中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：數的黑洞

關鍵詞：黑洞、等位數、類等位數

編號：030413

學校名稱：

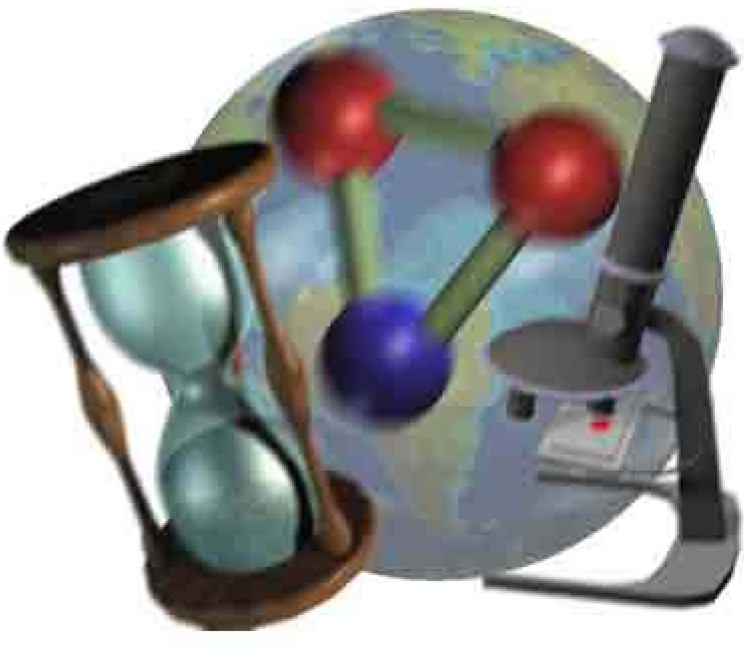
花蓮縣立花崗國民中學

作者姓名：

鄒宗辰、陳磐琳、游惠鈞、潘彥甫

指導老師：

陳貞泰、戴麗卿



壹、研究的動機

上課中曾聽過老師舉了一個有趣的題目:「將二位數 28 的二個位數中,由大到小排列與由小到大排列的差,得一新數。新數的二個位數中,由大到小排列與由小到大排列的差,會再得一新數,……以此類推,可得到一個數列,且最後一定落在一組循環數或“終結”於某一數中。」好奇妙哦!此點論述,引起我們幾位莫大的好奇,因此我們就利用閒暇之餘,著手探討二位數最後會落在於何處呢?而三位數、四位數、……、至 p 位數又如何呢?

貳、研究的目的

1.任二位數的二個位數的組合中,大數減小數所得的新數,逐次做運算,最後會落在何處?它有什麼規律?
2.任三位數的三個位數的組合中,大數減小數所得的新數,逐次做運算,最後會落在何處?它有什麼規律?
3.任四位數的四個位數的組合中,大數減小數所得的新數,逐次做運算,最後會落在何處?它有什麼規律?
4.任五位數的五個位數的組合、六位數的六個位數的組合、七位數的七個位數的組合及 n 位數的組合中,大數減小數所得的新數,逐次做運算,最後會落在何處?它有什麼規律?

參、研究設備及器材:計算器、紙、筆

肆、研究過程及方法

【定義】:

(一)何謂「數的黑洞」?

「數的黑洞」可分成兩類:

單一黑洞:任一個數字不完全相同的 p(2≦p)位數(包括前面若干位為 0,如 0001),施行重排求差運算 T(即把數字重新排列,用所得的最大數減去最小數後,對結果再同樣作重排 求差運算,……,這樣一直進行下去,若結果的 p 位數字,與前一回運算的 p 位數字相同,則此不完全相同的 p 位數字,就是「單一黑洞」。

循環黑洞:但若最後結果一直在某些不完全相同的 p 位數字中循環,我們就稱這些 p 位數字為「循環黑洞」。

(二) 設M是一個p位數$(2 \le p)$且p個數字不全相同o把M的數字依照遞減的次序排列(即最大數M_l),然後再依照遞增的次序排列(即最小數M_s),再計算其差D $(= M_l - M_s)$o用這種方法,我們對每一個被允許的p位數M,可以指定另一個p位數D(或其他英文字)與之對應o而這種對應或變換,可記作函數:

$D_1 = T(M),\quad D_2 = T_2(D_1) = T_2(M), \Lambda\Lambda, D_k = T_k(D_{k-1}) = T_k(M)$

(三) 設大數M_l以$< a_1, a_2, a_3, \Lambda\ a_{k-2}, a_{k-1}, a_k >$示之;

小數M_s以$< a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \Lambda\ a_3, a_2, a_1 >$示之 且$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \Lambda \ge a_{k-1} \ge a_k$(但$a_1 \ne a_k$)

令$a_1 - a_k = r,\ a_2 - a_{k-1} = s,\ a_3 - a_{k-2} = t,\ a_4 - a_{k-3} = u,\ a_5 - a_{k-4} = v$

(四)"有序數對": 一個依$x_1, x_2, x_3, \Lambda\ x_{n-1}, x_n$的順序排列而不可任意調換位置的數對,我們就稱其為"有序數對"$(x_1, x_2, x_3, \Lambda\ , x_{n-1}, x_n)$

(五)"等位數": 若兩個數$M\,(M_l =< a_1, a_2, a_3, \Lambda\ a_{k-2}, a_{k-1}, a_k >; M_s =< a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \Lambda\ a_3, a_2, a_1 >)$ 與$M'(M'_l =< b_1, b_2, b_3, \Lambda\ b_{k-2}, b_{k-1}, b_k >; M'_s =< b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \Lambda\ b_3, b_2, b_1 >)$,它們在一次$T$變換後的$T(M)$與$T(M')$,所產生的值,具完全相同的數字(排列次序可能不同)時,我們就暫稱這兩個數M與M'為"等位數"o當然此時$T(M)$與$T(M')$所產生值的$a_1 - a_k = b_1 - b_k; a_2 - a_{k-1} = b_2 - b_{k-1}; a_3 - a_{k-2} = b_3 - b_{k-2}; a_4 - a_{k-3} = b_4 - b_{k-3}; a_5 - a_{k-4} = b_5 - b_{k-4}; \Lambda\ \Lambda$。且在下一次$T$變換後,必產生相同的值。

例如 : $M = 9875 \xrightarrow{T} 9875 - 5789 = 4086 \xrightarrow{T} 8640 - 0468 = 8172$

與$M' = 9873 \xrightarrow{T} 9873 - 3789 = 6084 \xrightarrow{T} 8640 - 0468 = 8172$

"類等位數": 若兩個數M與M',它們在一次T變換後,所產生的值,雖不具完全相同的數字,但其$T(M)$與$T(M')$中的$a_1 - a_k = b_1 - b_k; a_2 - a_{k-1} = b_2 - b_{k-1}; a_3 - a_{k-2} = b_3 - b_{k-2}; a_4 - a_{k-3} = b_4 - b_{k-3}; a_5 - a_{k-4} = b_5 - b_{k-4}; \Lambda\ \Lambda$ 時,且在下一次T變換後,必產生相同的值。我們就暫稱這兩數M與M'為"類等位數"o

例如 : $M = 9764 \xrightarrow{T} 9764 - 4679 = 5085 (a_1 - a_4 = 8 - 0 = 8\ ; a_2 - a_3 = 5 - 5 = 0\ )$

$\xrightarrow{T} 8550 - 0558 = 7192$

與$M' = 9830 \xrightarrow{T} 9830 - 0389 = 9441 (b_1 - b_4 = 9 - 1 = 8\ ; b_2 - b_3 = 4 - 4 = 0\ )$

$\xrightarrow{T} 9441 - 1449 = 7192$

【研究過程】:

(一)、二位數:

(1).首先我們把二位數M的數字依照遞減的次序排列(即最大數M_l),然後再依照遞增的次序排列(即最小數M_s),分別計算其差D(如附件一)o結果發現在二位數M的T運算中,扣除兩個數字都相同的二位數(因經T變換後會變成00,而不合我們的規定)o我們仍須運算$10^2 - 10 = 90$個二位數,且在這90個二位數的運算中,有許多重覆之處,例如28與82相同;而82與71運算一次後,也會產生相同的值(即$82 - 28 = 54, 71 - 17 = 54$),$\Lambda\ \Lambda$ 等;因此,我們認為只要將這90個二位數加以適當的處理,必能簡化其運算的過程,進而找出二位數M,最後會"終結"於某一數或"落入"某一組循環數或$\Lambda\ \Lambda$ o

依據T運算的規定及[附件一]的觀察,我們發現82與28兩數,不論在其運算過程或結果都相同,因此,我們如果以數對(8,2)代表82,那麼28只可以用數對(8,2)表示,而不能用(2,8)表示,如此不就與"二位數的有序數對(a_1, a_2),其中$a_1 > a_2$ "符合嗎!即在T運算中的90個二位數都可以"有序數對(a_1, a_2),"來充分替代,而計有(9,8),(9,7),Λ ,(9,0);(8,7),(8,6),Λ ,(8,0);(7,6),(7,5),Λ ,(7,0);(6,5),(6,4),Λ ,(6,0);(5,4),(5,3),Λ ,(5,0);(4,3),(4,2),Λ ,(4,0);(3,2),(3,1),(3,0);(2,1),(2,0);(1,0)等45組

(2).設$r=a_1-a_2, 1\le r\le 9$,計算$T(M)$:

