中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：探討面積在轉動中的不變性

關鍵詞：基準形、轉動形、幾何不變量

編號：030414

學校名稱：

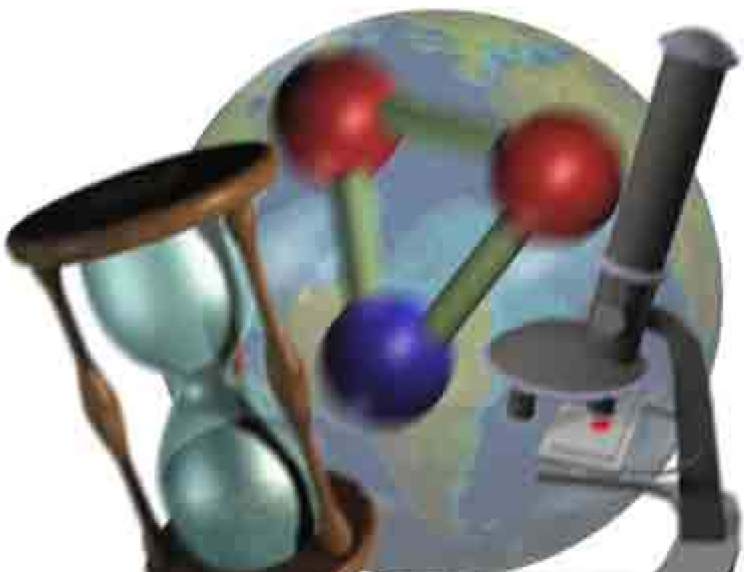
彰化縣立員林國民中學

作者姓名：

黃暉凱、謝承穎、邱凱楠

指導老師：

顏富明、謝文明



壹、研究動機：

在一次上課中，老師與我們討論一個名為<幾何不變量>的問題，當時的題目是：

兩個邊長相等的正方形，其中一個正方形的某頂點重合於另一正方形的中心 O，並繞 O 旋轉。求證：無論怎樣旋轉，兩個正方形的重疊部分面積是一個定值。

此定值即為幾何不變量。證明結束後，有同學問到當正方形換成其他的正多邊形時，或變為一大一小（即邊長不相等）的正 n 邊形（n 為自然數且 n≧3）時，是否也具有<幾何不變量>的特性？有同學猜測全都會，有同學主張除了正方形以外，其他的都不具有此特性，在眾說紛紜下，我們就決定以此作為科展的題目進行深入的研究，並加以證實。

貳、研究目的：

（一）研究兩個邊長相等的正多邊形，在原來題目的條件下，是否也具有幾何不變量的性質？

（二）研究對於兩個一大一小（即邊長不相等）的正多邊形在原來題目的條件下，是否也具有此幾何不變量的性質？

參、研究設備與器材：

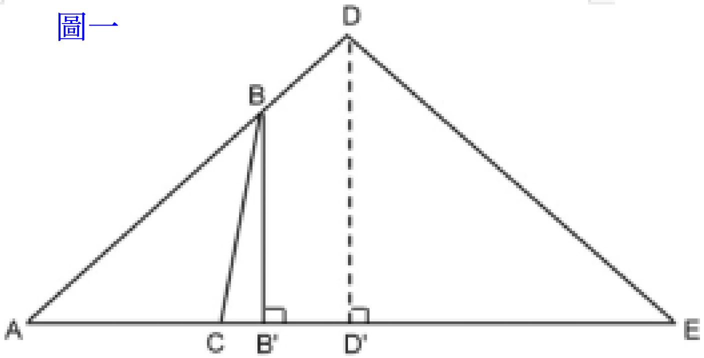
紙、筆、圓規、直尺、量角器、電腦、正多邊形模形。

肆、研究過程

（一）需要用到的性質及定義

性質 1

圖一



已知：如圖一，△ABC、△ADE 中 ∠A＝∠A

求證：△ABC：△ADE＝$\overline{AB}\times\overline{AC}:\overline{AD}\times\overline{AE}$

證明：過 B、D 兩點 作$\overline{BB'}\perp\overline{AE}$ ， $\overline{DD'}\perp\overline{AE}$

∵∠A＝∠A ， ∠AB’B＝∠AD’D＝90°

∴△ABB’ △ADD’（AA 相似）， =>$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AD'}}=\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{DD'}}$

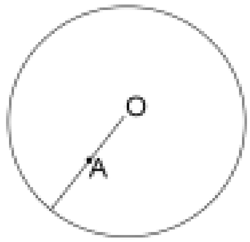
又$\dfrac{\Delta ABC}{\Delta ADE}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BB'}}{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DD'}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}}{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{AD}\times\overline{AE}}$

即△ABC：△ADE＝$\overline{AB}\times\overline{AC}:\overline{AD}\times\overline{AE}$

性質 2

定義	A 的“高度”：如圖二 A 的高度＝半徑－$\overline{OA}$，即 A 到圓周的距離。	
	基準形：其中心點作為旋轉中心的固定正多邊形。	
	轉動形： 一頂點固定在旋轉中心，繞旋轉中心順時鐘而轉動的正多邊形。	
	“轉動前”：轉動形一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線（這是普遍的“ 轉動前 ”，若有較特殊的，則會附帶說明）。	
	“單位圓心角”：意指“ 基準形的一個邊所對的圓心角 ”。	

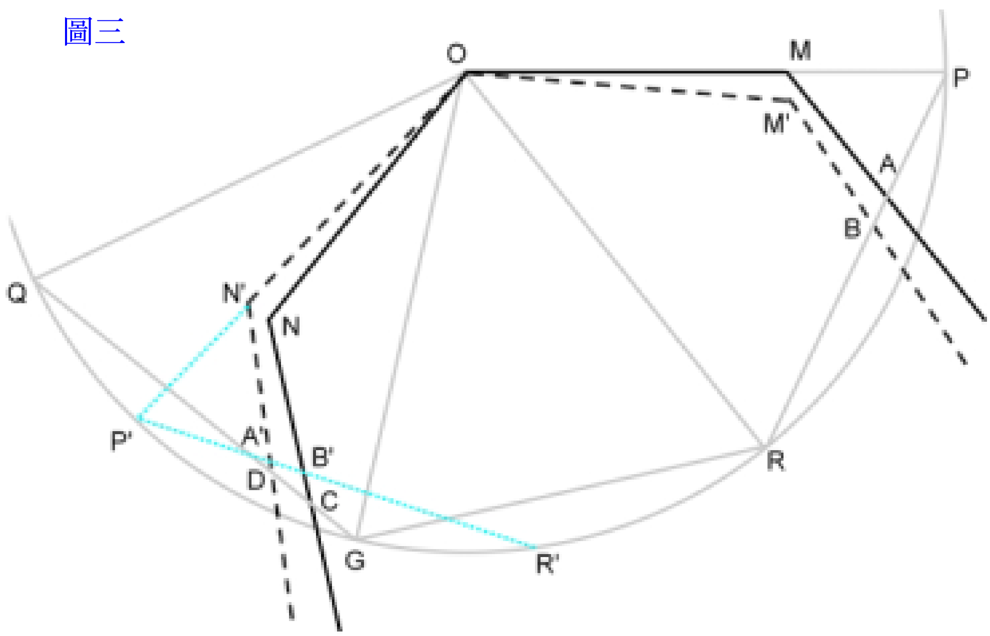
圖二



以下所論證的問題的“前提 ”：轉動形的邊長＜基準形的外接圓半徑＜轉動形的最長對角線。
如圖三、四、五、六、七、八，圓 O 為正 n（n≧5）邊形（基準形）的外接圓，另一正 n（n≧5）邊形（轉動形）的任一頂點與 O 重合，並繞 O 旋轉（此兩正 n（n≧5）邊形的邊長相等或不相等皆可）。
以下分為奇邊形（圖三、四、五）和偶邊形（圖六、七、八）加以證明：

1.奇邊形（2n-1 邊形，n≧3）

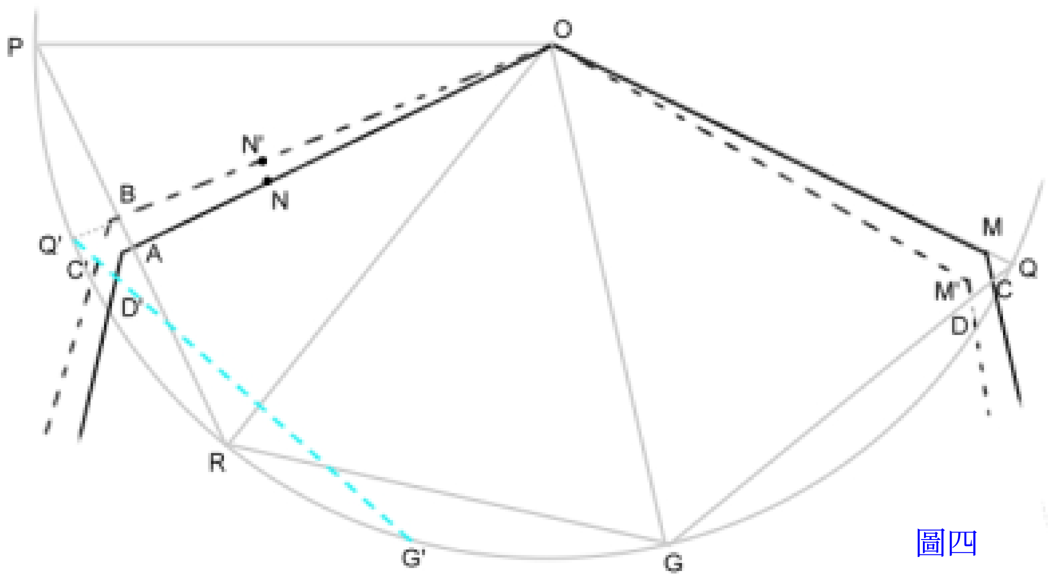
圖三



圖三為： “A 慢慢升高為 B ； C 慢慢升高為 D”

圖三之圖形說明：(有關 A 升高為 B 之情形)

p.s.若基準形和轉動形邊的交點（如 A）在轉動時漸漸靠近基準形邊（如 $\overline{PR}$）的中點時，此交點會漸漸升高。(如 A 升高為 B)（∵ $\overline{PR}$ 的中點在 $\overline{PR}$ 中是最高的∴越靠近 $\overline{PR}$ 中點的點越高）



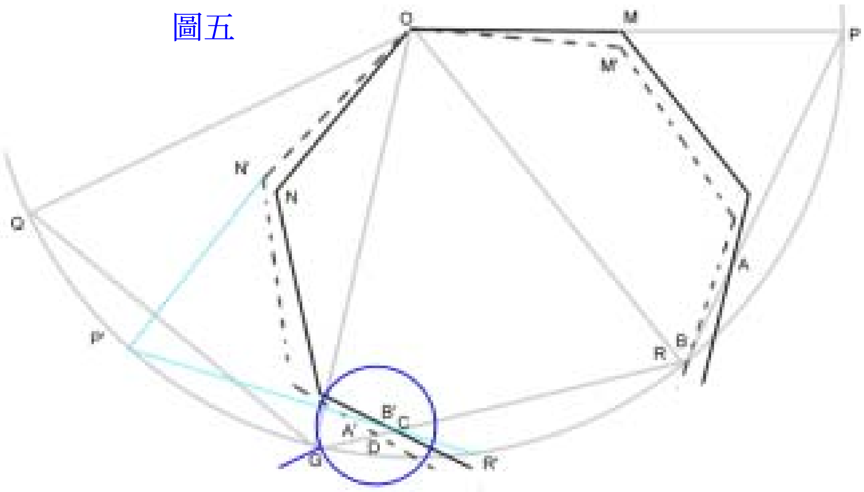
圖四

圖四為： “A 慢慢降低為 B ； C 慢慢升高為 D”

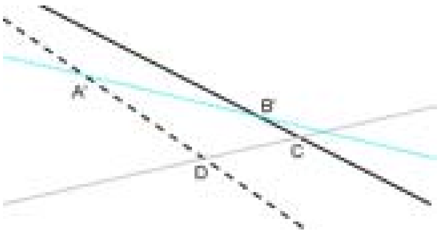
圖四之圖形說明：(有關 A 降低為 B 之情形)

（此圖∵轉動形的邊＞基準形內切圓半徑，而由 **“四-性質 2-註 1”**可知 $\overline{OA}$ 重疊於∠ROP 的角平分線=>A 在 $\overline{PR}$ 的中點=>B 比 A 低)。若基準形和轉動形邊的交點（如 A）在轉動時漸漸遠離基準形邊（如 $\overline{PR}$）的中點時，此交點會漸漸降低。(如 A 降低為 B)（∵ $\overline{PR}$ 的中點在 $\overline{PR}$ 中是最高的∴越遠離 $\overline{PR}$ 中點的點越低）

圖五



圖五之放大



圖五為：“A 慢慢降低為 B ； C 慢慢降低為 D”

針對圖三、四、五的圖形說明：

轉動形在轉動一個小角度 α 前{ 即轉動形的一邊【即$\overline{OM}$】貼齊基準形的中心點到一頂點 P 的連線【即$\overline{OP}$】(若如圖四時，轉動形的一邊【即$\overline{OM}$】貼齊基準形的中心點到一頂點 Q 的連線【即$\overline{OQ}$】)}，基準形和轉動形邊的兩個交點 (即 A 與 C) 不等高{ ∵轉動前轉動形只有一邊貼齊基準形的中心點到一頂點的連線 ，另一邊則否（四-性質 2-註 1)，【此時我們的想法*】=>$\overline{OM}$ 重疊於$\overline{OP}$ (若為圖四，則$\overline{OM}$ 重疊於$\overline{OQ}$)，但$\overline{ON}$ 並未重疊於$\overline{OQ}$ (若為圖四，則$\overline{ON}$ 並未重疊於$\overline{OP}$)}，我們令 A 為較高點，C 為較低點，轉動後基準形和轉動形邊的兩個交點由 A 轉變為 B；C 轉變為 D。

A’為 A 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點，

B’為 B 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點。

(若為圖四，則是 C’為 C 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點，D’為 D 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點。)

$\overline{P'R'}$為$\overline{PR}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段（若為圖四，則$\overline{Q'G'}$為$\overline{QG}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段。）

*想法：

起初我們認為：∵$\overline{OM}$重疊於$\overline{OP}$（若為圖四，則$\overline{OM}$重疊於$\overline{OQ}$），但$\overline{ON}$並未重疊於$\overline{OQ}$（若為圖四，則$\overline{ON}$並未重疊於$\overline{OP}$）∴以∠POQ的角平分線為對稱軸，A 和 C 並不互為對稱點=>A、C 不等高。但後來經過不斷的以模型討論後，發現即使 A 和 C 不互為對稱點，A 和 C 還是有機會等高。這種特殊的情形，我們在“六、討論”中會加以探討。

※性質 2 有關奇邊形的證明皆是在 A 與 C 不等高的前提下加以論證。

已知：A 的高度＞C 的高度，針對下列三種情形的任何一種的條件之下

情形 1：A 慢慢升高為 B ； C 慢慢升高為 D（如圖三）

情形 2：C 慢慢升高為 D ； A 慢慢降低為 B（如圖四）

情形 3：A 慢慢降低為 B ； C 慢慢降低為 D（如圖五）

求證：$\overline{A'B'}$與$\overline{CD}$必有機會沒有交點。（若為圖四，則$\overline{AB}$與$\overline{C'D'}$有機會沒有交點。）

證明：(下列證明適用於情形 1、情形 2、情形 3)

“欲證 A 必有機會比 D 高，且同時 B 必有機會比 C 高”

1.∵A 比 C 高 ∴在轉動極小角度的條件下，當 A 轉變為 B 時，不論 B 是由 A 慢慢下降或慢慢升高，B 都必有機會比 C 高。

2.∵A 比 C 高 ∴在轉動極小角度的條件下，當 C 轉變為 D 時，不論 D 是由 C 慢慢下降或慢慢升高，A 都必有機會比 D 高。

3 .由 1.、2.可知，轉動的情形可分為 4 大類，如右表所述，但“轉動前轉動形和基準形在右方的交點在轉動時漸低、轉動前轉動形和基準形在左方的交點在轉動時漸高”為不可能, 我們在（四-性質 2-註 3）中加以解釋。

	轉動形和基準形在**右方**的交點 如圖三的 A 如圖四的 C 如圖五的 A	轉動形和基準形在**左方**的交點 如圖三的 C 如圖四的 A 如圖五的 C
圖三	升高	升高
圖四	升高	降低
圖五	降低	降低
圖九（四-性質 2-註 3）	降低	升高

4.由 1.、2.可知，A 必有機會比 D 高，且同時 B 必有機會比 C 高。

∵A’的高度＝A 的高度；B’的高度＝B 的高度

（若為圖四則 C’的高度＝C 的高度；D’的高度＝D 的高度）

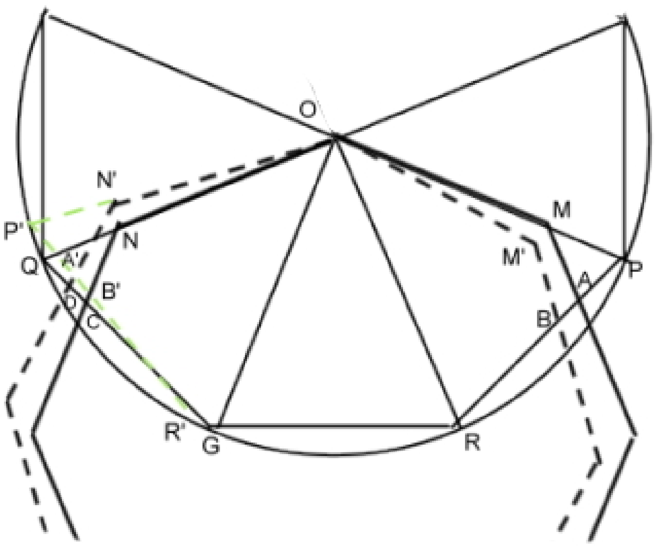
=>A’的高度＞D 的高度；B’的高度＞C 的高度

（若為圖四則=>A 的高度＞D’的高度；B 的高度＞C’的高度）

=> $\overline{A'B'}$ 與 $\overline{CD}$ 必有機會沒有交點。（若為圖四則=> $\overline{AB}$ 與 $\overline{C'D'}$ 沒有交點。）

2.偶邊形（2n 邊形，n≧3）

圖六



圖六為：“A 慢慢升高為 B ； C 慢慢降低 為 D”

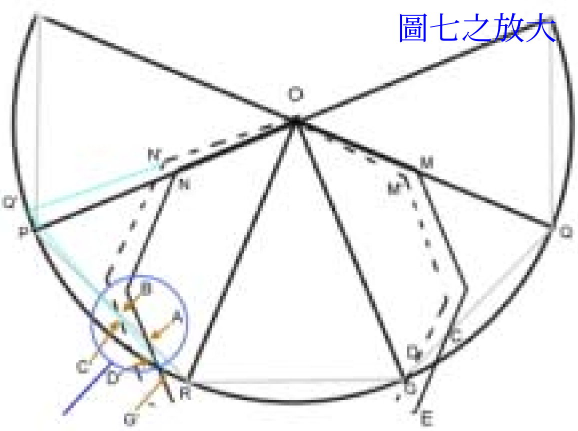
圖六之圖形說明：

$\frac{1}{2}\overline{OP} < \overline{OM} < \overline{OP}$

圖七

圖七同為：“C 慢慢降低為 D ； A 慢慢升高為 B”

