

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

地球科學科

科別：地球科學科

組別：國中組

作品名稱：月亮太陽斜斜掛

關鍵詞：月亮、白道、黃道

編號：030506

學校名稱：

台北市私立復興國民中學

作者姓名：

鍾岳霖、陳冠儒

指導老師：

張靜園



摘要

主要利用自製的“天體定位儀”來詳細探討月亮、太陽及地球之間的位置及軌道關係，並藉由三度空間模型的製作來進一步了解其中的奧妙。

首先利用天體定位儀（共研發出四代，見圖 1）來量測月亮及太陽各自與北極的夾角在 1 年內的變化，經數據分析發現：

- 一、 這個變化很像 $\sin$ 函數。
- 二、 月亮與北極的夾角發生極大值的農曆日數，每月平均提早約 2.26 日。
- 三、 白道面與赤道軸的夾角約為 63.5 度，黃道面與赤道軸的夾角約為 66.5 度。
- 四、 白道面與黃道面之間的夾角約為 5 度。這正是日蝕及月蝕不常發生的主要原因。
- 五、 天體在地平線上的時間(分) = $1080 \text{ 分} - 4 \text{ (分/度)} \times \text{天體與北極夾角 (度)}$ 。我們用幾何定理證明了這個觀測到的關係式，且配合天體定位儀可準確預測任何可見天體升上及落下地平線的時間。

最後製作月亮、太陽及地球的 3D 軌道模型。過程中遭遇並解決了各種數學及天文難題，使我們對這個行星系統有了更深一層的認識。





圖 1：第一代至第四代（由左至右、上至下）的自製“天體定位儀”

壹、研究動機

我們知道太陽在正午的仰角在一年四季中之所以不同，是因為地球的自轉軸和繞太陽的公轉軸沒有平行的緣故，由課本(“拾、參考資料”之 1)上得知，這兩個軸的夾角為 23.5° ，這也是南北迴歸線之所以為南緯、北緯 23.5° 的緣故。然而，經過仔細的觀察，我們發現月亮在天空中的最大仰角在一個月中的不同天似乎也有所不同。因此我們就對這個現象產生了興趣，想要知道這個仰角隨時間是如何變化的，並希望能夠藉此來進一步了解太陽、地球以及月亮這三個互相運轉的物體彼此之間的詳細關係。

另外我們也注意到，雖然月亮在農曆每個月的 1 日左右都會通過太陽和地球兩者的中間，但是日蝕卻不是每個月都會發生，同樣地，月蝕也不是每個月的 15 日都會發生。我們相信這個現象一定可以用太陽、地球和月亮三者之間的詳細關係來加以解釋，因此便對這個問題產生了更大的興趣。

貳、研究目的

我們希望透過自行製作的“天體定位儀”來量測太陽以及月亮在天空中之位置隨時間的變化，進而推算出月球繞地球的旋轉平面（白道面）、地球繞太陽的公轉平面（黃道面）、以及地球的自轉軸（赤道軸或極軸）等三者之間的關係。透過這樣的量測及分析結果，我們還可以進一步地探討黃道面及白道面之間的關係。此外，我們也想知道上述的這些關係是否會隨著時間改變。最後我們會將這些研究結果製作成太陽、月球、及地球之間的三度空間立體模型，並將重要的結果用數學公式化。藉著這樣的研究，我們希望能夠進一步了解和太陽、月球、及地球等三者位置有關的自然現象，如日蝕及

月蝕等。

參、文獻探討

爲了瞭解太陽、月亮、及地球三者間的關係，我們不但復習了課本上（“拾、參考資料”之 1）的資料，也上網搜尋（“拾、參考資料”之 2）。我們找到了許多相關的網站（“拾、參考資料”之 3 至 6），在這裡做一個整理說明。首先是地球和太陽的關係。南、北迴歸線的原理，主要是因爲黃道軸和赤道軸的夾角爲 **23.5 度**的關係，也就是說赤道面和黃道面間的夾角爲 23.5 度（見圖 2）。在夏至的時候，太陽直射北緯 23.5 度，在冬至的時候，太陽直射南緯 23.5 度，而在春分或秋分時，太陽直射赤道。地球繞太陽 360 度所需要的時間爲 **365.2422 日**，而一個太陽日（即地球上同一點連續兩次正向太陽所需的時間，其間地球自轉約 361 度）爲 24 小時。

至於地球和月球間的關係，我們所找到的資料雖然很多，但詳細描述兩者間的關係，以及兩者和太陽間的關係的資料卻很少。相關的重要資料爲，兩個**新月（朔）**之間是 **29.5 天 (709 小時)**（見圖 3），略長於月球真正的公轉周期 **27.32 天**，這是因爲在月球繞地球公轉的同時，地球也繞太陽公轉了一些角度所致（見圖 4 及“拾、參考資料”之 3）。此外，我們也學到白道面和黃道面的夾角爲 **5 度 9 分**（“拾、參考資料”之 5）。但究竟這個角度和之前的 23.5 度之間，以及白道面、黃道面及赤道軸之間的關係到底是什麼（見圖 5），我們始終找不到進一步的資料。因此，我們對這個問題便產生了更大的興趣。

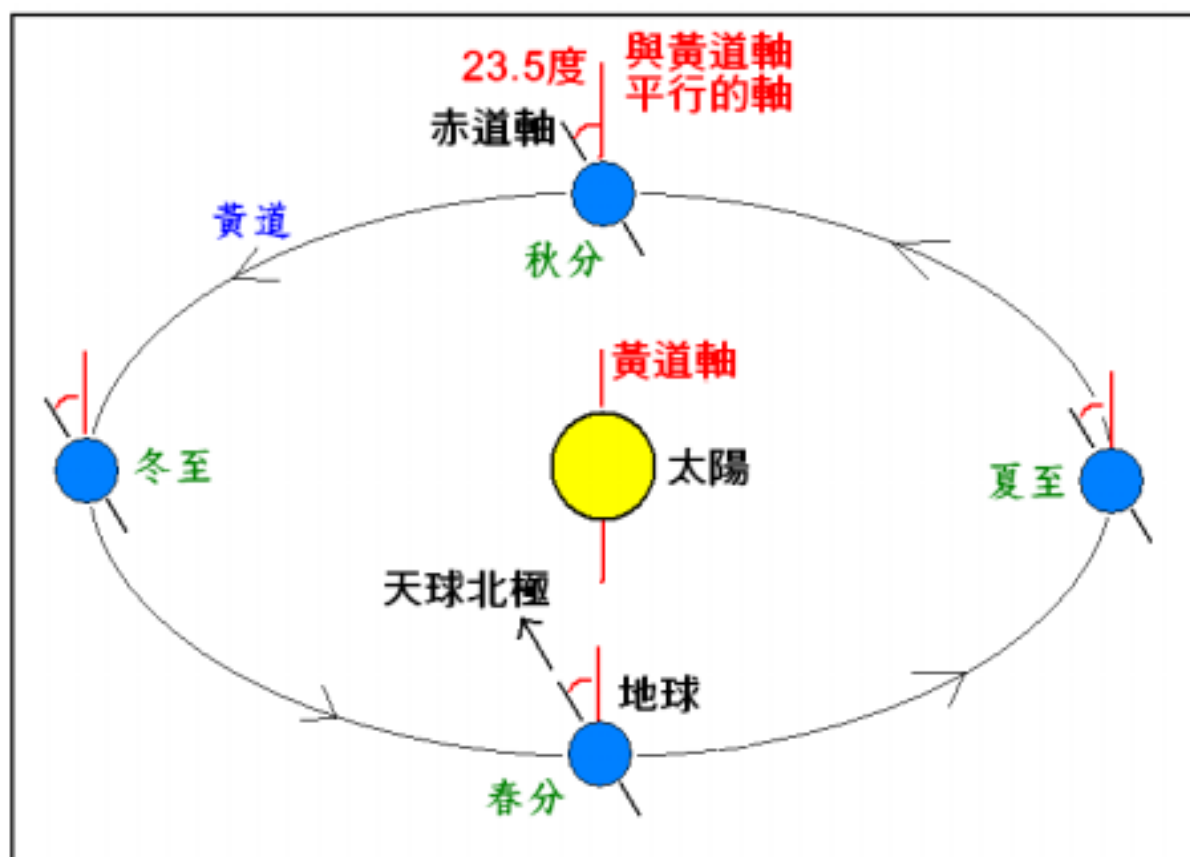


圖 2

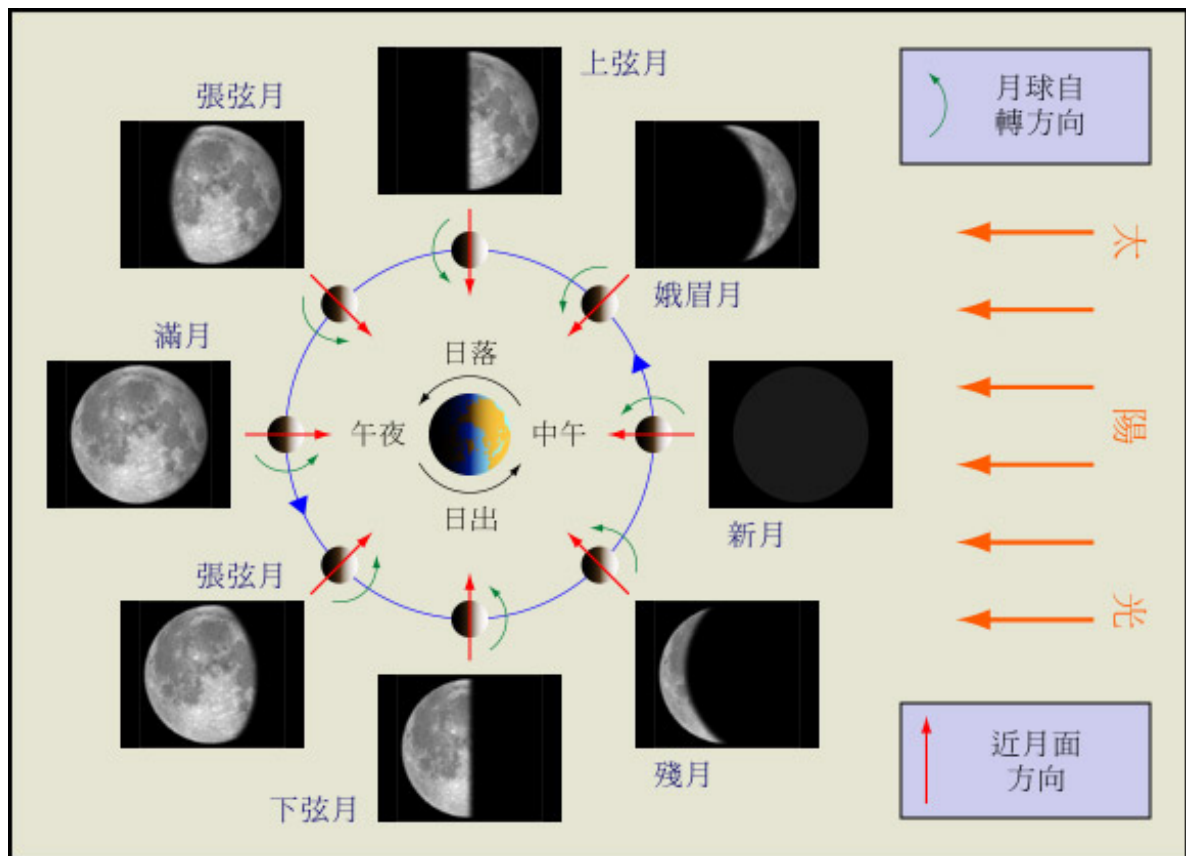


圖 3 (取自“拾、參考資料”之 5)