$\Theta\ M_l=<a_1,a_2>=10a_1+a_2,\quad M_s=<a_2,a_1>=10a_2+a_1$

$\therefore (a_1,a_2)$之$D_1=T(M)=M_l-M_s$

$=<a_1,a_2>-<a_2,a_1>=9(a_1-a_2)$

$=9r=10(r-1)+(10-r)$

故二位數(a_1,a_2)經過一次T變換後,所得的兩個數字必為 $(r-1),(10-r)$

(3).$\Theta\ (a_1,a_2)$的D_1值 $=T(M)=\underline{<a_1,a_2>-<a_2,a_1>}$

$=9r=10r-r$

$=(10r+0)-(10\cdot 0+r)$

$=\underline{<r,0>-<0,r>}=(r,0)$的$D_1$值

因此我們可用"有序數對"$(r,0)$來充分替代二位數的"有序數對"(a_1,a_2)

例如:(6,0)可以替代(9,3), 而計有(9,0),(8,0),(7,0),(6,0),(5,0),(4,0),(3,0),(2,0),(1,0)等9組

(4).令"有序數對"$(r,0)$經一次的T變換,以"有序數對"$(r',0)$對應o而以$(r,0,)\to(r',0,)$示之,

又以後每經一次的T變換,也都用此方式表示o

且此時依照遞減次序排列的二位數為 $<a_1',a_2'>$,並令$r'=a_1'-a_2'$ o

(5).在$a_1-a_2=r$與$a_1-a_2=11-r$時,都會使二位數經一次T運算後產生同值(即"等位數")

[證明]:任一個"有序數對"$(r,0)$中

設M中的$a_1-a_2=r, M'$中的$a_1-a_2=11-r$

則$D_1=T(M)=9(a_1-a_2)=9r=(10-1)r=10r-r=10(r-1)+(10-r)$

而$D_1'=T(M')=9(a_1-a_2)=9(11-r)=99-9r=10(10-r)+(r-1)$

$\Theta\ D_1$與D_1'的二位數字都為$(10-r),(r-1)$,

$\therefore$ 故D_1與D_1'為"等位數"。

例如:(2,0)與(9,0);(3,0)與(8,0);(4,0)與(7,0);(5,0)與(6,0)都為"等位數"。

因此從(3)中的9組"有序數對"$(r,0)$,再扣除4組"等位數"後,我們就只須討論(1,0),(3,0),(5,0),(7,0),(9,0)等五組"有序數對"即可知曉二位數的T運算"終歸"何處。

(6).若$(r,0)$經最後一次T變換後,會進入"單一黑洞"的話,那麼$(r,0)=(r',0)$ o

(7).$\Theta\ D_1=T(M)=10(r-1)+(10-r)$

$\therefore (i)$若$0<r\le 5$時,則$10-r>r-1$,且$(r,0)\to(10-r-r+1,0)=(11-2r,0)=(r',0)$

即$r=11-2r, r=\dfrac{11}{3}$(不合)

(ii)若$5<r\le 9$時,則$10-r<r-1$,且$(r,0)\to(r-1-10+r,0)=(2r-11,0)=(r',0)$

即$r=2r-11, r=11$(不合)

故二位數的T運算,必不可能進入"單一黑洞"o

(8).Θ 不論$11-2r$或$2r-11$都為奇數

$\therefore$ 得知(7).証明中的r'必為奇數,且$1\le r'\le 9$ o因此在

(i)若$0<11-2r=r'\le 5$時,則會再一次對應於$(11-2r,0)$,此時得$3\le r\le 5$

而$r=3$或4或5時,都會有兩次或兩次以上對應於$(11-2r,0)$後,才進入$(2r-11,0)$

的對應ο又因$(4,0)$與$(7,0)$為"等位數",故$r=4$,可不予討論ο即$(3,0)\to(5,0)\to(1,0)$
$\to(9,0)$[進入$(2r-11,0)$的對應]

(ii)若$5<2r-11=r'\le 9$時,則會再一次對應於$(2r-11,0)$,此時得$8<r\le 10$
而在$r=9$時,也會有兩次或兩次以上對應於$(2r-11,0)$後,才進入$(11-2r,0)$的
對應ο即$(9,0)\to(7,0)\to(3,0)$[進入$(11-2r,0)$的對應]

綜合$(i)(ii)$所述,得知$(3,0),(5,0),(1,0),(9,0),(7,0)$會形成一個"循環黑洞"ο其圖如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} (3,0) & \to & (5,0) & \to & (1,0) & \to & (9,0) & \to & (7,0) \\ \underline{\mathbf{63}} & & \underline{\mathbf{27}} & & \underline{\mathbf{45}} & & \underline{\mathbf{09}} & & \underline{\mathbf{81}} \end{array}$$

(9).最後,我們依上述討論,將所得的 9 組(r,0),繪圖如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} (4,0) & & (8,0) & & (6,0) & & & & (2,0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ (3,0) & \to & (5,0) & \to & (1,0) & \to & (9,0) & \to & (7,0) \\ \underline{\mathbf{63}} & & \underline{\mathbf{27}} & & \underline{\mathbf{45}} & & \underline{\mathbf{09}} & & \underline{\mathbf{81}} \end{array}$$

得知二位數的 T 運算至多在操作 2 次後，就會進入一個長度為 5 的“循環黑洞”

(二)、<u>三位數</u>：

(1).設a_1,a_2,a_3為三位數M的數字,並指定$a_1\ge a_2\ge a_3$ ο$(a_1\ne a_3)$
則三位數的"有序數對"可以(a_1,a_2,a_3)表之;而計有$54+44+35+27+20+14+9+5+2$
$=210$組。

(2).設$r=a_1-a_3,\ 1\le r\le 9,$

$\Theta\ M_l=<a_1,a_2,a_3>=100a_1+10a_2+a_3;\quad M_s=<a_3,a_2,a_1>=100a_3+10a_2+a_1$

$\therefore\ (a_1,a_2,a_3)$的$D_1=T(M)=<a_1,a_2,a_3>-<a_3,a_2,a_1>$
$=99(a_1-a_3)=99r$
$=(r-1)\cdot 100+9\cdot 10+(10-r)$

故三位數(a_1,a_2,a_3)經過一次T變換後,所得的百位數字必為$(r-1)$,十位數字為9,個位數字

(3)$\Theta\ (a_1,a_2,a_3)$的$D_1=T(M)=\underline{<a_1,a_2,a_3>-<a_3,a_2,a_1>}$
$=99r=100r-r$
$=(100\cdot r+10\cdot 0+1\cdot 0)-(100\cdot 0+10\cdot 0+r)$
$=\underline{<r,0,0>-<0,0,r>}$
$=(r,0,0)$的D_1

又$(r,0,0)$中的"0,0",若以一個"0"代之,仍能顯示$(r,0,0)$特性。
因此,我們還是可用"有序數對"$(r,0)$來充分替代"三位數所形成的有序數對(a_1,a_2,a_3)",
例如:$(8,0)$可用替代$(9,3,1)$, 而計有$(9,0),(8,0),(7,0),(6,0),(5,0),(4,0),(3,0),(2,0),(1,0)$等9組

(4).令"有序數對"$(r,0)$經一次的T變換,仍以$(r',0)$對應。而仍以$(r,0,)\to(r',0,)$示之,

又以後每經一次的T變換,也都可以用此方式表示。

且此時依照遞減次序排列的三位數為$<9,\ a_1',a_2'>$,並令$r'=9-a_2'$。

(5).在$a_1-a_3=r$與$a_1-a_3=11-r$時,都會使三位數在一次T運算後產生同值(即"等位數")。

[證明]:任一個"有序數對'"$(r,0)$中

設M中的$a_1-a_3=r, M'$中的$=11-r$

則$D_1=T(M)=99r=(100-1)r=100r-r=100(r-1)+90+(10-r)$

而$D_1'=T(M')=99(11-r)=1000+90-1-100r+r=100(10-r)+90+(r-1)$

$\because D_1$與D_1'的三位數字都為$9,(10-r),(r-1)\ \therefore D_1$與$D_1'$為"等位數"。

例如:$(2,0)$與$(9,0)$;$(3,0)$與$(8,0)$;$(4,0)$與$(7,0)$;$(5,0)$與$(6,0)$等

因此在扣除4組"等位數"後,我們也只須討論$(1,0),(3,0),(5,0),(7,0),(9,0)$等五組"有序數對"

即可知曉三位數的T運算"終歸"何處。

(6).若$(r,0)$經最後一次T變換後,會進入"單一黑洞"的話,那麼$(r,0)=(r',0)$。

(7).$\because D_1=100(r-1)+9\cdot 10+(10-r)$

$\therefore (i)$若$r-1\ge 5$,則$9\ge r-1\ge 10-r$,

此時依照遞減次序排列的三位數為$<9,r-1,10-r>$。令$r'=9-(10-r)=r-1$,

則$(r,0,)\to(r',0,)=(9-10+r,0)=(r-1,0)$。

故當$(r-1)\ge(10-r)$時,$(r,0)=(r',0)=(9-10+r,0)=(r-1,0)$,則$r=r-1$(不合)

(ii)若$0\le r-1<5$,則$9\ge 10-r\ge r-1$,

此時依照遞減次序排列的三位數為$<9,10-r,r-1>$。令$r'=9-(r-1)=10-r$,

則$(r,0,)\to(r',0,)=(9-r+1,0)=(10-r,0)$。

故當$(r-1)<(10-r)$時,$(r,0)=(r',0)=(9-r+1,0)=(10-r,0)$,此時$r=10-r, r=5$。

而當$r=5$, $(5,0)=<5,0,0>-<0,0,5>=495$

即三位數的T運算,在$(5,0)$後必進入"單一黑洞(495)"。

(8).從上述(7).的討論中,我們得知

(i)在$r-1\ge 10-r$(即$r\ge 6$)時,

由$(r,0,)$所得$(r',0,)$,可以以$(r,0,)\to(r',0,)=(r-1,0)$表示。

(ii)在$r-1<10-r$(即$r\le 5$)時,

由$(r,0,)$所得$(r',0,)$,可以以$(r,0,)\to(r',0,)=(10-r,0)$表示。

又當$r\ge 6$,若$(r',0,)=(1,0)=(r-1,0)$時,$r=0$(不合)