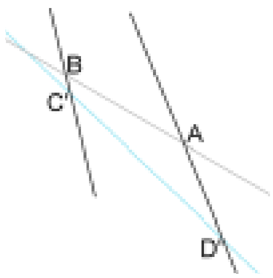
圖七之放大



圖七之圖形說明：

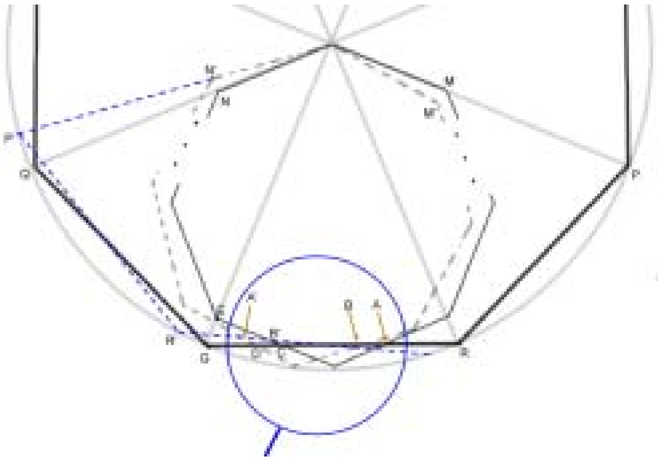
{ 雖然轉動形邊長的大小和圖六不同 ， 但∵A 的高度＝C 的高度（由圖六、七、八的圖形說明） ， 轉動時 A 亦慢慢升高為 B ； C 亦慢慢降低為 D ， 所以證明方法相同 }

$\overline{OM} < \frac{1}{2}\overline{OP}$ 且轉動形的第二短對角線（如 $\overline{OE}$ ）＞ $\overline{OG}$

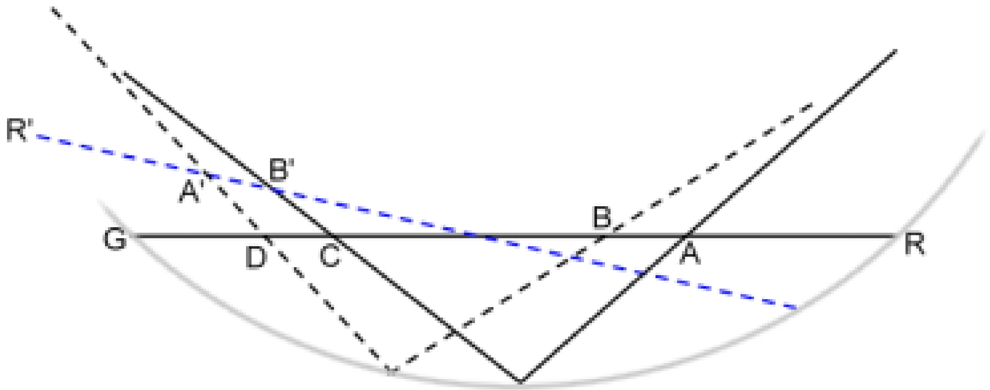


圖七之放大

圖八



圖八之放大



圖八同為：“A 慢慢升高為 B ； C 慢慢降低為 D”

圖八之圖形說明：

$\overline{OM} < \frac{1}{2}\overline{OP}$，且轉動形的第二短對角線（如$\overline{OE}$）$<\overline{OG}<$轉動形的最長對角線（雖然轉動形的大小和圖六、圖七皆不同，但∵A 的高度＝C 的高度（由圖六、七、八的圖形說明），轉動時 A 亦慢慢升高為 B ； C 亦慢慢降低為 D， 所以證明方法相同）

針對圖六、七、八的圖形說明：
轉動形在轉動一個小角度α前（即轉動形在旋轉中心兩側的邊分別貼齊基準形的中心點到頂點的連線）基準形和轉動形邊的兩個交點（即 A 與 C）必等高（∵轉動形在旋轉中心兩側的邊皆貼齊基準形的中心點到頂點的連線（四-性質 2-註 2），再由線對稱的性質可推知，其兩交點 A 與 C 必等高）。而轉動後基準形和轉動形邊的兩個交點由 A 轉變為 B；C 轉變為 D。
A’為 A 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點。
B’為 B 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點。
（若為圖七則 C’為 C 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點
D’為 D 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點）

$\overline{P'R'}$為$\overline{PR}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段

（若為圖七，則$\overline{Q'G'}$為$\overline{QG}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段。）

已知：A 的高度＝C 的高度，針對下列三種情形的任何一種的條件之下
情形 1：A 慢慢升高為 B ； C 慢慢降低為 D（即圖六）
情形 2：C 慢慢降低為 D ； A 慢慢升高為 B（即圖七）
情形 3：A 慢慢升高為 B ； C 慢慢降低為 D（即圖八）

求證：$\overline{A'B'}$與$\overline{CD}$必有機會沒有交點。（若為圖七則求證$\overline{AB}$與$\overline{C'D'}$必有機會沒有交點。）

證明：“欲證 A 必有機會比 D 高，且同時 B 必有機會比 C 高”
轉動一個小角度α後，A 的高度會漸漸升高成為 B，C 的高度會漸漸降低成為 D，我們令 A 在$\overline{PR}$上，但不是$\overline{PR}$的中點，C 在$\overline{QG}$上，但不是$\overline{QG}$的中點（若為圖八，則 A、C 皆在$\overline{GR}$上，但皆不是$\overline{GR}$的中點，但∵圖八 A，C 皆在基準形的同一邊上，∴若 A 為基準形邊的中點，C 亦為基準形邊的中點的話，A、C 就重合於$\overline{GR}$的中點，若有此情形，則轉動形就會完全沒入基準形內∴不用討論此情形）。另一方面，若 A 恰為$\overline{PR}$的中點，C 恰為$\overline{QG}$的中點，則我們另在 “六、討論”中加以證明。※此“性質 2 之偶邊形”皆是以 A 不在$\overline{PR}$的中點，且 C 不在$\overline{QG}$的中點的前提下加以論證）。∵A 和 C 等高，且 A 和 C 不在基準形邊的中點∴有一點會漸靠近基準形邊的中點，一點會遠離（我們令 A 的高度是會增加的【轉動時會漸靠近中點的】，C 的高度是會減少的【轉動時會漸遠離中點的】），而 A 的高度＝C 的高度，
=>B 的高度＞A 的高度＝C 的高度＞D 的高度

∵A’的高度＝A 的高度；B’的高度＝B 的高度
（若為圖七 C’的高度＝C 的高度；D’的高度＝D 的高度）
=>A’的高度＞D 的高度；B’的高度＞C 的高度
（若為圖七=>A 的高度＞D’的高度；B 的高度＞C’的高度）

=> $\overline{A'B'}$ 與 $\overline{CD}$ 沒有交點。（若為圖七=> $\overline{AB}$ 與 $\overline{C'D'}$ 沒有交點。）

註 1：

已知：如圖三，轉動形與基準形皆為正 2n－1 邊形（n≧2）在轉動前，轉動形的一邊（如圖三的 $\overline{OM}$ ）貼齊基準形中心點到一頂點的連線。

求證：轉動形的另一邊（如圖三的 $\overline{ON}$ ）必不會貼齊基準形中心點到另一頂點的連線。

證明：2n-1（n≧2）邊形一個內角為（$180-\dfrac{360}{2n-1}$）°，而一個轉動形的一邊所對的單位圓心角為（$\dfrac{360}{2n-1}$）°

當轉動形一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線時，轉動形所重疊於基準形的單位圓心角共 $\dfrac{180-\dfrac{360}{2n-1}}{\dfrac{360}{2n-1}}$ 個。

$$\frac{180-\dfrac{360}{2n-1}}{\dfrac{360}{2n-1}}=\frac{180(2n-1)-360}{360}=\frac{2n-1-2}{2}=n-\frac{3}{2}=n-1-\frac{1}{2}\text{（個）}$$

∴當轉動形的一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線時，重疊部分必為“ 正整數＋0.5 ” 個單位圓心角
=> 當轉動形一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線時, 另一邊必重疊於一單位圓心角的角平分線。
即轉動形在轉動前只有一邊貼齊基準形的中心點到一頂點的連線 ， 另一邊則否。

註 2：

已知：如圖六，轉動形與基準形皆為正 2n 邊形（n≧2）在轉動前，轉動形的一邊（如圖六的 $\overline{OM}$ ）貼齊基準形中心點到一頂點的連線。

求證：轉動形的另一邊（如圖六的 $\overline{ON}$ ）必會貼齊基準形中心點到另一頂點的連線。

證明：2n 邊形（n≧2）一個　　內角為（$180-\frac{360}{2n}$）°，而一個基準形的一邊所對的單位圓心角為（$\frac{360}{2n}$）°

當轉動形一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線時，轉動形所重疊於基準形的單位圓心角共 $\frac{180-\frac{360}{2n}}{\frac{360}{2n}}$ 個

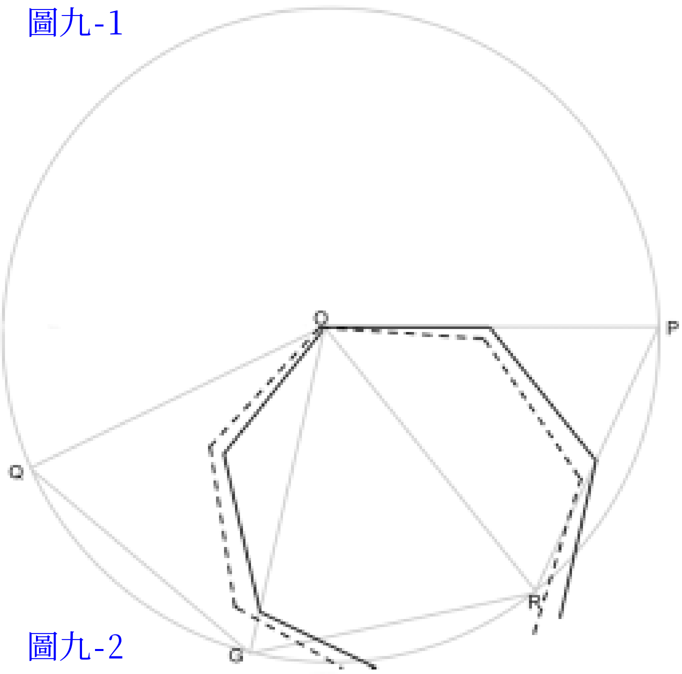
$$\frac{180-\frac{360}{2n}}{\frac{360}{2n}}=\frac{360n-360}{360}=\ \text{n}-1\text{（個）}$$

∴當轉動形一邊貼齊基準形中心點到一頂點的連線時，重疊部分必為正整數個單位圓心角。

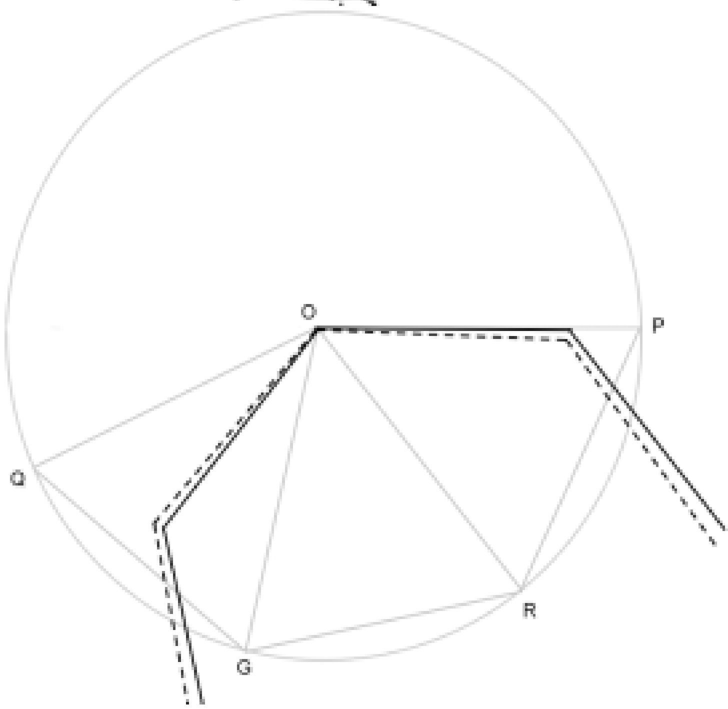
即轉動前轉動形兩邊必皆分別貼齊基準形的中心點到頂點的連線。

註 3：

圖九-1



圖九-2



已知：如圖九-1、九-2，一正 2n-1 邊形（n≧2）（轉動形）一邊重疊於另一正 2n-1 邊形（n≧2）（基準形）中心到一頂點連線。轉動形邊長＜基準形外接圓半徑＜轉動形最長對角線

求證：轉動形與基準形的兩個交點轉動　　時高度變動情形不可能為右方降低、左方升高。

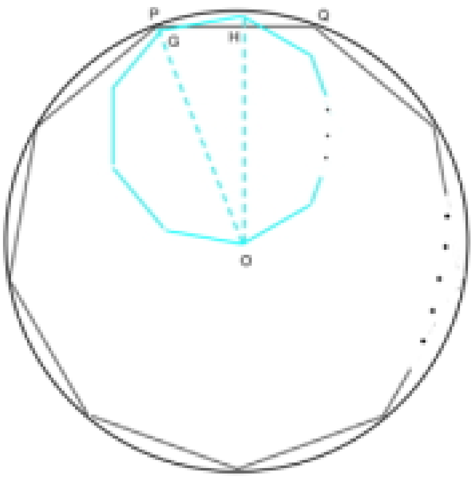
證明：

1.若右邊的交點要漸漸降低　{【∵當轉動　　形邊長等於基準形外接圓半徑的一半時，交點會在 $\overline{PR}$ 中點（即圖九-1)】(由"性質 8"　可知)} =>轉動形邊長須≦基準形外接圓半徑的一半。

2.若左邊的交點要漸漸升高（∵轉動形邊長等於基準形外接圓半徑的一半時交點會在 $\overline{GR}$ 中點之左（如圖九-1)）=>轉動形邊長需＞基準形外接圓半徑的一半（即圖九-2)。

3.由 **1**、**2** 知右降左升，會造成轉動形邊長的矛盾現象，∴轉動形與基準形的兩個交點，在轉動時高度的變動情形，不可能為右方降低、左方升高。

圖十



性質 3

已知：如圖十，圓 O 為正 2n-1 邊形（基準形，n≧2）的外接圓，另一正 2n-1 邊形（轉動形，n≧2）的任一頂點與 O 重合，並繞 O 旋轉，$\overline{OG}$、$\overrightarrow{OH}$ 皆為轉動形的最長對角線（若為三角形，則將邊長視為對角線），$\overline{OG}$ 與基準形的 $\overline{OP}$ 重合，且此兩正 2n-1 邊形的邊長相等或不相等皆可。

求證：$\overrightarrow{OH}\perp\overline{PQ}$，且 $\overrightarrow{OH}$ 平分 $\overline{PQ}$。

證明：$\angle GOH=\dfrac{\dfrac{180[(2n-1)-2]}{2n-1}}{(2n-1)-2}=\dfrac{180}{2n-1}$，$\angle OPQ=\dfrac{\dfrac{180[(2n-1)-2]}{2n-1}}{2}$

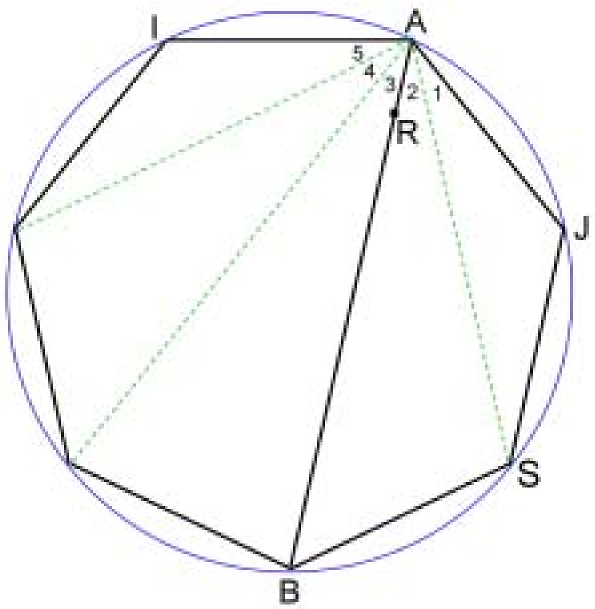
$$\angle GOH+\angle OPQ=\frac{180}{2n-1}+\frac{\dfrac{180[(2n-1)-2]}{2n-1}}{2}=\frac{360}{4n-2}+\frac{360n-540}{4n-2}=\frac{360n-180}{4n-2}=90^\circ$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH}\perp\overline{PQ}$

又由“弦心距性質” => $\overrightarrow{OH}$ 平分 $\overline{PQ}$。

性質 4

圖十一



已知：如圖十一，正 2n-1（n≧3）邊形，其最長對角線$\overline{AB}$ 將一內角（∠IAJ） 分成兩個角（∠JAR 和∠IAR）

求證： ∠IAR＞∠JAR

證明：每一內角＝（$180-\frac{360}{2n-1}$）°

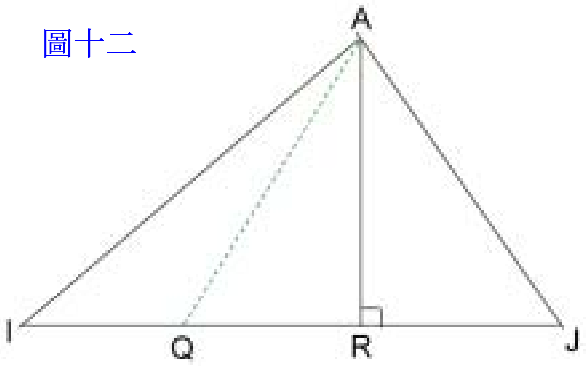
∵∠1＝∠2＝∠3＝∠4＝∠5＝........＝∠（2n－3）＝$\frac{1}{2}$弧 JS [ps：圖十一是以“n＝4”為例子。]

$$\therefore \angle JAR=\left(180-\frac{360}{2n-1}\right)\times\frac{\frac{[(2n-1)-2]-1}{2}}{(2n-1)-2}$$

$$\angle IAR=\left(180-\frac{360}{2n-1}\right)\times\frac{\frac{[(2n-1)-2]+1}{2}}{(2n-1)-2}$$ =>∠IAR＞∠JAR

性質 5

圖十二



已知：如圖十二，在△AIJ 中， $\overline{AR}\perp\overline{IJ}$ ， ∠IAR＞∠JAR

求證：$\overline{IR}>\overline{JR}$

證明：∵∠IAR＞∠JAR

∴可做一∠QAR，使得∠QAR＝∠JAR ，且$\overline{AQ}$交$\overline{IJ}$於 Q 點

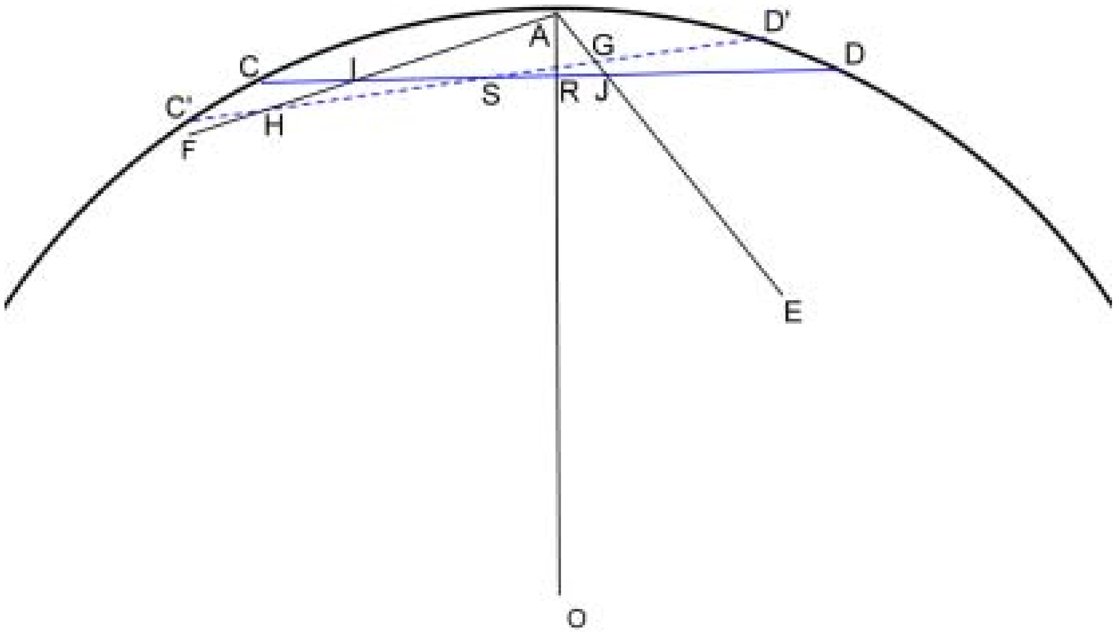
在△AQR、△AJR 中，∵∠ARQ＝90°＝∠ARJ ， $\overline{AR}=\overline{AR}$ ， ∠QAR＝∠JAR