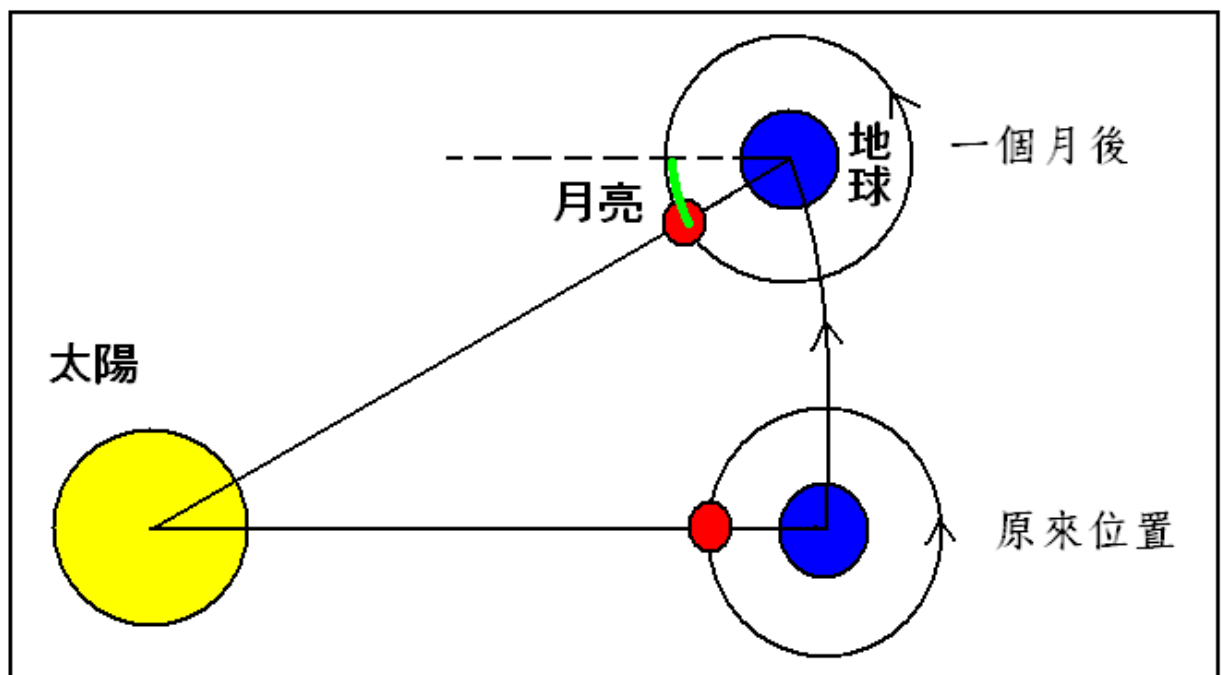


圖 4

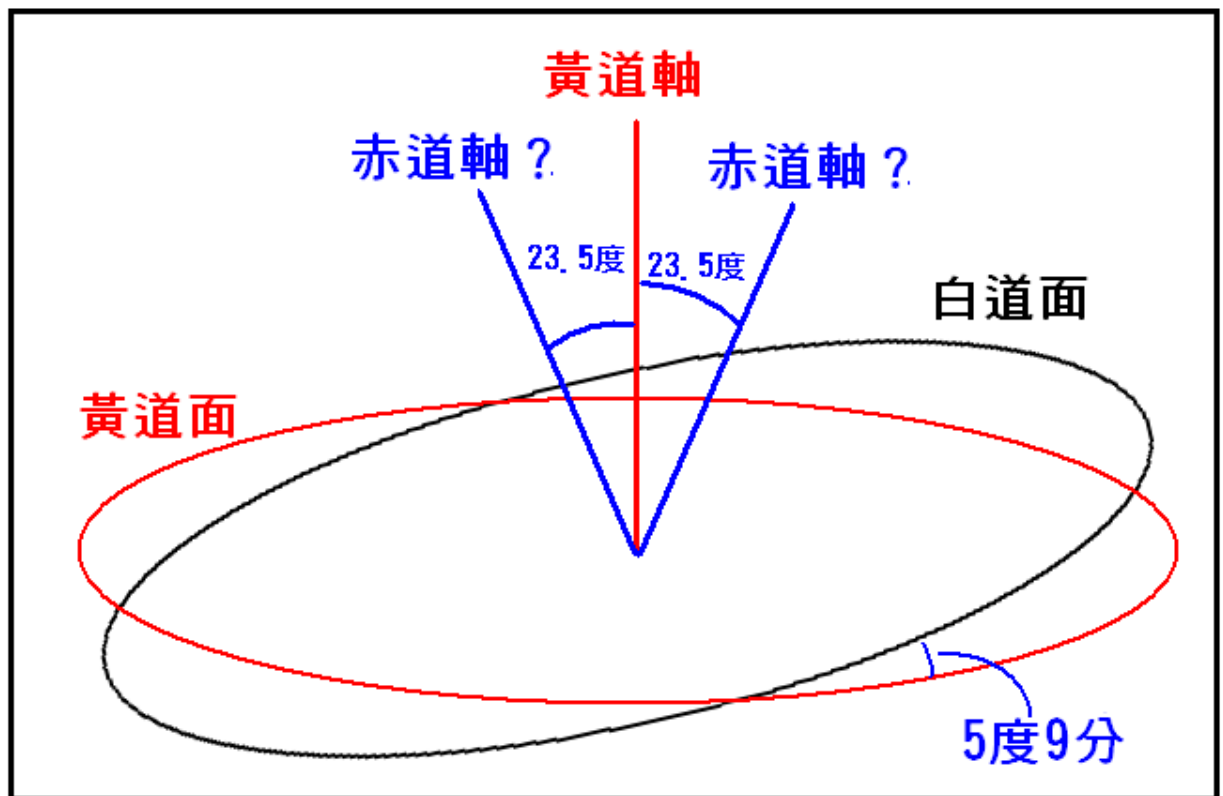


圖 5

肆、研究設備及器材

一、自製天體定位儀：

這是用來測量某一天體與天球北極之間的夾角。在本研究中，這個天體是太陽或月亮。在實驗過程中，爲了改進這個儀器的精確度及便利性，我們先後一共研發出四代。因受限於篇幅，以下我們只列出它們的製作材料及完成圖，而將詳細的製作步驟列在“附件壹”中。

(一) 第一代天體定位儀：

1. 製作材料（見圖 6）

- (1) 吸管.....1 枝
- (2) 筷子.....1 枝
- (3) 量角器.....1 個
- (4) 膠帶.....1 捆
- (5) 三秒膠.....1 瓶
- (6) 線.....1 捆
- (7) 蝴蝶夾.....1 個
- (8) 50 元硬幣.....1 枚
- (9) 三腳架.....1 個



2. 完成圖：



圖 7

(二) 第二代天體定位儀：

1. 製作材料（見圖 8）

- (1) 吸管.....1 枝
- (2) 筷子.....1 枝
- (3) 半圓形量角器 1 個
- (4) 圓形量角器.....1 個
- (5) 膠帶.....1 捆
- (6) 三秒膠.....1 瓶
- (7) 線.....1 捆
- (8) 蝴蝶夾.....3 個
- (9) 50 元硬幣.....2 枚
- (10) 三腳架.....1 個
- (11) 電鑽.....1 個
- (12) 迴紋針.....1 個
- (13) 珍珠版.....1 塊



圖 8

2.完成圖：

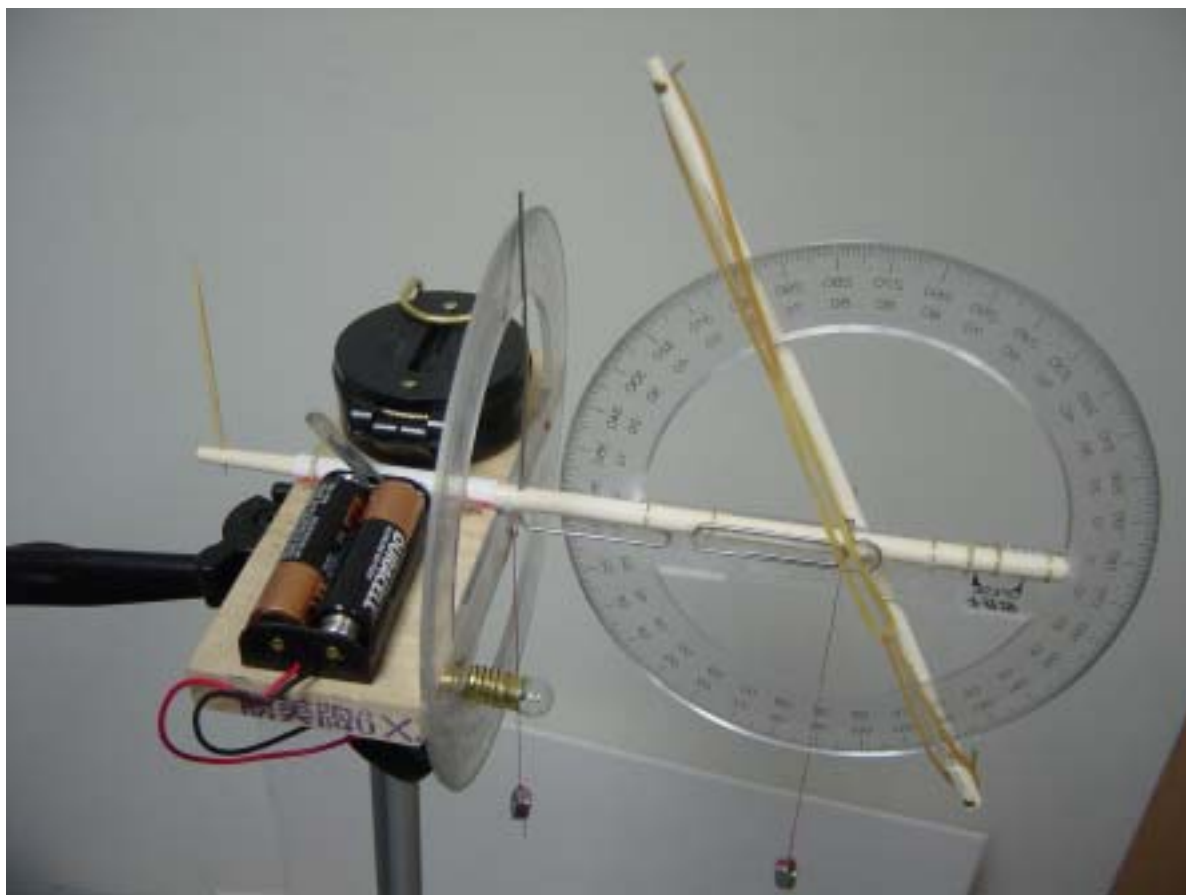


(三) 第三代天體定位儀：

1. 製作材料：

- | | |
|---------------------|------------------|
| (1) 吸管.....1 枝 | (11) 指南針.....1 個 |
| (2) 筷子.....2 枝 | (12) 橡皮筋.....3 條 |
| (3) 圓形量角器 (大)...2 個 | (13) 電池座.....1 個 |
| (4) 膠帶.....1 捆 | (14) 電池.....2 個 |
| (5) 三秒膠.....1 瓶 | (15) 牙籤.....1 個 |
| (6) 線.....1 捆 | (16) 木板.....1 塊 |
| (7) 50 元硬幣.....2 枚 | (17) 燈泡.....1 個 |
| (8) 三腳架.....1 個 | (18) 漆包線.....1 捆 |
| (9) 迴紋針.....2 個 | (19) 螺帽.....2 個 |
| (10) 電鑽.....1 個 | (20) 鐵釘.....3 個 |

2.完成圖：



(四) 第四代天體定位儀：

1. 製作材料：

- | | |
|-------------------|------------------|
| (1) 圓形量角器.....1 個 | (10) 衛星指北針...1 個 |
| (2) 精密量角器.....1 個 | (11) 傾角量角器...1 個 |
| (3) AB 膠.....1 組 | (12) 電池座.....1 個 |
| (4) 紅線.....1 捆 | (13) 電池.....2 個 |
| (5) 三腳架.....1 個 | (14) 木板.....1 塊 |
| (6) 電鑽.....1 個 | (15) 燈泡.....1 個 |
| (7) 水管.....1 個 | (16) 螺帽.....1 個 |
| (8) 大小水管轉接管 1 個 | (17) 銅釘及螺絲釘數個 |
| (9) 水管固定環.....2 個 | |