而當$r\le 5$,若$(r',0,)=(1,0)=(10-r,0)$時,$r=9$(不合)

故$(1,0)$為最原始的$(r,0)$ (即其之前無任何$(r,0)$存在者)

同理$(2,0),(3,0),(4,0)$均為最原始的$(r,0)$

因此可得右圖:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{495}} & (5,0) \arrow[l] & (6,0) \arrow[l] & (7,0) \arrow[l] & (8,0) \arrow[l] & (9,0) \arrow[l] & (1,0) \arrow[l] \\
& (5,0) \arrow[u] & (4,0) \arrow[u] & (3,0) \arrow[u] & (2,0) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

所以三位數的T運算,最多在操作6次之後必進入"單一黑洞(495)"

(三)、<u>四位數</u>

(1).設a_1,a_2,a_3,a_4是M的數字,並指定$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4$ o$(a_1 \ne a_4)$

則四位數的"有序數對"可以(a_1,a_2,a_3,a_4)表之;計有$219+164+119+83+55+34+19+9+3=705$組

且$M_l =< a_1,a_2,a_3,a_4 >= 1000a_1+100a_2+10a_3+a_4$

而$M_S =< a_4,a_3,a_2,a_1 >= 1000a_4+100a_3+10a_2+a_1$

(2).Θ (a_1,a_2,a_3,a_4)的$D_1 = T(M) = \underline{< a_1,a_2,a_3,a_4 > - < a_4,a_3,a_2,a_1 >}$

$= (1000a_1+100a_2+10a_3+a_4)-(1000a_4+100a_3+10a_2+a_1)$

$= 999r+90s = 1000r - r + 100s - 10s$

$= (1000r+100s+10\cdot 0+0)-(1000\cdot 0+100\cdot 0+10s+r)$

$= \underline{< r,s,0,0 > - < 0,0,s,r >}$

$= (r,s,0,0)$的D_1

(3).設$r = a_1 - a_4, s = a_2 - a_3$,計算$T(M)$:

Θ $D_1 = T(M) = 1000a_1+100a_2+10a_3+a_4-(1000a_4+100a_3+10a_2+a_1)$

$= 999(a_1-a_4)+90(a_2-a_3) = 999r+90s$

$= 1000r+100(s-1)+10(9-s)+(10-r)$

$\therefore$四位數M經過一次T變換後,所得的四個數字為$r,(s-1),(9-s),(10-r)$;

又$(r,s,0,0)$中,若以(r,s)取代,仍可以充分顯示其$(r,s,0,0)$特性。

所以,我們一樣可用"有序數對"(r,s)來充分替代所有四位數所形成的"有序數對"(a_1,a_2,a_3,a_4)

例如:(9,8,3,1)可以(8,5)替代。即(9,8,3,1)之$D_1 =< 9,8,3,1 > - < 1,3,8,9 >= 8442$;又(8,5)之$D_1 = (8,5,0,0)$之$D_1 =< 8,5,0,0 > - < 0,0,5,8 >= 8442$。 計有:(9,9),(9,8),$\Lambda$,(9,0);(8,8),(8,7),$\Lambda$,(8,0);(7,7),(7,6),$\Lambda$,(7,0);(6,6),(6,5),$\Lambda$,(6,0);(5,5),(5,4),$\Lambda$,(5,0);(4,4),(4,3),$\Lambda$,(4,0);(3,3),(3,2),$\Lambda$,(3,0);(2,2),(2,1),(2,0);(1,1),(1,0)等54組

(4).設(r,s)再經一次的T變換,以(r',s')對應o即$(r,s,) \to (r',s',)$示之,而以後每經一次的T變換,也都可以用此方式表示o

又此時依照遞減次序排列的四位數為$< a_1',a_2',a_3',a_4' >$,令$r' = a_1' - a_4'$,令$s' = a_2' - a_3'$ o

(5).在(A).$(i)a_1 - a_4 = r,\quad a_2 - a_3 = s\ \ (5 \ge r > s > 0)$

$(ii)a_1 - a_4 = 10 - r,\quad a_2 - a_3 = s\ \ (5 \ge r > s > 0)$

$(iii)a_1 - a_4 = 10 - s,\quad a_2 - a_3 = r\ \ (5 \ge r > s > 0)$

$(iv)a_1 - a_4 = 10 - s,\quad a_2 - a_3 = 10 - r\ \ (5 \ge r > s > 0)$

(B).$(i)a_1 - a_4 = r, a_2 - a_3 = s = 0\quad (1 < r \le 5, s = 0)$

$(ii)a_1 - a_4 = 11 - r, a_2 - a_3 = s = 0\quad (1 < r \le 5, s = 0)$

(C).$(i)a_1 - a_4 = r, a_2 - a_3 = s\ (5 > r = s > 0)$

$(ii)a_1 - a_4 = 10 - r, a_2 - a_3 = 10 - s\ (5 > r = s > 0)$

$(iii)a_1 - a_4 = 10 - r, a_2 - a_3 = s\ (5 > r = s > 0)$

都會使四位數的T運算都會產生相同的值(即"等位數"或"類等位數")o

[證明]: $(A)(i)$ 令M中的$a_1-a_4=r, a_2-a_3=s \quad (5\ge r>s>0)$

設$D_1=T(M)=999r+90s=(1000-1)r+(100-10)s$

$=1000r+(100s-100)+(100-10-10s)+(10-r)$

$=1000r+100(s-1)+10(9-s)+(10-r)$

則$9-s\ge 10-r\ge r>s-1$故$(r,s)\to(10-2s,10-2r)=(r',s')$

(ii)令M'中的$a_1-a_4=10-r, a_2-a_3=s \quad (5\ge r>s>0)$

設$D_1'=T(M')=999(10-r)+90s=9990-999r+90s$

$=10000-1000r+r+100s-10s+90-100$

$=1000(10-r)+100(s-1)+10(9-s)+r$

則$9-s\ge 10-r\ge r>s-1$故$(10-r,s)\to(10-2s,10-2r)=(r',s')$

(iii)令M''中的$a_1-a_4=10-s, a_2-a_3=r \quad (5\ge r>s>0)$

設$D_1''=T(M'')=999(10-s)+90r$

$=10000-10-1000s+s+100r-100+100-10r$

$=1000(10-s)+100(r-1)+10(9-r)+s$

(iv)令M'''中的$a_1-a_4=10-s, a_2-a_3=10-r \quad (5\ge r>s>0)$

設$D_1'''=T(M''')=999(10-s)+90(10-r)$

$=10000-10-1000s+900-100r+10r+s$

$=1000(10-s)+100(9-r)+10(r-1)+s$

則$10-s>9-r>r-1\ge s$故$(10-s,10-r)\to(10-2s,10-2r)=(r',s')$

Θ D_1, D_1', D_1''與D_1'''的(r',s')同為$(10-2s,10-2r)$

故D_1, D_1', D_1''與D'''為"等位數"或"類等位數"。計有: (a).(4,1),(6,1),(9,4)與(9,6);

(b).(4,2),(6,2),(8,4)與(8,6); (c).(4,3),(6,3),(7,4)與(7,6); (d).(3,1),(7,1),(9,3)與(9,7);
(e).(3,2),(7,2),(8,3)與(8,7); (f).(2,1),(8,1),(9,2)與(9,8); (g).(5,1)與(9,5);
(h).(5,2)與(8,5); (i).(5,3)與(7,5); (j).(5,4)與(6,5)等10組

$(B)(i)$令M的$a_1-a_4=r, a_2-a_3=s \quad (1<r\le 5, s=0)$

設$E_1=T(M)=1000(r-1)+900+90+(10-r)$ [証明同$(A)(i)$]

則$9=9>10-r>r-1$故$(r,s)\to(10-r,r-1)$

(ii)令M的$a_1-a_4=11-r, a_2-a_3=s=0 \quad (1<r\le 5, s=0)$

設$E_1'=T(M')=999(11-r)+90\cdot 0=999(10+1-r)$

$=9990+999-1000r+r$

$=10000-1000r+900+90-10+9+r$

$=1000(10-r)+900+90+(r-1)$

則$9=9>10-r>r-1$故$(11-r,s)\to(10-r,r-1)$

Θ E_1與E_1'的四位數字相同,故E_1與E_1'為"等位數"。計有: (a).(2,0)與(9,0);
(b).(3,0)與(8,0); (c).(4,0)與(7,0); (d).(5,0)與(6,0)等四組

$(C)(i)$令M的$a_1 - a_4 = r, a_2 - a_3 = s \quad (5 > r = s > 0)$

設$F_1 = T(M) = 1000r + 100(s-1) + 10(9-s) + (10-r)$ [証明同$(A)(i)$]

則$10 - r > 9 - s > r > s - 1$, 故$(r,s) \to (11 - r - s, 9 - r - s)$

(ii)令M'的$a_1 - a_4 = 10 - r, a_2 - a_3 = 10 - s \quad (5 > r = s > 0)$

$$\begin{aligned}
\text{設}F_1' = T(M') &= 999(10-r) + 90(10-s) = 9990 - 999r + 900 - 90s \\
&= 10000 - 10 - 1000r + r + 900 - 100s + 10s \\
&= (10000 - 1000r) + (900 - 100s) + (10s - 10) + r \\
&= 1000(10-r) + 100(9-s) + 10(s-1) + r
\end{aligned}$$

