合赫爾姆霍茲共振子的理論趨勢，顯示系統的共振同時具有駐波及共振子的性質。進一步測量瓶內各點的振幅發現其聲波共振的方式與共振子有相當的共通性，卻也有駐波的存在。

壹、研究動機

一般管樂器（如：簫、笙等）的發聲，是利用管內不同長度空氣柱振動所產生的駐波；而嘴唇貼於空燒瓶吹氣亦能發出聲響，此時音高的決定則可依據赫爾姆霍茲（Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz）共振子。不同於一般的駐波共振模式，赫氏共振子理論中，將瓶身大直徑的部分視為一彈性體，而其上瓶頸部分的空氣，則相當於一具質量的活塞，受彈性體影響而行簡諧振動。

共振子產生的前提為以上假設的理想狀況，然而實際容器的振動情形較複雜，未必能完全以共振子理論解釋其振動，故我們選擇改變容器結構，設計實驗，探討並比較共振子與一般熟知的駐波共振模式對容器中聲波共振產生的影響。



此圖摘自 Helmholtz Resonator，Helmholtz 著
Die Lehre von den Tonempfindungen（1885）

貳、研究目的

- 一、較不同容器（玻璃燒瓶及羽球筒製成之羽球瓶）的頻譜差異
- 二、了解羽球瓶結構對共振點頻率分布的影響
- 三、以球模型公式探討容器結構對基頻的影響
- 四、頸長修正項的探討
- 五、以另一較寬的容器探討修正項的變化
- 六、測量不同位置的壓力振幅以了解聲波的共振情形
- 七、以微觀角度探討羽球瓶的共振情形並以實驗所得結果加以印證

參、研究器材和設備

- 一、喇叭
- 二、聲音接收器（麥克風）
- 三、音訊放大器
- 四、CoolEditor pro 音效處理軟體
- 五、各式長度羽球瓶、各式長度與口徑壓克力圓筒
- 六、各式燒瓶（不同體積、頸長、口徑）、餅乾盒

肆、理論探討

一、駐波理論：

在一容器中，入射波與反射波若可疊加，共振系統即會具駐波性質。共鳴管模型會產生標準的駐波，其具有多個明顯的共振點，且共振頻率呈 1：3：5：7...的線性變化。

二、赫爾姆霍茲共振子理論：

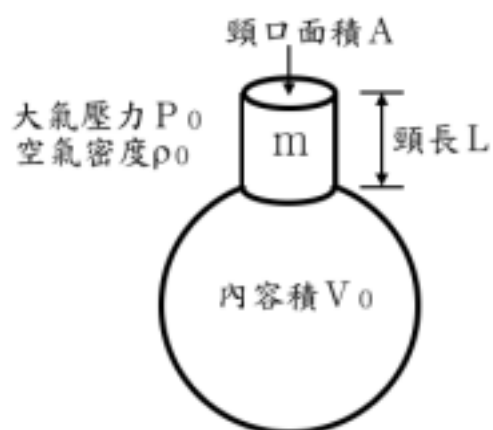
共振子為只具有「一個」共振頻率的共鳴體，反映在頻譜（spectrum）上，會出現單一而明顯的共振點突起。當聲波從窄管（頸部）行進到豁然開闊的共鳴腔時，絕大部分會反射回頸部，猶如共鳴管開口端的管口情形一樣，為了解釋「一個共振頻率」，而有球模型的提出。球模型假設聲波完全沒有通入瓶內，故可將頸部視為一個具質量的活塞，而瓶身部分則相當於彈性體，量化得到理想值。

三、球模型理想公式：

1. 設大氣壓力為 P_0 ，空氣密度為 ρ_0 。
2. 容器的內部氣體容積為 V_0 、頸長 L 、頸口面積為 A 。

則瓶頸部分的空氣質量為 $m = \rho_0 A L$ 。

3. 當瓶頸部份氣體 m 向瓶體方向移動了 x ，於是瓶的內部氣體容積就變為 $V = V_0 - Ax$
若將內部氣體視為絕熱系統，則 $P V^\gamma = \text{常數}$



可算出此時瓶內的空氣壓力為
$$P = \frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{Ax}{V_0}\right)^\gamma} \dots\dots\dots (1)$$

與 V_0 相比， Ax 很小的，故由多項式定理，可得：

$$P = P_0 \left(1 + \frac{A\gamma x}{V_0} \right) \dots\dots\dots (2)$$

根據 (2) 式，瓶內外的空氣壓力差即為 $P - P_0 = \frac{P_0 A \gamma x}{V_0} \dots\dots\dots (3)$

這個壓力差，通過面積 A 作用在 m 上，故可列出 m 的運動方程式

$$m\vec{a} = \rho_0 A L \vec{a} = -\frac{P_0 A \gamma}{V_0} \vec{x} \dots\dots\dots (4)$$

上式為簡諧運動的標準式，由公式解可得周期 $T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_0 V_0 L}{P_0 A \gamma}}$

故理想頻率為 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_0 A \gamma}{\rho_0 V_0 L}}$ ，其中 $\sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho_0}}$ 為聲速 v ，故 $f = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0 L}}$

可知影響共振頻率的變因為：體積 (V_0)，頸長 (L)，頸部口徑 (A)。

四、邊界效應 (end effects)

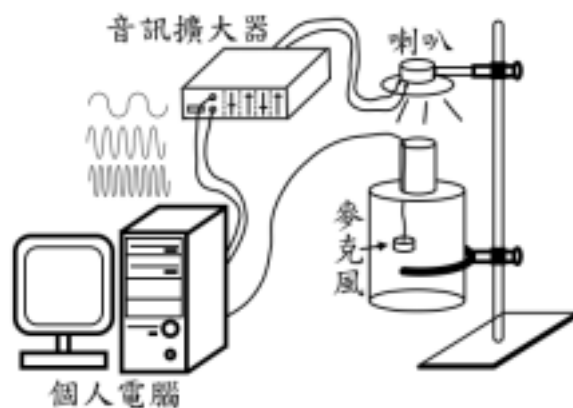
在一般的圖示上，空氣活塞都被視為一個圓柱形，整齊地終止於頸部的兩端，這樣的假設太過簡單。實際上，還有部分的氣體會隨著整塊氣體活塞運動，需增加的頸長應為口徑的 0.8 倍，其中向瓶外增加 0.3 倍口徑，向瓶內增加 0.5 倍口徑。此即為所謂的「邊界效應」

伍、實驗

一、比較各共振體的頻譜差異

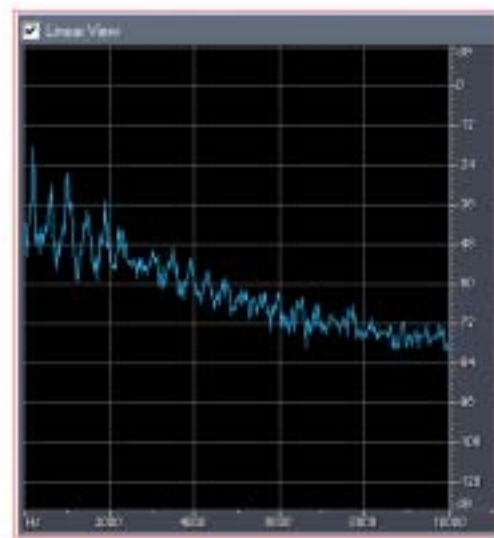
(一) 實驗方法：

1. 利用 Cooleditor pro 音效處理軟體將相同振幅、頻率 50Hz~1000Hz 的 sin 波混合，作為強迫共振的聲源。
2. 強迫共振的聲源由音效卡輸出，再經音訊放大器將訊號放大後驅策喇叭振動。
3. 電容式麥克風置於玻璃燒瓶及羽球筒製成之羽球瓶內，接收聲音並錄製成檔案。
4. 將聲音檔經 Cooleditor pro 音效處理軟體作頻譜分析，比較頻譜的差異。