=>△AQR≅△AJR （ASA）

=>$\overline{QR}=\overline{JR}$ ∵$\overline{IR}>\overline{QR}$ =>$\overline{IR}>\overline{JR}$

性質 6

圖十三



針對圖十三的圖形說明：

∠IAR＞∠JAR ， $\overline{IR}>\overline{JR}$ （∵∠IAR＞∠JAR ，再由“性質 5”可知 $\overline{IR}>\overline{JR}$ ），

$\overline{CD}$ 兩端點靠在圓 O 的弧上移動，移動後變成 $\overline{C'D'}$， $\overline{CD}$ 和 $\overline{AF}$ 、 $\overline{AE}$ 的交點分別為 I、J， $\overline{C'D'}$ 和 $\overline{AF}$ 、 $\overline{AE}$ 的交點分別為 H、G， $\overline{AO}\perp\overline{CD}$ 於 R， R 為 $\overline{CD}$ 的中點(∵ $\overline{AO}\perp\overline{CD}$ 於 R，再由弦心距性質可知 R 為 $\overline{CD}$ 的中點), S 為轉動前的 $\overline{CD}$ 和轉動後的 $\overline{C'D'}$ 之交點 ， 而轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會由 R （∵R 為 $\overline{CD}$ 的中點， ∴轉動前我們視 R 為 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點）漸漸向左移為 S ， 我們限定 S 在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右（∵ $\overline{IR}>\overline{JR}$， 即 R 在 $\overline{IJ}$ 的中點之右， ∴轉動時即使 S 向左移 ， S 還是必有機會在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右∴我們可以限定 S 在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右）

已知：如圖十三, ∠IAR＞∠JAR, 弦 $\overline{CD}$ ＝弦 $\overline{C'D'}$, $\overline{CD}\perp\overline{AO}$, $\overline{IR}>\overline{JR}$ (R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右),

$\overline{IS}\geqq\overline{SJ}$

求證： △IHS＞△GJS

證明：**1.**∵∠ARJ＝90°, ∴∠AJR（即∠GJS）＜90° =>∠EJR（即∠EJS）＞90°

∵轉動後∠GSJ（即轉動的小角度）＋∠JGS ＝ ∠EJS＞90°
∴在轉動後即使∠JGS 比∠EJS 少了∠GSJ，但∠GSJ 為我們可限定的小角度， ∴ ∠JGS 必有機會＞90°
∵∠JGS＞90°， ∠GJS＜90° => ∠JGS＞∠GJS

=> $\overline{SJ} > \overline{SG}$ （在同一三角形中，大角對大邊）

2. ∵∠ARI ＝ 90° ∴∠AIR＜90° => ∠HIR（即∠HIS）＞90°
∵∠IHS＋∠ISH＝∠AIR＜90°， ∴∠IHS＜90°

∵∠HIS＞90°， ∠IHS＜90° => ∠HIS ＞∠IHS => $\overline{HS} > \overline{IS}$

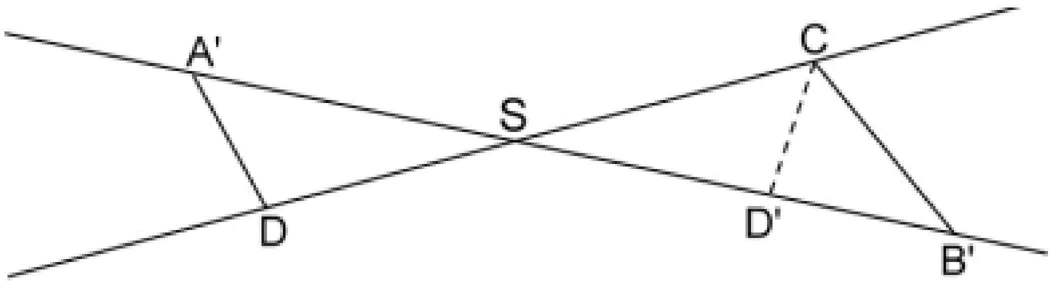
3. ∵ $\overline{IS} \geqq \overline{SJ}$ 而 $\overline{HS} > \overline{IS}$ ， $\overline{SJ} > \overline{SG}$ => $\overline{HS} > \overline{SG}$

4. ∵∠ISH＝∠GSJ ， $\overline{IS} \geqq \overline{SJ}$ ， $\overline{HS} > \overline{SG}$

∴由**"性質 1"**可知△IHS＞△GJS

性質 7

圖十四



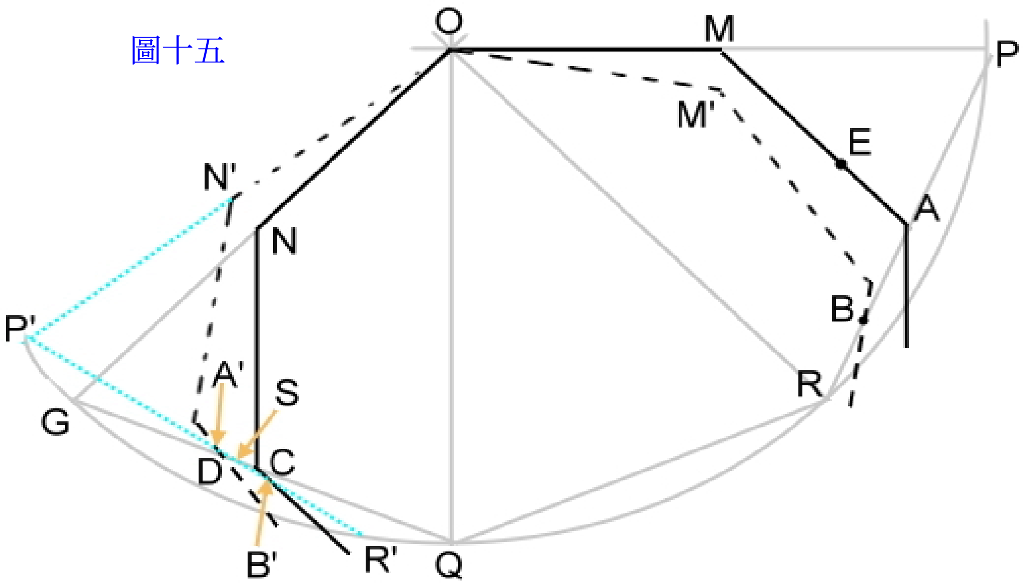
已知：如圖十四 $\overleftrightarrow{A'B'}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交於 S 且∠SA'D＜∠SCB'， $\overline{A'S} = \overline{CS}$

求證：△A'SD≠△CSB'

證明：∵∠SCB'＞∠SA'D∴我們可以在∠SCB'中取一∠SCD'使得∠SCD'＝∠SA'D，∵∠A'SD＝∠CSD'， $\overline{A'S} = \overline{CS}$ ，∠SA'D＝∠SCD'=>△A'SD≅△CSD'（ASA），又∵∠SCD'＜∠SCB'=>△CSD'是△CSB'的局部 ∴△CSD'＜△CSB'
∵△CSD'=△A'SD ∴△A'SD＜△CSB' =>△A'SD≠△CSB'

性質 8：

圖十五



已知：如圖十五在 2n 邊形(n≧2)中，轉動形的一邊 = 基準形的外接圓半徑的$\frac{1}{2}$，且轉動形一邊重合一基準形中心點到頂點的連線（即"轉動前"的情形）。A、C 為轉動形轉動前與基準形的交點。

求證：A 為轉動形一頂點，且 A 在$\overline{PR}$的中點；C 為轉動形一頂點，且 C 在$\overline{GQ}$的中點。

證明：如圖△POR 中，$\overline{OM} = \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{OP}$ ， $\overline{OR} = \overline{OP}$

$\angle OME$ = 正 2n 邊形一內角＝ $(180-\frac{360}{2n})^{\circ}$

$\angle MOR$ = 正 2n 邊形一單位圓心角＝ $(\frac{360}{2n})^{\circ}$

$\because \angle OME + \angle MOR = (180-\frac{360}{2n}) + \frac{360}{2n} = 180^{\circ} \Rightarrow \overline{MA} // \overline{OR}$

$\because \overline{MA} // \overline{OR}$，且 M 是$\overline{OP}$中點 $\Rightarrow \overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{PR} = \overline{AR}$，且$\overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{OR}$，

$\because \overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OR} \Rightarrow \overline{OM} = \overline{MA}$

=>A 恰為轉動形一頂點，且 A 在$\overline{PR}$中點

同理可證=>C 恰為轉動形一頂點，且 C 在$\overline{QG}$中點

性質 9：

已知：如圖十六，弦$\overline{PQ}$=弦$\overline{RV}$，A’、C 分別在$\overline{PQ}$與$\overline{RV}$上且 A’的高度=C 的高度（即半徑－$\overline{OA'}$＝半徑－$\overline{OC}$）

求證： $\overline{A'S}=\overline{CS}$

證明：**1.**作$\overline{OM}$、$\overline{ON}$分別垂直$\overline{PQ}$、$\overline{RV}$於 M，N，

∵$\overline{PQ}=\overline{RV}$ => $\overline{OM}=\overline{ON}$

2.∵ $\overline{OM}=\overline{ON}$，∠ONS＝∠OMS＝90°

$\overline{OS}=\overline{OS}$ =>△OMS≅△ONS（RHS）

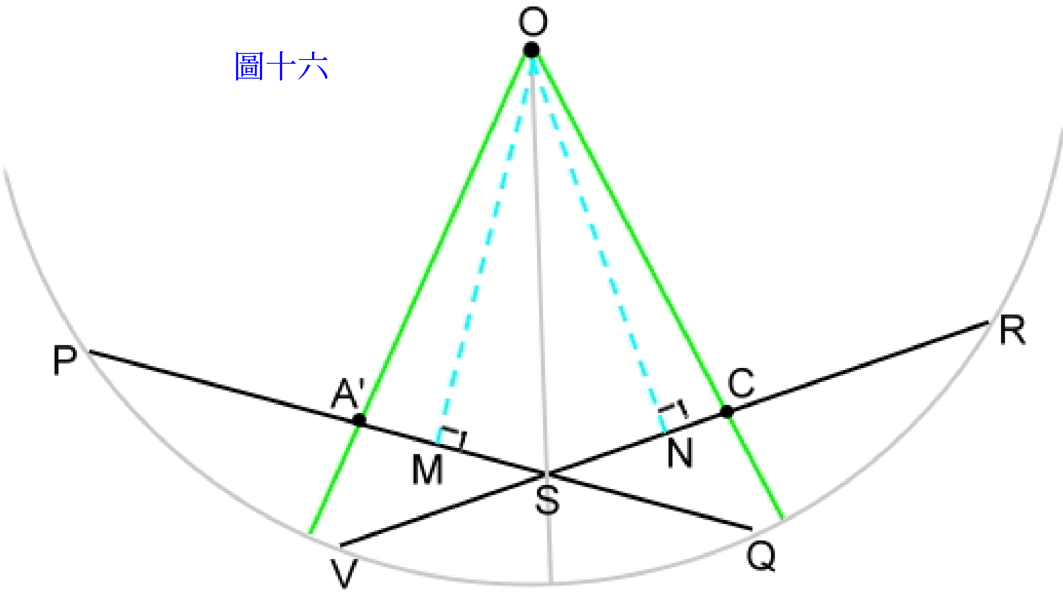
＝> $\overline{MS}=\overline{NS}$

3. ∵ $\overline{OM}=\overline{ON}$，∠ONC=∠OMA’＝90°

，$\overline{OA'}=\overline{OC}$（∵半徑－$\overline{OA'}$＝半徑－$\overline{OC}$）=>△OMA’≅△ONC（RHS） ＝> $\overline{MA'}=\overline{NC}$

4. $\overline{MS}+\overline{MA'}=\overline{NS}+\overline{NC}$ ＝> $\overline{A'S}=\overline{CS}$

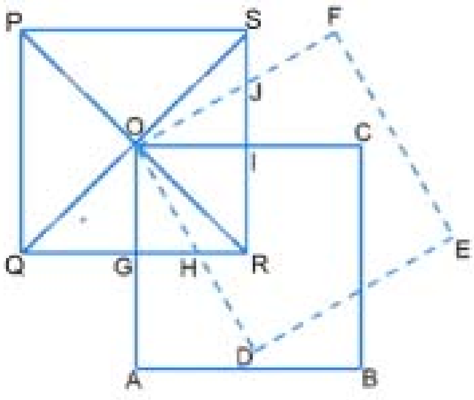
圖十六



(二)正四邊形

原題證明：（如圖十七）

圖十七



已知：O、R 分別為正方形 PQRS 與正方形 OABC 的中心，

且 $\overline{PQ}=\overline{AB}$，又正方形 OABC 繞 O 旋轉至正方形 ODEF。

求證：四邊形 OHRJ＝$\frac{1}{4}$正方形 PQRS＝定值

證明：∠OGH＝∠OIJ＝90°（∵O、R 分別為正方形 PQRS 與正方形 OABC 的中心）。

∵∠GOH+∠DOC＝90°＝∠IOJ+∠DOC

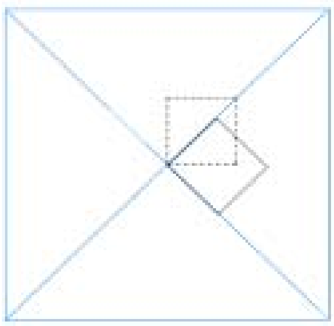
∴∠GOH＝∠IOJ 又 $\overline{OG}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\overline{OI}$，　∠OGH＝∠OIJ

=> ΔOGH ≅ ΔOIJ　（ASA）　⇒四邊形 OHRJ＝四邊形 OHRI+△OIJ＝四邊形 OHRI+△OGH＝四邊形 OGRI＝$\frac{1}{4}$基準形＝定值

之後，我們想繼續延伸，經過多次使用模形操作之後，發現重疊面積的變化和基準形中心點到邊的距離、基準形中心點到頂點距離 、 轉動形的最長對角線及邊長有關。因此我們令基準形中心點到對邊的距離為 r（即基準形的內切圓半徑）；基準形中心點到頂點的距離為 R（即基準形的外接圓半徑）；轉動形最長的對角線為 L ；轉動形邊長為 S。則用 R、r、L、S 我們可以歸納出以下幾種可能 ：

1. L≦r

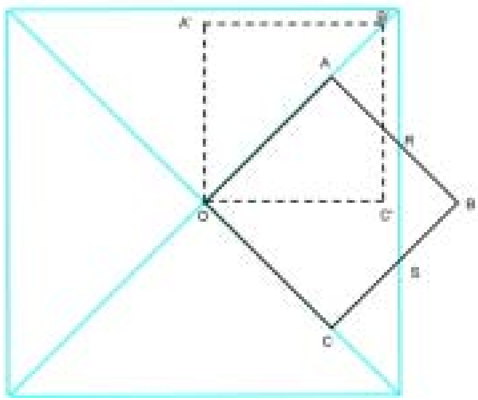
圖十八



如圖十八，若 L≦r ， 則轉動形必永遠落在基準形之內。　∴轉動時重疊部分的面積不變

圖十九

2. r＜L≦R

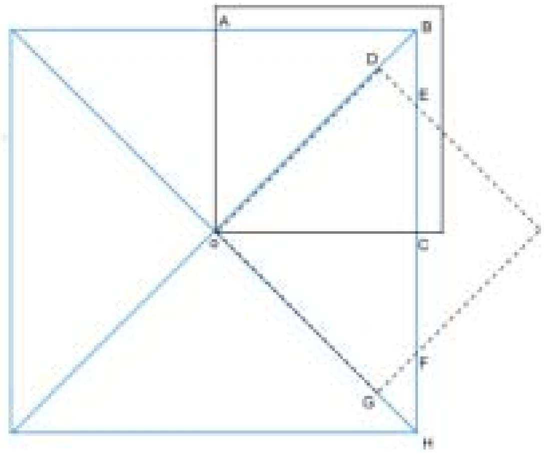


如圖十九，由□ABCO 轉到□A'B'C'O 時，□A'B'C'O 完全融入基準形內，而□ABCO 卻有△RBS 落在基準形外

（∵r＜L≦R）

∴轉動時重疊部分的面積會改變

3. L＞R 且 S＜R



圖二十

如圖二十，□ABCO＝$\frac{1}{4}$×基本形 ， 但五邊形 ODEFG＜△OBH＝□ABCO＝$\frac{1}{4}$×基準形。

∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R 且 S≧R

此即與原題目類似

為了討論這種重疊部分面積是否不變（即重疊部分的面積相等）的問題，我們開始研究其他正多邊形的情況。

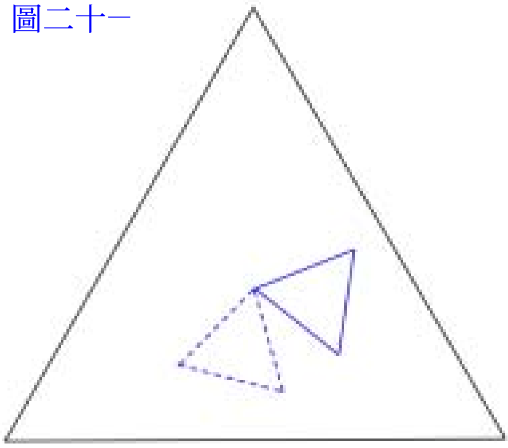
(三)正三角形

※ 因三角形沒有對角線，所以在這裡我們暫時將 L 定為邊長

※ 設轉動形一頂點到對邊的距離為 K，∵當 r＜L≦R 時，有兩種情形：當 K 重疊於 r 時，一種是轉動形完全落在基準形之內，而另一種是轉動形有部分面積落在基準形之外，故區別此兩種情形的關鍵就在於 K。