圖 11

2. 完成圖：



圖 12

二、數據分析軟體：Microsoft Excel (在 PC 上執行)

三、太陽、地球、月球位置軌道模型：

這個模型的製作，目的是要將所有觀測及分析的結果作一個整體的呈現，以幫助瞭解太陽、地球、月球三者間位置與軌道的關係。

製作材料：（見圖 13）

- | | |
|---------------------|--------------------|
| (1) 牙籤 12 根 (黃道軸) | (7) 橘、黑、綠色之油性筆各一支 |
| (2) 竹籤 12 根 | (8) 膠帶一捲 |
| (3) 網球 1 個 (太陽) | (9) 白紙 1 張 |
| (4) 大保麗龍球 6 個 (地球) | (10) CD 12 片 (白道面) |
| (5) 小保麗龍球 24 個 (月球) | (11) 黃色珍珠板 (黃道面) |
| (6) 小自黏標籤 12 張 | |



圖 13

伍、研究過程或方法

以下首先說明如何操作自製的天體定位儀，然後再說明如何利用它來達到研究目的。

一、天體定位儀的使用：

(一) 第一代天體定位儀的使用：(參見圖 7)

1. 將筷子指向北極。在晚間可利用北極星，在白天則不容易指向北極，因此要在晚間先將筷子以北極星為參考點對準之後，等到天亮再來使用。
2. 旋轉量角器，使得量角器的平面可以通過所要觀察的天體。
3. 由量角器的中心點往天體的方向看，此時量角器上的刻度可定出北極與天體間的夾角。

(二) 第二代天體定位儀的使用：(參見圖 9)

1. 將筷子指向北極，將 180 度量角器的平面對向所要觀察的星體，其步驟如同第一代天體觀測儀之使用步驟。
2. 站在 360 度那個量角器的前方，移動眼睛位置使吊上 50 元硬幣的那兩條線重疊，此時它們所對應到量角器上的刻度即定出目前天體與天頂之間的夾角（圖 14）。
3. 由 180 度量角器的中心點往天體的方向看，調整其圓邊上的角度指示器，使得量角器中心的指針、角度指示器的一邊（圖 42）、以及所要觀察的星體等三點連成一直線，這時角度指示器顯示出北極與天體間的夾角（圖 43）。



圖 14

(三) 第三代天體定位儀的使用：

1. 用指南針將第一根筷子指向正北方（圖 15），並用木板上的量角器及其所吊之紅線來確定木板為水平（圖 16）。
2. 調整三角架的機座並利用第一個量角器及其吊線，使第一根筷子的仰角等於所在地的緯度，台北的緯度為 25 度（圖 17）。此時第一根筷子已指向北極，因為北極的仰角正好等於所在地點的緯度（圖 18）。
3. 將第一個量角器以第一根筷子為軸旋轉，使其平面對準所要觀測的星體（圖 19）。此時第二個量角器上的指針顯示出天體目前的位置和它所通過的最高點間以北極軸為旋轉軸的夾角（圖 20）。
4. 旋轉第二根筷子使其上的二根鐵釘與星體三者共線（圖 21）。觀測太陽時可利用影子。此時筷子上的細線會指出天體與北極間的夾角（圖 22）。



圖 15



圖 16





圖 17

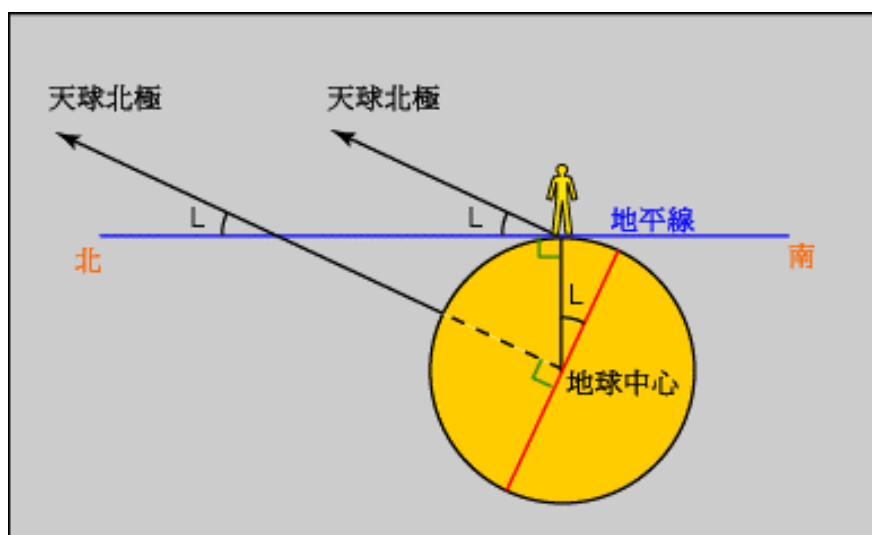


圖 18



圖 19



圖 20





圖 21



圖 22

(四) 第四代天體定位儀的使用

1. 用衛星電子指北針將金屬量角器的尺邊指向正北方（圖 23）。

2. 調整三角架的機座並利用其上的量角器及吊線，使金屬量角器固定尺邊的仰角等於所在地的緯度(圖 24，原理見以上的“(三)2”及圖 18)。
3. 手握前端大圓筒旋轉使金屬量角器的平面對準所要觀測的星體(圖 25)。
4. 旋轉金屬量角器上的可轉尺，使其邊上的三個指示器與星體共線(圖 26)。觀測太陽時可利用影子。此時量角器上的指標顯示天體與北極間的夾角(圖 27)。
5. 小心置上可拆式傾角器，它顯示出天體目前的位置和它所要通過的最高點間以北極為軸的旋轉夾角(圖 28)。



圖 23

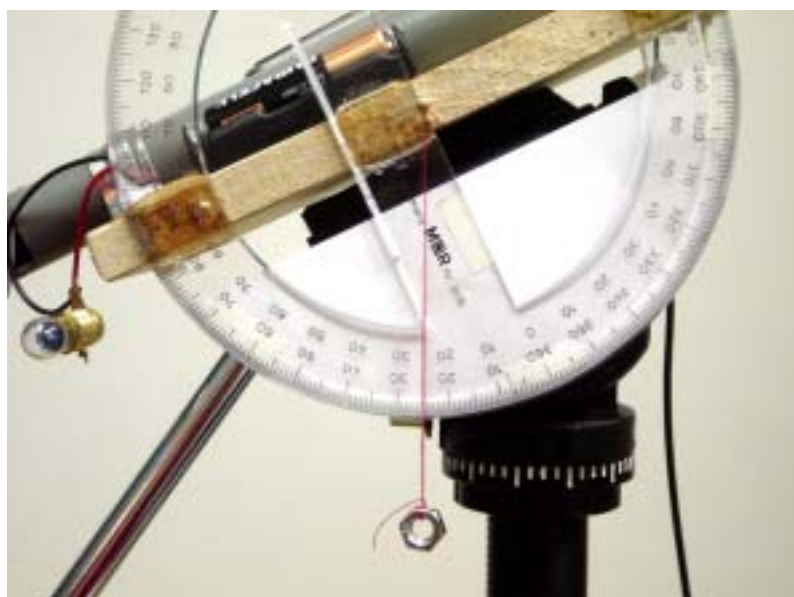


圖 24



圖 25





圖 26

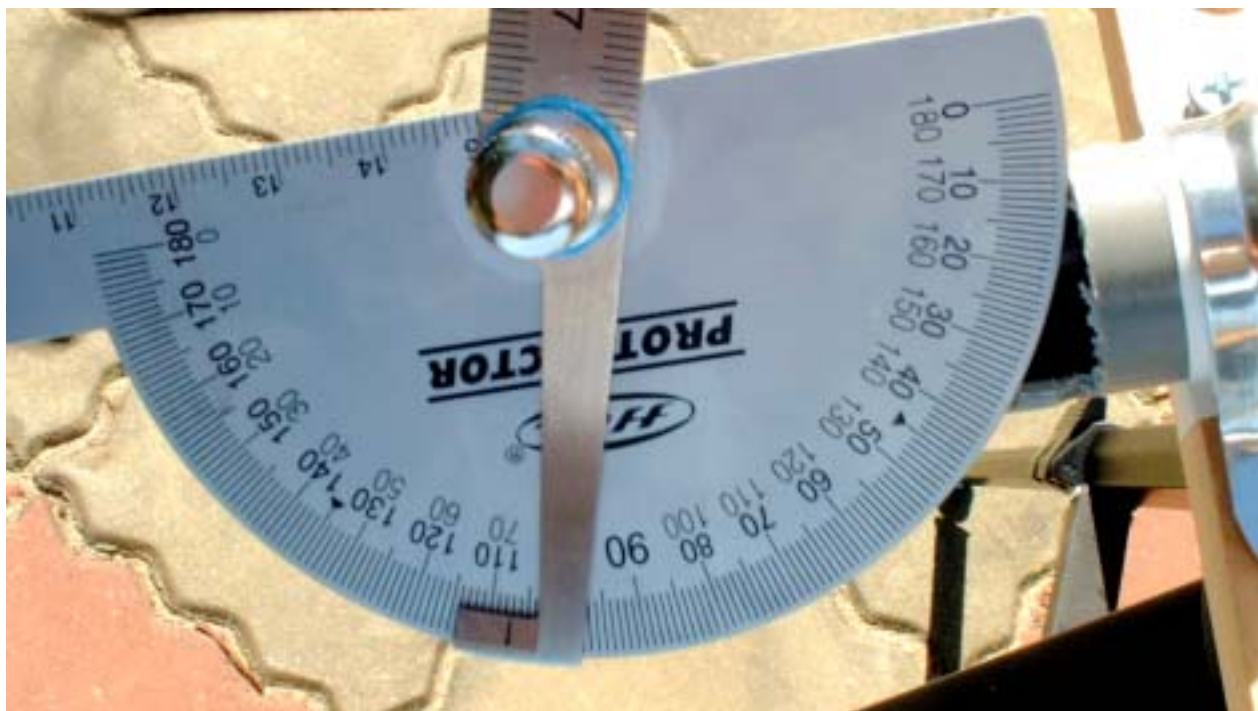


圖 27



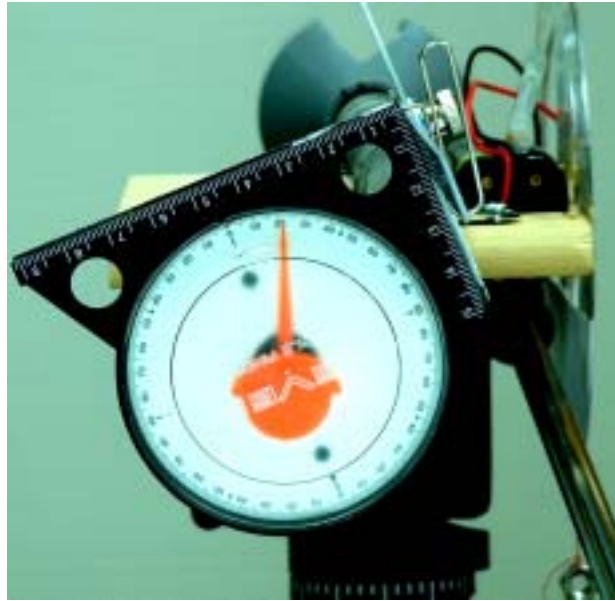


圖 28

二、太陽及月亮的觀測：

接下來利用自製的天體定位儀來量太陽及月亮在不同時間分別與地球北極間的夾角。據此接著可推得它們的運行軌道和赤道軸間的關係，如圖 29 所示。如果天體相對於地球的運行平面 X（即太陽的黃道面或月球的白道面）和赤道面間的夾角不為零度的話，則這個天體和北極間的夾角便會隨著時間的改變而改變：當這個天體在 A 點時與北極有最大夾角 a；當它在 B 點時與北極有最小夾角 b；當它在 C 點時與北極的夾角為 90 度。由於

$$\text{角 } a + \text{角 } b = 180 \text{ 度} \quad (\text{公式 1})$$

所以只要連續觀察這個天體運行地球的半個週期（太陽為半年，月亮為半個月），我們便可以完全知道這個天體和地球在圖 29 中的詳細關係。

以月球而言，我們計畫先在每天月升和月落間，每隔一小時記錄一次月亮與北極的夾角，同時並記錄下該日的月升、月落時間，以及月球到達“最高點”的時間。接著連續觀察半個月（或以上），便可推算出白道面與赤道軸間的夾角（如圖 29 中的角 a 或角 b）。再連續觀察數個月，便可知道這個關係是否會隨時間而改變。