則$10 - r > 9 - s > r > s - 1$, 故$(10 - r, 10 - s) \to (11 - r - s, 9 - r - s)$

(iii)令M''的$a_1 - a_4 = 10 - r, a_2 - a_3 = s \quad (5 > r = s > 0)$

$$\begin{aligned}
\text{設}F_1'' = T(M'') &= 999(10-r) + 90s = 9990 - 999r + 90s \\
&= 10000 - 100 + 90 - 1000r + r + 100s - 10s \\
&= (10000 - 1000r) + (100s - 100) + (90 - 10s) + r \\
&= 1000(10-r) + 100(s-1) + 10(9-s) + r
\end{aligned}$$

則$10 - r > 9 - s > r > s - 1$, 故$(10 - r, s) \to (11 - r - s, 9 - r - s)$

$\because F_1, F_1'$與F_1''的(r', s')同為$(11 - r - s, 9 - r - s)$;

故G_1, G_1'與G_1''為"等位數"或"類等位數"。計有 : $(a).(1,1), (9,1)$與$(9,9)$;

$(b).(2,2), (8,2)$與$(8,8)$; $(c).(3,3), (7,3)$與$(7,7)$; $(d).(4,4), (6,4)$與$(6,6)$等4組。

綜合以上所述,將"等位"與"類等位"關係,作成如下表格(一) :

條件	"等位數"或"類等位數"	(r', s')
$0 < s < r \le 5$	$\begin{cases}(r,s)\\(10-r,s)\\(10-s,r)\\(10-s,10-r)\end{cases}$	$(10-2s, 10-2r)$
$1 < r \le 5, s = 0$	$\begin{cases}(r,0)\\(11-r,0)\end{cases}$	$(10-r, r-1)$
$0 < s = r < 5$	$\begin{cases}(r,s)\\(10-s,r)\end{cases}$	$(11-r-s, 9-r-s)$

由此,我們得知除了$r = 5, s = 5$及$r = 1, s = 0$無"等位"或"類等位"外,其餘的52組(r,s)都具有其"等位"或"類等位"的關係。因此,在扣除具有"等位數"或"類等位數"關係的"有序數對"後,我們所須探討就只有(1,0);(1,1);(2,0);(2,1);(2,2);(3,0);(3,1);(3,2);(3,3);(4,0);(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(5,0);(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5)等20組(r,s)的"有序數對";所以我們只要找出這20組(r,s)的先後順序,尤其是「最原始的"有序數對"」(即其之前無任何(r,s)存在者)是哪些組,再搭配表格(一)中的(r', s')逐次推導,如此就可完成整個四位數T運算的圖表。

(6). $\Theta < a_1,a_2,a_3,a_4 > - < a_4,a_3,a_2,a_1 > = < r,s,0,0 > - < 0,0,s,r >$

$= 1000r + 100(s-1) + 10(9-s) + (10-r);$

且$r = a_1 - a_4 \ge a_2 - a_3 = s, a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4 (a_1 \ne a_4)$

$\therefore (i) s = 0$時,

$< a_1,a_2,a_3,a_4 > - < a_4,a_3,a_2,a_1 > = < r,s,0,0 > - < 0,0,s,r >$

$= 1000r + 100(s-1) + 10(9-s) + (10-r) = 1000r - 100 + 90 + (10-r)$

$= 1000(r-1) + 900 + 90 + (10-r);$故所得的四個數字為$(r-1),9,9,(10-r)$

$(ii) s \ge 1$時,由於$r \ge s, \therefore r > s-1$

$< a_1,a_2,a_3,a_4 > - < a_4,a_3,a_2,a_1 > = < r,s,0,0 > - < 0,0,s,r >$

$= 1000r + 100(s-1) + 10(9-s) + (10-r)$

故所得的四個數字為$r,(s-1),(9-s),(10-r);$

再將$r=1, s=0$代入(i)後,得遞減的四位數為$< 9,9,10-r,r-1 > = < 9,9,9,0 >;$

即$(1,0) \to (9,0)$ o將$r=5, s=5$代入(ii)後,得遞減的四位數為$< r,10-r,9-s,s-1 >$

$= < 5,5,4,4 >;$即$(5,5) \to (1,1)$ o

(7).「最原始的"有序數對"」如何尋找呢？

由於(r,s)再經一次的T變換後,所得的四個數字必為 $r,\ s-1,\ 9-s,\ 10-r$

或 $r-1,\ 9,\ 9,\ 10-r$ o設遞減的四位數為$< a_1',a_2',a_3',a_4' >$ o令$r' = a_1' - a_4'$, $s' = a_2' - a_3'$ o

(i)在$s \ge 1$時,由於$r \ge s, \therefore r > s-1,$故排成四位數的可能情況如下 :

$(a) < r,9-s,10-r,s-1 >$ $(b) < r,9-s,s-1,10-r >$ $(c) < r,10-r,9-s,s-1 >$

$(d) < r,10-r,s-1,9-s >$ $(e) < r,s-1,9-s,10-r >$ $(f) < r,s-1,10-r,9-s >$

$(g) < 9-s,r,10-r,s-1 >$ $(h) < 10-r,9-s,r,s-1 >$ $(i) < 9-s,10-r,r,s-1 >$

$(j) < 10-r,r,9-s,s-1 >$ $(k) < 10-r,r,s-1,9-s >$ $(l) < 9-s,r,s-1,10-r >$

等十二種 o但$(l) < 9-s,r,s-1,10-r >$這一種中因$9-s-(10-r) < r-(s-1)$而

不成立,故在$s \ge 1$時,排成四位數的可能情況只有11種

(ii)在$s=0$時,排成四位數的可能情況只有 $< 9,9,r-1,10-r >$ 及 $< 9,9,10-r,r-1 >$ 等2種

(8).將上述13種由$(r,s) \to (r',s')$可以成立的狀況,加以安排並列出$(r',s'),[r'+s',r'-s']$

及相關事項 o可得下表 : (為了更快速、更有系統的完成圖表)

$< a_1', a_2', a_3', a_4' >$	(r', s')	$[r'+s', r'-s']$	限制
$(a) < r, 9-s, 10-r, s-1 >$	$(r+1-s, r-s-1)$	$[2r-2s, 2]$	$\begin{cases} r \ge 5, 1 \le s \le 5 \\ r-s \ge 1 \\ 9 \le r+s \le 11 \end{cases}$
$(b) < r, s-1, 10-r, 9-s >$	$(r+s-9, r+s-11)$	$[2(r+s-10), 2]$	$\begin{cases} r \ge 5, s \ge 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ r+s \ge 11 \end{cases}$
$(c) < 10-r, 9-s, r, s-1 >$	$(11-r-s, 9-r-s)$	$[2(10-r-s), 2]$	$\begin{cases} 1 \le r \le 5, 1 \le s \le 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ 0 \le r+s \le 9 \end{cases}$
$(d) < r, 10-r, 9-s, s-1 >$	$(r+1-s, 1+s-r)$	$[2, 2(r-s)]$	$\begin{cases} r \ge 5, 1 \le s \le 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ 9 \le r+s \le 11 \end{cases}$
$(e) < r, 10-r, s-1, 9-s >$	$(r+s-9, 11-r-s)$	$[2, 2(r+s-10)]$	$\begin{cases} r \ge 5, s \ge 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ 9 \le r+s \le 11 \end{cases}$
$(f) < 10-r, r, 9-s, s-1 >$	$(11-r-s, r+s-9)$	$[2, 2(10-r-s)]$	$\begin{cases} 1 \le r \le 5, 1 \le s \le 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ 9 \le r+s \le 11 \end{cases}$
$(g) < r, 9-s, s-1, 10-r >$	$(2r-10, 10-2s)$	$[2(r-s), 2(r+s-10)]$	$\begin{cases} r \ge 5, 1 \le s \le 5 \\ r-s \ge 1 \\ r+s \ge 11 \end{cases}$
$(h) < 9-s, r, 10-r, s-1 >$	$(10-2s, 2r-10)$	$[2(r-s), 2(10-r-s)]$	$\begin{cases} r \ge 5, 1 \le s \le 5 \\ r-s \ge 1 \\ 0 \le r+s \le 9 \end{cases}$
$(i) < r, s-1, 9-s, 10-r >$	$(2r-10, 2s-10)$	$[2(r+s-10), 2(r-s)]$	$\begin{cases} r \ge 5, s \ge 5 \\ r-s \ge 1 \\ r+s \ge 11 \end{cases}$
$(j) < 9-s, 10-r, r, s-1 >$	$(10-2s, 10-2r)$	$[2(10-r-s), 2(r-s)]$	$\begin{cases} 1 \le r \le 5, 1 \le s \le 5 \\ r-s \ge 1 \\ r+s \ge 11 \end{cases}$
$(k) < 10-r, r, s-1, 9-s >$	$(1+s-r, r-s+1)$	$[2, 2(s-r)]$	$\begin{cases} 1 \le r \le 5, s \ge 5 \\ 0 \le r-s \le 1 \\ 9 \le r+s \le 11 \end{cases}$
$(l) < 9, 9, r-1, 10-r >$	$(r-1, 10-r)$	$[9, 2r-11]$	$r \ge 6, s = 0$
$(m) < 9, 9, 10-r, r-1 >$	$(10-r, r-1)$	$[9, 11-2r]$	$1 \le r \le 5, s = 0$

由上表,可得下列結果:

(i).凡 $r'+s'$為奇數且$r'+s'\neq 9$者,都是最原始的(r,s) o

理由是上表中$(a)\sim(k)$的$r'+s'$均為偶數。而即使相加為奇數也必為9,如(l)與(m) o

因此,凡 $r'+s'$為奇數且$r'+s'\neq 9$者,都是最原始的(r,s) o而符合此種的(r,s)計有

$(9,2),(9,4),(9,6),(9,8),(8,3),(8,5),(8,7),(7,0),(7,4),(7,6),(6,1),(6,5),(5,0),(5,2),(4,1)$
$(4,3),(3,0),(3,2),(2,1),(1,0)$共20組 o