1. L≦r

圖二十一

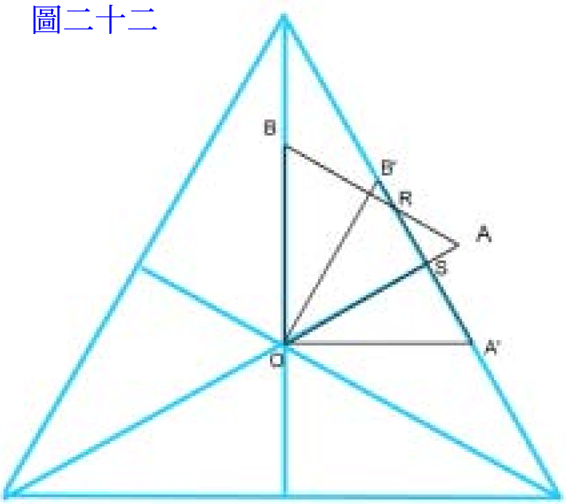


如圖二十一，若 L≦r，則轉動形必恆落在基準形之內。

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r＜L≦R 且 K≦r

圖二十二



如圖二十二，由△AOB 轉到△A’OB’時，

四邊形 OBRS 比△OA’B’少了△RSA。

∴轉動時重疊部分的面積會改變

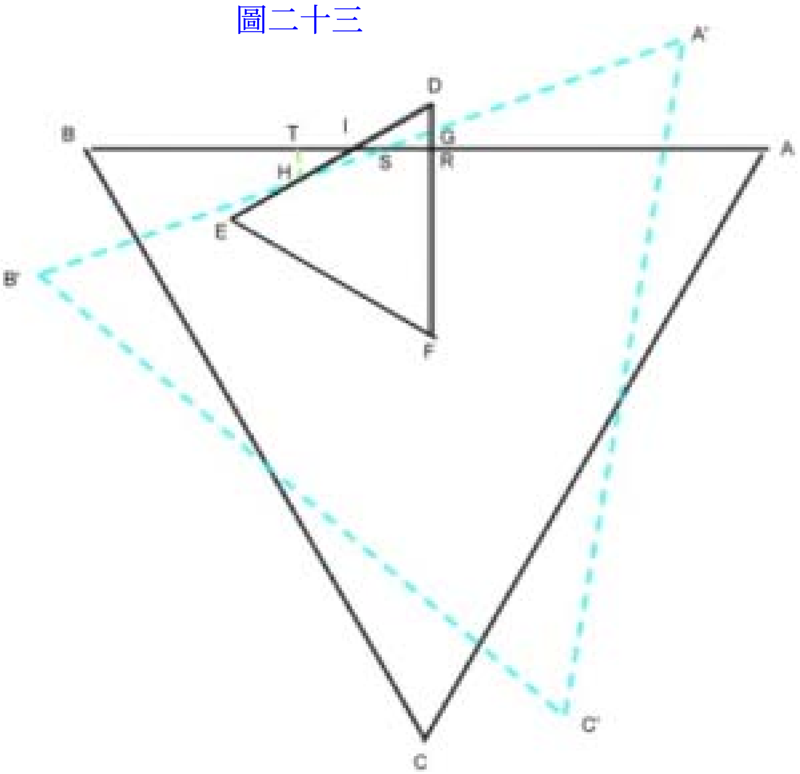
3. r＜L≦R 且 K＞r

如圖二十三

※R 點是 $\overline{DF}$ 和 $\overline{AB}$ 的交點 ， 也是 $\overline{AB}$ 的中點。（根據"性質 3"）

※S 點是 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 的交點。

圖二十三



p.s. （∵在 L＝R 的時候，討論的方法跟 L＞R 的時候一樣∴在此不需討論此情形）因為這一次須把轉動痕跡畫在轉動形上，∴我們相對的把基準形中心靠在轉動形的一頂點上(即 F)自行轉動，如此意義還是一樣的。（基準形，轉動形角色互換）(F 在△ABC 和△A'B'C'的中心)

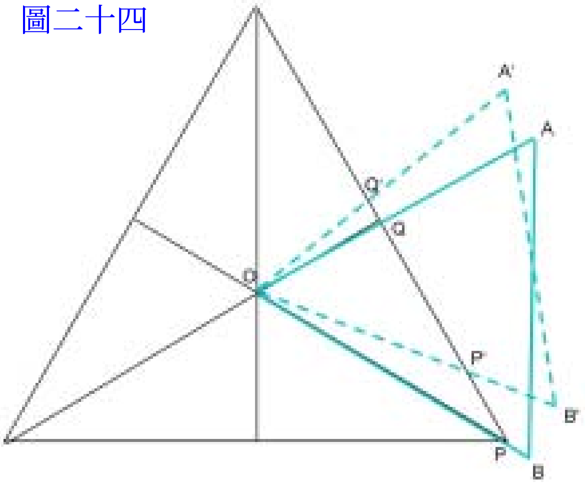
我們需要比較△HSI 和△GRS 的大小。我們若確保點 S 有機

會在 $\overline{IR}$ 的中點之右，就能得知△HIS＞△GRS。（∵∠HIS＝180°－∠DIR，又∵∠DIR＜90°＝∠DRI=>∠HIS＞90°＝∠DRI。過 H，作 $\overline{HT}$ ⊥ $\overline{AB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 T 點，若 S 在 $\overline{IR}$ 的中點或中點之右，即 $\overline{IS} \geqq \overline{SR}$，又∠GRS＝∠HTS＝90°，∠HSI＝∠GSR=>△THS　△RGS=> $\frac{\overline{SH}}{\overline{SG}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{SR}} > 1$（∵ $\overline{TS} > \overline{IS} \geqq \overline{IR}$）=> $\overline{SH} > \overline{SG}$，∴由"性質 1"可知當 S 在 $\overline{IR}$ 的中點或中點之右時，$\overline{IS} \geqq \overline{SR}$，$\overline{SH} > \overline{SG}$，∠ISH＝∠GSR=>△HIS＞△GRS)，我們發現當轉動時，$\overline{HG}$ 和 $\overline{IR}$ 的交點會由 R 漸漸移到 S，而我們可以確保 R 一定在 $\overline{IR}$ 的中點之右。(只有在三角形中 R 才會剛好在轉動形的邊上，其他奇邊形則否) ∴S 一定有機會在 $\overline{IR}$ 的右半部。

∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R

圖二十四



如圖二十四，※因在三角形中 L＝S， 此種情況時 L＝S＞R ∴就沒有所謂 S＜R 或 S≧R 的分別了。(此後四邊及四邊以上的正多邊形都會有 S＜R 或 S≧R 的分別)

我們要比較△OP'P 和△Q'OQ 的大小。∵∠P'OP ＝∠Q'OQ ∴可以用“性質 1”比較$\overline{OP'}\times\overline{OP}$和$\overline{OQ'}\times\overline{OQ}$的大小，而我們可以確定$\overline{OP'}>\overline{OQ}$(∵由“性質 3”可知，∠OQP'＝90°，∴$\overline{OP'}>\overline{OQ}$)； $\overline{OP}>\overline{OQ'}$(∵$\overline{OP}$為基準形外接圓半徑，而 Q'為此外接圓 O 的圓內點 ∴$\overline{OP}>\overline{OQ'}$)∴$\overline{OP'}\times\overline{OP}>\overline{OQ'}\times\overline{OQ}$

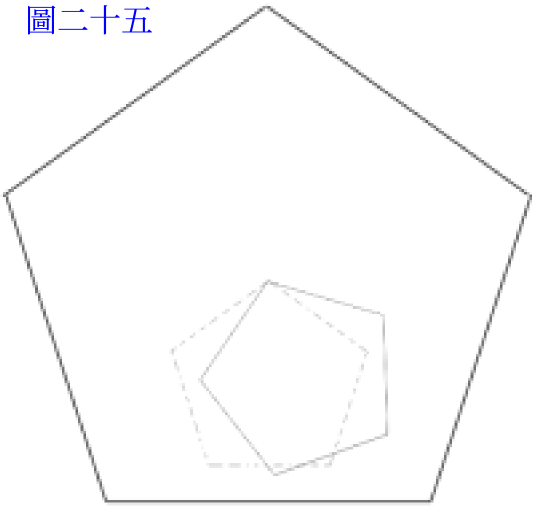
=>△OP'P＞△OQ'Q

∴轉動時重疊部分的面積會改變

(四)正五邊形

1. L≦r

圖二十五

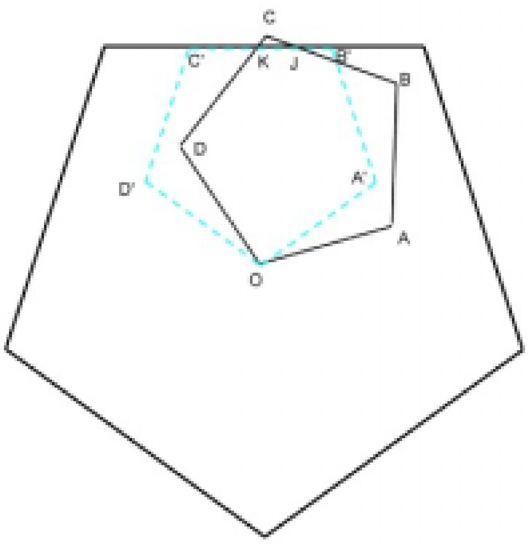


如圖二十五，若 L≦r，　則轉動形必恆落在基準形之內。

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r＜L≦R 且 K≦r

圖二十六



如圖二十六，由五邊形 ABCDO 轉到五邊形 A’B’C’D’O 時，

六邊形 ABJKDO 比五邊形 A’B’C’D’O 少了△JKC

∴轉動時重疊部分的面積會改變

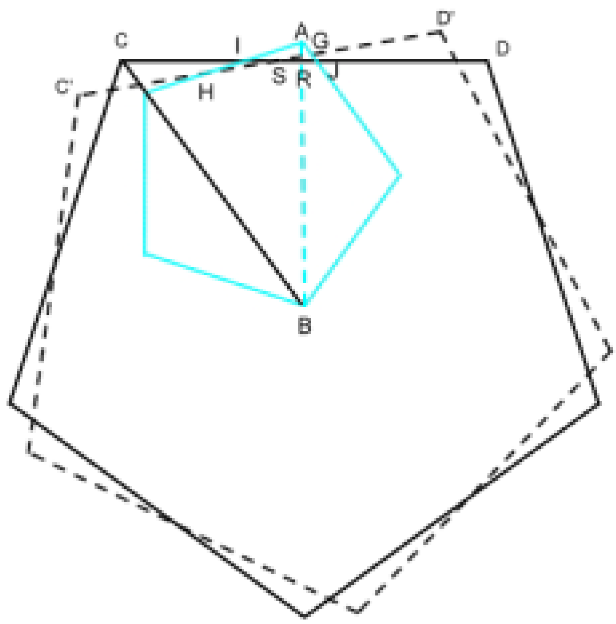
3. r＜L≦R 且 K＞r

如圖二十七、二十八，※R 點是 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的交點 ， 也是 $\overline{CD}$ 的中點。

（根據“性質 3”）

※S 點是 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點。

圖二十七

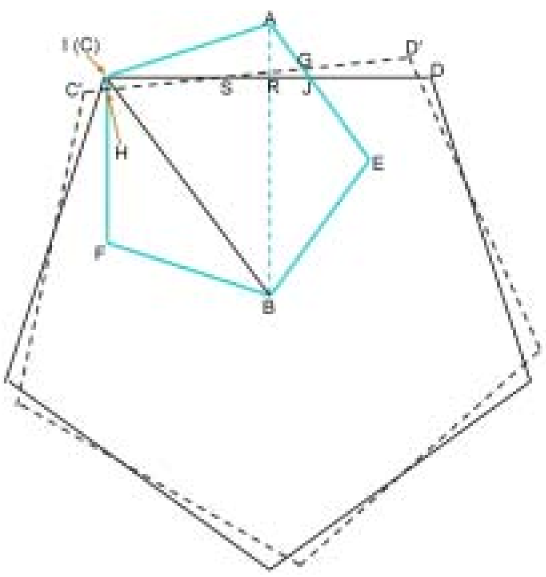


(1)情形 1(如圖二十七,r<L<R):對於轉動前和轉動後,我們要證明△HIS 有機會>△GJS。我們若確保點 S 有機會在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右,就能得知△HIS>△GJS。(∵若 S 在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右時,由“性質 3”可知 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$;由“性質 4”可知∠IAR>∠JAR,再由“性質 6”可知△IHS>△GJS)我們發現當轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會從 R(此時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 重合)漸漸移到 S,而我們可以確保 R 一定在 $\overline{IJ}$ 的中點之右**(**∵B、R、A 共線 ∴由“性質 3”我們可得知當轉動形 L 和基準形 R 重疊時,$\overline{AB}$ 垂直於 $\overline{IJ}$,且由“性質 4”可知∠IAR>∠JAR, 因此,再由“性質 5”得證 $\overline{IR}>\overline{JR}$=>R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右。**)**

∴S 一定有機會在 $\overline{IJ}$ 的右半部。 =>△HIS 有機會>△GJS

∴轉動時重疊部分的面積會改變

圖二十八



(2)情形 2(如圖二十八,L=R):

(設邊數為 m,m≧5 且 m 為奇數)我們可發現轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會漸漸由 R 移到 S,而我們可確保 R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右,∴S 有機會在 $\overline{IJ}$ 中點或中點之右 => $\overline{IS}$ 有機會≧ $\overline{JS}$。

∵∠ARJ=90°, ∴∠GJS<90°=> ∠SJE>90° => ∠GSJ+∠SGJ=∠SJE>90°,又∠GSJ 為極小角度,

∴∠SGJ 有機會＞90°=>∠SGJ＞∠GJS => $\overline{JS}>\overline{GS}$（在同一三角形中，大角對大邊）=> 轉動時 $\overline{JS}$ 有機會＞$\overline{GS}$。

又∠IAR=（$180-\frac{360}{m}$）×$\frac{1}{m-2}$×$\frac{m-2+1}{2}=\frac{180m-360}{m}\times\frac{1}{m-2}\times\frac{m-1}{2}$

$=\frac{180(m-2)\times(m-1)}{m\times2\times(m-2)}=\frac{90(m-1)}{m}$，而∠ARI＝90°（由 **"性質 3"**可知）

=>∠AIR=$90-\frac{90(m-1)}{m}=\frac{90}{m}$

=>∠SIF＝一基準形內角－∠AIR＝（$180-\frac{360}{m}$）$-\frac{90}{m}=\frac{180m-450}{m}=$

$90\times\frac{2m-5}{m}$=90×（2-$\frac{5}{m}$）。

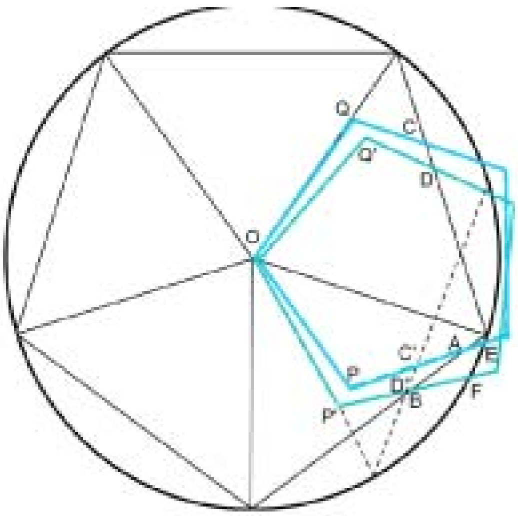
而∵m≧5，=>∠SIF（即∠SIH）≧90° => ∠SHI＜90° =>∠SIH＞∠SHI ∴轉動時 $\overline{HS}$ 有機會＞$\overline{IS}$（在同一三角形中，大角對大邊）。

又∵ $\overline{IS}\geqq\overline{JS}$ => $\overline{HS}>\overline{IS}\geqq\overline{JS}>\overline{GS}$。

根據 **"性質 1"**可知 ∵ $\overline{HS}\times\overline{IS}$ 有機會＞$\overline{JS}\times\overline{GS}$ 且∠ISH＝∠GSJ =>△HIS 有機會＞△GJS =>△HIS 有機會≠△GJS ∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R 且 S<R

圖二十九



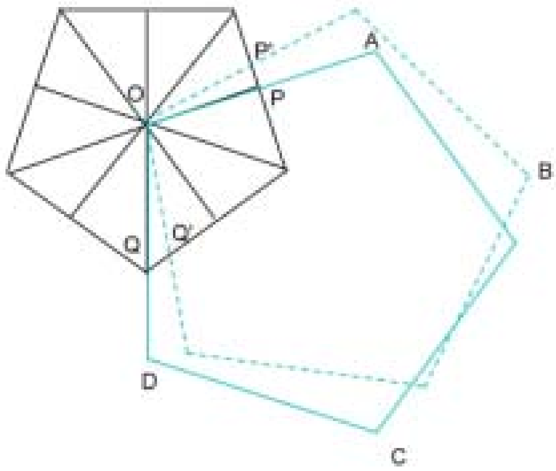
如圖二十九，增加的面積：OP’BAP，

減少的面積：OQCDQ’＝OP’D’C’P

=>比較圖形 C’D’FE 與圖形 ABFE 的面積即可。

∵A 與 C 不等高，我們由**"性質 2 的奇邊形"**可知，$\overline{AB}$ 和 $\overline{C'D'}$ 有機會沒有交點，∴圖形 C’D’FE＞圖形 ABFE，∴轉動時重疊部分的面積會改變

圖三十



5. L>R 且 S≧R

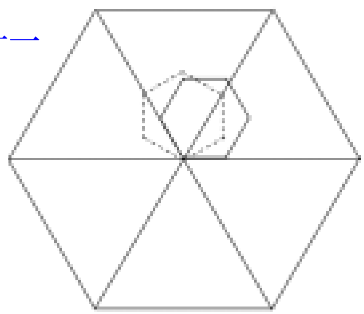
如圖三十，我們要比較△OP'P 和△OQ'Q 的大小。 ∵∠P'OP＝∠Q'OQ ∴可以用**"性質 1"**比較$\overline{OP'}\times\overline{OP}$和$\overline{OQ'}\times\overline{OQ}$的大小，而我們可以確定$\overline{OQ}>\overline{OP'}$（∵$\overline{OQ}$＝R）；$\overline{OQ'}>\overline{OP}$ （∵$\overline{OP}$垂直基準形的邊）∴$\overline{OQ'}\times\overline{OQ}>\overline{OP'}\times\overline{OP}$ =>△OQ'Q＞△OP'P

∴轉動時重疊部分的面積會改變

(五)正六邊形

1. L≦r

圖三十一

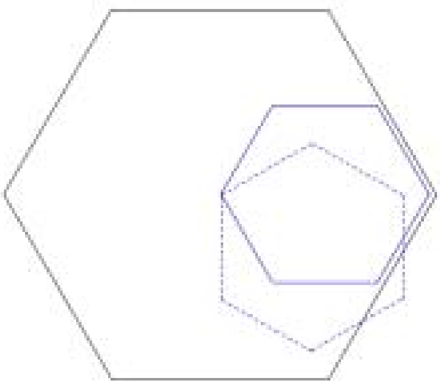


如圖三十一，L≦r，則轉動形必恆落在基準形之內

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r＜L≦R

圖三十二

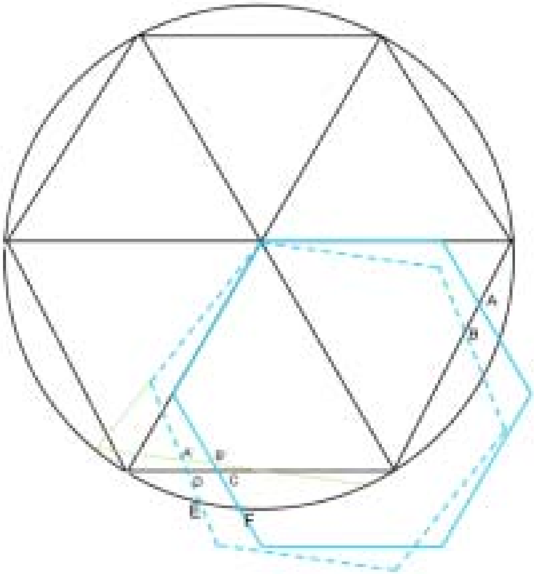


如圖三十二，(因六邊形（偶數邊）沒有出現 K，∴不用考慮是 K＞r 或 K≦r)

轉動形從完全沒入(∵L≦R)到未完全沒入(∵L＞r)。

∴轉動時重疊部分的面積會改變

圖三十三

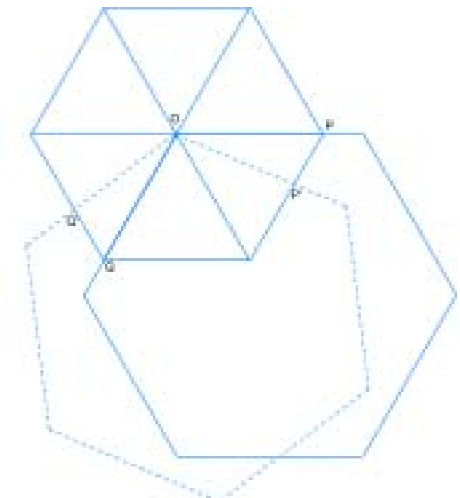


3. L＞R 且 S＜R

如圖三十三，我們用**"性質 2"**可知，$\overline{A'B'}$和$\overline{CD}$沒有交點，圖形 A'B'FE＞圖形 DCFE，

∴轉動時重疊部分的面積會改變

圖三十四



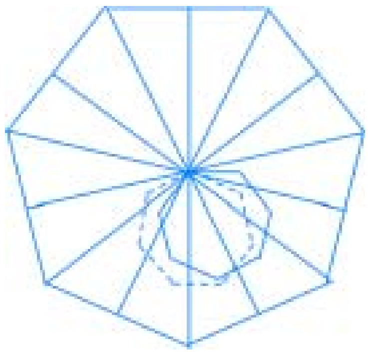
4. L>R 且 S≧R

如圖三十四，我們要比較ΔPOP'和ΔQOQ'，∵∠POP'＝∠QOQ'，∠OPP'＝∠OQQ'，$\overline{OP}$ ＝ $\overline{OQ}$，∴ΔPOP'≅ΔQOQ'（ASA）