在觀察月球位置的同時，我們也觀察太陽的位置。只要觀測超過半年，便可以在圖 29 中用一個類似於“平面 X”的“平面 Y”來表示黃道面和赤道軸間的關係。由此便可知道太陽、地球和月球三者間的詳細關係，並進一步地探討如日蝕及月蝕等自然現象背後的道理。

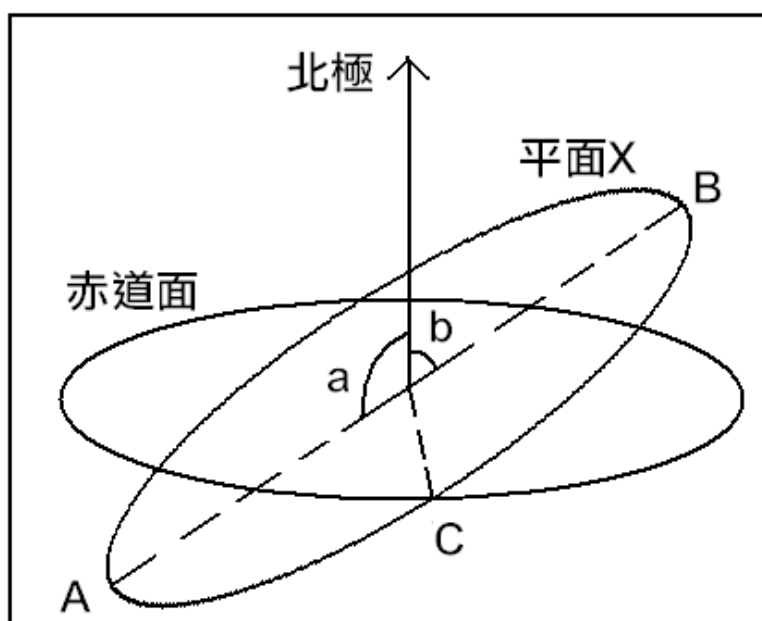


圖 29

三、太陽、地球、月球位置軌道模型的製作：

我們將在“柒、研究結果”的最後面用這個模型來綜合我們的研究成果。

陸、研究結果

一、月亮的觀測：

(一) 同日不同時間的觀測：

從國曆 2002 年 7 月 15 日至 30 日（農曆 6 月 6 日至 21 日）的連續 16 天觀測中，發現在同一天之內，月升和月落間月球與北極之間的夾角變化很小（見“附件貳：觀測數據”中的表 1-1 至表 1-16）。這應該是因為月亮在一天之內只能繞地球約 1/30 圈，所以圖 29 的分析顯示這個夾角變化應不大。

(二) 同月不同日的觀測：

我們又繼續觀測了 5 天（見“附件貳”中的表 1-17），在總共 21 天的資料中，發現月球與北極間的夾角隨著一個月內日數的改變而有顯著的改變，如圖 30。其中在農曆 6 月 13 日是 115.7 度為最大，代表白道面和赤道軸在這個月的夾角。

經過進一步的資料觀察（表 1-1 至 1-16），我們發現月亮在地平線上的時間也會隨著日數的變化而改變，如圖 31（來自表 2）。它在農曆 6 月 12、13、14 日等三天是 10 小時 15 分為最短。

比較圖 30 及 31，我們赫然發現在一個月內的不同日，白道面與北極的夾角以及月亮在地平線上的時間之關係成一直線，如圖 32。夾角越小時，它在地平線上的時間就越長。這個直線關係約為

$$\text{月亮在地平線上時間(分)} = 1085 \text{ 分} - 4 \times \text{月亮與北極夾角(度)} \quad (\text{公式 2})$$