(ii).凡(r',s')中的r',s'為相等奇數且大於1者,亦為最原始的(r,s) o

理由是如果r',s'為相等奇數且大於1者,則$r'+s'$必為大於2的偶數,且$r'-s'=0$,
因此與表中$(a)\sim(f)$及$(k)(l)(m)$都不合;而$(g)\sim(j)$中的r'與s'均為偶數,故亦不合 o
所以合此條件者有$(3,3),(5,5),(7,7),(9,9)$等4組 o

(iii).凡(r',s')中的r',s'均為奇數且$r'-s'>2$者,則為最原始的(r,s) o

其理由同(ii). o而合此條件者有$(5,1),(7,1),(7,3),(9,1),(9,3),(9,5)$等6組 o

(vi).凡(r',s')中的r',s'為相等偶數者,亦為最原始的(r,s) o

理由是由上表中易知$(a)\sim(f)$及$(k)(l)(m)$都不合;而$(g)(h)$中,若令$r'=s'$,則$r+s=10$
,又分別與$r+s\geq 11$及$r+s\leq 9$矛盾 o而$(i)(j)$中,若令$r'=s'$,則$r=s$,又與$r\geq s+1$
矛盾 o故合此條件者共有$(2,2),(4,4),(6,6),(8,8)$等4組 o

(v)綜合$(i)(ii)(iii)(iv)$所述,知最原始的(r,s)計有$4+20+6+4=34$組 o然符合我們所要的最原始的(r,s)[即扣除具"等位"與"類等位"關係外,又是最原始的(r,s)者];計有$(1,0);(2,1);(2,2);(3,0);(3,2);(3,3);(4,1);(4,3);(4,4);(5,0);(5,1);(5,2);(5,5)$等13組

(9).若$(r,0)$經最後一次T變換後,會進入"單一黑洞"的話,那麼$(r,s)=(r',s')$ o

(10).除$(6,2)$外,均不可能有$(r,s)\to(r',s')=(r,s)$ o

理由:除上表$(h)(r,s)\to(r,s)$不致矛盾外,餘者均得不合理的結果 o

例如: 於(a)中使$r'=r,s'=s$則$r=3,s=1$會與$r\geq 5$矛盾 o

又於(b)中,使$r'=r,s'=s$則$r=2,s=9$會與$r\geq s$矛盾 o

於(c)中使$r'=r,s'=s$則$r=\dfrac{13}{3},s=\dfrac{7}{3}$(不成立) o

又於(d)中使$r'=r,s'=s$則$r=1,s=1$會與$r\geq 5$矛盾 o

於(e)中使$r'=r,s'=s$則$r=-7,s=9$(不成立) o

於(f)中使$r'=r,s'=s$則$r=9,s=-7$(不成立) o

於(g)中使$r'=r,s'=s$則$r=10,s=\dfrac{10}{3}$(不成立) o

於(i)中使$r'=r,s'=s$則$r=10,s=10$(不成立) o

於(j)中使$r'=r,s'=s$則$r=\dfrac{10}{3},s=\dfrac{10}{3}$(不成立) o

於(k)中使$r'=r,s'=s$則$s=r+1$(不成立) o

於(l)中使$r'=r,s'=s$則$r=$(無解) o

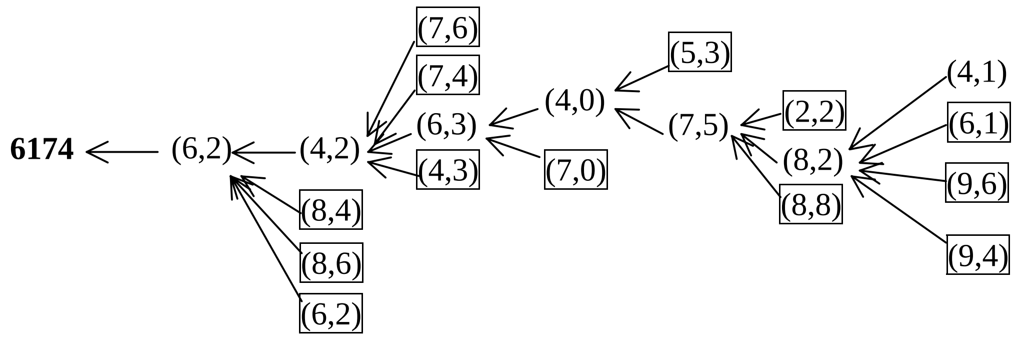
於(m)中使$r'=r,s'=s$則$r=5\neq 6,s=4\neq 2$ o

但於(h)中,若使$r'=r,s'=s$則$10-2s=r,2r-10=s$,而解得$r=6,s=2$

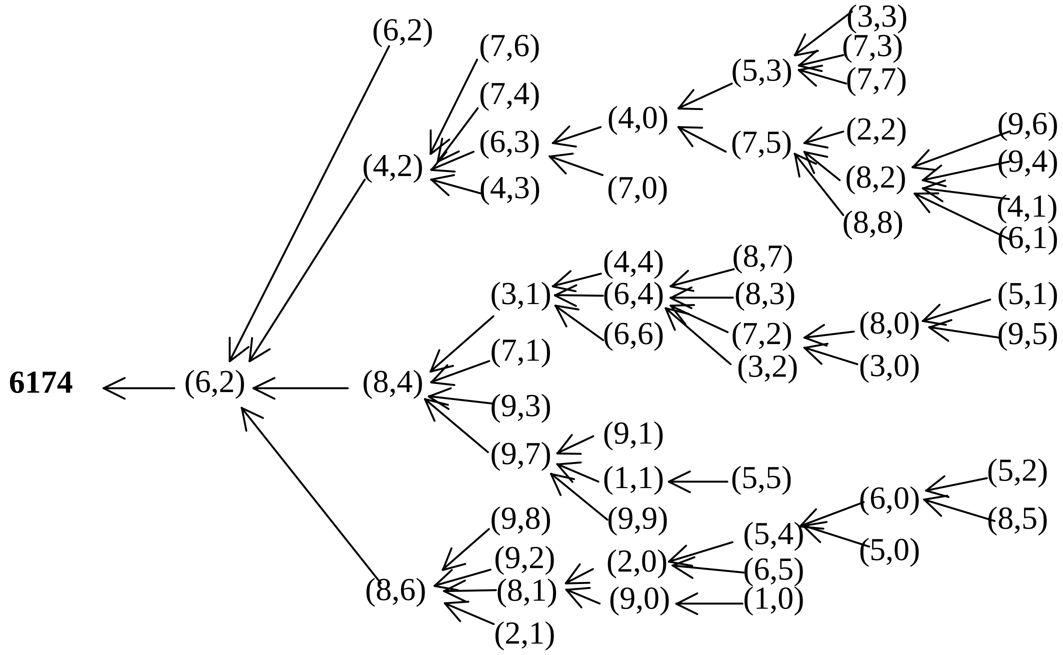
(11).利用13組我們所要的最原始的(r,s),再配合"等位數"與"類等位數"及在$0\leq s\leq r\leq 5$的所有$(r,s)\to(r',s')$的關係,就可快速推算至$(r',s')=(6,2)$[即"單一黑洞"--"6174"]

的單一路線圖

例如以$(r,s)=(4,1)$為例 ($\boxed{}$ 表示"等位數"或"類等位數")



(12).將所有最原始的(r,s)逐一推導,再配合「等位數」與「類等位數」的關係,可得下圖:



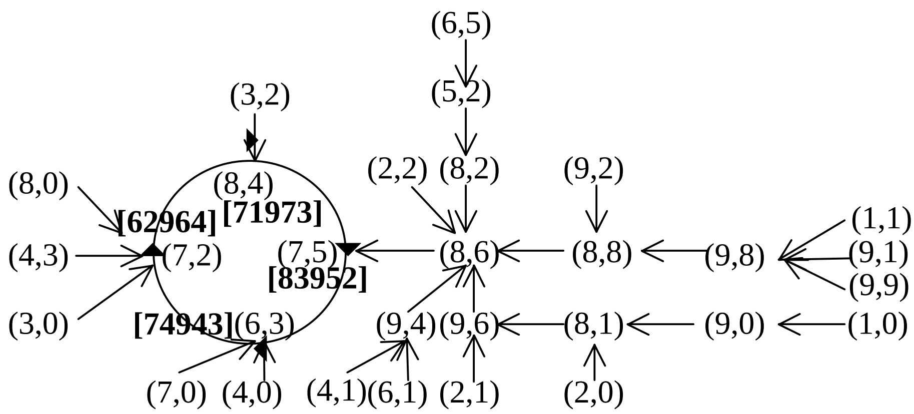
也得知四位數的 T 運算最多 7 次必進入 " 單一黑洞---6174"。

(四)、<u>五位數</u>:

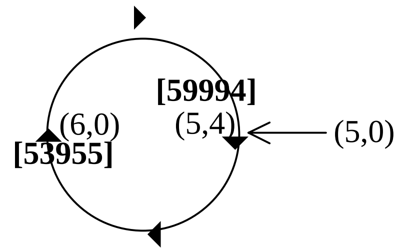
至於五位數亦會產生「循環黑洞」,但分成不相干的三組,如下圖所示:(內容見附件二)