∴轉動時重疊部分的面積不變

小記：　研究到六邊形，原本自信滿滿猜測只有四邊形不變的人顯的失望極了。到這裡，我們也發現我們原本眾多的猜測竟沒有任一個是正確的。
到了這一步，我們也對這些轉動的問題熟悉許多了。經過組員的一番討論，我們一致推出一種想法：只有當"L≦r"和偶邊形"L＞R 且 S≧R"時才有所謂不變的情形。為了再驗證我們提出的猜測，我們繼續實驗七邊形和八邊形的情況。

圖三十五



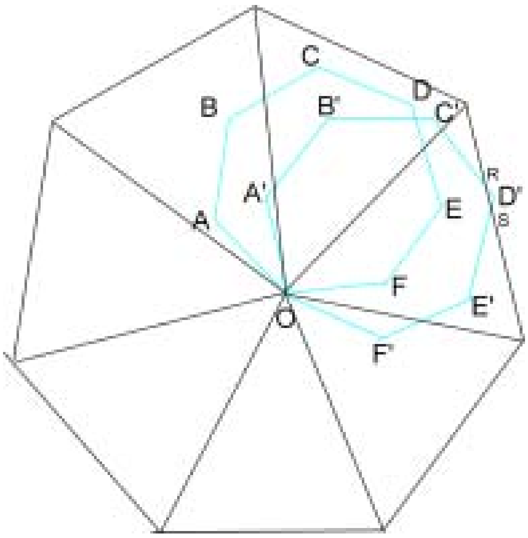
(六)正七邊形

1. L≦r

如圖三十五，若 L≦r，轉動形就必恆落在基準形內

∴轉動時重疊部分的面積不變

圖三十六



2. r<L≦R 且 K≦r

如圖三十六，由七邊形 ABCDEFO 轉到七邊形 A’B’C’D’E’F’O 時，八邊形 A’B’C’RSE’F’O 比七邊形 ABCDEFO 少了ΔRD’S

∴轉動時重疊部分的面積會改變

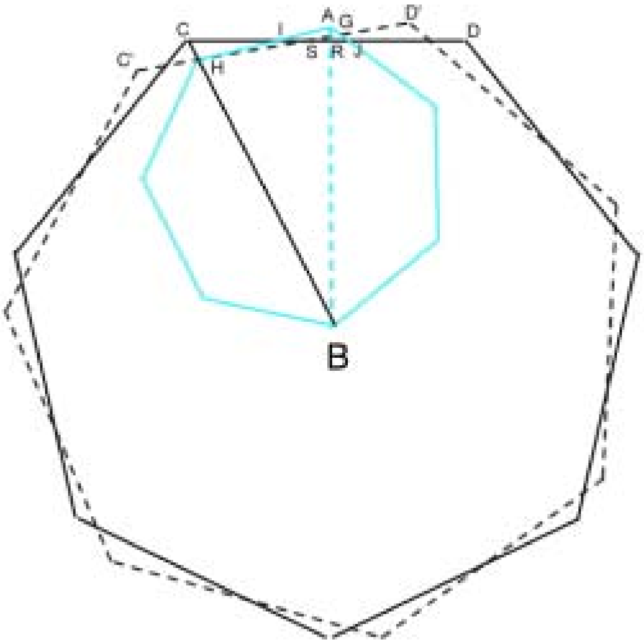
3. r＜L≦R 且 K＞r

如圖三十七、三十八

※R 點是 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的交點 ， 也是 $\overline{CD}$ 的中點。（根據“性質 3”）

※S 點是 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點。

圖三十七



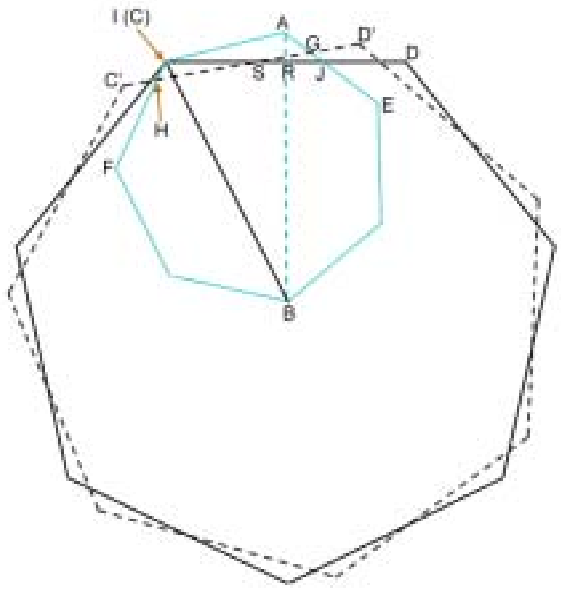
(1) 情形 1(如圖三十七，r＜L＜R)：

對於轉動前和轉動後，我們要證明 △HIS 有機會＞△GJS。我們若確保點 S 有機會在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右，就能得知△HIS＞△GJS。(∵若 S 在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右時，由**"性質 3"**可知 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$；由**"性質 4"**可知∠IAR＞∠JAR，再由**"性質 6"**可知△IHS＞△GJS）我們發現當轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會從 R（此時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 重合）漸漸移到 S，而我們可以確保 R 一定在 $\overline{IJ}$ 的中點之右(∵B、R、A 共線 ∴由**"性質 3"**我們可得知當轉動形 L 和基準形 R 重疊時，$\overline{AB}$ 垂直於 $\overline{IJ}$，且由**"性質 4"**可知∠IAR＞∠JAR，因此，再由**"性質 5"**得證 $\overline{IR}>\overline{JR}$=>R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右。)

∴S 一定有機會在 $\overline{IJ}$ 的右半部。 =>△HIS 有機會＞△GJS

∴轉動時重疊部分的面積會改變

圖三十八



(2) 情形 2(如圖三十八，L＝R)：

(設邊數為 m，m≧5 且 m 為奇數)

我們可發現轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會漸漸由 R 移到 S，而我們可確保 R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右，∴S 有機會在 $\overline{IJ}$ 中點或中點之右 => $\overline{IS}$ 有機會≧ $\overline{JS}$。∵∠ARJ=90°，

∴∠GJS＜90°=> ∠SJE＞90° => ∠GSJ＋∠SGJ＝∠SJE＞90°，又∠GSJ 為極小角度，

∴∠SGJ 有機會＞90°=>∠SGJ＞∠GJS => $\overline{JS}$ ＞ $\overline{GS}$（在同一三角形中，大角對大邊）=> 轉動時 $\overline{JS}$ 有機會＞ $\overline{GS}$。

又∠IAR=（$180-\frac{360}{m}$）×$\frac{1}{m-2}$×$\frac{m-2+1}{2}$=$\frac{180m-360}{m}\times\frac{1}{m-2}\times\frac{m-1}{2}$

$=\frac{180(m-2)\times(m-1)}{m\times2\times(m-2)}=\frac{90(m-1)}{m}$，而∠ARI＝90°（由 **"性質 3"**可知）

=>∠AIR=$90-\frac{90(m-1)}{m}=\frac{90}{m}$

=>∠SIF＝一基準形內角－∠AIR＝（$180-\frac{360}{m}$）$-\frac{90}{m}=\frac{180m-450}{m}=$

90×$\frac{2m-5}{m}$=90×（2-$\frac{5}{m}$）。

而∵m≧5，=>∠SIF（即∠SIH）≧90° => ∠SHI＜90° =>∠SIH＞∠SHI ∴轉動時 $\overline{HS}$ 有機會＞ $\overline{IS}$（在同一三角形中，大角對大邊）。

又∵ $\overline{IS}$ ≧ $\overline{JS}$ => $\overline{HS}$ ＞ $\overline{IS}$ ≧ $\overline{JS}$ ＞ $\overline{GS}$。

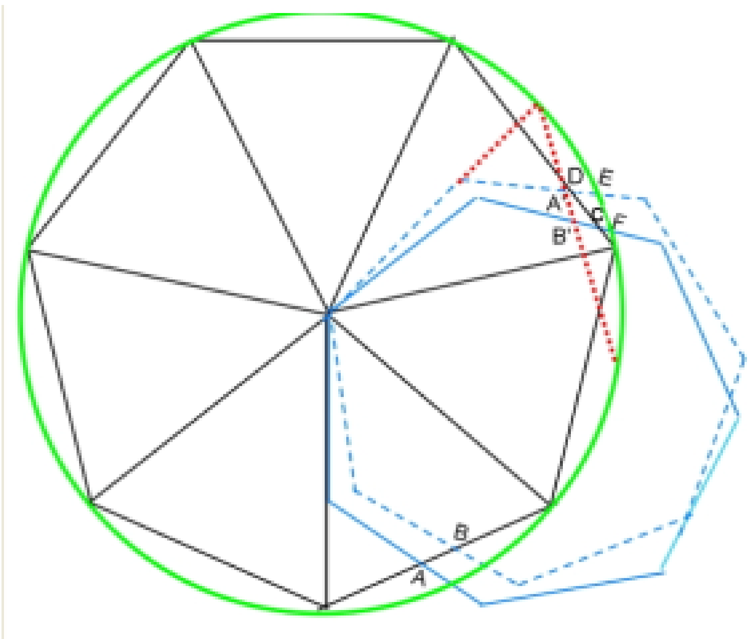
根據**"性質 1"**可知 ∵ $\overline{HS}$×$\overline{IS}$ 有機會＞ $\overline{JS}$×$\overline{GS}$，且∠ISH＝∠GSJ

=>△HIS 有機會＞△GJS =>△HIS 有機會≠△GJS

∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R 且 S＜R

圖三十九

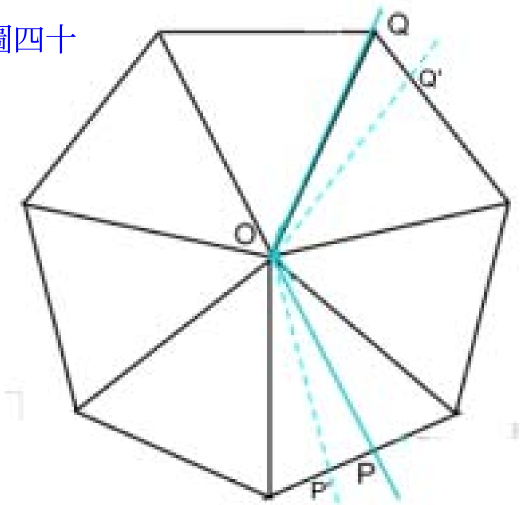


如圖三十九，我們用**"性質 2"**可知 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{CD}$ 沒有交點 ∴圖形 A'B'FE＞圖形 DCFE

∴轉動時重疊部分的面積會改變

5. L＞R 且 S≧R

圖四十



如圖四十，※∠QOP＝∠Q’OP’＝正七邊形的一內角

我們要比較△OP’P 和△OQ’Q 的大小。∵∠P’OP＝∠Q’OQ

∴可以用“性質 1”比較 $\overline{OP'}\times\overline{OP}$ 和 $\overline{OQ'}\times\overline{OQ}$ 的大小，而我們

可以確定 $\overline{OQ}>\overline{OP'}$（∵ $\overline{OQ}$ ＝R）；$\overline{OQ'}>\overline{OP}$ (∵ $\overline{OP}$ 為垂

直基準形的邊 ps：由 “性質 3”得知) ∴ $\overline{OQ'}\times\overline{OQ}>$

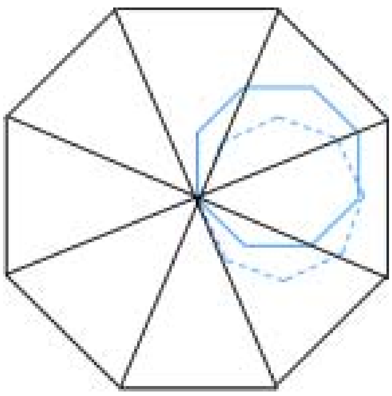
$\overline{OP'}\times\overline{OP}$ =>△OQ’Q＞△OP’P

∴轉動時重疊部分的面積會改變

(七)正八邊形

1. L≦r

圖四十一

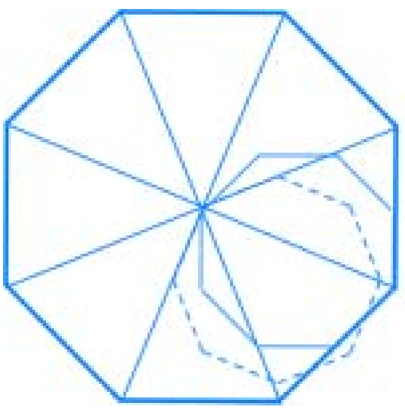


如圖四十一，∵L≦r，則轉動形必恆落在基準形之內

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r ＜L≦R

圖四十二



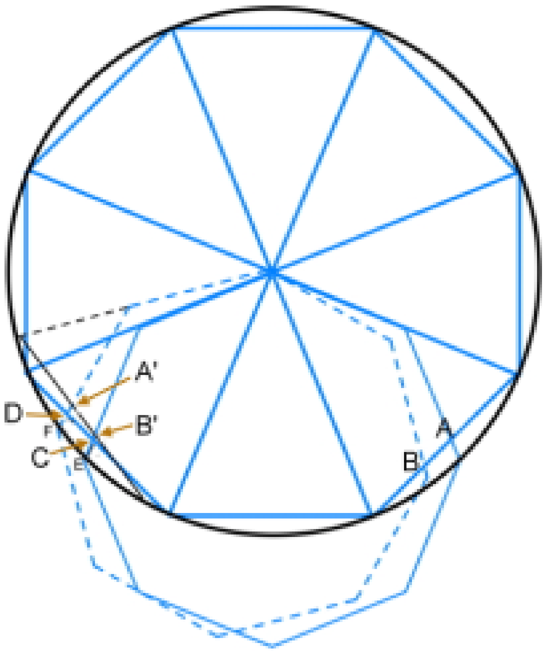
如圖四十二，當 L 重疊於 R 時，轉動形全部都在基準形內

當 L 重疊於 r 時，轉動形會有部份落在基準形外

∴轉動時重疊部分的面積會改變

3. L＞R 且 S＜R

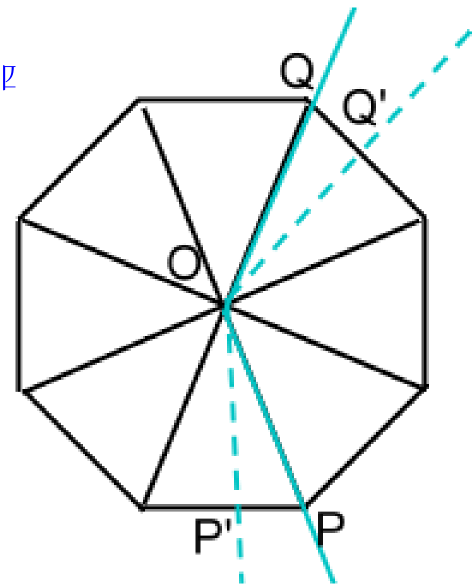
圖四十三



如圖四十三，我們由"性質 2"可知，$\overline{A'B'}$和$\overline{CD}$有機會沒有交點，∴圖形 A'B'EF＞圖形 DCEF，∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R 且 S≧R

圖𠃊



如圖四十四，我們要比較ΔPOP'和ΔQOQ'，∵∠OPP'＝∠OQQ'，$\overline{OP}=\overline{OQ}$，∠QOQ'＝∠POP'=> ΔPOP'≅ΔQOQ'（ASA）

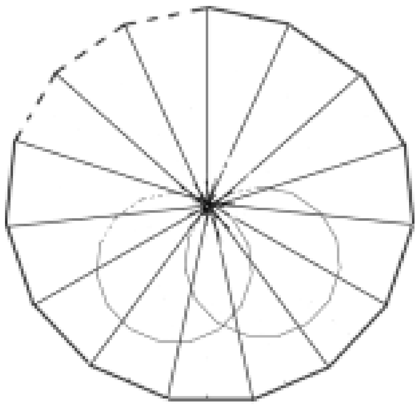
∴轉動時重疊部分的面積不變

做到這兒，我們已能確定我們的猜測是正確的了，但接下來我們要以 n 邊形的手法作結論。

(八)正(2n-1)邊形（n 是自然數，n≧3）

1. L≦r

圖四十五

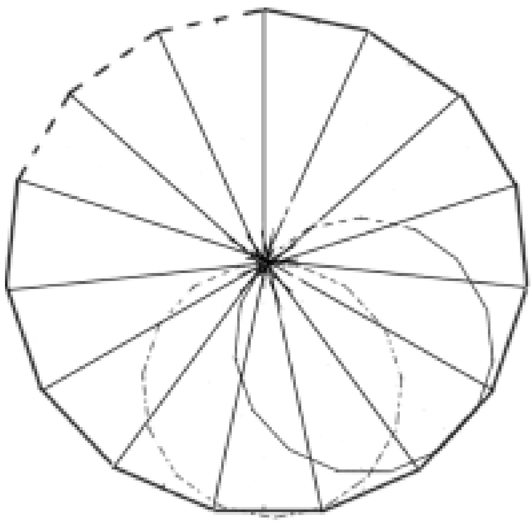


如圖四十五，若 L≦r， 則轉動形必恆落在基準形之內。

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r＜L≦R 且 K≦r

圖四十六



如圖四十六∵K≦r，∴當 K 重疊於 r 時轉動形必完全落在基準形之內，而當轉到 L 和 r 重疊時，∵L＞r ∴轉動形必有部分落在基準形之外。

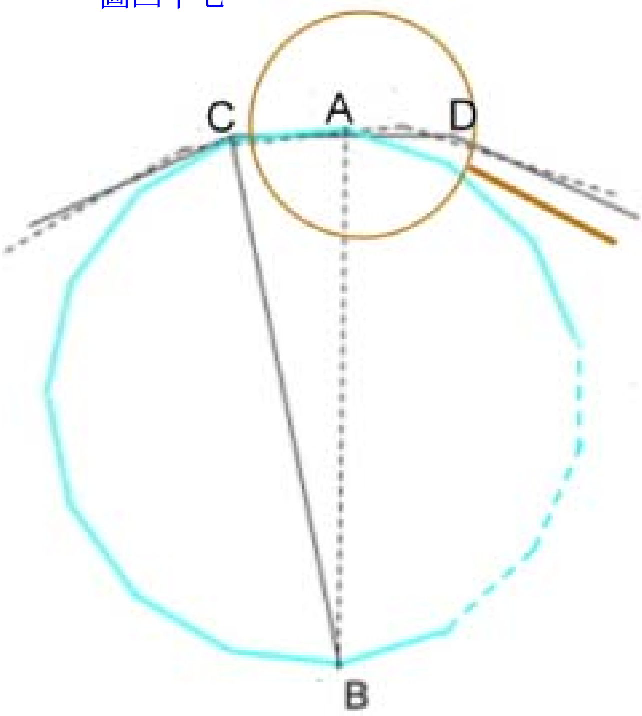
∴轉動時重疊部分的面積會變

3. r＜L≦R 且 K＞r

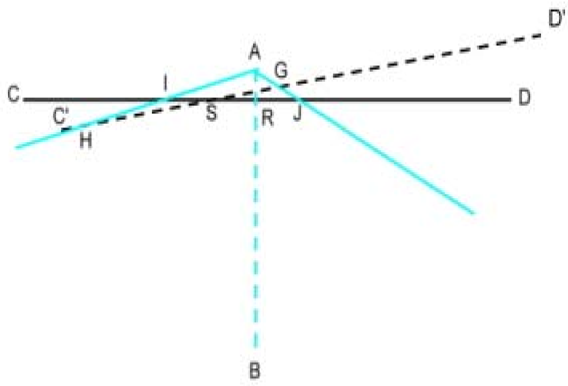
如圖四十七、四十八
※R 點是 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 的交點 ， 也是 $\overline{CD}$ 的中點。(根據“性質 3”)
※S 點是 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點。