(二)實驗結果：

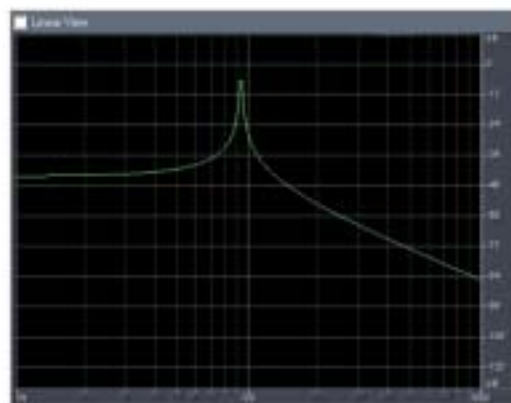
1. 一端開口之直筒羽球瓶的頻譜



管長：39.3cm

一端開口的直筒羽球瓶可視為共鳴管，由其頻譜可觀察出多個明顯的共振點，且共振頻率呈 1：3：5：7...的線性變化，是標準的駐波。

2. 玻璃燒瓶的頻譜

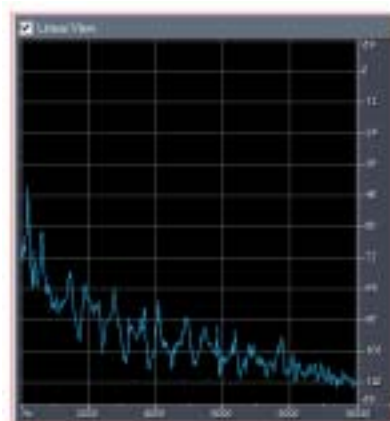


玻璃瓶：E.
自然頻率：93,276Hz



由其頻譜可觀察出單一而明顯的共振點，故玻璃燒瓶可視為共振子。

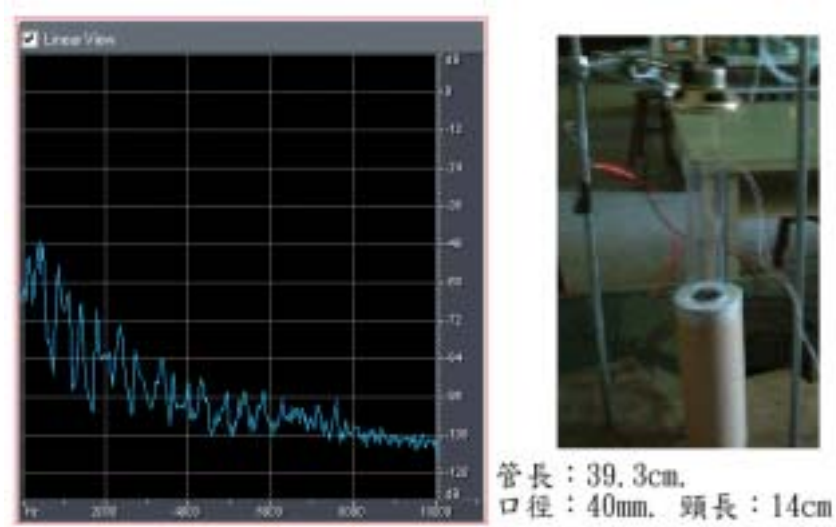
3. 一端封閉，一端加上有開口蓋子之無頸羽球瓶的頻譜



管長：39.3cm，口徑：45mm

測量此羽球瓶之頻譜，可觀察出類似駐波泛音的多個共振點，但其頻率不呈 1：3：5：7...的線性變化。

4. 一端封閉，一端加上某一有頸蓋子之羽球瓶的頻譜



此羽球瓶之頻譜變化情形與「一端封閉，一端加上有開口蓋子之無頸羽球瓶」類似。

(三)討論：

當直筒羽球瓶覆一有開口或有頸的蓋子，由頻譜顯示的不規則泛音變化，可知其共振具駐波性質，但已不為單純的駐波共振模式。

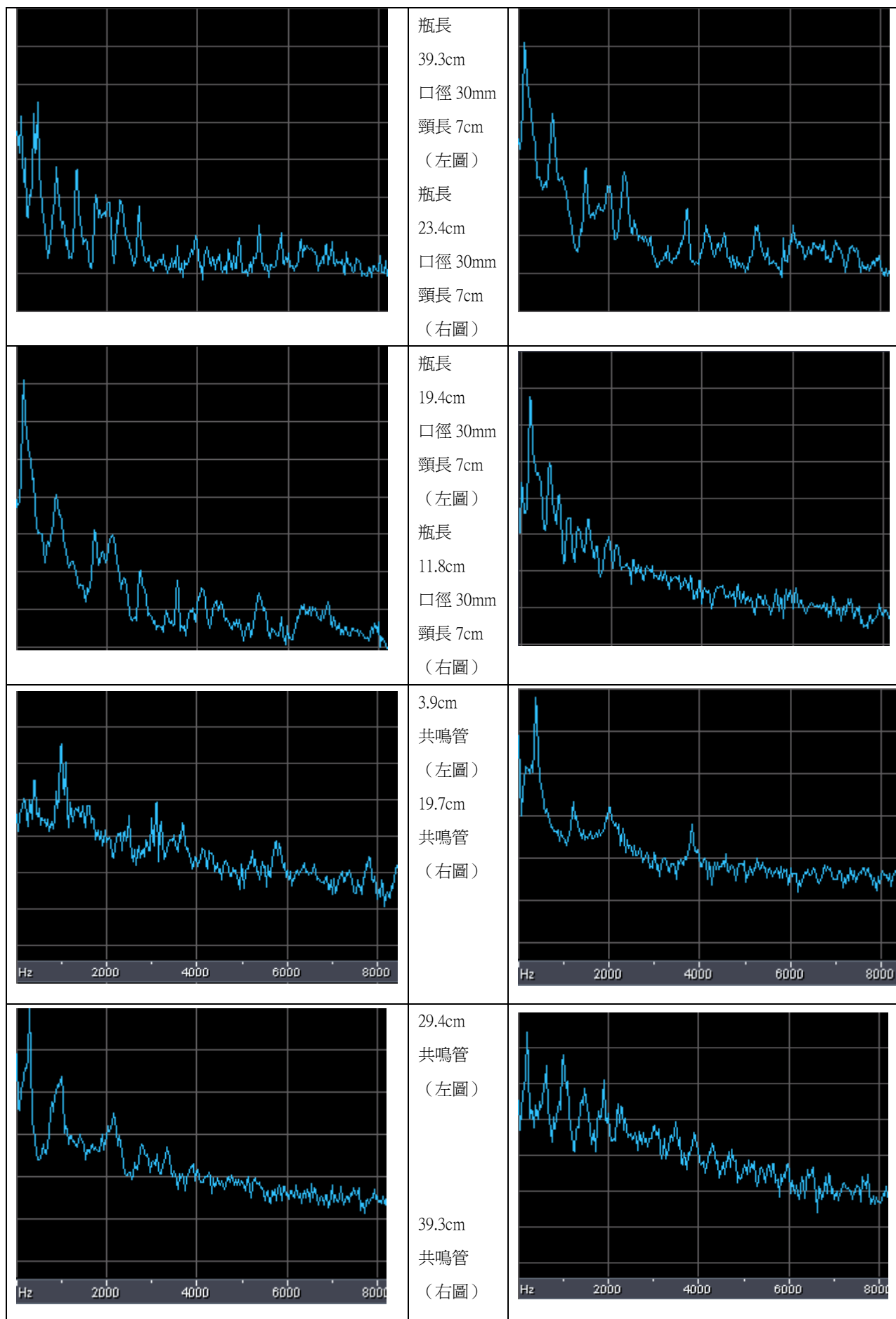
二、了解羽球瓶結構對共振點頻率分布的影響

(一)實驗方法：

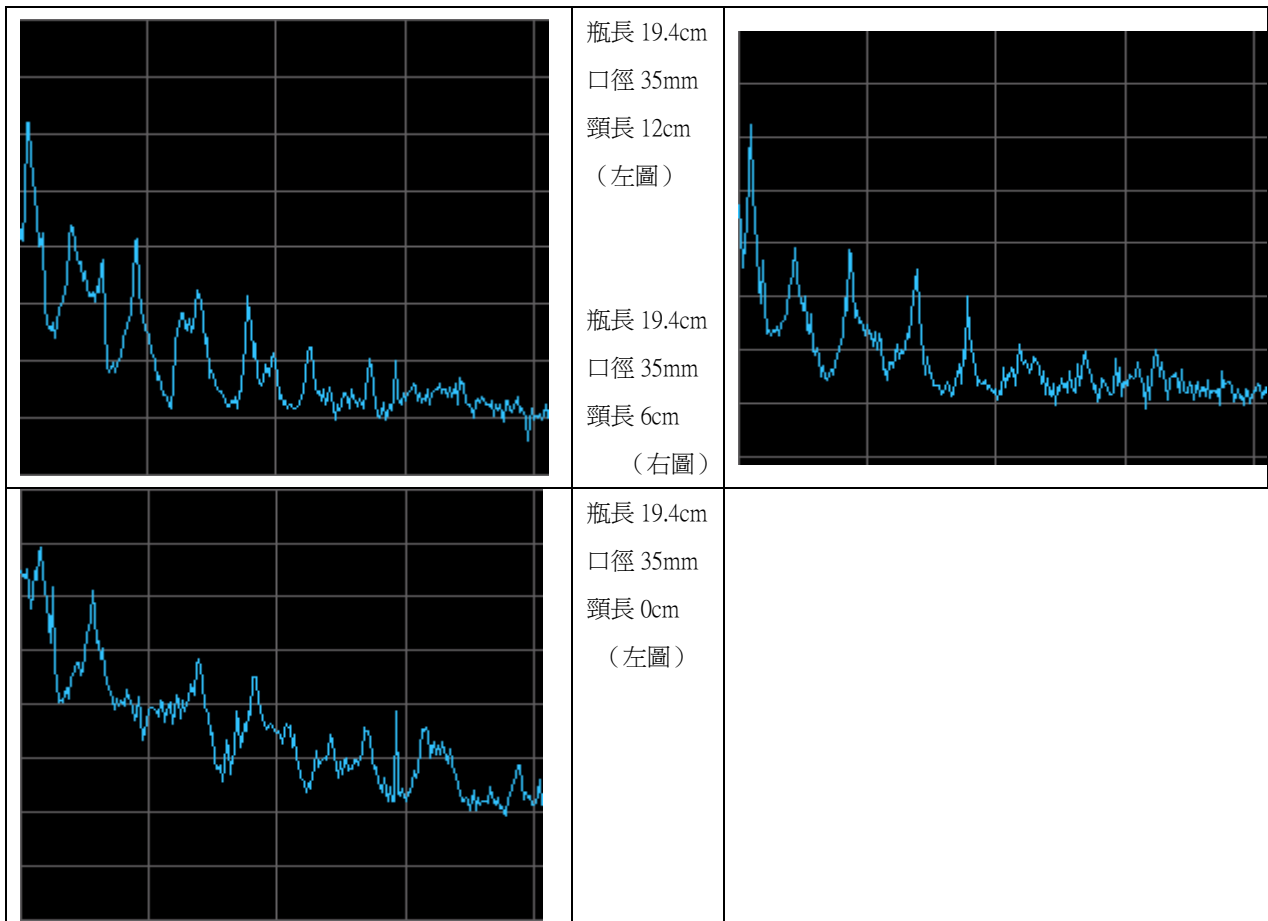
1. 取七種口徑（內徑 56.15mm、45.4mm、40.9mm、37mm、31.35mm、26.1mm、19.7mm）及十四種長度（1cm、2cm、3cm...10cm、12cm、14cm...18cm）搭配成的九十八支壓克力管作為頸部。再將羽球筒截成十種長度（3.9cm、7.9cm、11.8cm、15.7cm、19.7cm、23.4cm、27.2cm、31.3cm、35.2cm、39.3cm）作為瓶身。取不同瓶身與頸部的組合，成為九百八十支待測羽球瓶。
2. 以實驗一的方法取得諸羽球瓶的頻譜，同時測量不加蓋瓶身的頻譜作為對照，歸納羽球瓶結構對共振點頻率分布的影響。