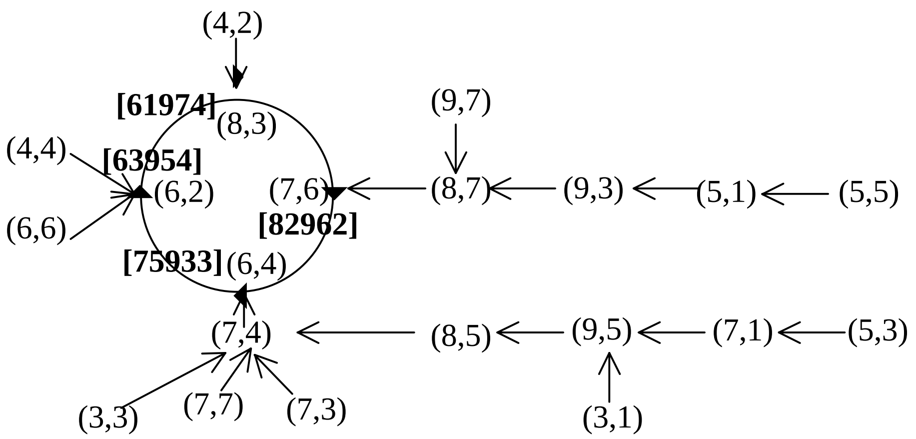
($r=a_1-a_5, s=a_2-a_4$,而以(r,s)表五位數的"有序數對")

(A)、



(B)、





(C)、

得知五位數的 T 運算最多 6 次必進入 “ 循環黑洞”。

(五)、<u>六位數</u>：而六位數也分成三組,(如下圖所示) (內容見附件三)

($r = a_1 - a_6, s = a_2 - a_5, t = a_3 - a_4$,而以$(r, s, t)$表六位數的"有序數對")

(A)、「單一黑洞**(631764)**(即**(6,3,2)**)」(有 17 個六位數的"有序數對"會進入此「單一黑洞」。)

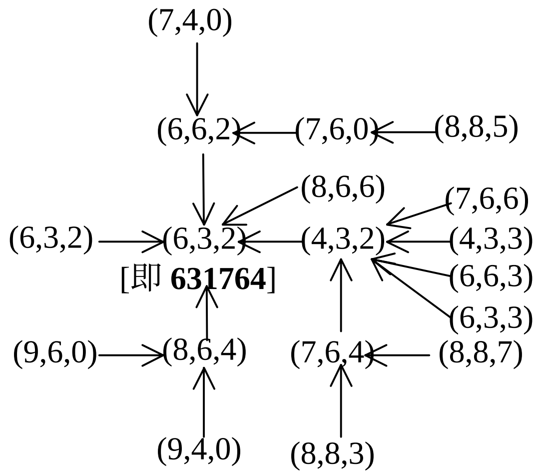
(B)、「單一黑洞**(549945)**(即**(5,5,0)**)」: (只有 1 個六位數的"有序數對"進入此「單一黑洞」。)

(C)、「循環黑洞」: (有 201 個六位數的"有序數對",至多在運算 12 次後,會進入一個長度為 7 的「循環黑洞」。)(如下頁圖)

即 **(8,6,1)** **(8,6,3)** **(6,4,3)** **(4,2,1)** **(8,5,2)** **(7,5,1)** **(8,4,1)**

840852 → **860832** → **862632** → **642654** → **420876** → **851742** → **750843**

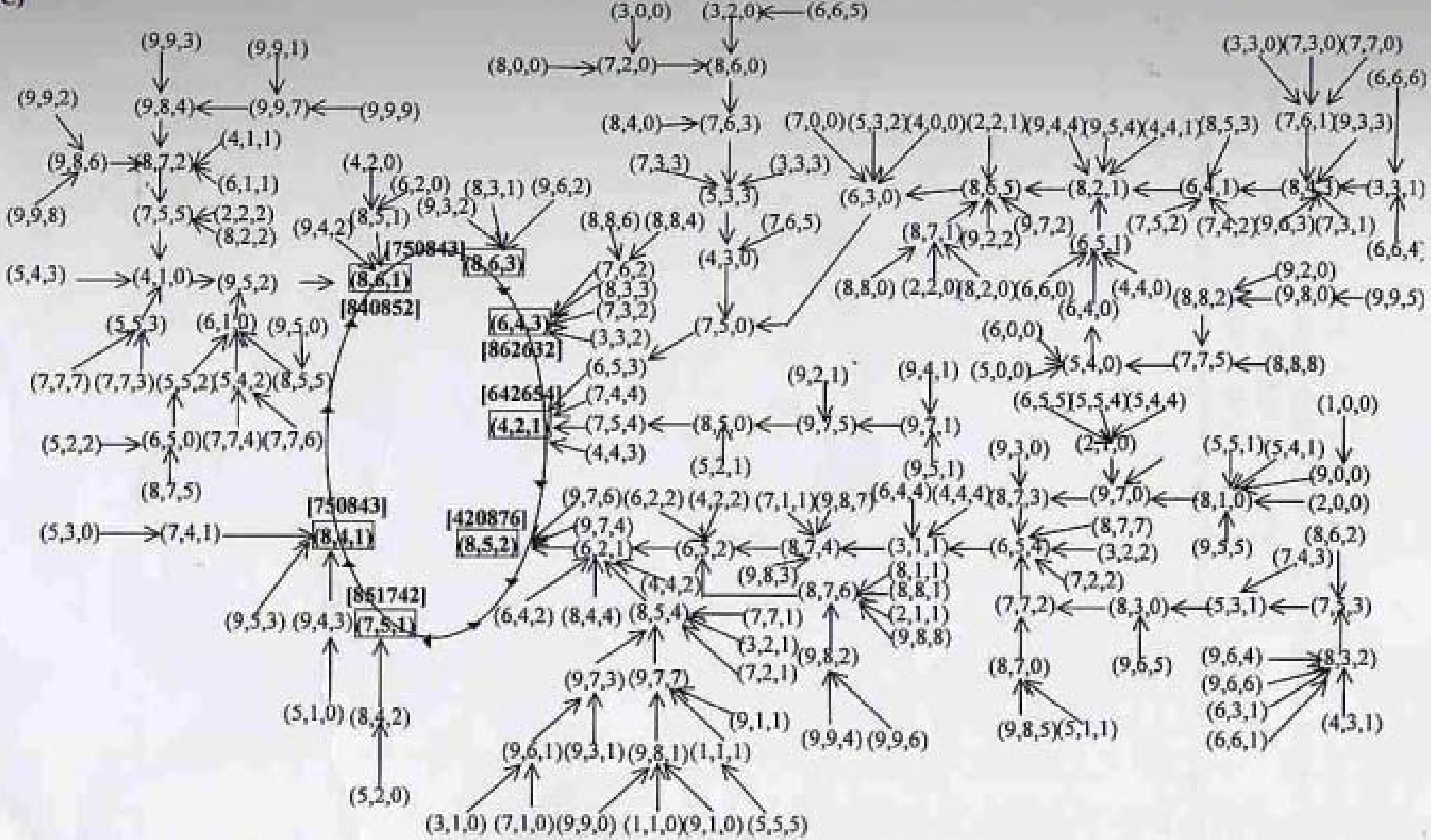
(A)



(B) (5,5,0) ← (5,5,0)

[即 **549945**]

(C)


[750843]
(8,6,3)
(8,6,1)
[840852]
(6,4,3)
[862632]
[642654]
(4,2,1)
[420876]
(8,5,2)
[750843]
(8,4,1)
[861742]
(7,5,1)

(六)、<u>七位數</u>：

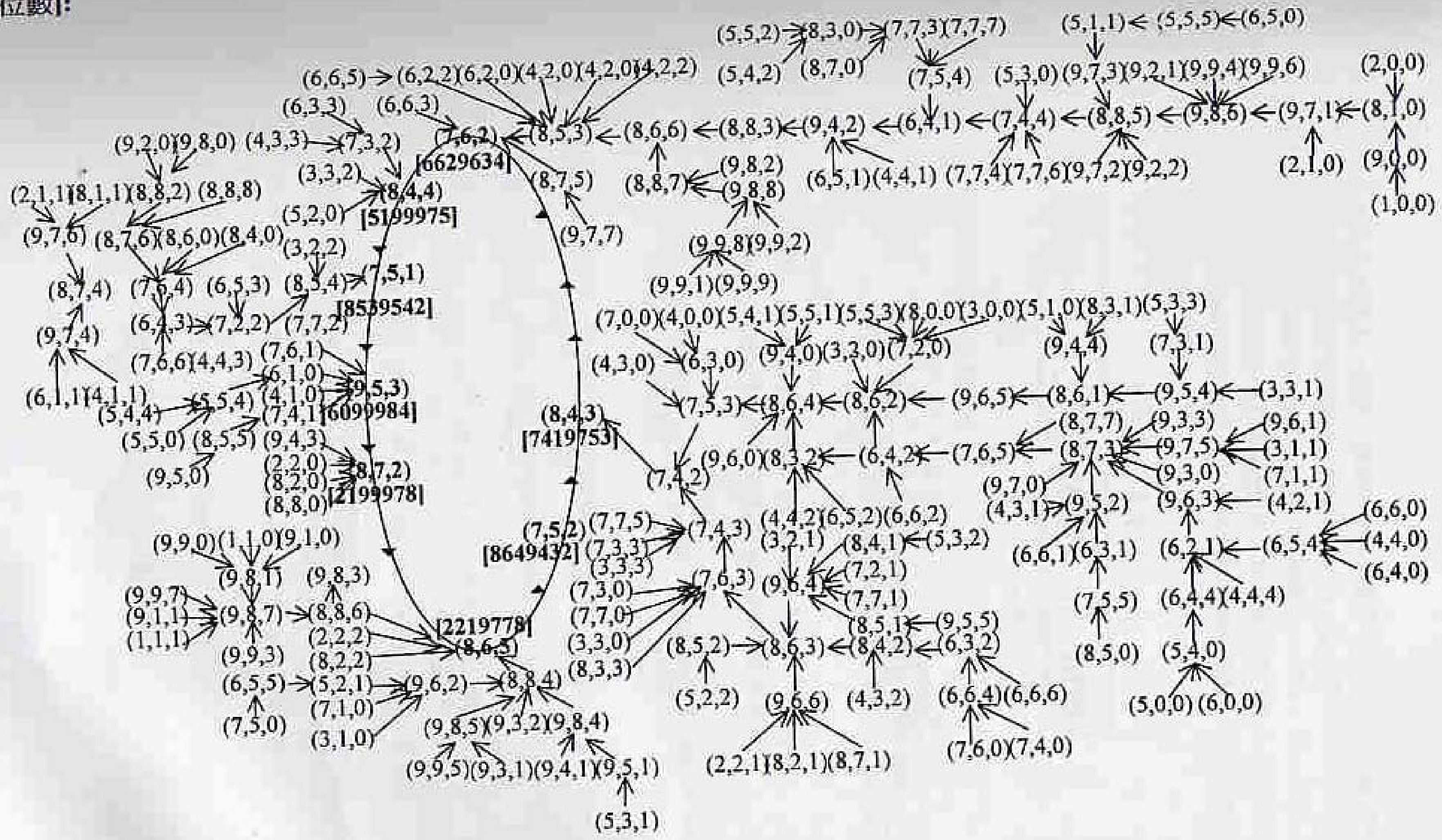
$(r = a_1 - a_7, s = a_2 - a_6, t = a_3 - a_5$,而以$(r, s, t)$表七位數的"有序數對")