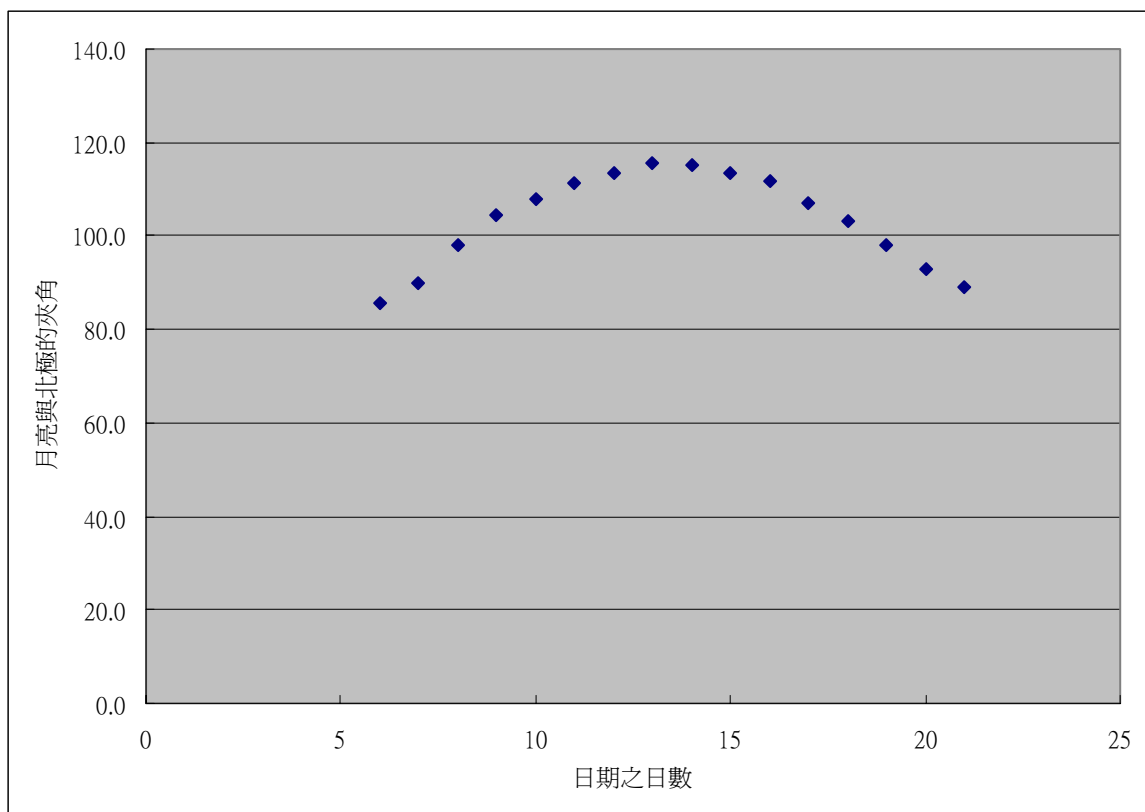


圖 30

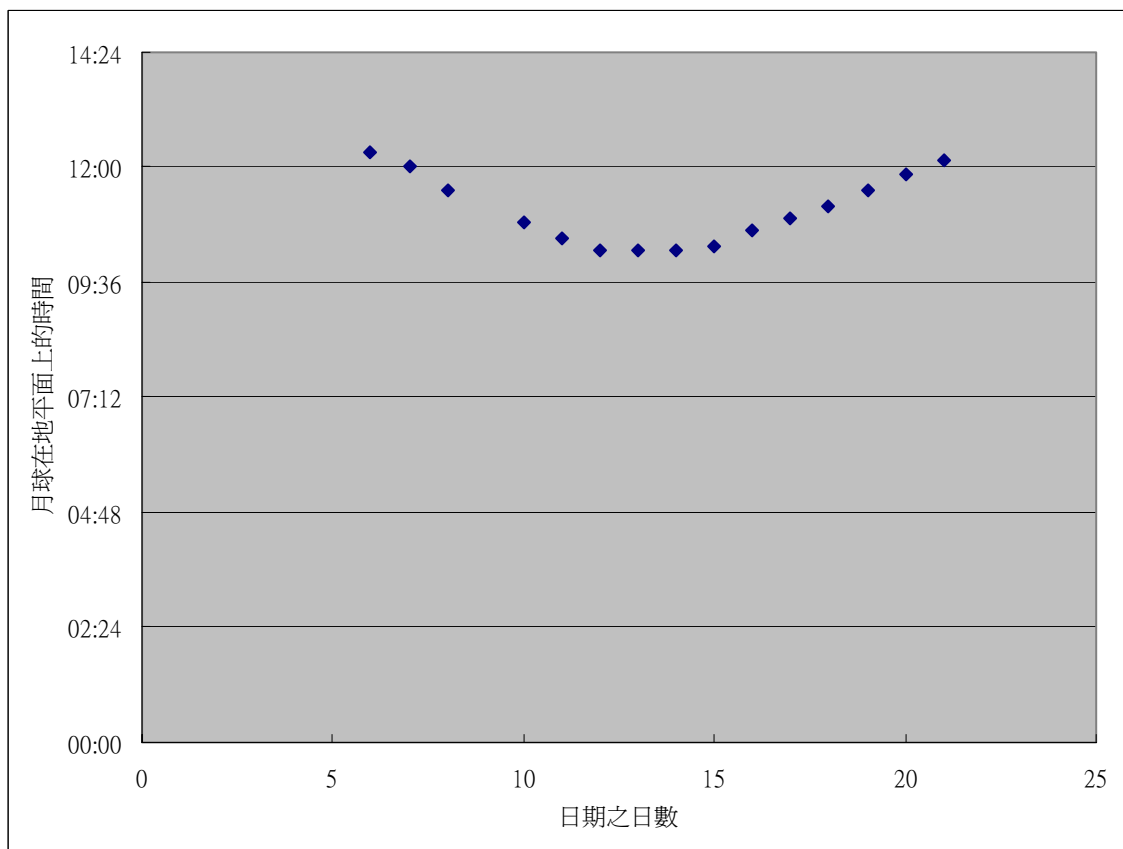


圖 31

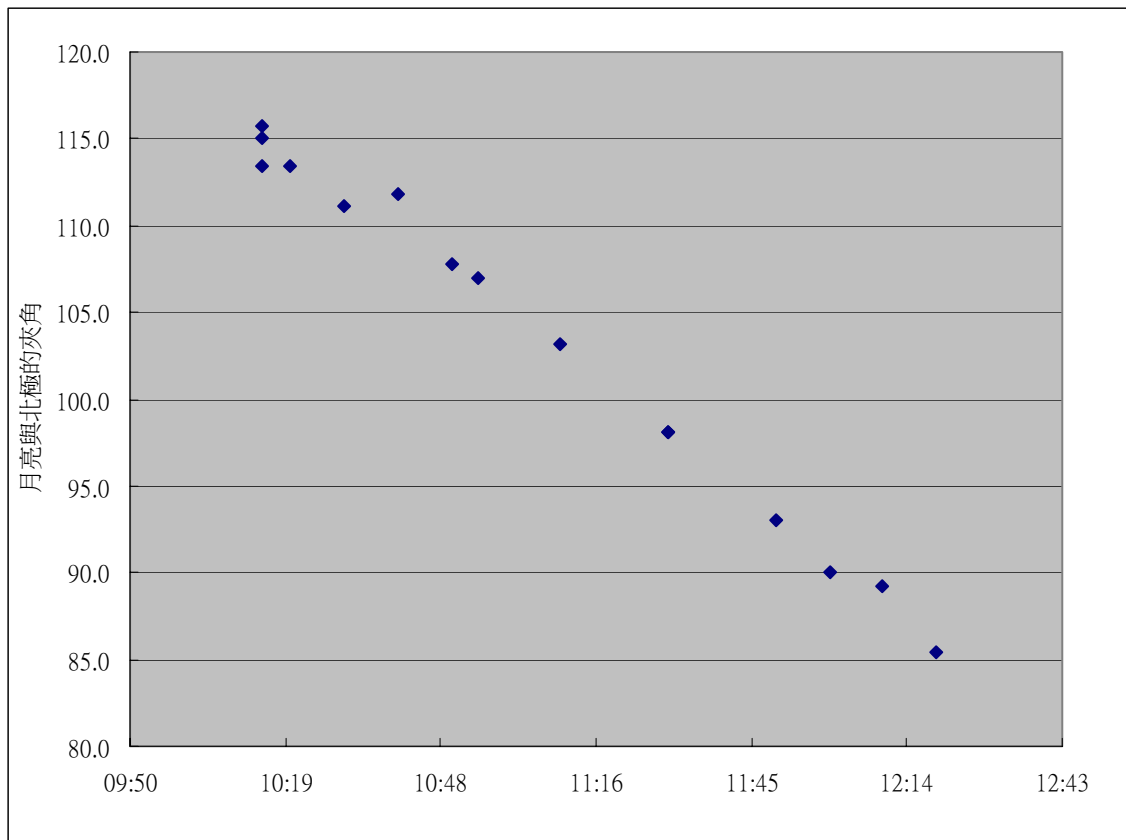


圖 32

(三) 同年不同月的觀測：

從農曆 2002 年 6 月到 2003 年 5 月共計 12 個月間，前 8 個月每月只觀察農曆的 7 日至 23 日（即月圓前後各 8 天共 17 天），後 4 個月每月只觀察由前 8 個月資料所推導估計出之月球北極間最大及最小夾角發生日期的前後各 2 天共 10 天（此推導估計請見以下分析，原始資料請見“附件貳”中的表 3-1 至 3-11）。我們把這 12 個月的資料整理成表 4-1，並畫在圖 33 中。發現月亮與北極的夾角在一個月內的變化趨勢在每一個月都很類似，只是它的極大值和極小值發生的日數在每個月不同。

對於夾角極值發生在每月不同日之現象的一個合理的猜測是，地球繞太陽公轉使得在農曆每月 1 日時由地球到月球的連線會隨著月份的改變而繞著地球旋轉。爲了詳細估算這個效應，首先將萬年曆上農曆民國 88 年至 97 年間共 123 個農曆月的每月天數平均，得到農曆一個月平均爲 29.53 日（表 4-2），這和“拾、參考資料”之 3 的 29.5 日完全相符。

由於地球的公轉，這一個農曆月實際上是月球繞地球 13/12 圈的時間，所以如果白道和地球的關係一直不變的話，上述猜測的因素會造成月亮每月與北極最大夾角所發生的日數提早約 $29.53/13=2.27$ 日。

接著仔細分析數據，先將每一個月發生最大夾角的日數及資料整理出來，作成表 4-3，並繪成圖 34，發現月亮與北極之間的夾角發生極大值的農曆日數，每月平均提早約 2.26 日（見表 4-3 中的第 7 欄，即 29.5-27.24），果然和之前估計的 2.27 日完全相符！

再來將原來圖 33 中的資料重新繪製，把其中每一個月的資料依照月份每增加一個月就向右平移 2.26 日，最後得到圖 35。很明顯地：月球與北極間的夾角在一個月內的變化趨勢很像國中三年級所學的 $\sin$ 函數，極大值約為 117 度，極小值約為 63 度，經平均其最小角為 63.5 度（見表 9-1），這是白道面和赤道軸的夾角。。

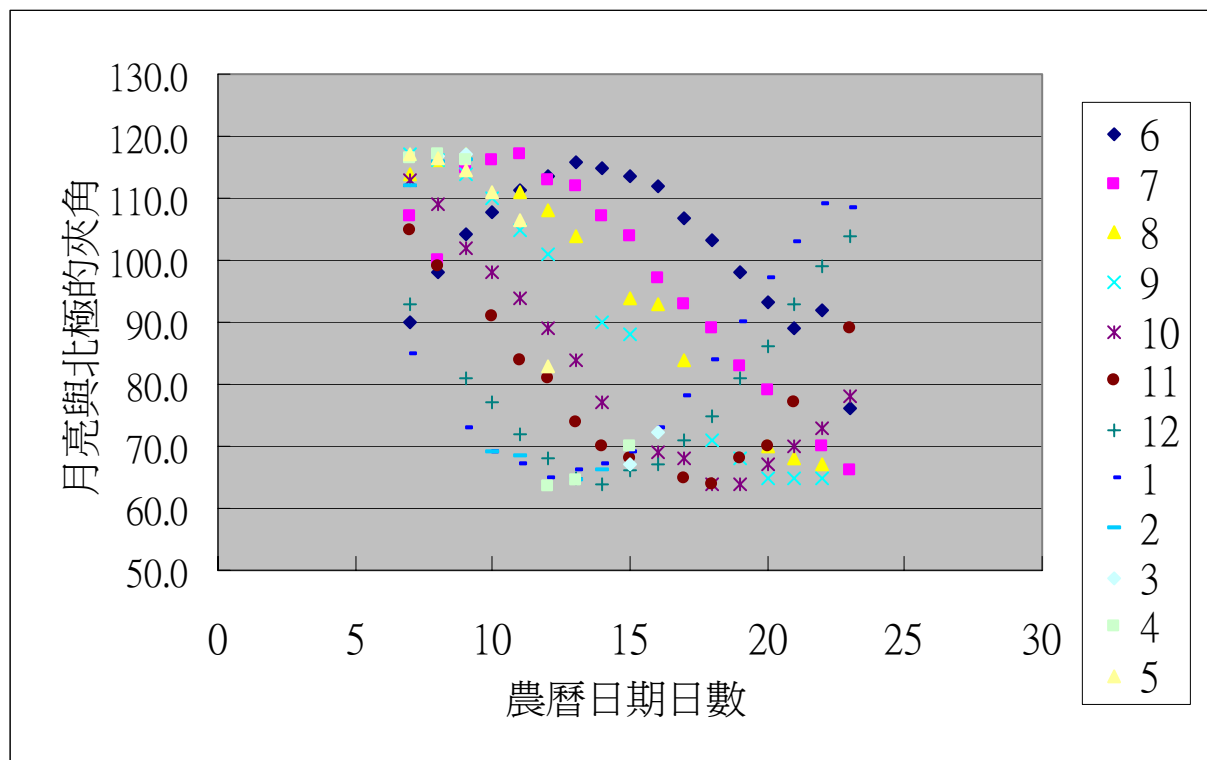


圖 33

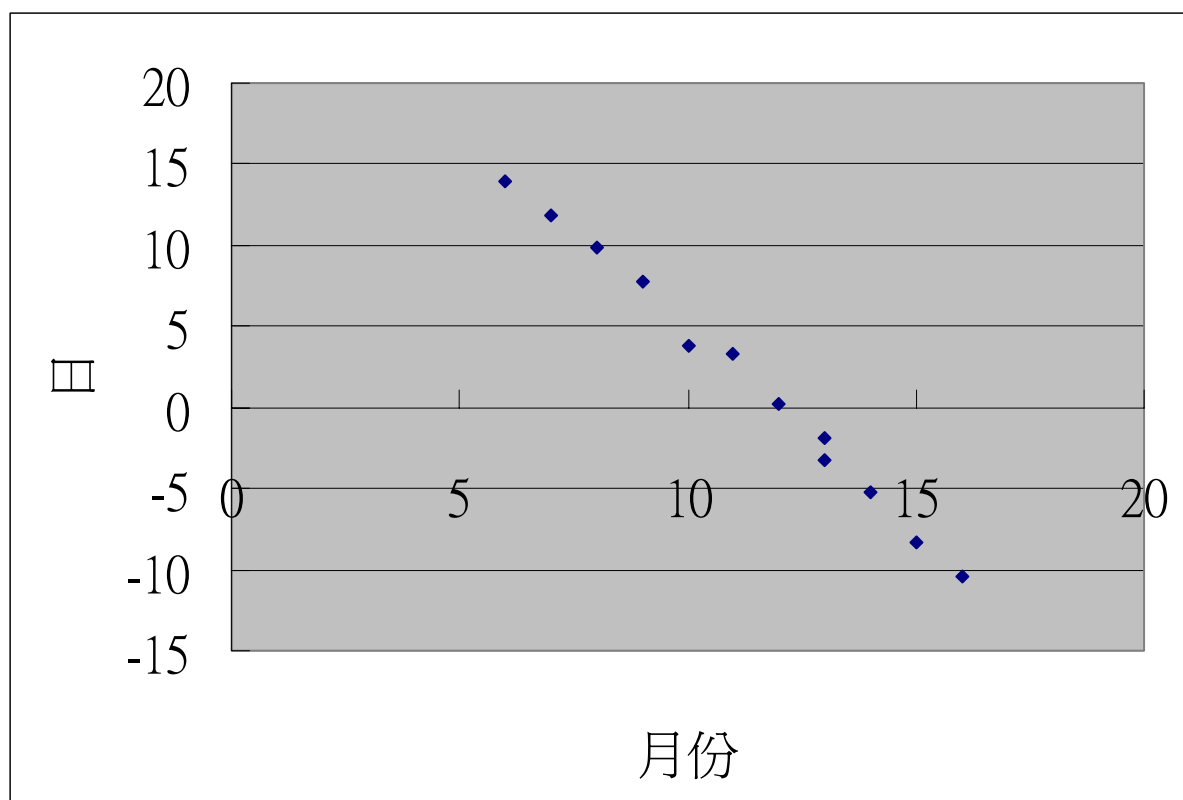


圖 34

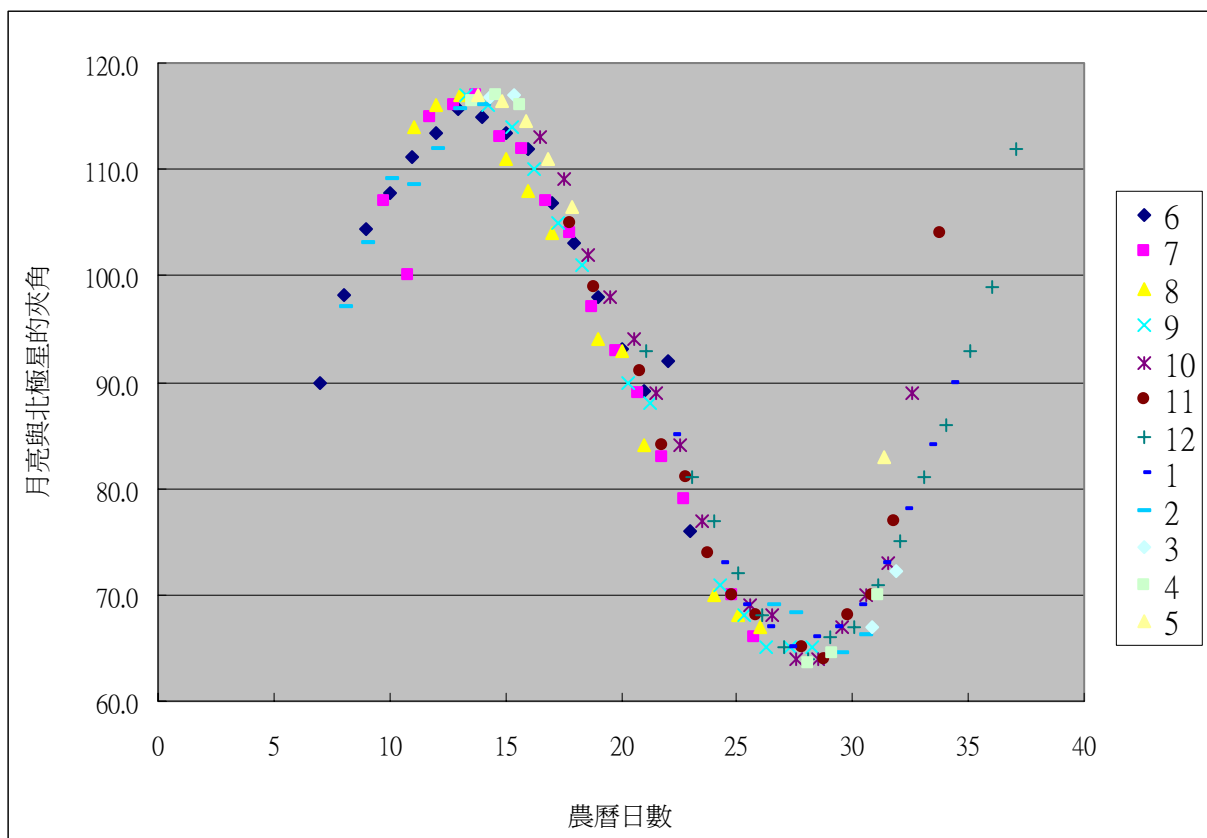


圖 35

二、太陽的觀測：

(一) 同日不同時間的觀測：

比照之前觀測月亮的方法來觀測太陽。從國曆 2002 年 7 月 15 日至 30 日（農曆 6 月 6 日至 21 日）的連續 16 天觀測中，我們發現同一天之內太陽與北極之間的夾角變化非常小（見“附件貳”中的表 5-1 至表 5-16）。這是因為在一天之內地球只繞太陽約 1/365 圈。