(二)實驗結果：

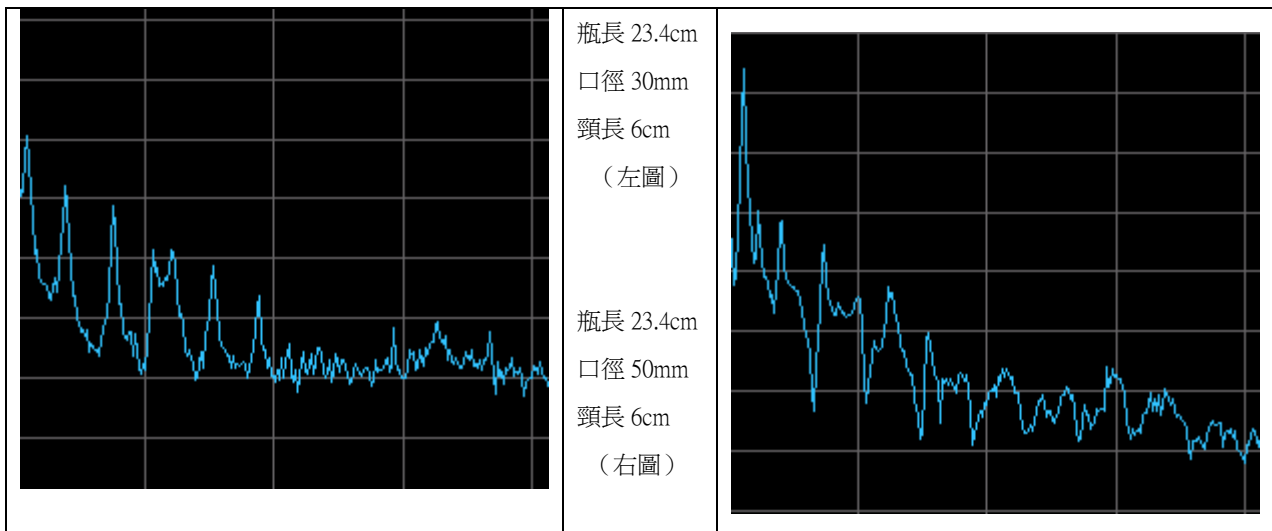
1. 瓶身長度的影響：瓶身短的瓶子（11.8cm）只有基音頻率有明顯的突起，隨著瓶長漸長，泛音漸出現明顯的突起。其中瓶長較短（19.4cm）時，泛音的頻率分布較疏且不具規則性，瓶身長瓶子（39.3cm）的泛音則會出現緊密而規律的分布，所得的頻譜與對照組的共鳴管十分相近。（頻譜中橫座標一格代表 2000Hz）



2. 頸長的影響：無頸長或頸長甚短時，所得的泛音共振較不明顯，頻率分布較疏且較無規律，頸長漸長則可看出明顯的共振點，頻率分布也較密。



3. 口徑的影響：口徑小者，泛音頻率的分布較疏。



4. 共振頻率的變化：同隻羽球瓶的泛音頻率大致會以固定倍數的方式出現，但不像共鳴管對照組那麼規律，且不同羽球瓶固定的倍數都不同。

(三)討論：

1. 瓶長的影響：羽球瓶頻譜隨瓶長的變化與共鳴管隨管長的變化相仿，顯示羽球瓶共振含有駐波模式。
2. 頸長的影響：頸長漸長時的頻譜變化與瓶長漸長時相仿，顯示駐波共振的不只有在於瓶身部分，也包含了頸部。
3. 口徑的影響：理論上駐波共振頻率受口徑的影響很小，但實驗結果顯示口徑對頻譜有顯著的影響，此顯示羽球瓶的共振仍受其他因素影響，不是單純的駐波共振。
4. 共振頻率的變化：同樣顯示羽球瓶的共振受駐波與駐波以外某共振模式的影響。另外，我們粗略分析羽球瓶的基音頻率，發現形成共振時的波長都比羽球瓶總長的四倍要長，且基頻與瓶長並不符合駐波共振的反比關係，然兩者約呈根號反比的趨勢卻與球模型公式相符！此暗示著我們有必要從共振子的角度對基頻加以分析。

三、以球模型公式探討容器結構對基頻的影響

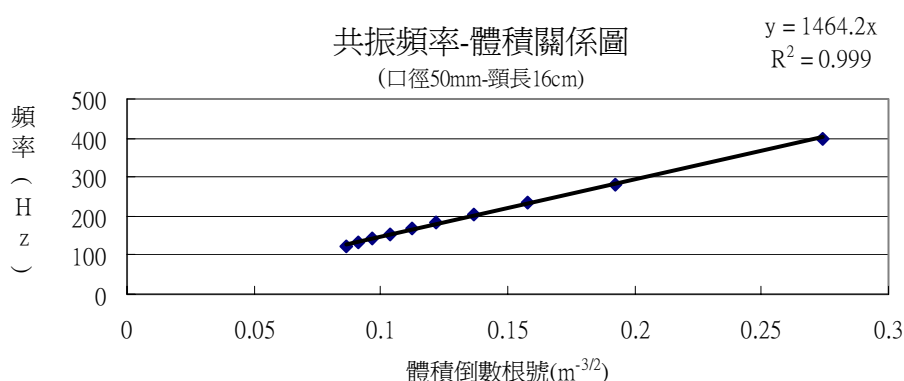
(一)實驗方法：利用實驗二所得頻譜，找出羽球瓶的基音並比較其共振頻率。

(二)實驗結果：如附表一

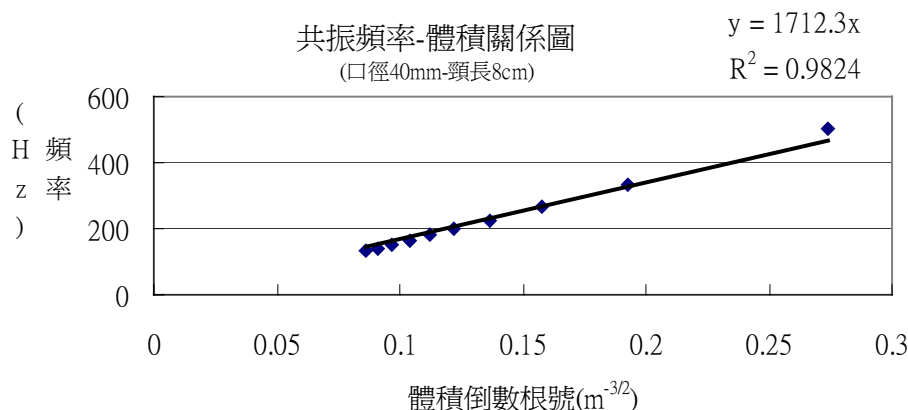
(三)討論：

1. 瓶身體積的影響

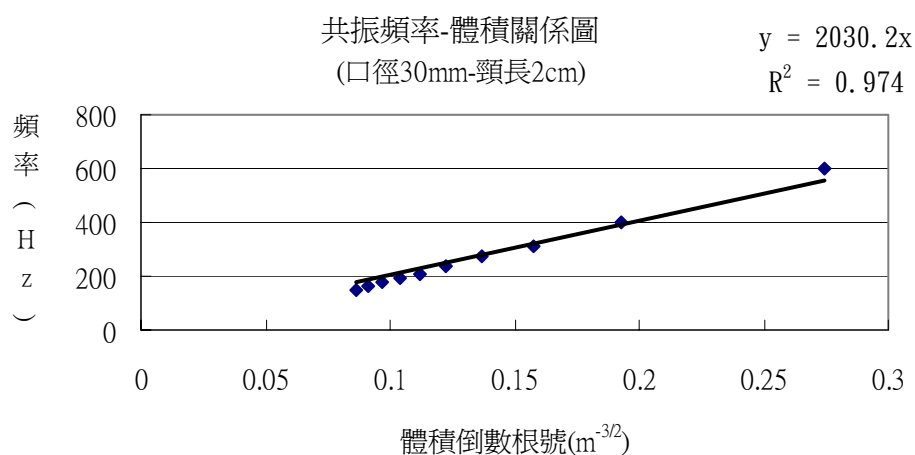
依據圖表 1、2、3，由實驗結果可知，容器體積越小（瓶長越短），其共振頻率越大，而體積倒數根號與共振頻率二者的變化呈線性關係，顯示與理想公式相符。