至於七位數的探討,亦可比照三元組的"有序數對(r,s,t)"而得知其至多在操作 13 次後就會進入一個長度為 8 的「循環黑洞」。(見下頁圖)

即**(8,4,4) (7,5,1) (9,5,3) (8,7,2) (8,6,5) (7,5,2) (8,4,3) (7,6,2)**

5199975 → 8539542 → 6099984 → 2199978 → 2219778 → 8649432 → 7419753 → 6629634

[七位數]:



[6629634]
[5199975]
[8539542]
[6099984]
[2199978]
[2219778]
[8649432]
[7419753]

(七)、<u>p 位數</u>：

由於四位數的 T 運算,最終進入一個單一黑洞"6174"(若數字由大至小排列為 7641)；而六位數的 T 運算中,也有一個單一黑洞"6**3**17**6**4"(若數字由大至小排列為 76**6**4**3**1)；八位數中,有一個單一黑洞"6**33**17**66**4"(若數字由大至小排列為 76**66**4**33**1)；而十位數、十二位數中,經由『試算法』,也分別找到一個單一黑洞"6**333**17**666**4"(數字由大至小排列為 76**666**4**333**1)、"6**3333**17**6666**4"(數字由大至小排列為 76**6666**4**3333**1)；因而我們猜想：在 P(=2n+2)(n≧1)位數中,也會有單一黑洞：

$$\overbrace{6\underbrace{333\cdots333}_{n位}17\underbrace{666\cdots666}_{n位}4}^{p(=2n+2)位}$$

最後經我們使用歸納法証明,果然証得：

$$\overbrace{7\underbrace{666\cdots666}_{n位}4\underbrace{333\cdots333}_{(n-1)位}1}^{(2n+2)位}-\overbrace{1\underbrace{333\cdots333}_{(n-1)位}4\underbrace{666\cdots666}_{n位}7}^{(2n+2)位}=\overbrace{6\underbrace{333\cdots333}_{(n-1)位}17\underbrace{666\cdots666}_{(n-1)位}4}^{(2n+2)位}$$

[証明]:

(1)當$n=1$時,　左端 $=7641-1467=6174$;右端 $=6174$; 故原式成立

(2)當$n=2$時,　左端 $=766431-134667=631764$;右端 $=631764$; 故原式成立

(3)設$n=k$時,　原式成立,即

$$7\underbrace{666\cdots666}_{k位}4\underbrace{333\cdots333}_{(k-1)位}1-1\underbrace{333\cdots333}_{(k-1)位}4\underbrace{666\cdots666}_{k位}7=6\underbrace{333\cdots333}_{(k-1)位}17\underbrace{666\cdots666}_{(k-1)位}4$$

則 $n=k+1$ 時,

$$7\underbrace{666\cdots666}_{n位}4\underbrace{333\cdots333}_{(n-1)位}1-1\underbrace{333\cdots333}_{(n-1)位}4\underbrace{666\cdots666}_{n位}7$$

$$=7\underbrace{666\cdots666}_{(k+1)位}4\underbrace{333\cdots333}_{k位}1-1\underbrace{333\cdots333}_{k位}4\underbrace{666\cdots666}_{(k+1)位}7$$

$$=7\cdot10^{2k+3}+\underbrace{666\cdots666}_{k位}\cdot10^{k+3}+6\cdot10^{k+2}+4\cdot10^{k+1}+\underbrace{333\cdots333}_{k位}\cdot10+1$$

$$-(1\cdot10^{2k+3}+\underbrace{333\cdots333}_{k位}\cdot10^{k+3}+4\cdot10^{k+2}+6\cdot10^{k+1}+\underbrace{666\cdots666}_{k位}\cdot10+7)$$

$$=7\cdot10^{2k+3}+\underbrace{666\cdots666}_{k位}\cdot10^{k+3}+5\cdot10^{k+2}+13\cdot10^{k+1}+1\underbrace{333\cdots332}_{k位}\cdot10+11$$

$$-(1\cdot10^{2k+3}+\underbrace{333\cdots333}_{k位}\cdot10^{k+3}+4\cdot10^{k+2}+6\cdot10^{k+1}+\underbrace{666\cdots666}_{k位}\cdot10+7)$$

$$=(7-1)\cdot10^{2k+3}+(\underbrace{666\cdots666}_{k位}-\underbrace{333\cdots333}_{k位})\cdot10^{k+3}+(5-4)\cdot10^{k+2}$$

$$+(13-6)\cdot10^{k+1}+(1\underbrace{333\cdots332}_{k位}-\underbrace{666\cdots666}_{k位})\cdot10+(11-7)$$

$$= 6\cdot 10^{2k+3} + \underbrace{33\cdots3}_{k\text{位}}\cdot 10^{k+3} + 1\cdot 10^{k+2} + 7\cdot 10^{k+1} + \underbrace{66\cdots6}_{k\text{位}}\cdot 10 + 4$$

$$= \overbrace{6\underbrace{33\cdots3}_{k\text{位}}17\underbrace{66\cdots6}_{k\text{位}}4}^{(2k+4)\text{位}}$$

$$= \overbrace{6\underbrace{33\cdots3}_{(k+1-1)\text{位}}17\underbrace{66\cdots6}_{(k+1-1)\text{位}}4}^{[2(k+1)+2]\text{位}} = \overbrace{6\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}17\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)\text{位}}4}^{(2n+2)\text{位}}$$

所以，由$n=k$成立可推得$n=k+1$也成立；

由數學歸納法知，原式對所有正整數n都成立

即在$p\ge 4(n\ge 1)$的偶數位必有單一黑洞$\overbrace{7\underbrace{66\cdots6}_{n\text{位}}4\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}1}^{(2n+2)\text{位}=p\text{位}}$

又由於三位數的 T 運算,最終進入一個單一黑洞"495"(若數字由大至小排列為 954)；而六位數的 T 運算中,也有一個單一黑洞"549945"(若數字由大至小排列為 995544)；經由『試算法』,也分別找到九位數、十二位數各有一個單一黑洞"554999445" (數字由大至小排列為 999555444) 、"555499994445" (數字由大至小排列為 999955554444)；因而我們也猜想：在 P(=3n)(n≧1)位數中,也會有單一黑洞：

$$\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(n-1)\text{位}}4\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{(n-1)\text{位}}5}^{p(=3n)(n\ge1)\text{位}}$$

而經由我們使用歸納法証明,也証得它確實成立：

[証明]:

$$M_l - M_s = \overbrace{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{n\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{n\text{位}}}^{3n\text{位}} - \overbrace{\underbrace{44\cdots4}_{n\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{n\text{位}}\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}}^{3n\text{位}} = \overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(n-1)\text{位}}4\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{(n-1)\text{位}}5}^{3n\text{位}}$$

(1)當$n=1$時，左端$=954-459=495$；右端$=495$；故原式成立

(2)當$n=2$時，左端$=995544-445599=549945$；右端$=549945$；故原式成立

(3)設$n=k$時，原式成立，即

$$\underbrace{99\cdots9}_{k\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{k\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{k\text{位}} - \underbrace{44\cdots4}_{k\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{k\text{位}}\underbrace{99\cdots9}_{k\text{位}} = \underbrace{55\cdots5}_{(k-1)\text{位}}4\underbrace{99\cdots9}_{k\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{(k-1)\text{位}}5$$

