

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱： ” 瓶”分秋色，水”倒”渠成

關鍵詞：

編號：030415

學校名稱：

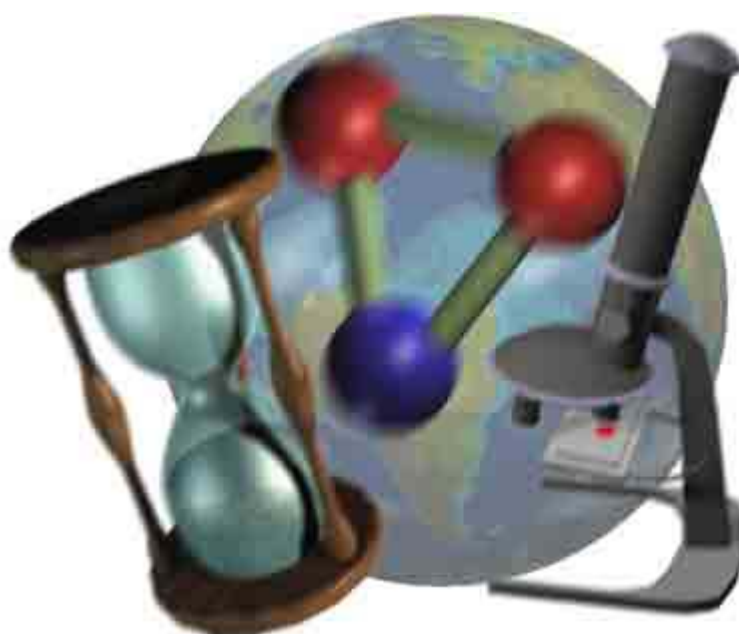
高雄縣嘉興國中

作者姓名：

臧采韻、邱柔瑾、林妍君、王士吉

指導老師：

陳筱涵



壹、研究動機：

最近在九章出版社的趣味幾何學看到了一道有趣的數學題目，使我聯想到多年以前的一部電影—「終極警探」，布魯斯威利在電影中利用可裝 3 公升水的容器，由已裝滿水的 5 公升容器中，把 4 公升水分出來，利用此重量而免除一場爆炸案，解決美國市中心所面臨空前絕後的災難。

但如果遇到的情形如下述，又該如何解決呢？或許是我們都想當英雄吧！不過確實激起了我們高度的研究興趣與求知慾望。

題目：

有三個玻璃杯，其容量分別為 12、9、5 單位，其中一單位表示 100 毫升 (ml)，今只有 12 單位容量裝滿水，其餘兩個杯子是空的，在沒有量杯或刻度情形下，如何利用這兩個空玻璃杯將 12 單位容量杯子盛滿的水分成一半？（參考 p12 附錄一）

貳、研究目的：

- (一) 探討任意不同容量的三個瓶子，是否可以把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半？
- (二) 如何判斷是否可以將大瓶子盛滿的水平均分成兩半？
- (三) 可不可以利用兩個空瓶子從最大瓶子裡倒出任何可能數量的水來。