（1）情形 1（如圖四十七，r＜L＜R）：

圖四十七



圖四十七之放大



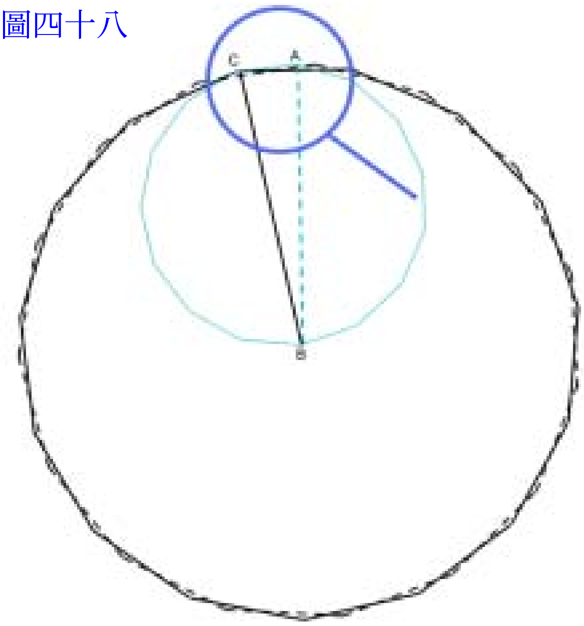
對於轉動前和轉動後，我們要證明△HIS 有機會＞△GJS。我們若確保點 S 有機會在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右，就能得知△HIS＞△GJS。（∵若 S 在 $\overline{IJ}$ 的中點或中點之右時，由**“性質 3”**可知 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$；由**“性質 4”**可知∠IAR＞∠JAR，再由**“性質 6”**可知△IHS＞△GJS）我們發現當轉動時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 的交點會從 R（此時 $\overline{CD}$ 和 $\overline{C'D'}$ 重合）漸漸移到 S，而我們可以確保 R 一定在 $\overline{IJ}$ 的中點之右**(**∵B、R、A 共線 ∴由**“性質 3”**我們可得知當轉動形 L 和基準形 R 重疊時，$\overline{AB}$ 垂直於 $\overline{IJ}$，且由**“性質 4”**可知∠IAR＞∠JAR， 因此，再由**“性質 5”**得證 $\overline{IR}>\overline{JR}$=>R 在 $\overline{IJ}$ 中點之右。**)**

∴S 一定有機會在 $\overline{IJ}$ 的右半部。 =>△HIS 有機會＞△GJS

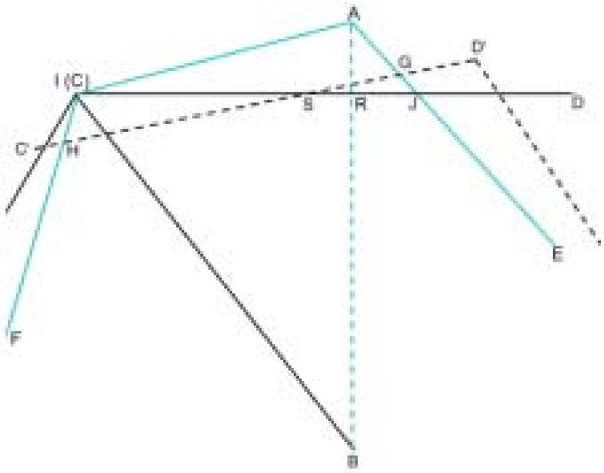
∴轉動時重疊部分的面積會改變

（2）情形 2（如圖四十八，L＝R）：

圖四十八



圖四十八之放大



（設邊數為 m，m≧5 且 m 為奇數）我們可發現轉動時$\overline{CD}$和$\overline{C'D'}$的交點會漸漸由 R 移到 S，而我們可確保 R 在$\overline{IJ}$中點之右，∴S 有機會在$\overline{IJ}$中點或中點之右 => $\overline{IS}$有機會≧$\overline{JS}$。∵∠ARJ=90°，∴∠GJS＜90°=> ∠SJE＞90° =>∠GSJ＋∠SGJ＝∠SJE＞90°，又∠GSJ 為極小角度，

∴∠SGJ 有機會＞90°=>∠SGJ＞∠GJS => $\overline{JS}$＞$\overline{GS}$（在同一三角形中，大角對大邊）=> 轉動時$\overline{JS}$有機會＞$\overline{GS}$。

又∠IAR=$\left(180-\frac{360}{m}\right)\times\frac{1}{m-2}\times\frac{m-2+1}{2}=\frac{180m-360}{m}\times\frac{1}{m-2}\times\frac{m-1}{2}$

$=\frac{180(m-2)\times(m-1)}{m\times2\times(m-2)}=\frac{90(m-1)}{m}$，而∠ARI＝90°（由 **"性質 3"**可知）

=>∠AIR=$90-\frac{90(m-1)}{m}=\frac{90}{m}$

=>∠SIF＝一基準形內角－∠AIR＝$\left(180-\frac{360}{m}\right)-\frac{90}{m}=\frac{180m-450}{m}=$

$90\times\frac{2m-5}{m}=90\times\left(2-\frac{5}{m}\right)$。

而∵m≧5，=>∠SIF（即∠SIH）≧90° => ∠SHI＜90° =>∠SIH＞∠SHI ∴轉動時$\overline{HS}$有機

會＞$\overline{IS}$（在同一三角形中，大角對大邊)。

又∵$\overline{IS} \geqq \overline{JS}$ =>$\overline{HS} > \overline{IS} \geqq \overline{JS} > \overline{GS}$。

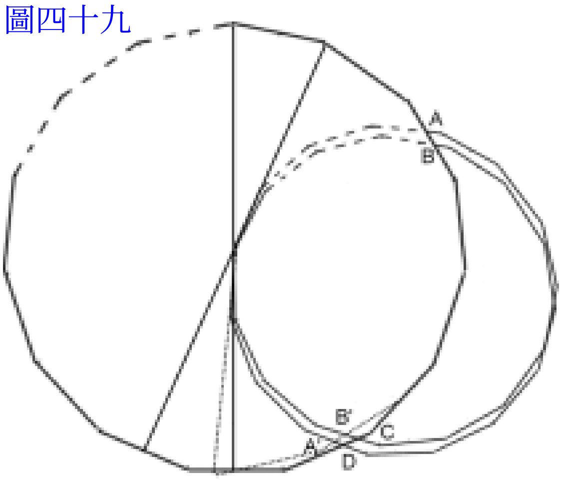
根據**”性質 1”**可知 ∵$\overline{HS} \times \overline{IS}$有機會＞$\overline{JS} \times \overline{GS}$ ，且∠ISH＝∠GSJ,

=>△HIS 有機會＞△GJS =>△HIS 有機會≠△GJS

∴轉動時重疊部分的面積會改變

4. L＞R 且 S＜R

圖四十九

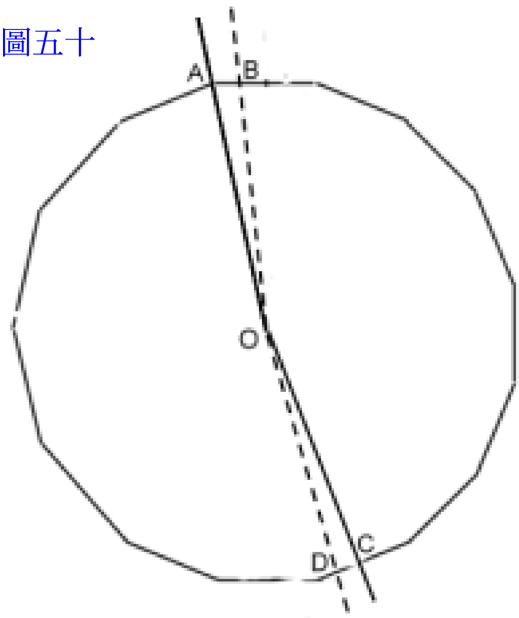


如圖四十九，我們由**“性質 2”**可知， $\overline{A'B'}$和$\overline{CD}$有機會沒有交點。

∴轉動時重疊部分的面積會變

5. L＞R 且 S≧R

圖五十



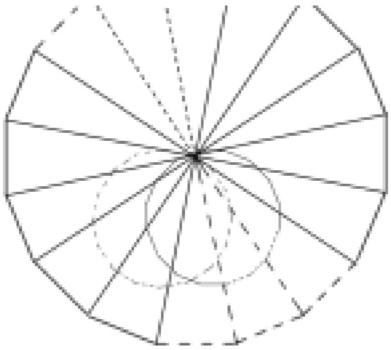
如圖五十，跟以往三、五、七邊形一樣，∴我們用**“性質 1”**比較$\overline{OA} \times \overline{OB}$和$\overline{OC} \times \overline{OD}$的大小， 又知$\overline{OA}$＞$\overline{OD}$ （∵$\overline{OA}$＝R)、$\overline{OB} > \overline{OC}$（∵$\overline{OC}$＝r） ∴$\overline{OA} \times \overline{OB}$＞$\overline{OC} \times \overline{OD}$ ，又∵∠AOB＝∠COD => △OAB＞△OCD

∴轉動時重疊部分的面積會改變

(九)正 2n 邊形（n 是自然數，n≧2）

1. L≦r

圖五十一

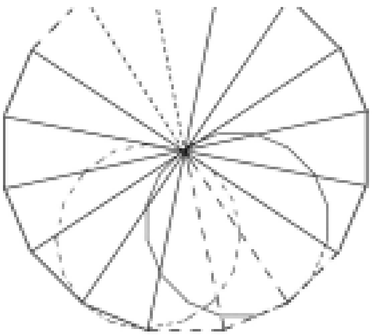


如圖五十一，若 L＜r 轉動形必恆落於基準形之內

∴轉動時重疊部分的面積不變

2. r＜L≦R

圖五十二



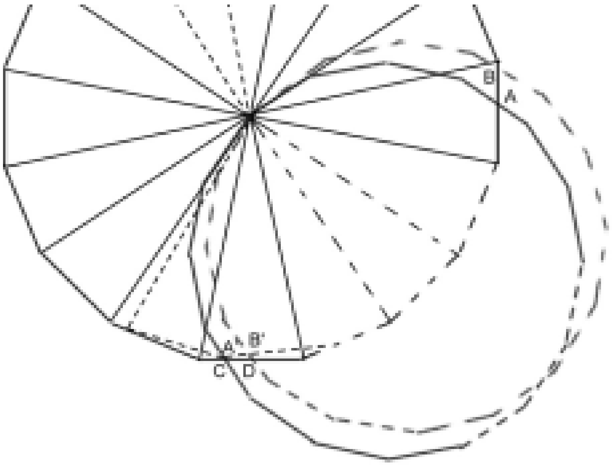
如圖五十二，當 L 重疊於 R 時，則轉動形全部都落在基準形之內

當 L 重疊於 r 時，則轉動形會有部份落在基準形之外

∴轉動時重疊部分的面積會變

3. L＞R；S＜R

圖五十三

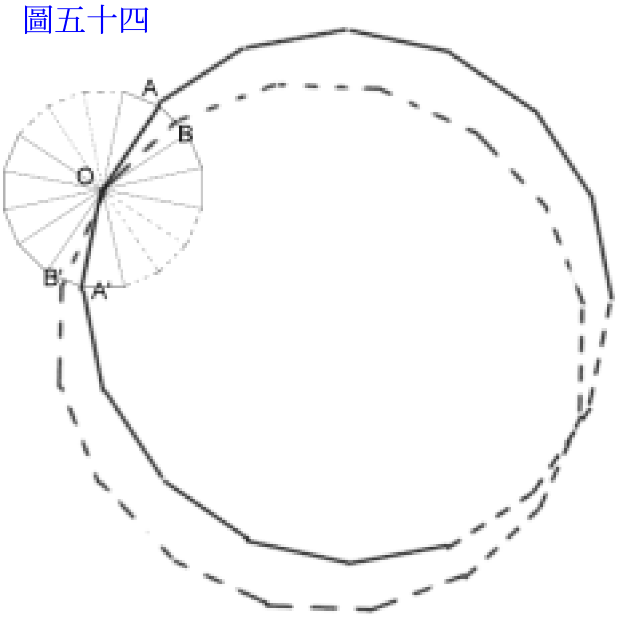


如圖五十三，使用"性質 2"因此可知 $\overline{A'B'}$ 和 $\overline{CD}$ 有機會沒有交點。

∴轉動時重疊部分的面積會變

4. L＞R；S≧R

圖五十四



如圖五十四，∵ $\overline{OA}=\overline{OA'}$

∠AOB＝∠A'OB'

∠OAB＝∠OA'B'

∴△OAB≅△OA'B'（ASA）

∴轉動時重疊部分的面積不變

伍、研究結果

二個邊數相同的正多邊形，一個正多邊形的頂點繞著另一個正多邊形的中心旋轉時，其重疊部分的面積之變化情形，經由上述的研究，其結論如下：

對一正多邊形而言：

設：

R為基準形外接圓半徑
r為基準形內切圓半徑
L為轉動形最長對角線（三邊形時將S視為L）
S為轉動形邊長
K為轉動形一頂點到對邊的垂直距離（邊數為奇數時才考慮K）

邊數	R、r、L、S、K 的各種區別方式	重疊部分的面積是否恆不變（“O ” 是；“X ” 否）
正三角形（此時L為邊長）	L≦r	O
	r＜L≦R， K≦r	X
	r＜L≦R， K＞r	X
	L＞R	X
正四邊形	L≦r	O
	r＜L≦R	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	O
正五邊形	L≦r	O
	r＜L≦R， K≦r	X
	r＜L≦R， K＞r	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	X
正六邊形	L≦r	O
	r＜L≦R	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	O
正七邊形	L≦r	O

	r＜L≦R， K≦r	X
	r＜L≦R， K＞r	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	X
正八邊形	L≦r	O
	r＜L≦R	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	O
正 2n-1 邊形 （n 是自然數，且 n≧2）	L≦r	O
	r＜L≦R， K≦r	X
	r＜L≦R， K＞r	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	X
正 2n 邊形 （n 是自然數，且 n≧2）	L≦r	O
	r＜L≦R	X
	L＞R， S＜R	X
	L＞R， S≧R	O

陸、討論

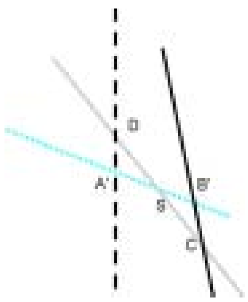
當我們在研究中發現了兩個問題，那就是：

1. 雖然奇邊形兩邊不對稱，但轉動前基準形與轉動形的兩個交點還是有可能等高。且由於基準形和轉動形的兩個交點若為等高，且“一個交點在其所在基準形邊上的中點之右，另一個交點在其所在基準形邊上的中點之左 ”，此種情形為不可能存在的（六-註 3）。
   故在此我們分為：
   （1） 轉動形與基準形的兩個交點，皆位於此二交點所在基準形邊上的中點之右。
   （2） 轉動形與基準形的兩個交點，皆位於此二交點所在基準形邊上的中點之左。
2. 偶邊形中基準形與轉動形的兩個交點，皆恰在此二交點所在邊上的中點。

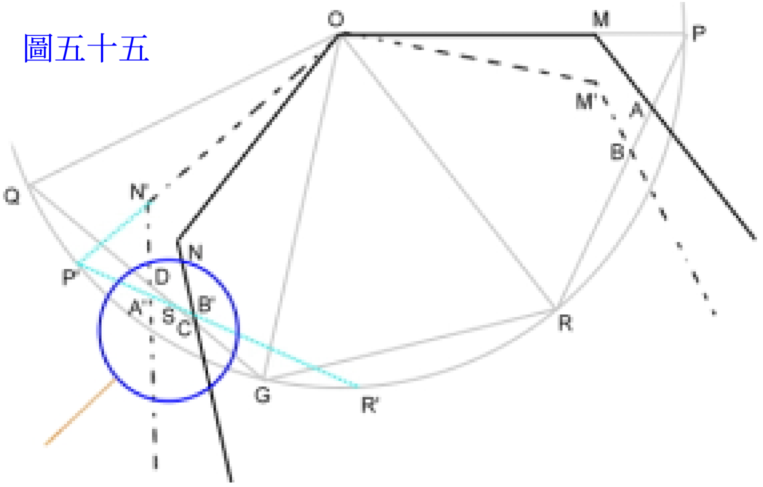
（一） 奇邊形

1. 奇邊形-1

圖五十五之放大



圖五十五



（p.s. 圖五十五轉動形與基準形的兩交點皆位於此二交點所在邊上的中點之右）

已知：如圖五十五，轉動形在轉動前與基準形的交點為 A、C，且 A 的高度＝C 的高度，A、C 兩點分別位於 $\overline{PR}$、$\overline{QG}$ 的中點之右

轉動形在轉動後與基準形的交點為 B、D

A’為 A 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點

B’為 B 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點

$\overline{P'R'}$ 為 $\overline{PR}$ 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段，且 $\overline{P'R'}$ 交 $\overline{QG}$ 於 S

求證：△D A’S≠△B’CS

證明：1. ∵弦 $\overline{P'R'}$ ＝弦 $\overline{QG}$ （∵ $\overline{P'R'}$ 與 $\overline{QG}$ 皆為基準形的單位圓心角所對的邊），∵A 與 C 等

高 => A'與 C 等高，由“性質 9”

=> $\overline{A'S}=\overline{CS}$

2. “欲證△A'DS≠△B'CS ”

根據 “六-註 1”可知∠PAM<90°，

由線對稱知∠P'A'N'=∠PAM<90° =>∠DA'S>90°

再根據 “六-註 1”又可知∠B'CS<90° =>∠DA'S>∠B'CS

∵ $\overline{A'S}=\overline{CS}$，∠DA'S>∠B'CS

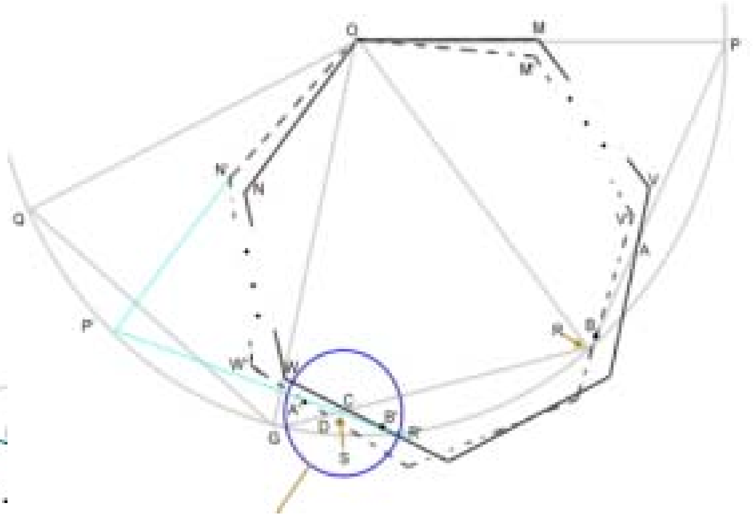
再由“性質 7”=>△DA'S>△B'CS

=>△DA'S≠△B'CS。

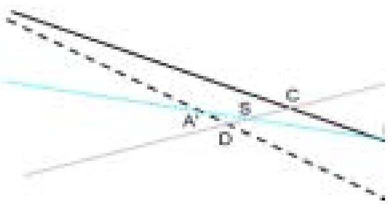
由上述結論 =>在 “性質 2 中的奇邊形”所提，在滿足上述已知條件下，其轉動時重疊部分的面積會改變。