(二) 同月不同日的觀測：

我們繼續又觀測了 5 天（表 5-17），在這總共 **21 天的觀察中**，我們發現太陽與北極間的夾角沒有顯著的改變，且每日的最高點時間都約為正午。前者是因為在 21 天之內地球只繞太陽約 1/18 圈。

(三) 同年不同月的觀測：

從農曆 2002 年的 6 月到 2003 年的 5 月共 12 個月中，我們比照觀測月亮的方式將結果記錄在“附件貳”中的表 6-1 至 6-11，並整理成表 7，製作出圖 36。我們發現太陽與北極間的夾角在一年內的變化也很像 sin 函數，極大值為 114 度，極小值為 66.25 度，和課本上的 $90-23.5=66.5$

度相符合，這就是黃道面和赤道軸的夾角。

如同之前的月亮一般，我們也發現太陽在地平線上的時間會隨著與北極夾角的變化而改變，在農曆 11 月爲最短，5 月爲最長，如圖 37（表 8）。再將圖 36 及 37 的縱軸資料繪成圖 38，我們發現太陽與北極之間的夾角以及日落減日升的時間，關係成一直線。夾角越小時，它在地平線上的時間就會越長。這個直線關係約爲

$$\text{太陽在地平線上時間(分)} = 1080 \text{ 分} - 4 \times \text{太陽與北極夾角(度)} \quad (\text{公式 3})$$

這和月亮的（公式 2）幾乎完全一樣！

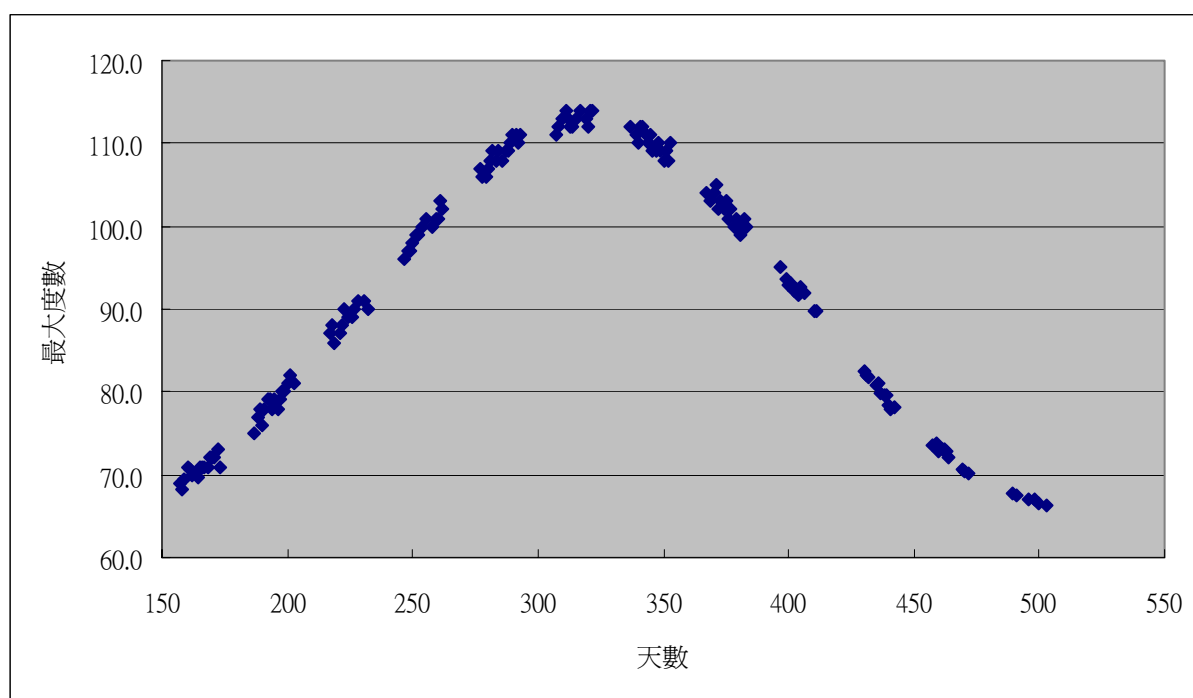


圖 36

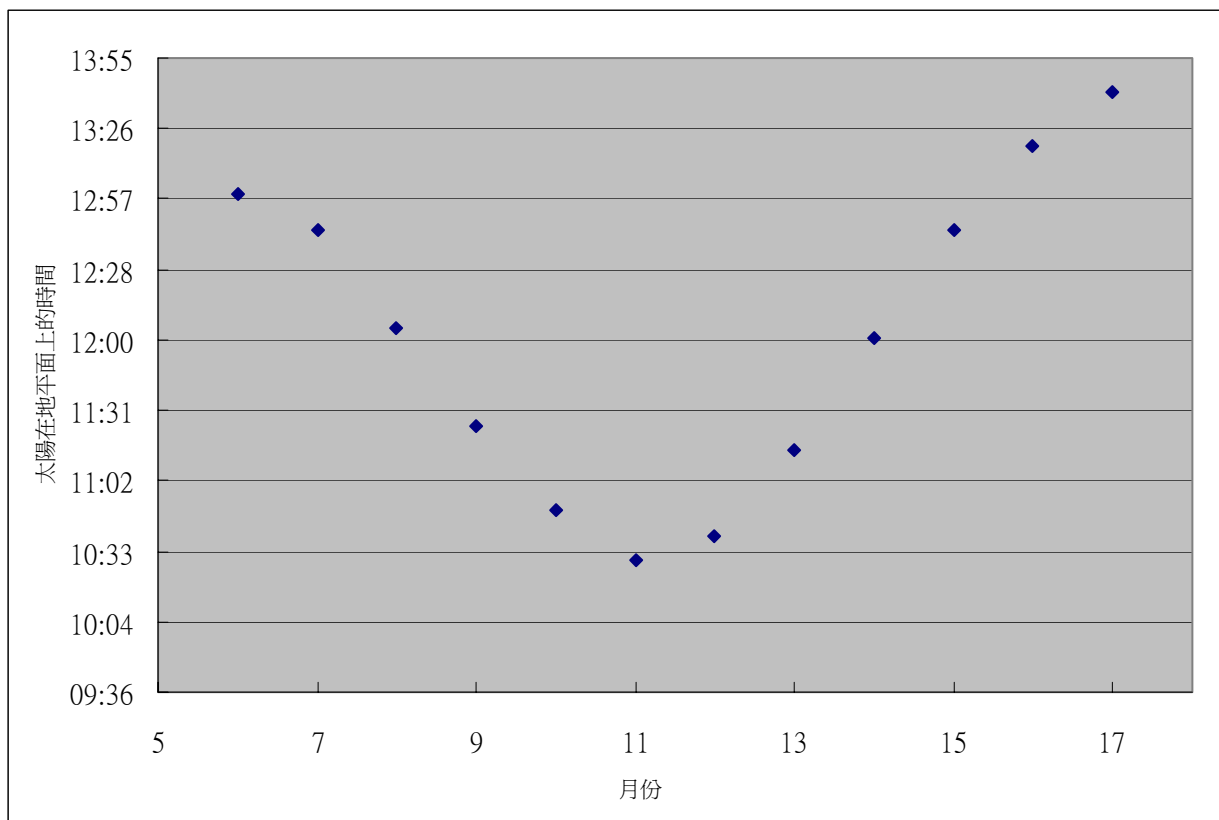


圖 37

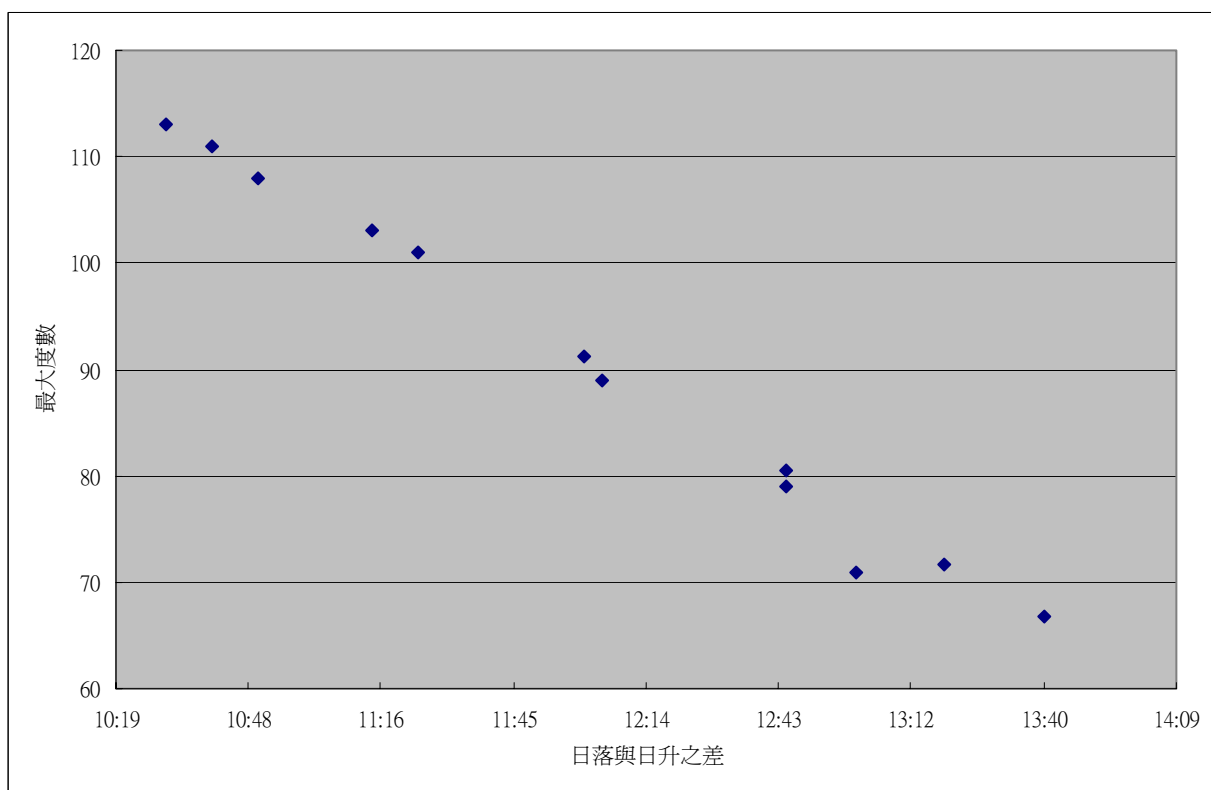


圖 38

三、太陽、地球、月球位置軌道模型：

最後我們依據所量得的數據來製作太陽、地球、月球軌道模型。首先依表 9-1 至 9-3 的分析結果，在 CD（代表白道面）上用黑線標出月球與北極最大夾角發生時的農曆日數，用綠線標出此時地球至月球連線的反方向，用橘線標出在夏至時太陽至地球連線的反方向平行線（圖 39）。