※以『A, B, C』表示大瓶子、中瓶子、小瓶子的容量

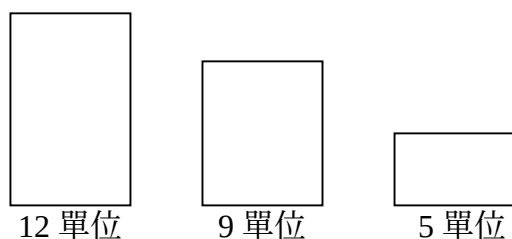
※以 (a,b,c) 表示大、中、小瓶子中目前所盛水的容量

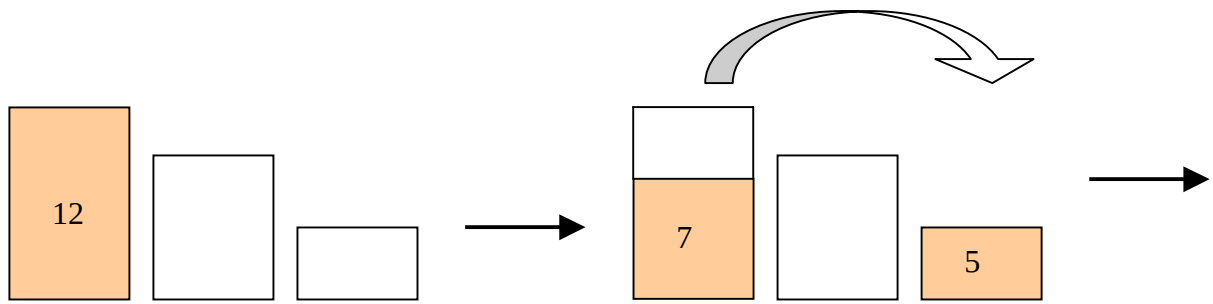
參、研究歷程與方法：

研究一：探討任意不同容量的三個瓶子，是否可以把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。

問題 1-1：給定容量分別為 12、9、5 單位的瓶子，以『12, 9, 5』表示，是否可以量出 6 單位的水呢？

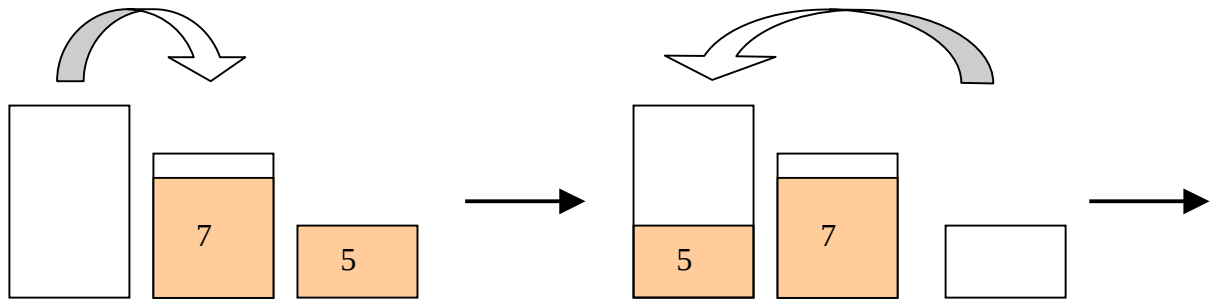
解法一：我們實際操作三個瓶子



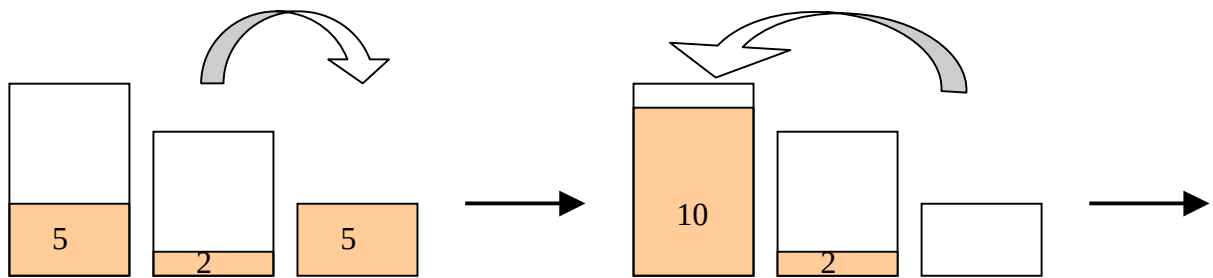


(1) 裝滿 12 單位的水

(2) 將 5 單位的水倒入 5 單位的瓶子中

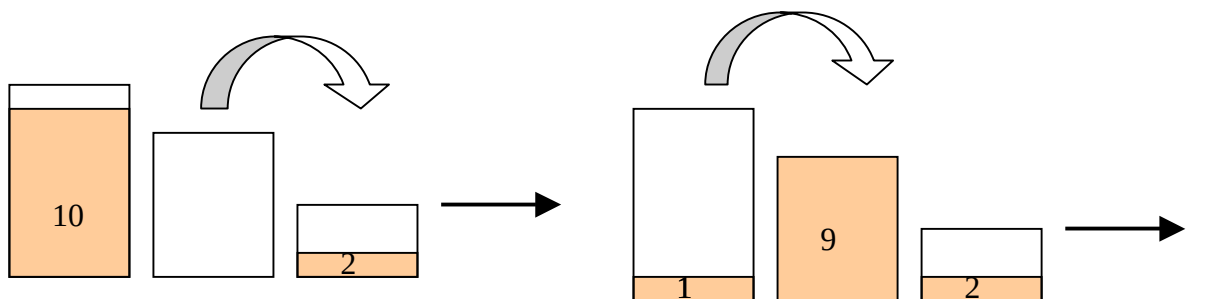


(4) 將小瓶子中 5 單位的水倒入大瓶子中

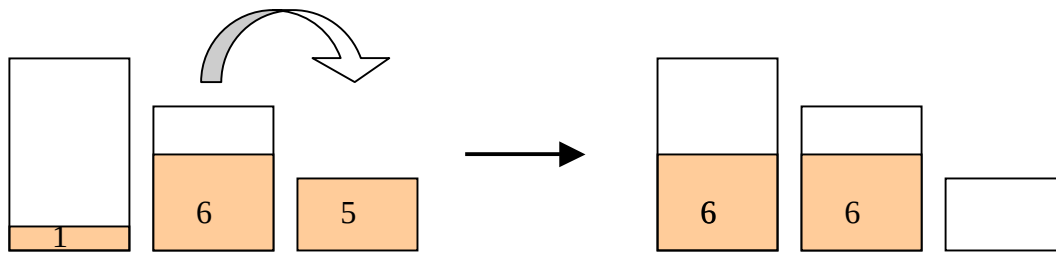


(5) 將中瓶子中 5 單位的水倒入小瓶子中

(6) 將小瓶子中 5 單位的水倒入大瓶子中



(8) 將大瓶子中 9 單位的水倒入中瓶子中



(9) 將中瓶子中 3 單位的水倒入小瓶子中

(10) 將小瓶子中的水倒入大瓶子中，即將 12 單位水平分

解法二：可將上列結果改寫成如下（每一欄為每次傾倒以後的結果）

12 單位瓶子	12	7	0	5	5	10	10	1	1	6
9 單位瓶子	0	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5 單位瓶子	0	5	5	0	5	0	2	2	5	0

亦可表示為：

(12, 0, 0) → (7, 0, 5) → (0, 7, 5) → (5, 7, 0) → (5, 2, 5)
 → (10, 2, 0) → (10, 0, 2) → (1, 9, 2) → (1, 6, 5) → (6, 6, 0)

我們經過一連串的的嘗試和試驗之後，不單單僅有一種方法到達目的，如下所示：

12 單位瓶子	12	7	7	2	2	11	11	6	6
9 單位瓶子	0	0	5	5	9	0	1	1	6