圖表 1



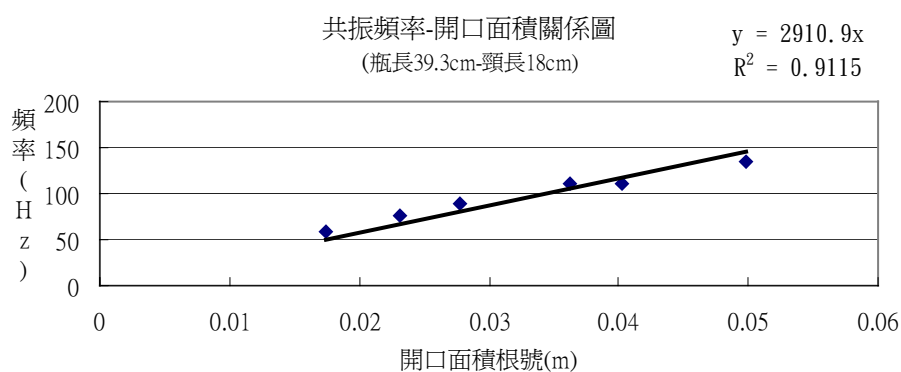
圖表 2



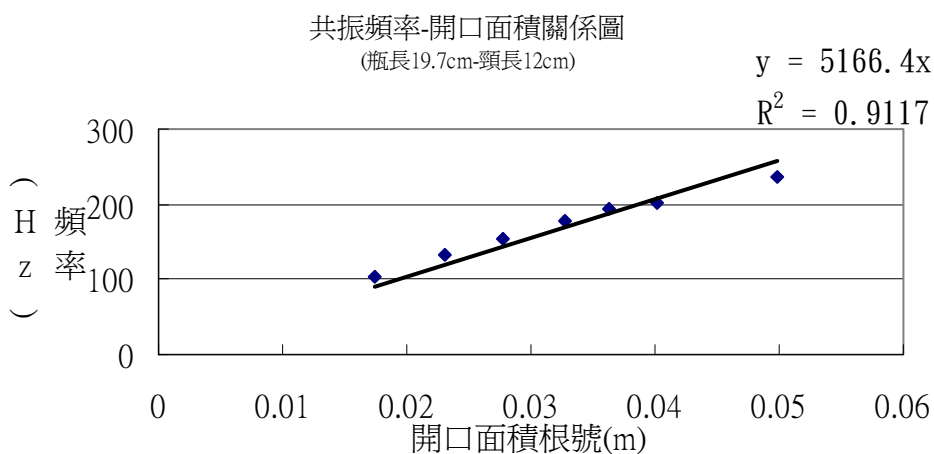
圖表 3

2. 口徑的影響

依據圖表 4、5，由實驗結果可知，口徑越大，瓶子的共振頻率越大，開口面積根號與共振頻率二者的變化呈線性關係，顯示與理想公式相符。



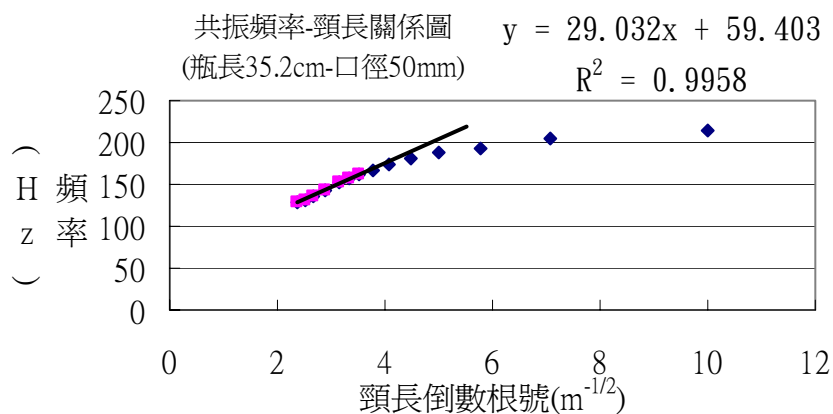
圖表 4



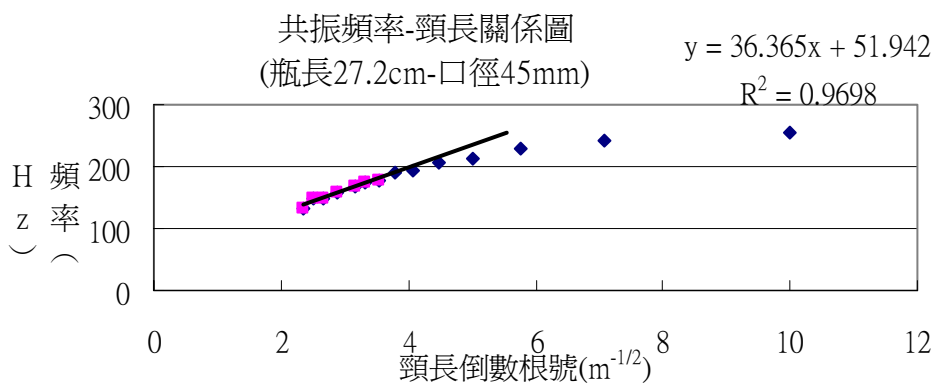
圖表 5

3. 頸長的影響

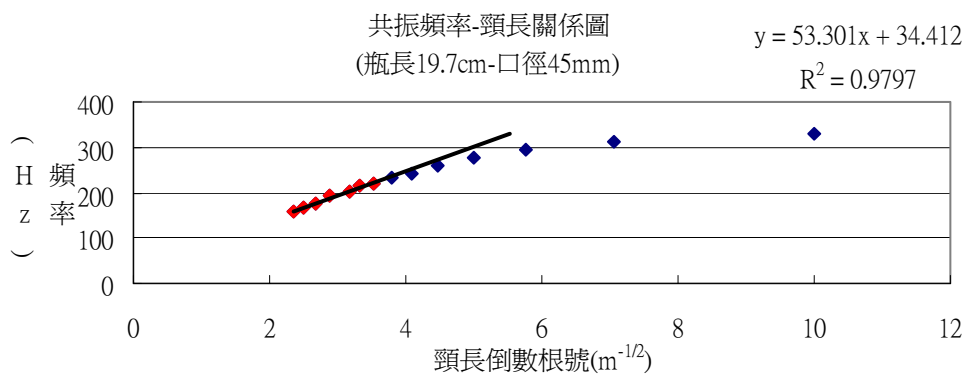
- (1) 依據圖表 6、7、8，由實驗結果可觀察出，頸長越短，則共振頻率越大；然而，依理想公式繪出頸長倒數根號-共振頻率的分布圖後發現，相較於開口面積根號、體積倒數根號與共振頻率的線性關係，頻率與頸長倒數根號較不具線性關係，但共振頻率變化仍為一平滑曲線。
- (2) 觀察所得數據後發現，當頸長較長時，共振頻率的變化與頸長倒數根號較具線性關係，而隨著頸長越短，二者間的變化關係則越不依循線性趨勢。



圖表 6



圖表 7



圖表 8

- (3) 共振子理論中已有「邊界效應」一說，針對理想公式中的頸長變因提出只與口徑有關的修正項值；依此說法，當頸長較長時，頸長修正項的影響較不顯著，故共振頻率變化較符合理想公式的線性趨勢，但隨著頸長漸短，頸長修正項的影響則越顯著，使得共振頻率較不依線性關係變化；對照以上實驗數據，亦可觀察出相同的結果，而下一階段的實驗便是頸長的修正。

四、頸長修正項的探討

(一)實驗方法：

由目的三的結果確定公式中頸長的部分應考慮有效長度 L_e 而非實際頸長 L

即 $L_e = L + L_c$ ，根據邊界效應的說法，不同頸長下的修正項 L_c 應為一固定值。

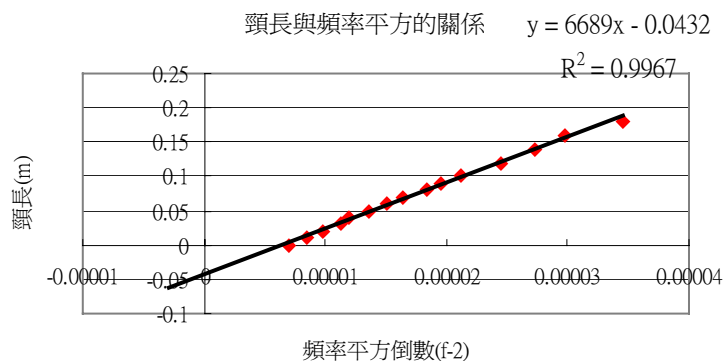
$$\text{由球模型公式 } f = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0(L + L_0)}}$$

$$\text{得 } \frac{1}{f^2} = \frac{4\pi^2 V_0}{v^2 A} (L + L_0) \quad \text{即 } L = \frac{1}{f^2} \frac{v^2 A}{4\pi^2 V_0} - L_0$$