則$n=k+1$時，

$$\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{n\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{n\text{位}} - \underbrace{44\cdots4}_{n\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{n\text{位}}\underbrace{99\cdots9}_{n\text{位}}$$

$$= \underbrace{99\cdots9}_{(k+1)\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)\text{位}}\underbrace{44\cdots4}_{(k+1)\text{位}} - \underbrace{44\cdots4}_{(k+1)\text{位}}\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)\text{位}}\underbrace{99\cdots9}_{(k+1)\text{位}}$$

$$= \underbrace{99\cdots9}_{(k+1)\text{位}}\cdot 10^{2k+2} + \underbrace{55\cdots5}_{(k+1)\text{位}}\cdot 10^{k+1} + \underbrace{44\cdots4}_{(k+1)\text{位}} - (\underbrace{44\cdots4}_{(k+1)\text{位}}\cdot 10^{2k+2} + \underbrace{55\cdots5}_{(k+1)\text{位}}\cdot 10^{k+1} + \underbrace{99\cdots9}_{(k+1)\text{位}})$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{k位}\cdot10^{2k+3}+9\cdot10^{2k+2}+\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)位}\cdot10^{k+1}+\underbrace{44\cdots4}_{(k+1)位}$$

$$-(\underbrace{44\cdots4}_{k位}\cdot10^{2k+3}+4\cdot10^{2k+2}+\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)位}\cdot10^{k+1}+\underbrace{99\cdots9}_{(k+1)位})$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{k位}\cdot10^{2k+3}+8\cdot10^{2k+2}+\underbrace{155\cdots54}_{(k+1)位}\cdot10^{k+1}+\underbrace{144\cdots43}_{k位}\cdot10+14$$

$$-(\underbrace{44\cdots4}_{k位}\cdot10^{2k+3}+4\cdot10^{2k+2}+\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)位}\cdot10^{k+1}+\underbrace{99\cdots9}_{k位}\cdot10+9)$$

$$=(\underbrace{99\cdots9}_{k位}-\underbrace{44\cdots4}_{k位})\cdot10^{2k+3}+(8-4)\cdot10^{2k+2}+(\underbrace{155\cdots54}_{(k+1)位}-\underbrace{55\cdots5}_{(k+1)位})\cdot10^{k+1}$$

$$+(\underbrace{144\cdots43}_{k位}-\underbrace{99\cdots9}_{k位})\cdot10+(14-9)$$

$$=\underbrace{55\cdots5}_{k位}\cdot10^{2k+3}+4\cdot10^{2k+2}+\underbrace{99\cdots9}_{(k+1)位}\cdot10^{k+1}+\underbrace{44\cdots4}_{k位}\cdot10+5$$

$$=\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{k位}4\underbrace{99\cdots9}_{(k+1)位}4\underbrace{44\cdots4}_{k位}5}^{(2k+3)位}$$

$$=\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(k+1-1)位}4\underbrace{99\cdots9}_{(k+1)位}4\underbrace{44\cdots4}_{(k+1-1)位}5}^{3(k+1)位}$$

$$=\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(n-1)位}4\underbrace{99\cdots9}_{n位}4\underbrace{44\cdots4}_{(n-1)位}5}^{3n位}$$

所以, 由$n=k$成立可推得$n=k+1$也成立;

由數學歸納法知, 原式對所有正整數n都成立

即在$p\geq3n(n\geq1)$時,3的倍數位必有單一黑洞$\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(n-1)位}4\underbrace{99\cdots9}_{n位}4\underbrace{44\cdots4}_{(n-1)位}5}^{3n位}$

又老師提示“987654321-123456789=864197532”及“9876543210-0123456789=9753086421”後,不禁讓我們聯想到配合上述兩例的規則------

(i) 如果將“987654321”改成“998765544321”時,結果得到“998765544321-123445567899=87531997642”,其差與“998765544321”的數字不完全相同,因此不成立。

(ii) 如果將“9876543210”改成“9987655443210”時,結果得到“9987655443210-0123445567899=9864209875311”,其差與“9987655443210”的數字不完全相同,因此不成立。

(iii) 但如果將“987654321”改成“98766543321”時,結果得到“98766543321-12334566789=86431976532”,其差與“98766543321”的數字完全相同。結果也證得成立。

(証明見附件四) 即

$$\overbrace{864\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}197\underbrace{66\cdots66}_{(n-1)\text{位}}532}^{p(=2n+7)(n\geq1)\text{位}}$$

亦在（2n+7）位(n≧1)時,一定有一個單一黑洞“ $\overbrace{864\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}197\underbrace{66\cdots66}_{(n-1)\text{位}}532}^{(2n+7)\text{位}}$ ”

(iv) 如果將“9876543210”改成“98754210”與“987665433210”時,結果得到“98754210-01245789=97508421”,其差與“98754210”的數字完全相同；而“987665433210-012334566789=975330866421”,其差也與“987665433210”的數字完全相同。結果也證得其成立。 (証明見附件五) 即

$$\overbrace{975\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}308\underbrace{66\cdots66}_{(n-1)\text{位}}421}^{p(=2n+6)(n\geq1)\text{位}}$$

亦在（2n+6）位(n≧1)時,一定有一個單一黑洞“ $\overbrace{975\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)\text{位}}308\underbrace{66\cdots66}_{(n-1)\text{位}}421}^{(2n+6)\text{位}}$ ”

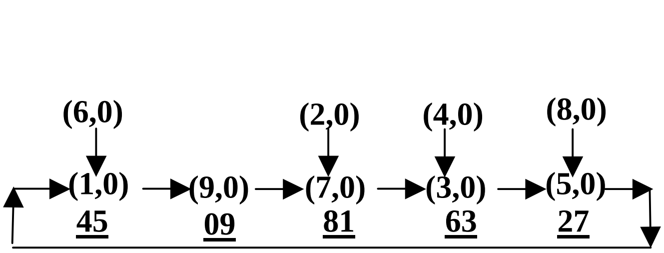
做到這裡真使我們又驚又喜,喜的是它證明了「p 位數的 T 運算,最終必然進入“單一黑洞”或“循環黑洞”(或同時並存)」; 驚的是「p 位數的 T 運算,終究會 “歸結”於何處？又是否有更多的“單一黑洞”呢？又其“循環黑洞”是否有其一定的規則呢？」

伍、最後心得與結論：

(一)利用"有序數對"及"等位""類等位"的關係,可以簡化『數的黑洞』的探討及計算過程

(二)兩位數的 T 運算,至多在運算 2 次後,會進入一個長度為 5 的「循環黑洞」。

即



(三)三位數的 T 運算,至多在運算 6 次後,會進入一個「單一黑洞**(495)**」。

(四)四位數的 T 運算,至多在運算 7 次後,會進入一個「單一黑洞**(6174)**」。

(五)五位數的 T 運算,至多在運算 6 次後, 會進入一個「循環黑洞」。但「循環黑洞」分成三類(如上圖所示)

(A)、有 **26** 個"有序數對(r,s)",至多在運算 5 次後,會進入一個長度為 4 的「循環黑洞」。

(8,4)　(7,5)　(6,3)　(7,2)

71973 → 83952 → 73943 → 62964

(B)、只有 **1** 個"有序數對(5,0)",在運算 1 次後，會進入一個長度為 2 的「循環黑洞」。

(5,4)　(6,0)

59994 → 83952

(C)、有 **17** 個"有序數對(r,s)",至多在運算 5 次後,會進入一個長度為 4 的「循環黑洞」。

(8,3)　(7,6)　(6,4)　(6,2)

61974 → 82962 → 75933 → 63954

(六) 六位數的 T 運算:

(A)、有 **17** 個"有序數對(r,s,t)",至多在運算 3 次後，會進入一個「單一黑洞**(631674)**」。

(B)、只有 **1** 個"有序數對(5,5,0)",在運算 1 次後，會進入一個「單一黑洞**(549945)**」。

(C)、有 **201** 個"有序數對(r,s,t)",至多在運算 12 次後,會進入一個長度為 7 的「循環黑洞」。

即　**(8,6,1)　(8,6,3)　(6,4,3)　(4,2,1)　(8,5,2)　(7,5,1)　(8,4,1)**

840852 → 860832 → 862632 → 642654 → 420876 → 851742 → 750843

(七) 七位數的 T 運算(如下頁圖所示):

至多在在運算 13 次後,會進入一個長度為 8 的「循環黑洞」。

即**(8,4,4)　(7,5,1)　(9,5,3)　(8,7,2)　(8,6,5)　(7,5,2)　(8,4,3)　(7,6,2)**

5199975 → 8539542 → 6099984 → 2199978 → 2219778 → 8649432 → 7419753 → 6629634

(八)八位數的 T 運算(如圖表所示):

會得到兩個「循環黑洞」及兩個「單一黑洞」。

(九)不論「九位數」、「十位數」……至 p 位數也都可比照"有序數對(r,s,t,u,v……)"再配合"等位數"與"類等位數"關係來探討，最後它們也都勢必進入「單一黑洞」或「循環黑洞」(或同時並存)。

(十)p 位數中(p≧3)必然會有 p(p≧3)位數進入某一「單一黑洞」。

(i)在四位、六位、八位、……、(2n+2)位(n≧1)時,會進入

$$\overbrace{6\underbrace{333\cdots333}_{n位}17\underbrace{666\cdots666}_{n位}4}^{p(=2n+2)位}$$

(ii)在三位、六位、九位、……、3n 位(n≧1)時,會進入

$$\overbrace{\underbrace{55\cdots5}_{(n-1)位}4\underbrace{99\cdots9}_{n位}\underbrace{44\cdots4}_{(n-1)位}5}^{p(=3n)(n\geq1)位}$$

(iii)在九位、十一位、十三位、……、(2n+7)位(n≧1)時,會進入

$$\overbrace{864\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)位}197\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)位}532}^{p(=2n+7)(n\geq1)位}$$

(iv)在八位、十位、十二位、……、(2n+6)位(n≧1)時,會進入

$$\overbrace{975\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)位}08\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)位}421}^{p(=2n+6)(n\geq1)位}$$

陸、參考資料：

1.九章出版社(2000 年,1 月九版),孫文先編譯---「神祕有趣的數學」p107

2.凡異出版社(民 89,11 月初版),過伯祥編著---「猜想與合情推理」p24

3.第 18 屆中小學科展優勝作品專輯(高中教師組)p312~319

評語

有趣的數字問題，具體分析了二到七立數會落入黑洞的情況，也討論了一些更大位數的特殊情形。提出了一種簡便分類的技巧，是很不錯的結果。