5 單位瓶子	0	5	0	5	1	1	0	5	0

12 單位瓶子	12	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
9 單位瓶子	0	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 單位瓶子	0	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

小結 1-1：『12, 9, 5』的組合可把 12 單位容量大瓶子中的水平均分成兩半；
 而且方法不只一種。

問題 1-2：給定容量分別為 8、6、3 單位的瓶子，是否可以量出 6 單位的水呢？

8 單位瓶子	8	2	2	5	5
6 單位瓶子	0	6	3	3	0
3 單位瓶子	0	0	3	0	3

小結 1-2：無法量出 4 單位的水。

結論一：任意不同容量的三個瓶子，不一定能把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。

研究二：如何判斷是否可以將大瓶子盛滿的水平均分成兩半？

『A, B, C』表示大瓶子、中瓶子、小瓶子的容量。

討論：**狀況一：B+C=A**

以 10 單位的大瓶子，7 單位的中瓶子，3 單位的小瓶子為例：

首先將 10 單位的瓶子裝滿水，再將水在 3 個瓶子之間倒來倒去，直到有兩個瓶子中的水為 5 單位。觀察這「倒來倒去」的過程，就好比在不同瓶子容量體積上進行加減運算。

設由 10 單位瓶子中的水倒進 7 單位的瓶子 x 次，由 7 單位瓶子倒進 3 單位的瓶子 y 次，最後是由 7 單位瓶子內裝 5 單位的水。（因 3 單位瓶子無法裝 5 單位的水）

$$\Rightarrow 7x - 3y = 5 \quad \star$$

$$\Rightarrow y = (2x - 2) + \frac{x+1}{3}$$

$$\text{令 } t = \frac{x+1}{3}, \text{ 且 } t \text{ 是正整數。}$$

$$\Rightarrow x = 3t - 1$$

$$\Rightarrow y = 2(3t - 1) - 2 + t = 7t - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 7t - 4 \end{cases}$$