故頸長對頻率平方反比的關係圖中，y 軸截距的負值即為頸長的修正項。

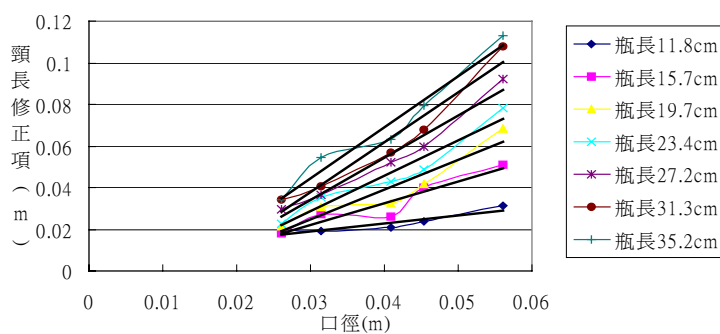
(二)實驗結果

- 共振頻率經過平方反比的處理後，出現了漂亮的線性關係，顯示同一支瓶子確實有一與頸長無關的固定修正項。



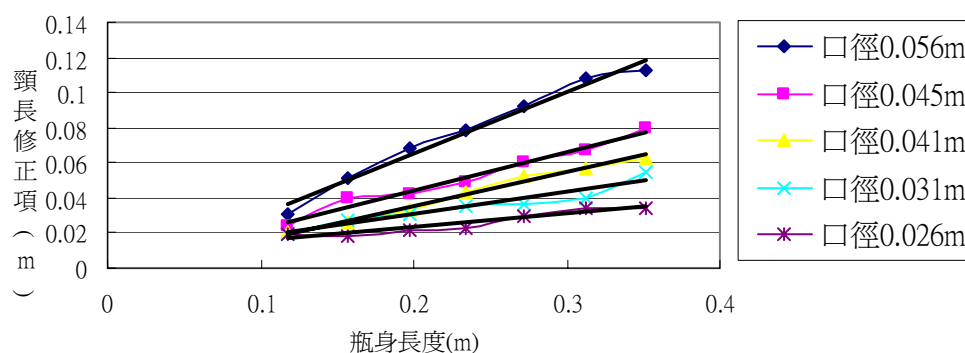
圖表 9

- 頸部口徑對修正項的影響



圖表 10

3.瓶身長度對修正項的影響



圖表 11

(三)討論

1.有效頸長

無頸長羽球瓶的共振頻率經過平方反比的處理後，仍出現在原有的線性趨勢上，顯示其仍具有一有效頸長，且此長度即為「邊界效應」的修正長度。頸長部份也可以找出確切的修正項，表示羽球瓶的基頻變化趨勢幾乎與共振子理論相符，即此共振模式對羽球瓶的影響很大。

2.頸部口徑對修正項的影響

固定瓶身長度，顯示頸長的修正長度確實與口徑呈線性關係，但頸長修正項並不為文獻中提到的 0.8 倍口徑，此倍數會隨瓶長增加而增加。

3.瓶身部分對修正項的影響

(1)固定口徑時，發現頸長的修正項與瓶身長度成線性關係，且口徑越大者，其修正項隨瓶身長度的變化越大，線性關係也越明顯。

(2)邊界效應中都只以口徑加以修正，亦即修正項只與口徑有關，然而實驗結果顯示頸長的修正長度也會受瓶身的影響。為辨別造成影響的因素是瓶身長度或瓶身體積，我們改用較寬的餅乾盒作為瓶身，進行下一階段的實驗。

五、以另一較寬的容器探討修正項的變化

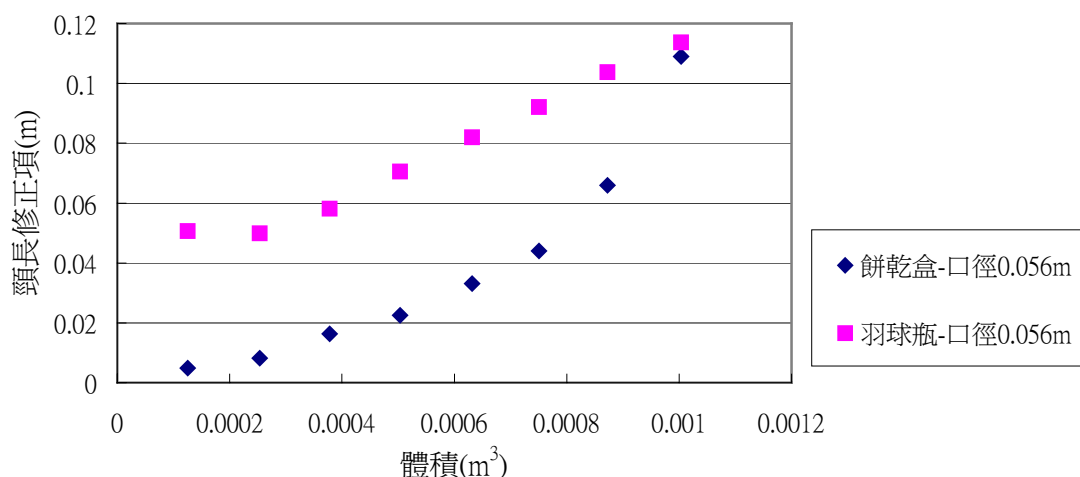
(一)實驗方法：

1. 餅乾盒以加水方式改變瓶身氣體體積（使其與 3.9cm、7.9cm、11.8cm、15.7cm、19.7 cm、23.4 cm、27.2 cm 的羽球瓶體積相等）做為不同的瓶身，另選擇 56.15 mm、40.9 mm、26.1 mm 的口徑搭配 0 cm、4 cm、8 cm 的長度做為九種頸部。取不同瓶身與頸部的組合成為待測的瓶子。
2. 同目的三，找出基頻，並依據球模型公式比較頻率變化與結構的關係。
3. 以目的四的方法找出頸長修正項，並比較其變化情形。



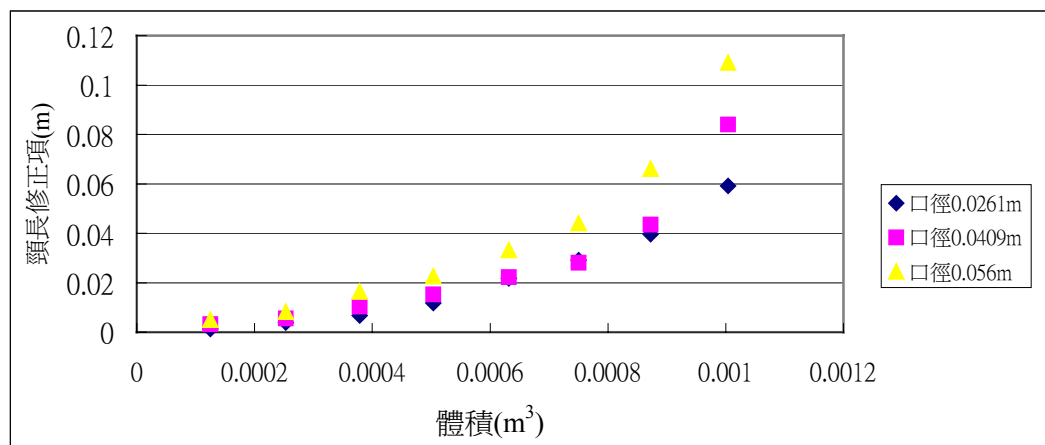
(二)實驗結果：

1. 頸長修正項與體積的關係(餅乾盒與羽球瓶)



圖表 12

2. 頸長修正項與體積的關係(不同口徑的餅乾盒)



圖表 13

(三)討論：

1. 比較共振頻率與容器結構之關係，可得出與先前羽球瓶實驗相類似的結果，其共振頻率與開口面積根號、體積倒數根號均呈現良好的線性關係，頸長的部分也可以得出修正項，故可知餅乾盒的振動亦具有部分共振子性質。
2. 比較相同體積下羽球瓶與餅乾盒所得到的修正項，發現兩者的修正項儘管趨勢均隨體積漸大而增大，但值並不相同，瓶身空氣柱較短的餅乾盒，其修正項皆較小，可見影響修正項大小的因素應為瓶身長度。