2. 奇邊形-2

圖五十六



圖五十六之放大



(p.s.圖五十六轉動形與基準形的兩交點皆位於此二交點所在邊上的中點之左)

已知：如圖五十六，轉動形在轉動前與基準形的交點為 A、C，且 A 的高度＝C 的高度

A、C 兩點分別位於 $\overline{PR}$、$\overline{RG}$ 的中點之左

轉動形在轉動後與基準形的交點為 B、D

A’為 A 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點
B’為 B 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點

$\overline{P'R'}$為$\overline{PR}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段，且$\overline{P'R'}$交$\overline{RG}$於 S

求證：△A’D S ≠△B’CS

證明：**1.**∵弦$\overline{P'R'}$＝弦$\overline{GR}$（∵$\overline{P'R'}$與$\overline{GR}$皆為基準形的單位圓心角所對的邊），∵A 與 C 等高 =>A’與 C 等高，由**“性質 9”** =>$\overline{A'S}=\overline{CS}$

2.“ 欲證△A’DS≠△B’CS ”

根據 **“六-註 1”**可知∠PAV＜90°，由線對稱知，

∠P’A’W’=∠PAV＜90°=>∠DA’S＜90°

再根據 **“六-註 1”**又可知，∠WCG＜90° =>∠B’CS＞90°

=>∠B’CS＞∠DA’S

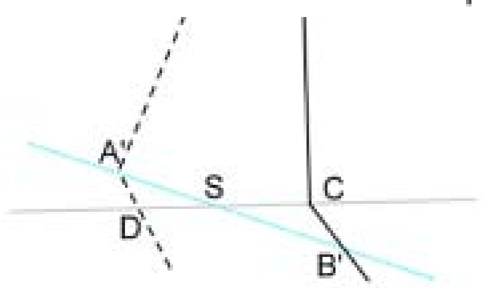
而$\overline{A'S}=\overline{CS}$ ∴由**“性質 7 ”** =>△B’CS＞△DA’S => △D A’S≠△B’CS

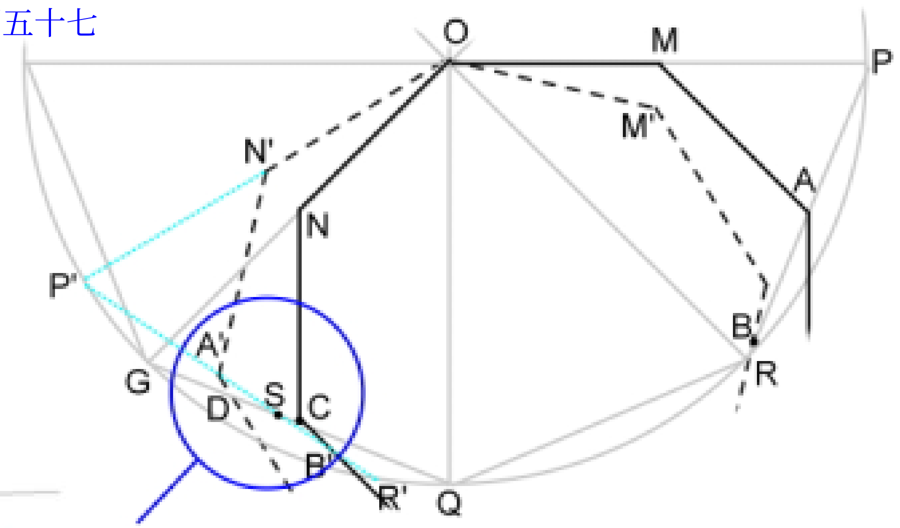
由上述結論 =>在 **“性質 2 中的奇邊形”**所提，在滿足上述已知條件下， 其轉動時重疊部分的面積會改變。

（二） 偶邊形

圖五十七

圖五十七之放大

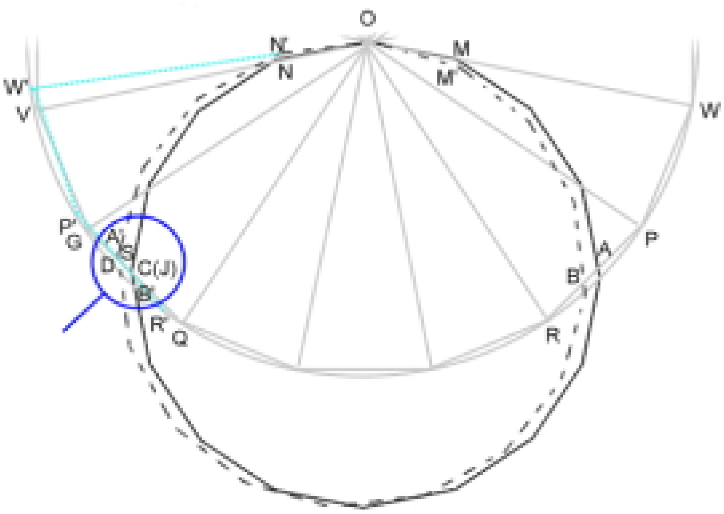




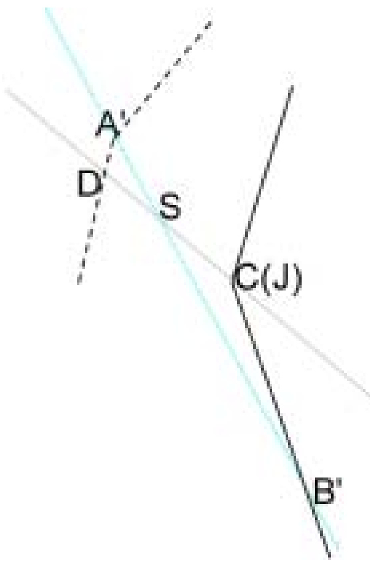
針對圖五十七的圖形說明：

轉動形的邊長＝基準形中心點到其一頂點的距離的$\frac{1}{2}$, 基準形與轉動形的交點恰為轉動形頂點且位於其所在基準形邊上的中點（由**“性質 8”**可知）如圖，圓 O 為正偶邊形（基準形）的外接圓，另一正偶邊形（轉動形）的任一頂點與 O 重合並繞 O 旋轉，轉動前轉動形的兩邊$\overline{OM}$、$\overline{ON}$貼齊基準形中心到頂點的連線$\overline{OP}$、$\overline{OG}$，且轉動形轉動前交基準形兩邊$\overline{PR}$、$\overline{QG}$於 A、C，轉動形轉動後交基準形兩邊$\overline{PR}$、$\overline{QG}$於 B、D

圖五十八



圖五十八之放大



針對圖五十八的圖形說明：
即使不滿足“圖五十七圖形說明”所述條件，“轉動形邊長＝基準形中心點到其一頂點的距離的$\frac{1}{2}$”，而是“轉動形邊長≠基準形中心點到其一頂點的距離的$\frac{1}{2}$”，轉動形與基準形的交點仍有機會恰為轉動形的頂點且位於其所在基準形邊上的中點，（理由是：我們令 J 為轉動形的頂點，∵由“ 六-註 2”可知，連$\overline{OJ}$會重疊於∠QOG 的角平分線，又$\overline{QG}$的中點，即轉動形與基準形的交點 C，亦在∠QOG 的角平分線上=>C、J 兩點重合=>基準形與轉動形的交點（即 C）恰為轉動形的頂點且位於其所在基準形邊上（即$\overline{QG}$）的中點。（同理可證，A 為轉動形的頂點且 A 在$\overline{PR}$中點））如圖，圓 O 為正偶邊形（基準形）的外接圓，另一正偶邊形（轉動形）的任一頂點與 O 重合並繞 O 旋轉，轉動前轉動形的兩邊$\overline{OM}$、$\overline{ON}$貼齊基準形中心到頂點的連線$\overline{OW}$、$\overline{OV}$，且轉動形轉動前交基準形兩邊$\overline{PR}$、$\overline{QG}$於 A、C，轉動形轉動後交基準形兩邊$\overline{PR}$、$\overline{QG}$於 B、D。

已知：如圖五十七、五十八，轉動形與基準形皆為正 2n 邊形（n≧2）

$\overline{OM}$與$\overline{OP}$貼齊，$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP}$（若為圖五十八則僅$\overline{OM}$貼齊$\overline{OU}$）

A 為轉動形的頂點，且 A 為$\overline{PR}$的中點

C 為轉動形的頂點，且 C 為$\overline{QG}$的中點

轉動形在轉動前與基準形的交點為 A、C，且 A 的高度＝C 的高度
轉動形在轉動後與基準形的交點為 B、D
A’為 A 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點
B’為 B 以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱點

$\overline{P'R'}$為$\overline{PR}$以∠MON’的角平分線為對稱軸的對稱線段，且$\overline{P'R'}$交$\overline{QG}$於 S

求證：△A’DS ≠△B’CS

證明：**1.** ∵弦$\overline{P'R'}$＝弦$\overline{QG}$（∵$\overline{P'R'}$與$\overline{QG}$皆為基準形的單位圓心角所對的邊），∴

A 與 C 等高 => A 與 C 等高，由**“性質 9”**可知 => $\overline{A'S}=\overline{CS}$

2.根據 **"六-註 1"**可知∠MAP＜90°，又由線對稱 =>∠N'A'P'=∠MAP＜90°

=>∠N'A'S＞90°

∵∠N'A'D＜180°，∠N'A'S+∠DA'S=∠N'A'D =>∠DA'S 為銳角（＜90°）

3.再根據**"六-註 1"**又可知∠NCG＜90°∵∠NCR'＜180°，∠NCG＜90°

∠B'CS =360°－∠NCR'－ ∠NCG＞90° =>∠B'CS＞∠DA'S

又 $\overline{A'S}=\overline{CS}$ ∴由**"性質 7"** =>△A'DS ≠ △B'CS。

由上述結論 =>在 **"性質 2 中的偶邊形"**所提，在滿足上述已知條件下， 其轉動時重疊部分的面積會改變。

註 1：

已知：如圖六十二、六十三，兩正 2n-1（n≧3）邊形中，S＜R＜L，轉動形與基準形在左（右）半部的折線段的交角，簡稱左（右）交角。

求證：0°＜左（右）交角＜90°

證明：

1.左交角

1.（參考圖六十二）若轉動前，L_1 與 M_1 相交，則左交角＝90°，且左交點在基準形邊的中點，但若如此，則 S 須＞r => $S>\frac{1}{2}R$ => 基準型和轉動形的右交點不在基準形邊的中點 => 左右兩個交點不等高，此與 **"六、討論"**的前提不合。

2.若轉動前，轉動形於 L_2 才與基準形相交，則左交角為 90°－θ

若轉動前，轉動形於 L_3 才與基準形相交，則左交角為 90°－2θ

（θ 為轉動形的一個外角）

又隨著轉動形的折邊數漸漸增加，基準形的折邊數也會漸漸增加，且若基準形折邊數增加一，則左交角增加一個θ，又由 "註 3"知：基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數

=> 左交角＝90°－（轉動形折邊數－1） θ＋（基準形折邊數－1） θ

＝90°－（轉動形折邊數－基準形折邊數） θ

＜90°

如：圖五十九，L_4與M_2相交

則∠1（即左交角）　$=\angle 2-\theta$

$=\angle 3-\theta-\theta$

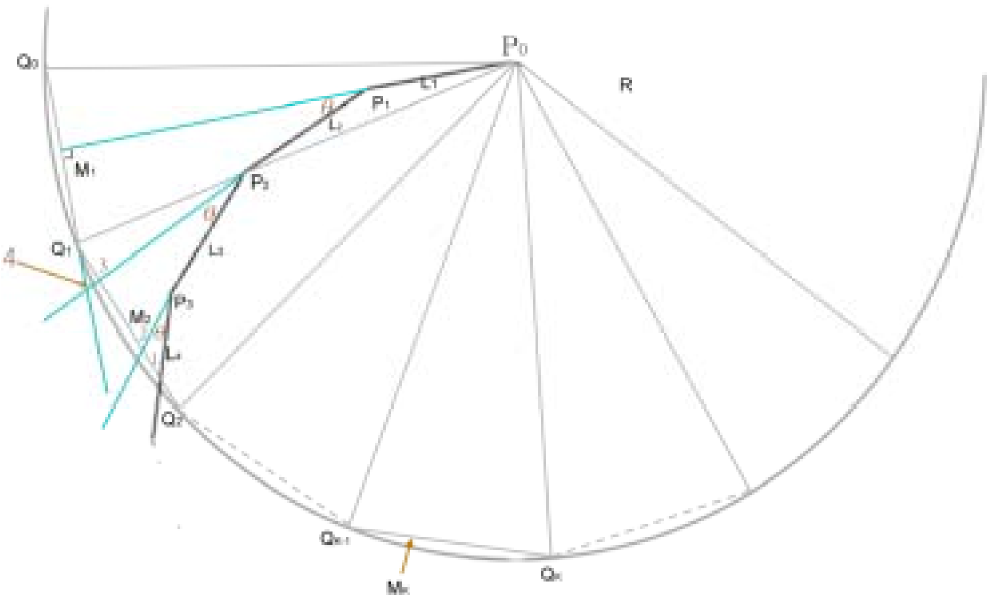
$=\angle 4+\theta-\theta-\theta$

$=90^\circ-\theta+\theta-\theta-\theta$

$=90^\circ-(3-1)\theta$

$=90^\circ-(4-2)\theta$

圖五十九



3.∵L＞R　=> 轉動形至少有一個頂點落在基準形之外

=>左交角＞0°

4.由 **2. 3.**　=> 0°＜左交角＜90°

2.右交角

1.（參考圖六十三）若轉動前，轉動形於 L_1 與基準形相交，則右交角＞90°，若如此，則 S 須≧R，此與已知 S ＜R＜L 不符。

2. 若轉動前，轉動形於 L_2 才與基準形相交，則右交角為 α（α 為 $\frac{1}{2}$×基準形的一個內角），且此右交角＜90°（說明如下）

例如：圖六十

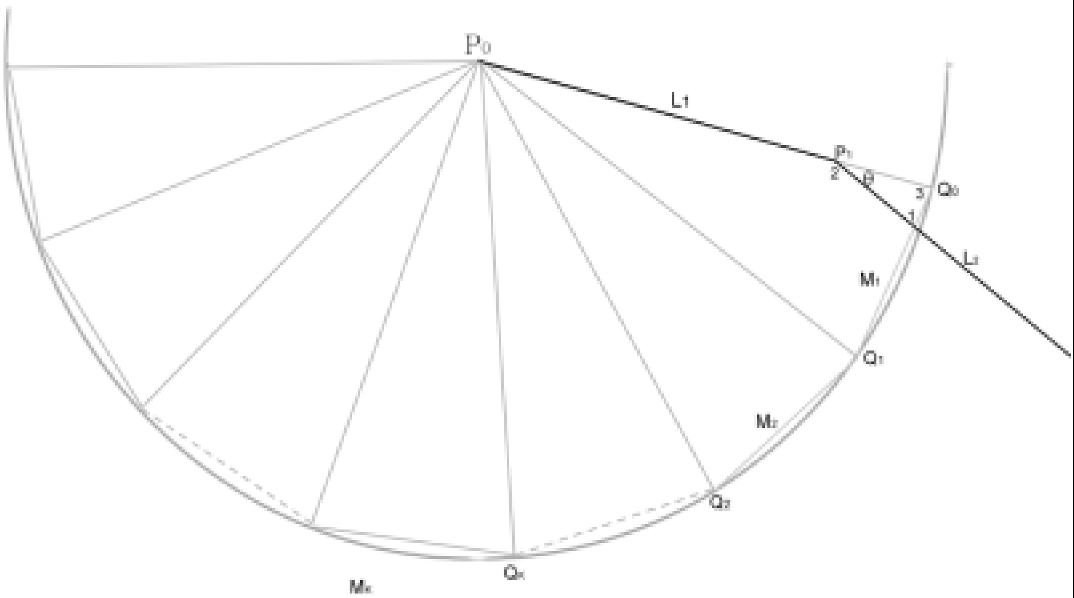
$\angle 1 = \angle 2 - \angle 3$

$= \angle 2 - \frac{1}{2}\angle 2$

$= \frac{1}{2}\angle 2$

$= \frac{1}{2}$ 基準形的一個內角 $= \alpha$

圖六十



若轉動前，轉動形於 L_3 才與基準形相交，則右交角為 $\alpha - \theta$（θ 為轉動形的一個外角）

若轉動前，轉動形於 L_4 才與基準形相交，則右交角為 $\alpha - 2\theta$

又隨著轉動形的折邊數漸漸增加，基準形的折邊數也會漸漸增加，且若基準形折邊數增加一，則右交角增加一個 θ，又由"註 2"知：基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數＋1