取 $t=1$ 時， $x=2, y=3$

$\Rightarrow$ 也就是說在倒水的過程中，將水倒進 7 單位的瓶子 2 次，

由 7 單位瓶子倒進 3 單位瓶子 3 次。

以 (a, b, c) 表示 10 單位、7 單位、3 單位瓶子內水的容量，過程如下：

$$\begin{aligned} (10, 0, 0) &\rightarrow (3, \textcolor{red}{2}, 0) \rightarrow (3, 4, \textcolor{blue}{3}) \rightarrow (6, 4, 0) \rightarrow (6, 1, \textcolor{blue}{3}) \\ &\rightarrow (9, 1, 0) \rightarrow (9, 0, 1) \rightarrow (2, \textcolor{red}{2}, 1) \rightarrow (2, 5, \textcolor{blue}{3}) \rightarrow (5, 5, 0) \end{aligned}$$

動動腦想想只要上式★有整數解，即可知是否能將大瓶中的水平均成一半。

證明： $p, q, r \in \mathbb{Z}$, $px - qy = r$ 有整數解 $\Leftrightarrow (p, q) \mid r$

pf：設其有整數解 $x = x_0, y = y_0$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow px_0 - qy_0 = r$$

$$\text{設 } (p, q) = d, (d \in \mathbb{N})$$

$$\text{則 } p = dh, q = dk (h, k \in \mathbb{N} \text{ 且 } (h, k) = 1)$$

$$\Leftrightarrow dhx_0 - dky_0 = r$$

$$\Leftrightarrow d(hx_0 - ky_0) = r$$

$$\Leftrightarrow d \mid r$$

$$\Leftrightarrow (p, q) \mid r, \text{ 故得證。}$$

找出此不定方程式的通解：

$$px - qy = r \quad \text{..... ①}$$

$$px_0 - qy_0 = r \quad \text{..... ②}$$

$$\text{①} - \text{②} \Rightarrow p(x - x_0) - q(y - y_0) = 0$$

$$dh(x - x_0) - dk(y - y_0) = 0$$

$$h(x - x_0) = k(y - y_0) \quad \text{..... ③}$$

$$\Theta (h, k) = 1 \therefore k \mid (x - x_0)$$

$$\text{令 } (x - x_0) = kt \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad \text{..... ④}$$

$$\Rightarrow x = x_0 + kt = x_0 + \frac{q}{d}t$$

$$\text{④代入③}$$

$$\Rightarrow hkt = k(y - y_0)$$

$$\Rightarrow ht = (y - y_0)$$

$$\Rightarrow y - y_0 = ht$$

$$\Rightarrow y = y_0 + ht = y_0 + \frac{p}{d}t$$

故通解為 $x = x_0 + \frac{q}{d}t, y = y_0 + \frac{p}{d}t \quad t \in \mathbb{Z}$

小結 1：若 p 代表的是中瓶子的容量， q 代表的是小瓶子的容量， r 代表的是大瓶子容量的

試想將一粒球沿 OA 邊擊出，碰到邊時，根據入射角＝反射角的定律，折向另一邊。

我們不妨隨著球的滾動走去，直到走到 (6,0) 才停止。

球滾動時所經路線：如上圖橘色線條所指示的方向

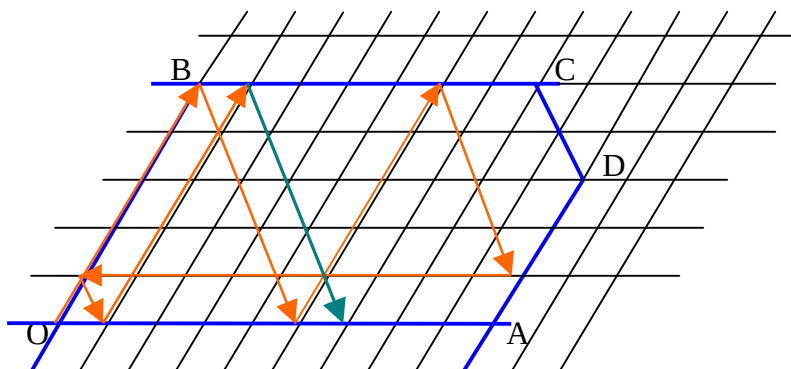
x	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
y	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