六、測量不同位置的壓力振幅以了解聲波的共振情形

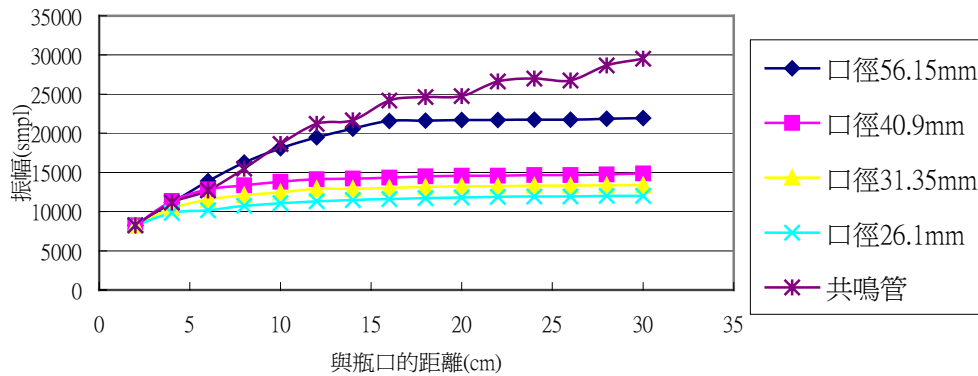
(一)實驗方法

1. 利用 Cooleditor pro 音效處理軟體輸出待測瓶共振頻率的單頻 sin 波。
2. 固定瓶口（或瓶、頸交界面）與喇叭的相對位置，將電容式麥克風置於瓶內距瓶口或瓶、頸交界面 2cm、4 cm、6 cm...30 cm 的位置，測量各點的振幅，做出一隻瓶子的振幅—位置曲線。

3. 量測不同口徑（無頸瓶長 31.3cm，口徑 26.1mm、31.35mm、40.9mm、56.15mm），不同瓶長（無頸口徑 56.15mm，瓶長 39.3cm、31.3cm、23.4cm、15.7cm、11.8cm），不同頸長（瓶長 31.3cm 口徑 56.15mm，頸長 0cm、1cm、3cm、5cm、7cm）等三組瓶子，另外測量 31.3cm 的羽球筒共鳴管為對照組。

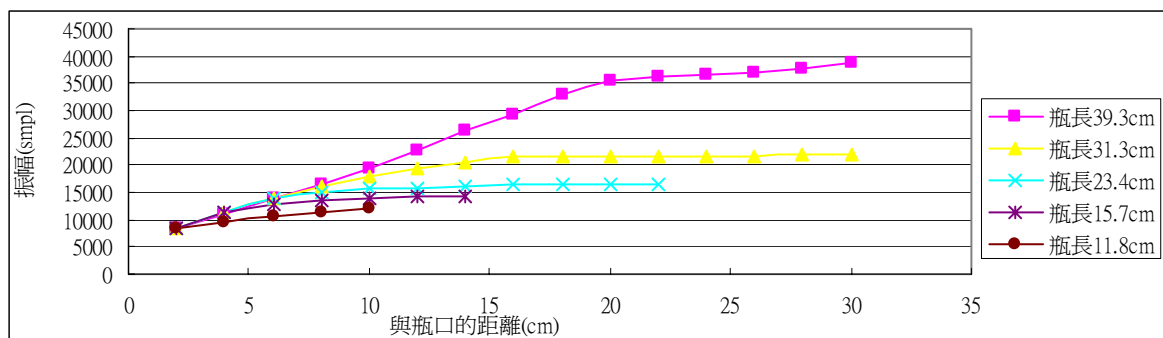
(二)實驗結果

1. 不同口徑的振幅-位置曲線圖



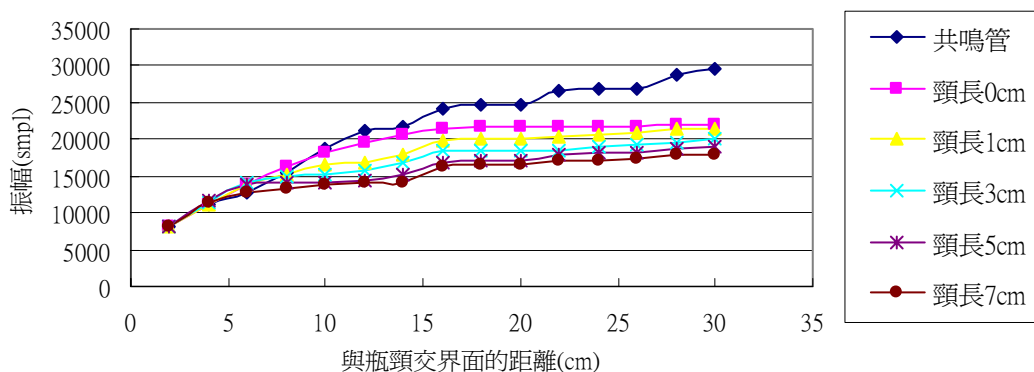
圖表 14

2. 不同瓶長下的振幅-位置曲線



圖表 15

3. 不同頸長下的振幅-位置曲線



圖表 16

(三)討論

1.兩種理論模式與羽球瓶的比較

電容式麥克風偵測到的是壓力振幅，故共鳴管形成共振時越接近瓶底的振幅會越大。而共振子形成共振時，因為大部分聲波會在頸部與瓶身的交界面反射，故可用球模型的假設將兩部分氣體視為分離的，其中相當於彈性體的瓶身部分幾乎可視為封閉的。當頸部氣體活塞振動壓縮此封閉的部分，瓶內的壓力變化應為均勻分布，即在各點應可以測到等大的振幅。實驗結果發現，所有的瓶子在靠近瓶口一段的壓力振幅都會出現類似共鳴管的變化情形，但較靠近瓶底部分的振幅卻幾乎為定值。

由瓶內壓力非定值可知，必有聲波進入瓶內，顯然此為造成羽球瓶出現駐波諸共振點的原因，且此時共振子的假設就出現問題，畢竟聲波可以進入瓶內就不能將頸部與瓶身視為完全分離的兩部分；但靠近瓶底部分的振幅幾為定值且羽球瓶內壓力變化明顯小於駐波，顯示球模型的假設在此具有一定的影響性。可知羽球瓶的共振會部分符合兩種理論的形成條件。

- 2.不同口徑的羽球瓶：口徑大者振幅變化較大，而振幅為定值的部分較短，顯示此時有較多的聲波進入瓶內，即大口徑羽球瓶內的共振情形較近共鳴管。
- 3.不同瓶長的羽球瓶：瓶長較長時會出現明顯的壓力變化，顯示長瓶子內部的駐波共振情形較明顯。
- 4.不同頸長的羽球瓶：由其振幅轉折點位置相近可知，頸長對進入瓶內聲波之多寡的影響不明顯。

七、以微觀角度探討羽球瓶的共振情形並用實驗所得結果加以印證

(一)以實驗所得的結果推論聲波在羽球瓶內的共振情形

文獻中論及聲波在頸部與瓶身交接面（界面）的部分透射部分反射時，將之與共鳴管開口端的聲波會反射回管內的情形類比，卻沒有提出原因。但可以確定聲波在頸部會以單向平面音波傳遞，而在瓶身不受限制的部分則會以單向球面音波傳遞，顯然就是這樣不同的傳遞方式造成界面產生部分透射部分反射的現象。

入射聲波行進到界面時，多數會反射回頸部，使部分頸部氣體行球模型假設的活塞簡諧振動，但氣體不是在界面就反射，而會在瓶中行經一段距離才反射，此距離此使得羽球瓶內出現一段壓力分布不均的振動空氣柱，羽球瓶的共振頻率由此空氣柱共振決定，可視為羽球瓶共振的有效空氣柱。此與修正頸長的不同處在於，空氣柱的壓力分布是不均勻的，而修正頸長卻仍假設其為一活塞，但兩者間應呈正變關係。

有效空氣柱的範圍與長度無法明確的標出，卻會受羽球瓶結構的影響。頸部口徑越小則兩介質差異越大，界面會越接近「共鳴管開口端」的情形，即越少聲波可以透過瓶口，使有效空氣柱長度減小；瓶長越長則聲波在瓶內的傳遞越穩定，可形成的有效空氣柱也較長；因為有效空氣柱為頸長加上聲波在瓶內行經的距離，故頸長會直接影響有效空氣柱的長度，但對聲波在瓶內行經的距離幾乎沒有影響，因為反射的過程主要與口徑有關，只有頸長過短時會因為入射波過於紊亂而使得有效空氣柱的振動較不規律。

(二)以實驗結果驗證有效空氣柱推論

1. 口徑

口徑越大時，頻譜上出現較密的泛音頻率顯示對應的有效空氣柱長度較大；修正項隨口

徑增加而增加的趨勢也可證實此結果；另外，直接測量振幅－位置曲線也可以觀察到，大口徑瓶子其壓力振幅不為定值部分的長度較大。

2. 瓶長

瓶長較長時，泛音頻率呈現緊密而規律的分布，顯示此時振動的有效空氣柱較長且較穩定；修正項隨瓶長增加的趨勢也為此結果提出印證；我們直接測量不同瓶長的振幅－位置曲線，也發現長瓶子內部壓力不均的空氣柱長度較長。

3. 頸長

頸長較長時，較密的共振頻率分布與較明顯的共振點，都是有效空氣柱較長的結果；因為頸長幾乎不會對有效空氣柱在瓶身部分的長度產生影響，故修正項不隨頸長而變，且測得的振幅－位置曲線也顯示不同頸長下，振幅為定值部分的長度相近。

陸、結論

一、 與兩種理論的共振模式相比

由頻譜顯示的泛音可知羽球瓶的振動包含駐波模式，但諸共振點的頻率變化顯示其不為標準的駐波共振；分析羽球瓶基頻與結構的關係發現，其共振頻率與體積、頸部口徑的關係皆符合球模型的理想公式，亦可依據「邊界效應」得出一頸長修正項，而與共振子不相符的是，依據理論修正項只與口徑有關，但由羽球瓶求得的修正項亦與瓶長有關。