接著在 CD 的中心黏上切一半的保麗龍球代表地球，在四周的 90 度等間上黏上較小的保麗龍球代表月球。保麗龍球黑的一邊代表太陽所照射出來的影子。然後在地球上插入牙籤代表自轉軸，牙籤一端黏上寫有

“N”的自黏標籤代表北極，並標上它和白道面的最大夾角（圖 40）。重覆以上步驟分別做出 12 個農曆月的模型。

最後在挖有 12 個洞的珍珠板上標上太陽在這 12 個月間和地球的關係（圖 41），並將切一半的網球固定在中心代表太陽，然後將之前做好的 CD 以竹籤為轉軸固定在珍珠板上，表現出白道面和黃道面間的夾角。如果一切製作正確，我們可以看到各 CD 上的橘線都彼此平行。完成品請見圖 42。

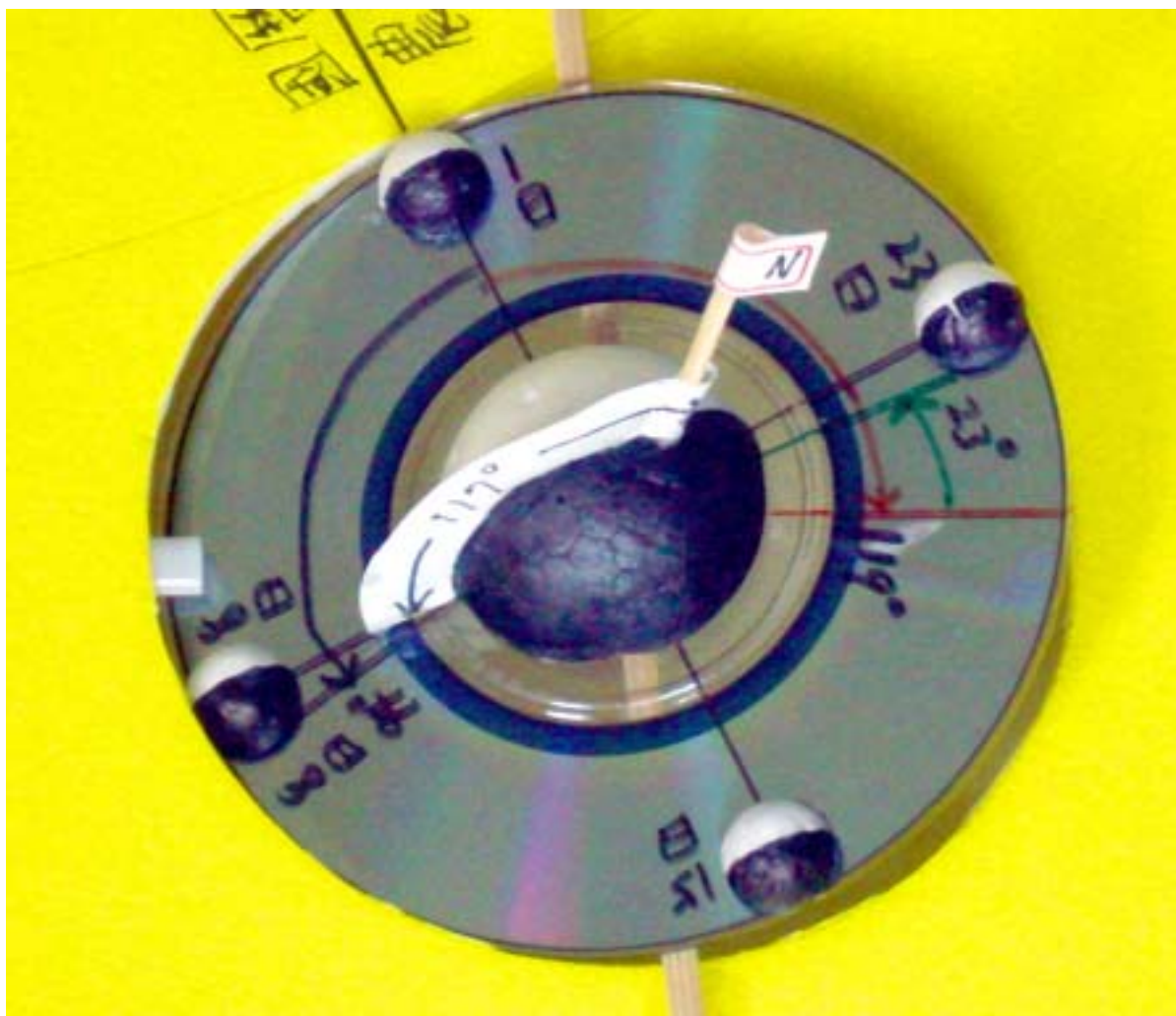


圖 39



圖 40

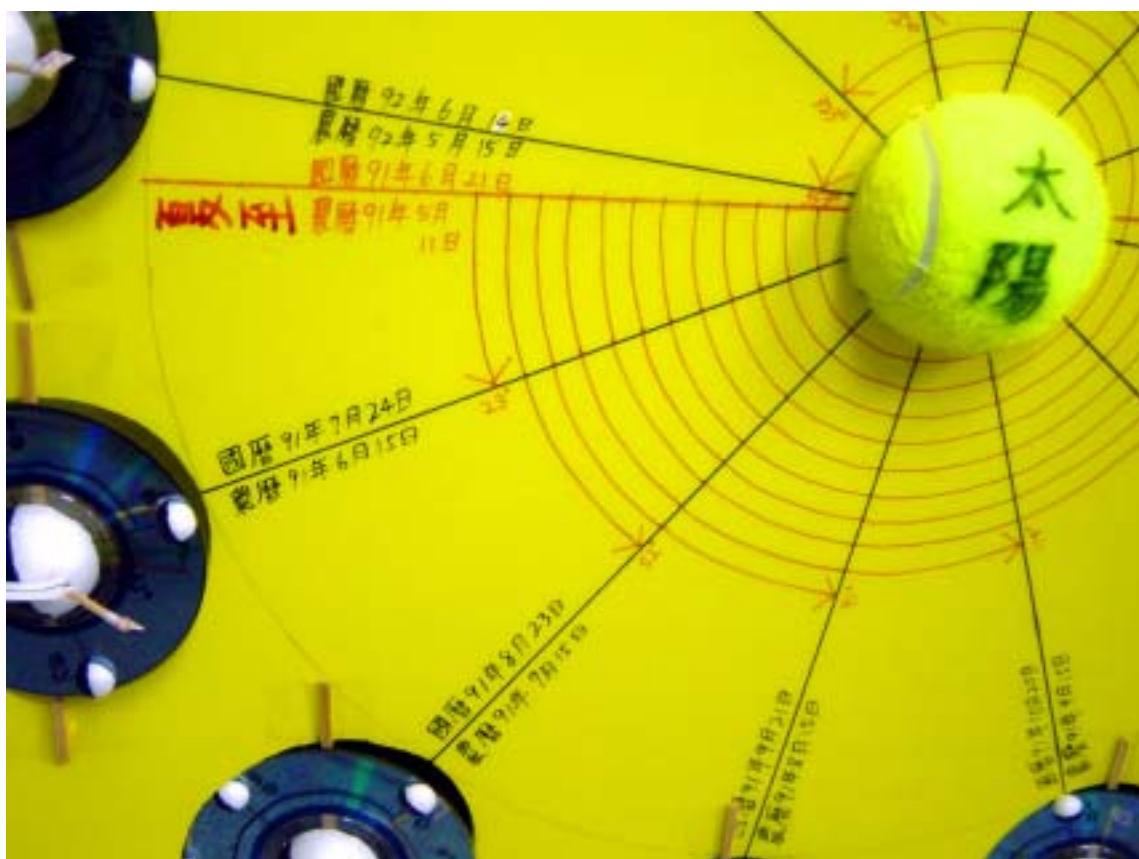


圖 41

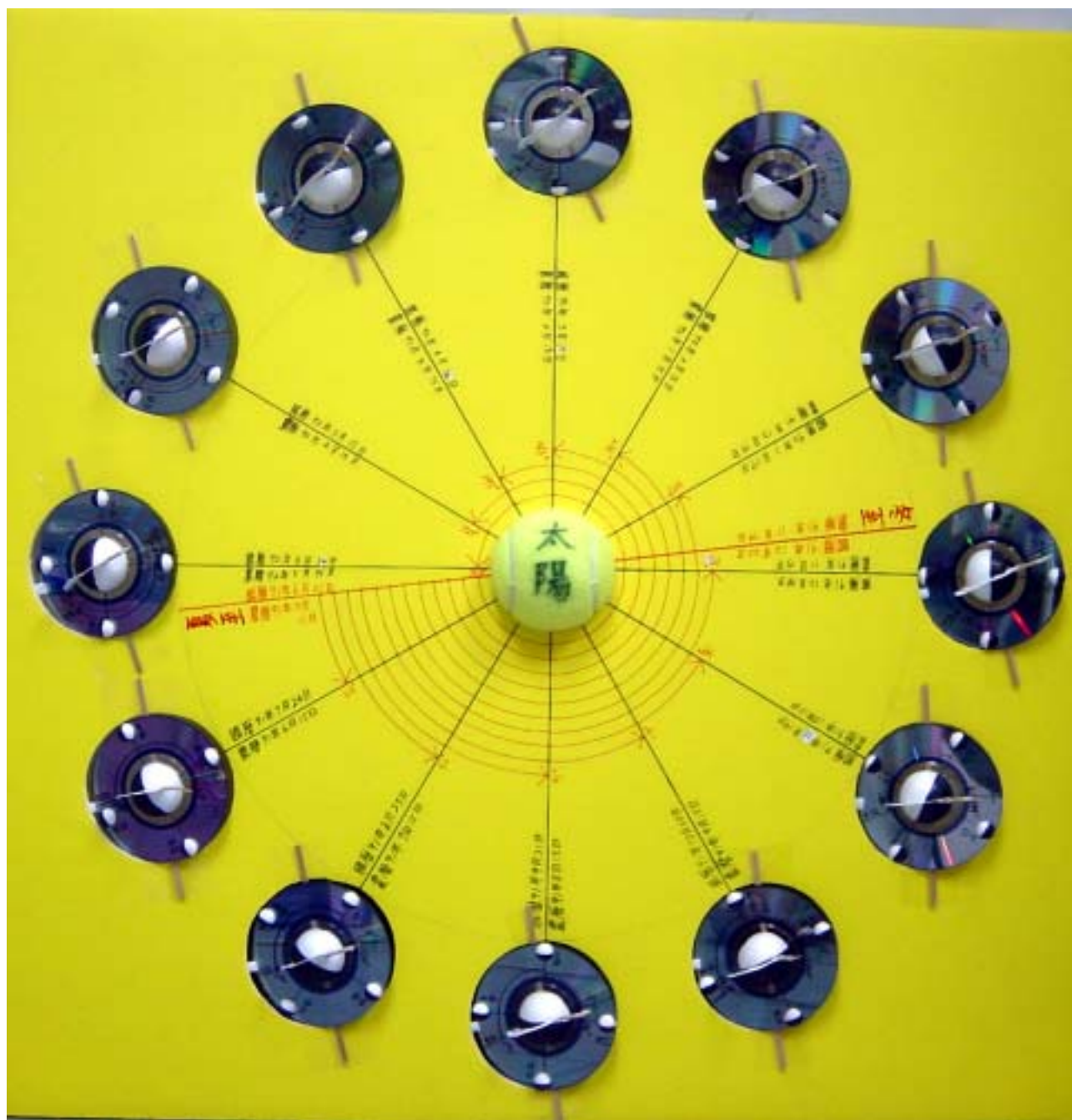


圖 42

柒、討論

- 一、從原始數據中可看出，第一、第二、第三及第四代定位儀的量測誤差並不相同，分別約為 5 度、3 度、1 度、小於 0.5 度。表 3-12 及表 6-12 為使用第四代的結果。**第四代不但最準，且使用方便。**
- 二、從圖 32 中發現在一個月內的不同日，月球在地平面上的時間會隨著與北極夾角的增加而減少，這其中的原因就好比赤道軸與黃道軸不平行以致造成白天時間的長短會隨著四季而改變，正如同圖 38 所觀測到一般。由於任何天體在地平面上的時間只和天體與北極的夾角以及北極和地平的夾角有關（圖 43），所以只要是由同一緯度觀測，不論太陽或月亮應會給出同樣的結果，這就是為什麼（公式 2）及（公式 3）幾乎完全一樣。
- 三、至於為何（公式 2）及（公式 3）是直線關係，我們發現這是一個有趣的幾何問題，經過長期的思考及嘗試，得到以下近似的證明：
如圖 44，由於台北緯度約為 25 度，故北極的仰角為 25 度，黑圓為單位球。令天體和北極的夾角為 a 度，在最高點時的位置為 C ，此時此天體繞行藍圈運轉，且比在 $a=90$ 度時於地平線上多走了 $2b$ 弧度，又 $AB=\cos(a) \tan(25^\circ)$ ，且 $AP=PC=\sin(a)$ ，故 $b=(AD \text{ 弧})/AP \doteq AB/AP=\cot(a) \tan(25^\circ)$ 。所以天體在地平線上的總時間為(分鐘)： $t = 60 \times 12 + 2b \times 24 \times 60 / (2\pi) \doteq 720 + 213.74 \cot(a)$ 。經過 Microsoft Excel 的測試，我們發現 $\cot(a)$ 在 a 界於 60 和 120 度間約為直線，可用 $-0.01745a + \pi/2$ 來近似，誤差在 10% 以下，因此：
$$t = 720 + 213.74 (-0.01745a + \pi/2) \doteq 1056 - 3.7a \quad (\text{公式 4})$$

這結果和（公式 2）及（公式 3）非常符合！
- 四、利用(公式 4)，我們可用天體定位儀在任意的時間觀測任意星體一次，而估算出其升上及落下地平線的時間。