可改寫成如下：

大瓶子	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
中瓶子	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
小瓶子	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

由此表可得知經過 18 個步驟，可把 12 單位的水平分成一半 6 單位。但此路徑並非唯一，我們可以尋求最短路徑，以最少步驟完成目標。

做法如下：



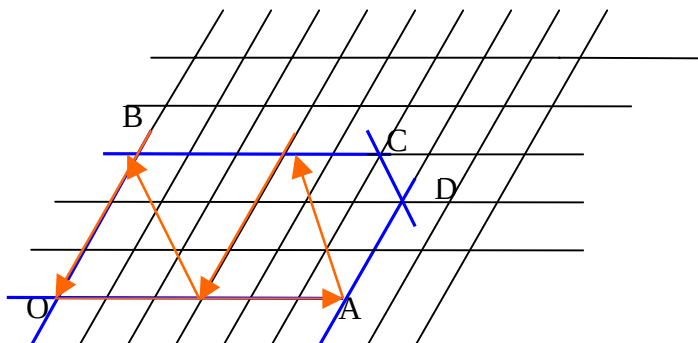
x	0	5	5	9	0	1	1	6
y	5	0	5	1	1	0	5	0

大瓶子	7	7	2	2	11	11	6	6
中瓶子	0	5	5	9	0	1	1	6
小瓶子	5	0	5	1	1	0	5	0

問題 2-2： $B + C > A$ ，不能將水平分成一半的情形，如何以圖說明呢？

例如：『8,6,3』。

$\overline{OA}$ 邊為6格, $\overline{OB}$ 邊為3格, $\overline{BC}$ 邊為 $(8-3)$ 格, $\overline{AD}$ 邊為 $(8-6)$ 格,
最後連接 $\overline{CD}$ 。由 $\overrightarrow{OA}$ 出發：(各點座標 (x,y) $\longrightarrow$ $x+y=8$)



由原點出發，最後仍回至原點，而撞不到 $(4,0)$ 。

x	6	3	3	0
y	0	3	0	3

大瓶子	2	2	5	5
中瓶子	6	3	3	0
小瓶子	0	3	0	3

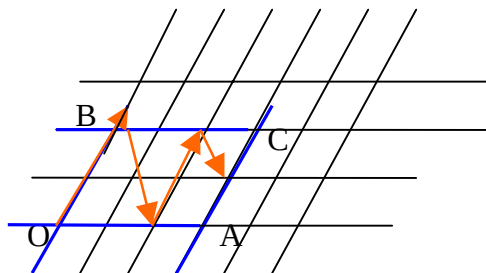
狀況三： $B+C < A$

以『8,3,2』為例（即8單位的大瓶子，4單位的中瓶子，2單位的小瓶子）。

畫出一些斜行的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60°

$\overline{OA}$ 邊為3格, $\overline{OB}$ 邊為2格, $\overline{BC}$ 邊為3格, $\overline{AC}$ 邊為2格

畫出平行四邊形 OACB，如下圖所示：



x	0	2	2
---	---	---	---

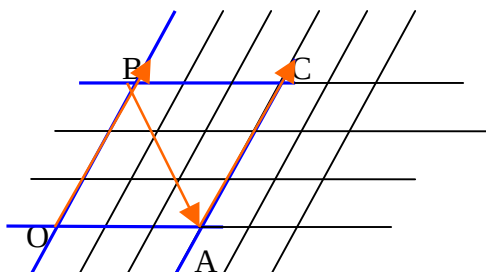
y	2	0	2
---	---	---	---

大瓶子	6	6	4
中瓶子	0	2	2
小瓶子	2	0	2

問題 2-3： $B+C < A$ ，不能將水平分成一半的情形，如何以圖說明呢？

例如『8,3,3』。

$\overline{OA}$ 邊為3格， $\overline{OB}$ 邊為3格， $\overline{BC}$ 邊為3格， $\overline{AD}$ 邊為3格。



x	0	3	3
y	3	0	3

大瓶子	5	5	2
中瓶子	0	3	3
小瓶子	3	0	3

由原點出發，始終無法撞擊到 (1,3)，(2,2)，(3,1)