二、 以振幅所呈現的具體性質了解聲波共振的情形

進一步測量羽球瓶中的振幅-位置曲線後發現，會有聲波進入瓶身部分，形成羽球瓶的多個駐波泛音共振，使得球模型的假設「可將頸部與瓶身視為不連續的兩部分」不能成立；另外由振幅-位置曲線中可觀察出，近瓶底處仍有壓力振幅固定的一段，顯示多數聲波未到達瓶底，因而球模型的假設仍有其參考價值。

三、 有效空氣柱

羽球瓶共振時瓶內有一振動的空氣柱存在，其壓力隨位置的變化類似共鳴管，顯然即是此段空氣柱振動造成羽球瓶基音與泛音的共振，推論其形成的原因：進入羽球瓶內的聲波會受傳遞方式的改變而產生反射，但聲波並不會在界面完全反射，而是於瓶內行經一段距離才產生反射，造成有效空氣柱的存在。

四、 以實驗結果驗證有效空氣柱的推論

有效空氣柱的長度難以具體定義，但其顯然與頸長修正項呈正變關係，並且受羽球瓶結構的影響。口徑較大時，界面兩端差異較小，因而可透射的聲波較多；瓶長較長時，聲波於瓶內的傳遞則較穩定，此兩者皆會加強有效空氣柱的效應並使其長度較大；頸長儘管會直接影響有效空氣柱的長度，但對聲波在瓶內行經的距離幾乎沒有影響，因為反射的過程主要與口徑有關。

口徑越大，或是瓶長、頸長越長時，頻譜出現較密集的泛音顯示，有效空氣柱的長度確實與此三者呈正變關係，而修正項隨瓶長與口徑的漸大而增加，亦印證了此推論；另外從瓶子的振幅-位置曲線，可以明顯觀察出此「壓力變化似共鳴管」的有效空氣柱長度與羽球瓶結構的關係。

柒、參考資料及其它

- 一、 高中物理（一）（二）（三），南一出版社
- 二、 高中物理（一）（二）（三），龍騰文化出版
- 三、 酒井高男：力學的趣味實驗，凡異出版社，民 88
- 四、 蔡振家：泛音唱法的物理基礎，[http：//www.sciscape.org/articles/overtone](http://www.sciscape.org/articles/overtone)
- 五、 Fletcher N. Rossing T.D.（1991） The physics of musical instruments. Springer： New York
- 六、 Harris Benson：普通物理學，歐亞書局有限公司，民 81
- 七、 Jerry B. Marion：Classical Dynamics of Particles And Systems，狀元出版社，民 69
- 八、 Leo L. Beranek：噪音與振動控制，協志工業叢書出版股份有限公司，民 64

附表一 羽球瓶的共振頻率

瓶長 3.9	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	401.16	326.87	320.23		246.4	201.86	171.01
16	2.5	401.79	400.38	369.5	400.21	276.55	245.65	101.36
14	2.672612	420.78	400.95	400.49	398	317.51	304.32	294.9
12	2.886751	465.41	401.81	388.6	377.76	339.42	298.37	202.8
10	3.162278	511.64	401.71	400.28	400.23	364.23	328.44	290
9	3.333333	599.34	489.62	466.2	414.18	379.73	349.7	320
8	3.535534	600.42	500.46	500.6	500.52	415.71	364.13	301.34
7	3.779645	621.41	500.5	500.58	500.47	418.56	379.03	400.6
6	4.082483	621.41	500.5	500.58	500.47	418.56	379.03	400.6
5	4.472136	400.34	628.05	687.13	595.09	500.56	414.17	451.54
4	5	399.68	644.89	637.58	597.26	499.94	499.82	198.07
3	5.773503	399.63	715.2	704.95	640.5	600.28	501.38	416.16
2	7.071068	399.7	1052.1	979.6	767.95	600.19	600.2	400.24
1	10	999.98	400.13	399.62	599.34	600.48	600.26	563.69

瓶長 7.9	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	288.5	264.01	249.2		196.8	170.27	203.15
16	2.5	401.81	278.71	281.76	240.58	202.62	202.63	100.04
14	2.672612	331.29	306.53	279.21	317.51	219.17	201.01	232.9
12	2.886751	359.99	325.75	309.41	278.69	249.15	219.32	186
10	3.162278	401.23	364.29	331.79	339.45	257.31	221.55	186.17
9	3.333333	400.21	375.09	355.7	309.29	270.7	246.37	227
8	3.535534	448.78	377.64	353.1	334.29	281.82	257.39	201.77
7	3.779645	465.44	399.78	388.67	359.24	301.43	258.97	204.69
6	4.082483	492.74	400.27	399.69	361.28	319.61	301.41	202.46
5	4.472136	535.79	451.59	440.73	394.37	354.13	306.51	262.72
4	5	563.69	400.49	431	400.42	359.24	325.59	274.31
3	5.773503	605.34	534.21	522.59	400.32	399.38	355.74	320
2	7.071068	656.83	593.71	564.31	521.85	399.86	400.36	350.44
1	10	707.16	656.75	616.28	595.09	499.09	400.35	396.86
0		702.76	744.5	700.1	700.1	699.4	619.27	584.84

瓶長 11.8	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	251.61	216.49	199.58		159.26	142.4	101.43
16	2.5	272.09	232.52	228.17	202.49	169.69	156.21	99.186
14	2.672612	287.39	243.65	232.54	257.29	201.04	156.21	143.5
12	2.886751	307.27	262.67	244.98	229.75	196.64	167.38	134.39
10	3.162278	329.22	284.69	265.5	257.34	210.82	183.37	120.8
9	3.333333	344.64	298.45	282.36	257.3	221.65	188.78	177.9
8	3.535534	358.52	309.42	290.41	265.63	229.78	199.71	161.51
7	3.779645	373.87	331.28	314.67	287.55	245.55	213.55	175.29
6	4.082483	396.64	345.18	322.89	294.08	255.38	240.64	195.93
5	4.472136	418.57	366.59	350.38	315.41	275.75	243.46	203.12
4	5	448.88	395.92	365.02	340.21	295.5	260.31	215.72
3	5.773503	468.18	418.62	405.45	360	320.19	281.61	240.54
2	7.071068	503.9	459.68	446.26	399.43	351.94	314.68	260.11
1	10	542.37	499.68	497.14	440.7	400.35	359.97	312.3
0		609	556.29	558.48	532.85	525.52	492.55	413.43

瓶長 15.7	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	225.21	202.5	177.82		140.95	120.49	101.13
16	2.5	249.24	203.24	186.32	177.88	149.78	144.63	101.45
14	2.672612	251.76	216.31	199.63	245.01	166.76	136.72	142
12	2.886751	265.53	229.59	213.43	197.36	175.44	145.21	150.8
10	3.162278	284.69	246.27	227.32	221.55	183.42	158.76	112
9	3.333333	295.57	254.51	241.25	219.28	190.8	165.92	153
8	3.535534	303.74	265.59	249.14	224.43	197.14	175.26	141.75
7	3.779645	320.41	281.83	268.25	244.52	209.07	183.41	148.13
6	4.082483	331.37	295.51	286.72	249.11	218.66	202.48	164.24
5	4.472136	350.36	309.37	303.62	270.6	234.78	207.7	170.3
4	5	373.88	334.19	316.05	286.01	251.59	224.47	186.3
3	5.773503	383.26	350.39	338.76	304.32	270.67	241.27	204.68
2	7.071068	407.84	375.09	365.11	331.26	298.38	270.69	221.64
1	10	432.5	406.86	385.9	400.49	329.96	303.64	262.74
0		475.7	443.47	442	433.22	415.66	401.89	367.29

瓶長 19.7	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	205.21	170.3	156.19		126.21	119.8	101.31
16	2.5	221.58	183.33	167.37	158.79	134.15	120.45	100.95
14	2.672612	223.73	191.56	177.82	200.32	143.94	120.49	99.137
12	2.886751	235.43	201.77	194.34	177.7	153.39	131.44	104.23
10	3.162278	251.58	217.15	202.51	194.38	164.22	141.73	109.5
9	3.333333	259.77	225.92	213.4	196.76	170.31	147.59	142
8	3.535534	266.97	233.3	219.14	202.66	177.7	153.4	131.4
7	3.779645	276.24	246.46	232.59	215.84	184.29	163.69	136.67
6	4.082483	287.53	257.42	240.64	221.61	194.3	180.53	153
5	4.472136	303.54	270.63	257.41	234	206.19	183.47	158.76
4	5	320.19	288.76	275.47	244.42	220.83	197.12	169.9
3	5.773503	329.24	298.4	292.69	265.59	235.45	213.48	180.68
2	7.071068	342.31	320.33	310.19	287.45	257.43	234.71	197.1
1	10	361.29	344.75	328.46	312.36	283.82	266.11	232.49
0		390.01	376.82	358.52	347.53	328.49	318.24	309.44