=>右交角＝α－（轉動形折邊數－2）θ＋（基準形折邊數－1）θ

＝α－（轉動形折邊數－1－基準形折邊數）θ＜90°

例如：圖六十一，L4 與基準形的 M2 相交

則∠1（即右交角）＝∠2－θ

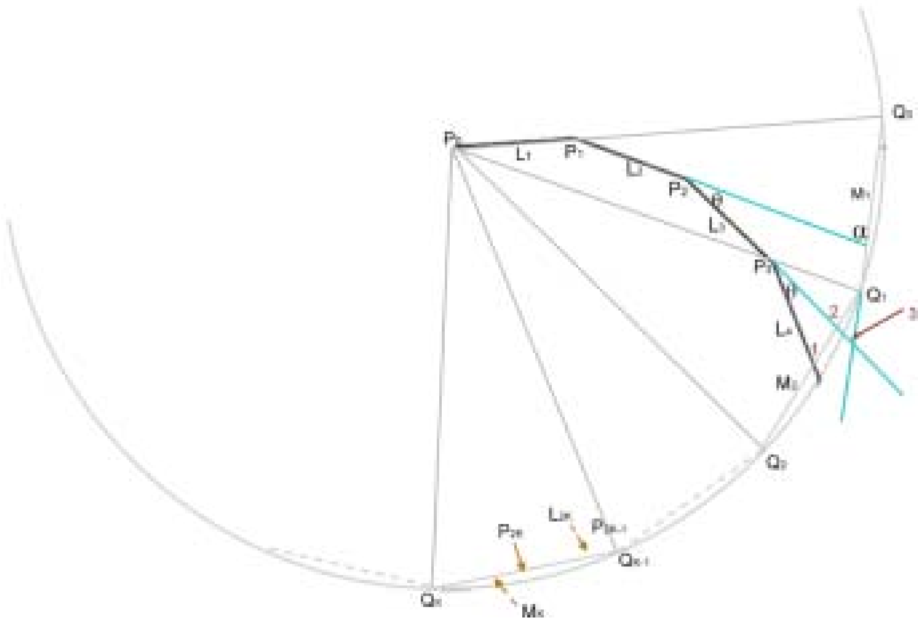
＝∠3＋θ－θ

＝α－θ＋θ－θ

＝α－θ

＝α－（4－1－2）θ

圖六十一



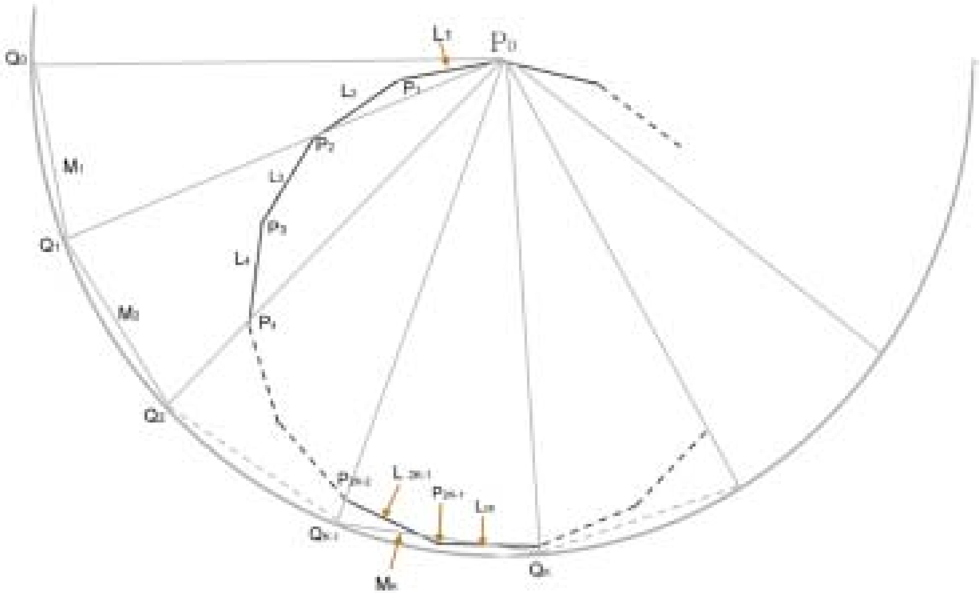
3.∵L＞R，=>轉動形至少有一個頂點落在基準形之外

=>右交角＞0°

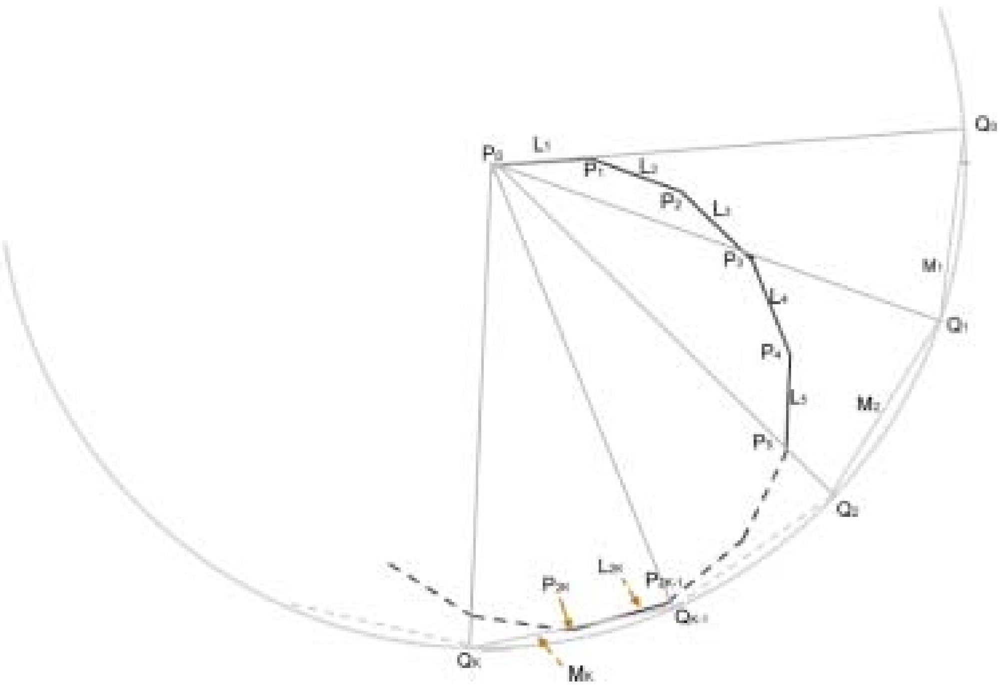
4.由 **2.3.**=> 0°＜右交角＜90°

註 2：轉動形與基準形的折數判斷

圖六十二

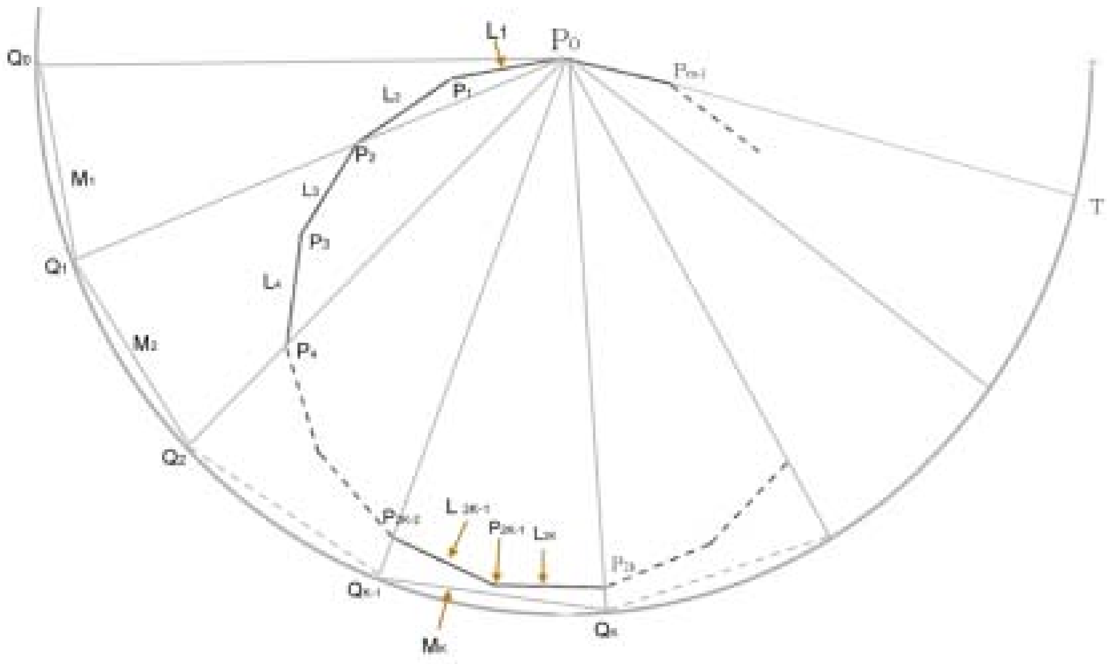

P0
Q0
L1
P1
L2
P2
M1
L3
P3
Q1
L4
M2
P4
Q2
P2k-2
L2k-1
P2k-1
L2k
Qk-1
Mk
Qk

圖六十三


Q0
P0
L1
P1
L2
P2
L3
P3
M1
L4
Q1
P4
L5
M2
P5
Q2
L2k
P2k
P2k-1
Qk-1
Qk
Mk

<table>
<tr><td rowspan="5">定義</td><td>左（右）半部：如圖六十二（圖六十三）
（1）奇邊形：自 P_0 向左（右）算起至轉動形與基準形的左右兩個交點中的左（右）交點為止，由 L_1、L_2……L_{2k-1}（$2k=\frac{m+1}{2}$）所構成的折線段，及由 M_1、M_2……M_k（$2k=\frac{m+1}{2}$）所構成的折線段，這兩種折線段所共同構成的圖形稱為”左（右）半部”（以正 m 邊形為例，m 為奇數且 m≧5）。
（2）偶邊形：自 P_0 向左（右）算起至轉動形與基準形的左右兩個交點中的左（右）交點為止，由 L_1、L_2……L_k（$2k=\frac{m}{2}$）所構成的折線段，及由 M_1、M_2……M_k（$2k=\frac{m}{2}$）所構成的折線段，這兩種折線段所共同構成的圖形稱為”左（右）半部”（以正 m 邊形為例，m 為偶數且 m≧6）。</td></tr>
<tr><td>轉動形的折邊：如圖六十二（圖六十三），從基準形中心 P_0 往左（右）算起，L_i 為轉動形的第 i 個折邊。</td></tr>
<tr><td>基準形的折邊：如圖六十二（圖六十三），M_i 即為基準形的第 i 個折邊。</td></tr>
<tr><td>轉動形的折邊數：如圖六十二（圖六十三），若 L_j 為轉動形與基準形的左右兩個交點中，左（右）交點所在的邊，則我們稱 j 為此轉動形從左（右）半部數起的折邊數。</td></tr>
<tr><td>基準形的折邊數：如圖六十二（圖六十三），若 Mi 為轉動形與基準形的左右兩個交點中，左（右）交點所在的邊，則我們稱 i 為此基準形從左（右）半部數起的折邊數。</td></tr>
</table>

圖六十四



針對圖六十四的說明： ※ 這是探討正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動前的左半部 如圖六十，當 L＞R 且 S＜R 時，我們令轉動形總有兩邊會和基準形邊相交（我們討論在轉動形左邊與基準形相交的邊）。 令轉動形第一個折邊為 L_1；第二個折邊為 L_2；第三個折邊為 L_3（如圖六十二），以此類推…..

已知：如圖六十四，轉動形和基準形為正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動形的 P₀Pm-1 和基準形 P_0T 重合，對於轉動形，連 P_0P_2、P_0P_4、P_0P_6……P_0P_{2k}（$2k=\dfrac{m+1}{2}$）

求證：對於正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動前的左半部，基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2╳基準形的折邊數。

證明：

1. ∵ "從一內角發出的所有對角線把該角 m－2 等份" 其中兩等份的角度（如$\angle P_2P_0P_4$）＝ $\left(180-\dfrac{360}{m}\right)\times\dfrac{1}{m-2}\times 2=\dfrac{360}{m-2}-\dfrac{720}{m(m-2)}=\dfrac{360m-720}{m(m-2)}=\dfrac{360(m-2)}{m(m-2)}=\dfrac{360}{m}$＝基準形的單位圓心角度數。
2. 由 "已知" 及"性質 2 註 1" => P_0P_1 與$\angle Q_0P_0Q_1$ 的角平分線重合
3. 再由 1. 2. =>，P_0Q_2 和 P_0Q_1 重疊；P_0P_4 和 P_0Q_2 重疊…P_0P_{2k-2} 和 P_0Q_{k-1} 重疊
4. 由 3. => 在基準形與轉動形的交點所在的基準形邊之前，基準形從 M_1 開始，基準形每增加一個 "折邊"轉動形就會跟著增加兩個 "折邊"

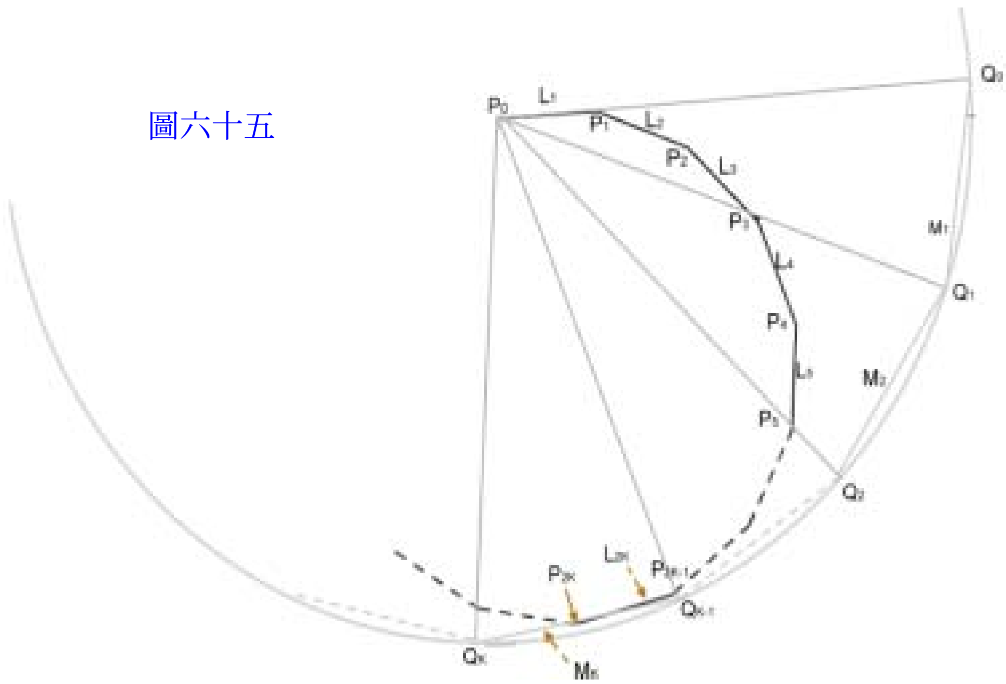
以下是轉動形和基準形左半部所對應的折邊數：

交點所在的基準形的邊	M_1	M_2	M_3	……	M_k
交點所在的轉動形的邊	L_1 或 L_2	L_3 或 L_4	L_5 或 L_6	……	L_{2k-1} 或 L_{2k}
轉動形的折邊數	1 或 2	3 或 4	5 或 6	……	2k-1 或 2k
基準形的折邊數	1	2	3	……	k

當轉動形折邊數=1，基準形的折邊數也=1 時，即轉動形折邊 L_1 與基準形折邊 M_1 有交點時，與已知條件不合（∵若如此，則左方交點在基準形邊的中點，即 Q_0Q_1 的中點，而右半部交點則不在基準形邊的中點 ∴兩交點不等高，此與原討論的**”奇邊形-1”**、**”奇邊形-2”**的已知條件，“ 兩交點等高”不合），故不在討論範圍內。

5.由圖表 => 正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動前的左半部，基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數。

圖六十五



針對圖六十五的說明：

※ 這是探討正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動前的右半部和正 m 邊形（m≧6 且 m 為偶數）的右半部。

如圖六十五，轉動前即 S＜R＜L 時，轉動形總有兩邊會和基準形邊相交（我們討論在轉動形右半部與基準形相交的邊）令轉動形第一個折邊為 L1；第二個折邊為 L_2；第三個折邊為 L_3，依此類推…..

已知：如圖六十五，轉動形和基準形為正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數；m≧6 且 m 為偶數）轉動形的 P_0P_1 和基準形的 P_0Q_0 重合，對於轉動形，連 P_0P_3、P_0P_5、P_0P_7……P_0P_{2k-1}（若 m 為奇數，則 $2k=\frac{m+1}{2}$；若 m 為偶數，則 $2k=\frac{m}{2}$）

求證：對於正 m 邊形（m≧5 且 m 為奇數）轉動前的右半部，及正 m 邊形（m≧6 且 m 為偶數）轉動前的左（右）半部，基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數+1。

證明：

1. ∵ "從一內角發出的所有對角線把該角 m－2 等份" 其中的兩等份的角度（如$\angle P_3P_0P_5$）＝
$$\left(180-\frac{360}{m}\right)\times\frac{1}{m-2}\times 2=\frac{360}{m-2}-\frac{720}{m(m-2)}=\frac{360m-720}{m(m-2)}=\frac{360(m-2)}{m(m-2)}=\frac{360}{m}$$
＝基準形的單位圓心角度數。

2. 當 P_0P_1 和 P_0Q_0 重疊時，由 1.可=> P_0P_3 和 P_0Q_1 重疊；P_0P_5 和 P_0P_2 重疊……P_0P_{2k-1} 和 P_0Q_{k-1} 重疊。

3. 由 2. =>在基準形與轉動形的交點所在的基準形邊之前，基準形從 M_2 開始，基準形每增加一個 "折邊"，轉動形就會跟著增加兩個 "折邊"

以下是轉動形和基準形右方所對應的折邊數：

交點所在的基準形的邊	M_1	M_2	M_3	M_4	……	M_{k-1}	M_k
交點所在的轉動形的邊	L_1 或 L_2 或 L_3	L_4 或 L_5	L_6 或 L_7	L_8 或 L_9	……	L_{2k-2} 或 L_{2k-1}	L_{2k}
轉動形的折邊數	1 或 2 或 3	4 或 5	6 或 7	8 或 9	……	2k-2 或 2k-1	2k
基準形的折邊數	1	2	3	4	……	k-1	k

當轉動形折邊數=1，基準形的折邊數也=1 時，即轉動形折邊 L_1 對應基準形折邊 M_1 有交點時，與已知條件不合（∵若如此，則 L_1 要＞P_0Q_0 才符合此條件，但這就會變成 **"四、研究過程中的 L＞R 且 S≧R"**，∴此與討論範圍的 S＜R＜L 不合）

5. 由圖表可知，正 m 邊形轉動前的右半部（ "m≧5 且 m 為奇數"； "m≧6 且 m 為偶數"），基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數+1。

6. 又∵正 m 邊形（m≧6 且 m 為偶數）的左右半部轉動形的折邊數與基準形的折邊數的關係相同（由**性質 2 的註 2** 可知）
=> 當 "邊數為 5 以上的正奇邊形轉動前的右半部" 及 "邊數為 6 以上的正偶邊形轉動前的左右半部"，基準形的折邊數＜轉動形的折邊數≦2×基準形的折邊數+1。

註 3：

已知：基準形與轉動形的兩交點（A、C）等高

求證：兩交點分別落在其所在基準形邊的中點之左、右兩側是不可能的

證明：

1.如果 A 與 C 不同側且等高成立，我們就可做一對稱軸使 A、C 兩點互為對稱點，此對稱軸重合轉動前轉動形內角的角平分線（如圖六十六）。

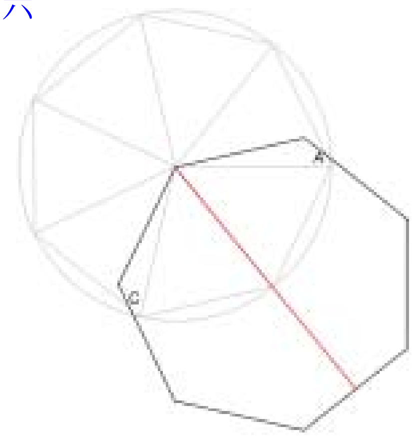
2.在圖六十七中，A 與 B、C 與 D 皆滿足兩交點等高且在基準形的中點的不同側的條件，A、B 的對稱軸 L 重合一單位圓心角的角平分線，C、D 的對稱軸 M 重合基準形中心點到頂點的連線。

3.但奇邊形轉動前內角的角平分線並未重合基準形中心點到頂點的連線或一單位圓心角的角平分線。

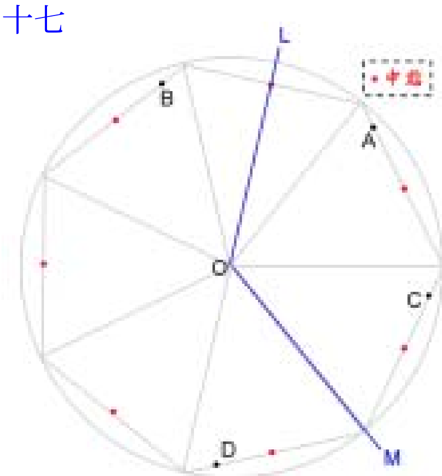
4.∵**2.**與 **3.**矛盾∴此情況為不可能。

=>兩交點分別落在其所在基準形邊的中點之左、右兩側是不可能的

圖六十六



圖六十七



柒、結論

（一）對於任意兩個正 n 邊形（n 為自然數，n≧3），當 L≦r 時，基準形與轉動形重疊的面積恆為定值。

（二）對於任意兩個正 2n 邊形（n 為自然數，n≧2），當 L＞R 且 S≧R 時，基準形與轉動形重疊的面積恆為定值。

（三）除了上述兩點之外，對於其他的情形，基準形與轉動形重疊的面積皆會變動。

起初看到這到題目時，我們還懷疑它到底能不能延伸，結果當我們下定決心做下去時，才發現它的延伸性真的好驚人！不同分類的數目也好多、好複雜，把我們的思緒弄得亂七八糟，曾經組員起內訌，曾二度想乾脆放棄，但都經由老師的再三鼓勵，我們又重拾信心，堅強的繼續研究下去，終於，我們克服了重重的困難，解決了種種研究中的阻礙，完成了這份作品。

而我們在此次的科展研究中，也學到了不少東西：像是幾何圖形的掌握、輔助線的製作、電腦作業的方法……等，但最重要的收穫，莫過於得到許多研究問題的經驗與方法，以及和別人處事的分工合作，這種種在我們的人生旅途中，都有莫大的幫助。總之，這次的科展現在已經苦盡甘來， 我們已成功達成解決問題的目標了！

捌、參考書目

國立編譯館主編（1997），國民中學數學教科書第五冊，台北市國立編譯館。
單墫（1993）數學奧林匹克初二分冊（P.244），新竹市凡異出版社。

評語

從細微觀察中產生靈感，雖然屢屢遭遇困難而能互相勉勵，鍥而不捨的努力，終於解決困境。研究的証明方式若能與教材作更緊密的結合必能更臻完美。