【第一個數代表的是中瓶子的水，第二數代表的是小瓶子的水，
而 (8－第一個數－第二個數) 代表的是大瓶子中的水】

⇒ 無法將大瓶子中的水分成一半。

結論二：① $B+C=A$ ：若 $(B,C) \mid \frac{A}{2}$ ，則可將大瓶子的水分成一半。

② $B+C > A$ ：畫出一些斜行的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60° 。 $\overline{OA}$ 邊為 B 格， $\overline{OB}$ 邊為 C 格， $\overline{BC}$ 邊為 $(A-C)$ 格， $\overline{AD}$ 邊為 $(A-B)$ 格，最後連接

$\overline{CD}$ 。畫出圖形 OBCDA。由 O 點出發，以 (x,y) 表示任一點，若經過滿足 $x+y=A/2$ 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

③ $B+C < A$ ：畫出一些斜行的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60° 。 $\overline{OA}$ 邊為 B 格， $\overline{OB}$ 邊為 C 格， $\overline{BC}$ 邊為 B 格， $\overline{AC}$ 邊為 C 格。畫出平行四邊形 OACB。由 O 點出發，以 (x,y) 表示任一點，若經過滿足 $x+y=A/2$ 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

研究三：可不可以利用兩個空瓶子從最大瓶子裡倒出任何可能數量的水來。

問題 3-1：是否可以從 12 單位瓶子將其裝滿水，利用 9 單位空瓶子和 5 單位空瓶子量出 1 單位、2 單位、3 單位水以至 11 單位水來？

12 單位瓶子	12	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
9 單位瓶子	0	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 單位瓶子	0	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

小結 3-1：根據上表得知可量出 1 至 10 單位的水，而 11 單位的水可由（5 單位水+6 單位水）量得。

問題 3-2：是否可以從 10 單位瓶子將其裝滿水，利用兩個 5 單位空瓶子量出 1 單位、2 單位、3 單位水以至 9 單位水來？

10 單位瓶子	10	5	5	0
5 單位瓶子	0	0	5	5
5 單位瓶子	0	5	0	5

小結 3-2：根據上表得知只可量出 5 單位、10 單位的水來。

結論三：利用兩個空瓶子從最大瓶子裡不一定能倒出任何可能數量的水來。

肆、研究結果：

1. 任意不同容量的三個瓶子，不一定能把其中大瓶子盛滿的水平均分成兩半。
2. 判斷是否能將大瓶子盛滿的水平均分成兩半：

『A, B, C』表示大瓶子、中瓶子、小瓶子的容量。

① $B+C=A$ ：

若 $(B, C) \mid \frac{A}{2}$ ，則可將大瓶子的水分成一半。

② $B+C > A$ ：

畫出一些斜行的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60° 。

$\overline{OA}$ 邊為 B 格， $\overline{OB}$ 邊為 C 格， $\overline{BC}$ 邊為 $(A-C)$ 格， $\overline{AD}$ 邊為 $(A-B)$ 格，最後連接 $\overline{CD}$ 。畫出圖形 $OBCDA$ 。由 O 點出發，以 (x, y) 表示任一點，若經過滿足 $x+y=A/2$ 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

③ $B+C < A$ ：

畫出一些斜行的格子，使每個格子都為大小相等的菱形，菱形的銳角為 60° 。

$\overline{OA}$ 邊為 B 格， $\overline{OB}$ 邊為 C 格， $\overline{BC}$ 邊為 B 格， $\overline{AC}$ 邊為 C 格 畫出平行四邊形 $OACB$ 。

由 O 點出發，以 (x, y) 表示任一點，若經過滿足 $x+y=A/2$ 的點，則表示可將大瓶子中的水分成一半。

3. 利用兩個空瓶子從最大瓶子裡不一定能倒出任何可能數量的水來。

伍、研究心得：

經過這些日子以來的努力，我們師生終於完成了這項 “**Mission impossible**” 數學科展，一切的辛苦總算有了代價！做科展的最大收穫就是經由大家一起討論、研究進而集思廣義產生不同的思考及解決方法，同時也培養合作學習的默契與精神。經由這次科展的研究，發現生活中的數學真是無所不在，也了解到學習數學不只是為了考試，而更重要的是能以數學解決生活上所遇到的難題，並深切發覺其中的樂趣！