瓶長 23.4	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	185.65	156.17	145.19		115.17	98.49	89.67
16	2.5	194.47	165.9	164.26	146.13	122.69	119.56	99.154
14	2.672612	202.58	175.28	164.26	180.52	135.9	111	99.066
12	2.886751	213.48	183.4	172.49	158.75	142.3	117.75	95.58
10	3.162278	226.82	196.56	183.39	177.73	148.31	128.65	101.46
9	3.333333	232.55	205.3	194.33	177.71	153.46	133.79	120
8	3.535534	238.32	218.72	197.25	181.29	158.62	139.6	115.35
7	3.779645	245.59	221.49	210.62	194.35	168.44	146.19	120.54
6	4.082483	257.43	229.58	215.75	197.1	175.4	161.54	128.66
5	4.472136	268.32	241.2	230.2	210.59	184.19	166.64	138.08
4	5	278.71	255.99	239.85	223.03	197.23	177.7	148.31
3	5.773503	287.49	262.67	257.43	234.76	212.03	191.6	162.95
2	7.071068	295.6	281.85	272.85	254.54	230.33	210.66	177.76
1	10	314.73	301.1	290.39	275.7	250.84	234.71	208.34
0		335.83	325.58	313.13	312.37	292.61	271.36	255.97

瓶長 19.7	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	205.21	170.3	156.19		126.21	119.8	101.31
16	2.5	221.58	183.33	167.37	158.79	134.15	120.45	100.95
14	2.672612	223.73	191.56	177.82	200.32	143.94	120.49	99.137
12	2.886751	235.43	201.77	194.34	177.7	153.39	131.44	104.23
10	3.162278	251.58	217.15	202.51	194.38	164.22	141.73	109.5
9	3.333333	259.77	225.92	213.4	196.76	170.31	147.59	142
8	3.535534	266.97	233.3	219.14	202.66	177.7	153.4	131.4
7	3.779645	276.24	246.46	232.59	215.84	184.29	163.69	136.67
6	4.082483	287.53	257.42	240.64	221.61	194.3	180.53	153
5	4.472136	303.54	270.63	257.41	234	206.19	183.47	158.76
4	5	320.19	288.76	275.47	244.42	220.83	197.12	169.9
3	5.773503	329.24	298.4	292.69	265.59	235.45	213.48	180.68
2	7.071068	342.31	320.33	310.19	287.45	257.43	234.71	197.1
1	10	361.29	344.75	328.46	312.36	283.82	266.11	232.49
0		390.01	376.82	358.52	347.53	328.49	318.24	309.44

瓶長 23.4	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	185.65	156.17	145.19		115.17	98.49	89.67
16	2.5	194.47	165.9	164.26	146.13	122.69	119.56	99.154
14	2.672612	202.58	175.28	164.26	180.52	135.9	111	99.066
12	2.886751	213.48	183.4	172.49	158.75	142.3	117.75	95.58
10	3.162278	226.82	196.56	183.39	177.73	148.31	128.65	101.46
9	3.333333	232.55	205.3	194.33	177.71	153.46	133.79	120
8	3.535534	238.32	218.72	197.25	181.29	158.62	139.6	115.35
7	3.779645	245.59	221.49	210.62	194.35	168.44	146.19	120.54
6	4.082483	257.43	229.58	215.75	197.1	175.4	161.54	128.66
5	4.472136	268.32	241.2	230.2	210.59	184.19	166.64	138.08
4	5	278.71	255.99	239.85	223.03	197.23	177.7	148.31
3	5.773503	287.49	262.67	257.43	234.76	212.03	191.6	162.95
2	7.071068	295.6	281.85	272.85	254.54	230.33	210.66	177.76
1	10	314.73	301.1	290.39	275.7	250.84	234.71	208.34
0		335.83	325.58	313.13	312.37	292.61	271.36	255.97

瓶長 27.2	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	169.53	144.71	133.7		105.83	94.13	70.67
16	2.5	180.69	152.69	147.63	132.93	112.23	97.76	99.169
14	2.672612	183.52	157.9	148.24	165.91	119.75	102.16	82.315
12	2.886751	193.74	167.33	157.09	146.13	126.23	109.52	90.43
10	3.162278	202.72	178.34	166.82	161.49	136.75	119.66	99.6
9	3.333333	210.72	184.26	175.26	160.72	142.37	122.67	101.46
8	3.535534	218.76	191.55	178.44	165.85	145.16	126.39	106.69
7	3.779645	223.76	199.71	190.05	172.64	152.63	135.76	114.83
6	4.082483	229.74	207.88	194.35	180.66	158.56	147.69	117.49
5	4.472136	236.99	216.27	206.9	190.07	170.24	151.26	125.69
4	5	245.79	225.07	213.97	202.59	180.6	161.53	137.51
3	5.773503	254.54	235.46	229.89	212.04	191.62	173.96	147.7
2	7.071068	262.56	249.27	243.46	226.76	206.93	191.57	161.56
1	10	276.46	262.68	254.56	243.47	225.91	210.56	188.64
0		291.81	281.59	275.74	271.37	262.58	239.92	218.57

瓶長 31.3	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	158.73	134.19	126.1		98.21	90.4	92.57
16	2.5	164.39	141.72	131.47	125.6	106.7	90.48	100.73
14	2.672612	172.41	147.6	139.55	152.76	112.18	99.37	79.304
12	2.886751	178.14	154.2	148.32	137.26	120.33	104.19	84.67
10	3.162278	186.33	163.75	156.07	153.38	126.14	110.97	99.09
9	3.333333	193.71	169.65	162.77	150.46	131.49	115.31	101.46
8	3.535534	197.2	175.24	166.71	152.72	134.33	119.17	96.28
7	3.779645	202.53	183.32	175.22	159.41	141.7	124.06	103.65
6	4.082483	208.39	192.25	180.58	166.7	146.89	136.77	116.4
5	4.472136	216.15	197.08	191.58	175.45	158.63	140.99	117.1
4	5	224.39	204.27	197.44	184.08	166.75	150.49	131.48
3	5.773503	229.83	212.8	208.42	193.71	176.17	161.52	137.23
2	7.071068	233.3	224.49	220.79	205.48	189.27	177.71	149.79
1	10	247.18	236.93	228.88	220.1	206.04	192.27	172.51
0		259.71	246.56	244.87	239.08	228.15	216.45	193.69

瓶長 35.2	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
內徑 mm		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	145.31	128.48	121.04		99.47	82.58	61.765
16	2.5	157.06	131.47	120.59	120.45	100.26	83.8	99.165
14	2.672612	150.44	136.6	126.75	136.95	103.87	90.621	73.726
12	2.886751	165.9	142.46	136.73	126.35	111.68	95.55	93.01
10	3.162278	171.76	152.72	142.34	142.39	117.39	101.48	92.28
9	3.333333	176.17	156.35	149.05	137.27	121.25	106.55	100.76
8	3.535534	178.15	161.38	153.36	141.09	125.7	109.5	91.95
7	3.779645	184.19	167.38	161.42	149.77	132.71	116.11	96.36
6	4.082483	190.8	174.79	163.79	153.19	136.41	126.13	99.115
5	4.472136	196.82	180.54	174.75	161.53	145.44	130	111.46
4	5	202.48	188.59	184.22	169.53	153.3	138.8	117.51
3	5.773503	207.65	193.72	191.52	174.01	161.48	147.85	128.55
2	7.071068	212.71	204.74	200.32	188.64	172.52	161.42	140.33
1	10	220.86	213.49	208.17	199.52	186.43	175.19	159.28
0		231.8	224.54	222.3	216.42	209.01	196.66	190.05

瓶長 39.3	頸長倒數 根號	口徑 60mm	口徑 50mm	口徑 45mm	口徑 40mm	口徑 35mm	口徑 30mm	口徑 25mm
		56.15	45.4	40.9	37	31.35	26.1	19.7
18	2.357023	135.85	110.21	110.19		89.76	75.15	58.166
16	2.5	142.28	123.28	114.1	115.5	90.35	75.79	76.17
14	2.672612	156.11	154.2	119.96	118.93	92.39	84.32	68.488
12	2.886751	153.46	132.99	125.71	118.25	99.38	90.52	90.08
10	3.162278	159.37	140.56	133.65	131.46	118.36	96.316	87.89
9	3.333333	164.17	147.6	140.28	128.68	113.89	98.44	98.49
8	3.535534	164.42	153.34	142.64	131.49	116.86	99.29	84.82
7	3.779645	170.31	156.36	147.87	123.87	120.55	118.32	90.413
6	4.082483	175.33	166.79	152.01	142.37	125.74	120.46	99.27
5	4.472136	181.28	166.76	177.04	150.64	123.94	121.34	119.14
4	5	186.15	166.82	166.78	156.46	142.4	128.77	119.81
3	5.773503	188.76	178.21	175.23	162.26	150.46	137.29	119.87
2	7.071068	193.77	188.7	183.39	172.41	159.28	148.37	129.23
1	10	202.68	194.4	193.53	182.02	171.75	161.3	147.58
0		209.14	206.16	205.43	198.87	194.47	185.67	181.35

評語

1. 從共鳴管到共振子，這個團隊試圖透過共鳴管內聲波振幅的量測，找出其與共振子相當的共通性及駐波的存在性。主題與教材相關性頗高，具有學術及實用性。
2. 團隊合作良好，表達尚稱生動。若能在聲波與共鳴的基礎學理上，有更深入的認知，作品將會更出色。
3. 就高中科展作品而言，本作品在選題，方法之適切性及邏輯思考上，均值得稱許。唯書面與口頭之表達仍有改善之空間，聲學的基本學理值得更深入探討。