- 五、由之前的分析結果知道黃道面和赤道軸的夾角為 66.5 度，且白道面與赤道軸的夾角為 63.5 度。結合這兩項資訊可知道白道面與黃道面之間的夾角最小為 $66.5-63.5=3$ 度，最大為 $(180-66.5)-63.5=50$ 度。但由 3D 模型中看到每一 CD 上的橘線及綠線幾乎都指向同一方向（橘線及綠線分別代表月亮和太陽與北極夾角為最小時相對於地球的方向），故知白道面與黃道面之間的夾角應較接近 3 度（若橘線及綠線同向）而不是 50 度（若橘線及綠線反向）。為了確定這個角度的實際大小，我們另外用珍珠板製作了相當於圖 29 中的北極軸、平面 X、平面 Y（定義請見“陸、研究過程或方法”之“二、太陽及月亮的觀測”），並由表 9-3 的分析知道

橘線與綠線在一年內的平均夾角約為 16.6 度，最後量得白道面與黃道面之間的夾角約為 5 度。這和之前文獻中所查到的 5 度 9 分完全符合。這也是為什麼不是每個月都有月蝕及日蝕的原因。

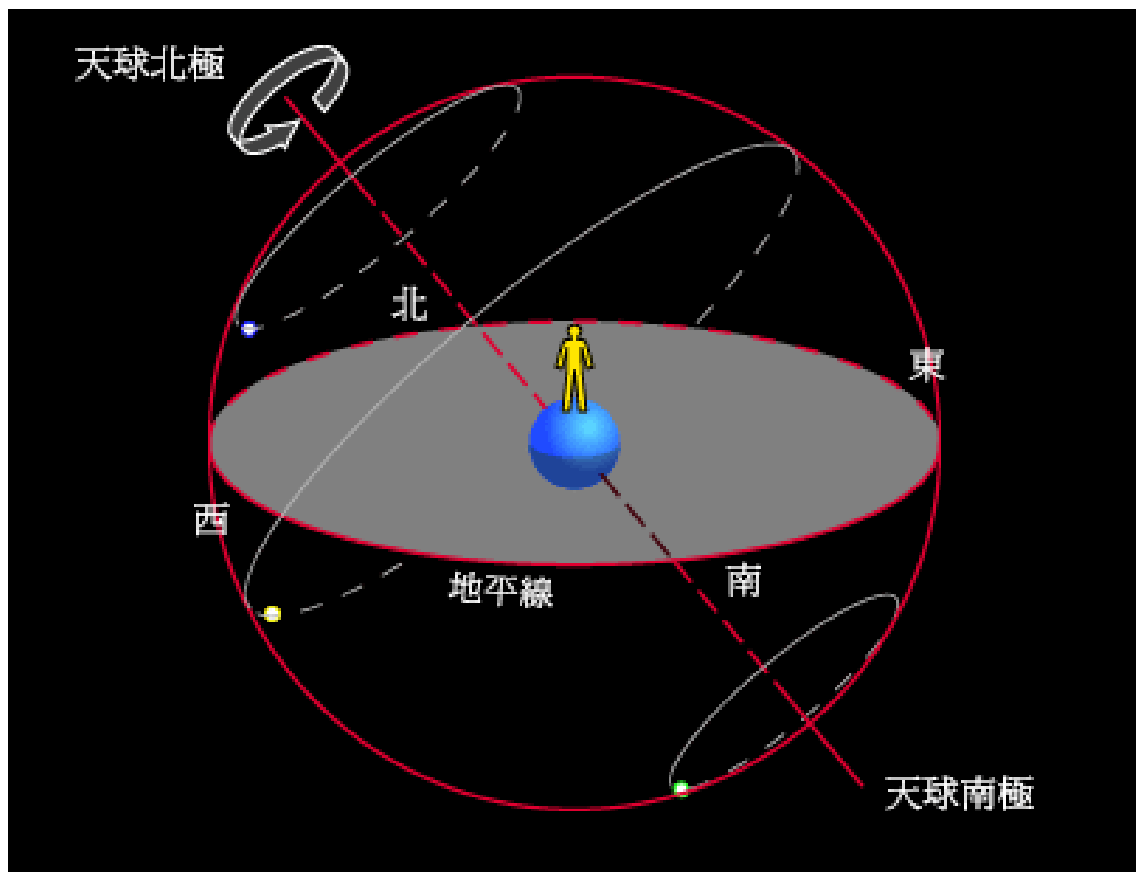


圖 43

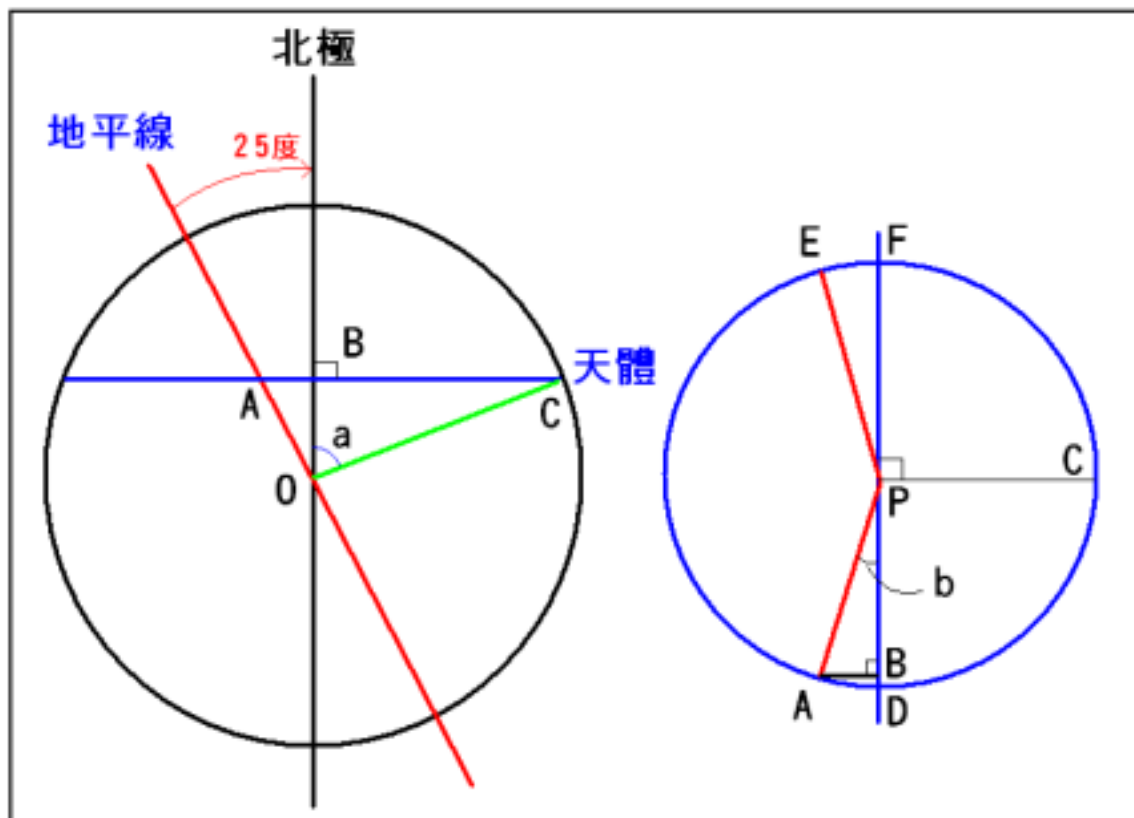


圖 44

捌、結論

經過了一年來對太陽及月亮的觀測與分析以後，我們得到以下的結論：

- 一、同一天內月亮與北極的夾角變化不大。這和在同一天內太陽與北極夾角沒有顯著改變的道理是一樣的。
- 二、月亮與北極之間的夾角發生極大值的農曆日數，每月平均提早約 2.26 日，這和我們的理論預測完全相符。
- 三、月亮與北極的夾角及其在地平面上的時間，兩者關係成一直線，太陽也是一樣，都滿足

$$\text{天體在地平線上時間(分)} = 1080 \text{ 分} - 4 \text{ (分/度)} \times \text{天體與北極夾角(度)}$$

我們並且用數學幾何的方式證明了這個觀測到的關係式。利用這個式子及天體定位儀，我們可準確估測任一可見天體升上及落下地平線的時分。

- 四、月亮與北極的夾角在一個月內看起來很像 sin 函數。它的極大值約為 117 度，極小值約為 63 度。經統計分析得到白道面與赤道軸的夾角約為 63.5 度。
- 五、太陽與北極之間的夾角在一年內的變化看起來也很像 sin 函數。它的極大值約為 114 度極小值約為 66.25 度，這和課本上所學的黃道面和赤道軸的夾角為 90-23.5=66.5 度完全相符合。
- 六、白道面與黃道面之間的夾角約為 5 度。

玖、參考資料

- 一、國中地球科學選修課本，第 1、2 章
- 二、Google 網站：<http://www.google.com>
- 三、《北一女中地球科學學習網站》之“太陽系小百科”：
<http://earth.fg.tp.edu.tw/learn/solar/>
- 四、《觀星小站》網站之“太陽系家族”：<http://www.viewstar.idv.tw/>
- 五、《香港太空館》網站之“宇宙的本質”：
http://www.lcsd.gov.hk/CE/Museum/Space/EducationResource/Universe/framed_c/index.html
- 六、<http://www.eces.ilc.edu.tw/CAI01/8.htm>
- 七、http://www.nmns.edu.tw/New/Exhibits/time/yt_01.htm

評語

- 1 自創並一再修正觀測儀器研究與實作精神可嘉
- 2 利用觀測資料，做一簡單的地月日模型，可做為課程輔助教材