陸、參考資料：

趣味算數（90） 九章出版社

趣味幾何學（89） 九章出版社

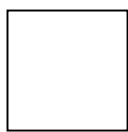
使人聰明的智力遊戲（86） 九章出版社

柒、附錄一：

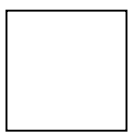
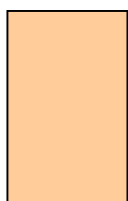
電影「終極警探」布魯斯威利利用可裝 3 公升水的容器，由已裝滿水的 5 公升容器中，把 4 公升水分出來，利用此重量而免除一場爆炸案，解決美國市中心所面臨空前絕後的災難。



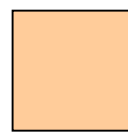
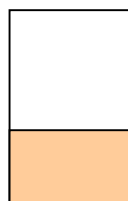
5 公升大容器



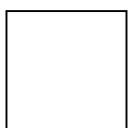
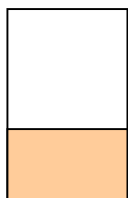
3 公升小容器



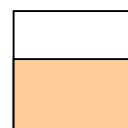
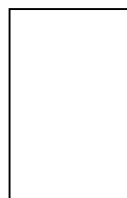
(1) 裝滿 5 公升的水



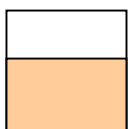
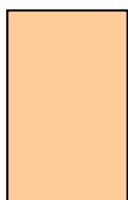
(2) 將 3 公升的水倒入 3 公升的容器中



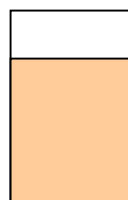
(3) 倒掉 3 公升的水



(4) 將大容器中的 2 公升
倒入 3 公升的容器中



(5) 再裝滿 5 公升的水

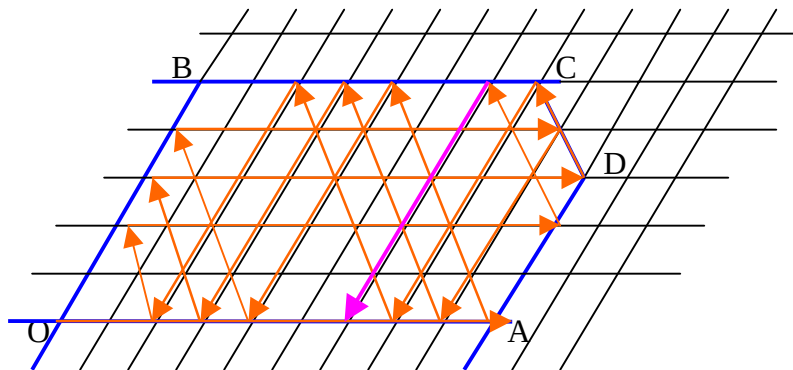


(6) 由大容器中的水倒滿小容器

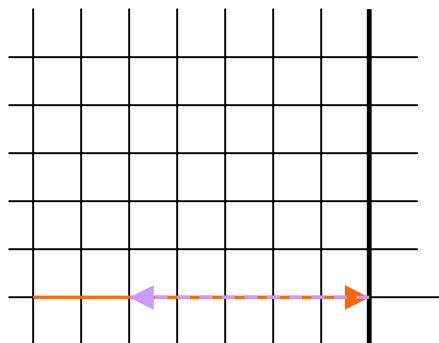
最後，大容器所剩下來的水就是 4 公升！

附錄二：

畫出圖形 OBCDA。



例如：



圖形 OBCDA 的範圍由來：

$$\begin{cases} x \leq 9, y \leq 5 \\ x + y \leq 12 \end{cases}$$

以上述條件下所畫出的範圍即為圖形 OBCDA。

評語

能從平易的生活經驗中發現數學規律並加以深究以解決疑惑，值得讚賞。仍可從研究中發掘更多的數學關連。