中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：鋁箔包變身－三角立體包裝與傳統包裝之體積比較

關鍵詞：包裝、展開圖、體積

編號：030409

學校名稱：

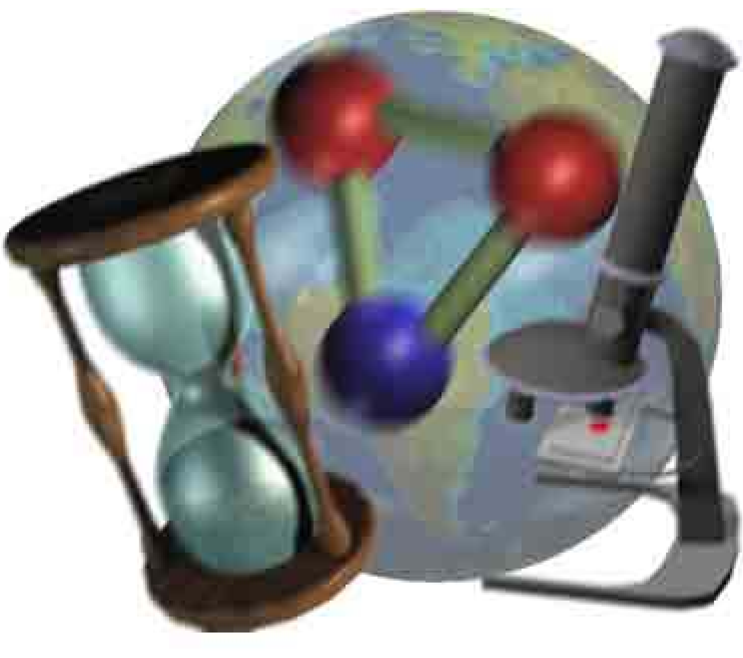
台北市立大直高級中學

作者姓名：

陳尹之

指導老師：

方美連、吳心怡



# 摘要

由生活中常見的飲料包裝方式，探討在展開圖「相同的表面積」條件下，比較三角立體包裝與傳統鋁箔包裝的「體積比較」。求得三角立體包裝(錐體)的最大體積之一般式，探討傳統包裝展開圖之「長寬比」與之最大體積之關係；澄清視覺與實際之誤差，成為數學在生活中運用的有趣探討。


## 壹、研究動機

現行國中數學課本第四冊「生活中的立體圖形」單元中，提到錐體與柱體的展開圖，我便特別留意觀察便利商店裡的各種商品包裝。


圖 1

當我看見有一種很可愛的 m&m's 迷你巧克力三角立體包裝(圖 1，類似三角錐)，看起來巧克力裝得比較多，可是要跟什麼形狀比較呢？ 一時找不到比較基礎，於是把它拆開、壓扁之後發現它是由兩個矩形構成，與鋁箔包回收時壓扁的樣子十分相似。

將鋁箔包壓扁後再摺成三角立體包裝，與原來的鋁箔包做比較，二者體積誰比較大？

如果鋁箔飲料包展開圖的長寬比改變，改成三角立體包裝，飲料會不會裝得比較多呢？

生活中常見的飲料鋁箔包，在回收鋁箔包的時候，壓扁後會成為如信封袋一樣(如圖 2)，其兩邊的黏合線是互相平行的，如果讓兩邊的黏合線在空間中呈歪斜(類似粽子的樣子，如圖 3)，這二種包裝的「表面積」是相同的，哪一種包裝的「體積」會比較大呢？


圖 2


圖 3


哪一種包裝的「體積」比較大呢？

# 貳、研究目的

一、　探討三角立體包裝的最大體積
二、　傳統鋁箔包裝的摺角大小對於體積之影響
三、　三角立體包與傳統鋁箔包的體積比較
四、　另類包裝的體積探討，牛奶紙包裝上部的突出部分對於體積之影響
五、　相同表面積，在不摺角的條件下，構成多種包裝方式的體積探討

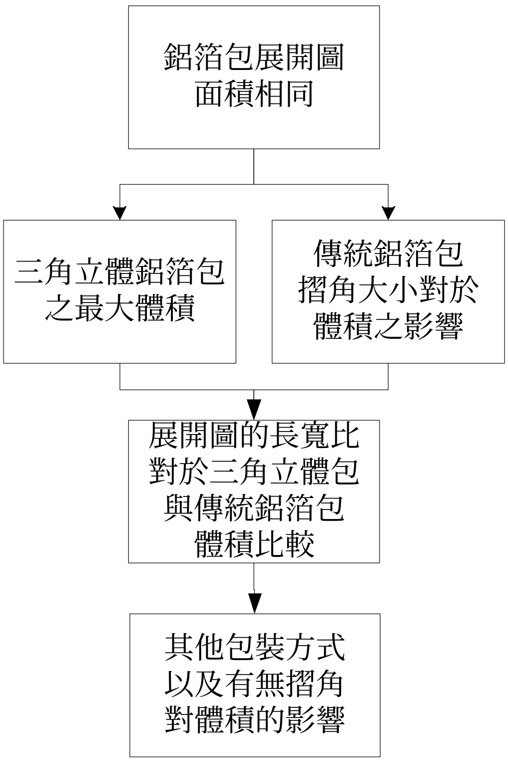
# 參、研究設備及器材

市售鋁箔包、自製鋁箔包模型
數位相機
電腦軟體(Microsoft Excel)

# 肆、研究過程或方法

本研究之研究方法為：觀察收集市售鋁箔包，使用自製模型，運用國中數學課本中的數學原理﹝比與比例式、商高定理﹞進行一般式的推導，並使用 Microsoft Excel 試算表基本功能模擬計算體積變化，進行比較分析與繪圖。

本研究之探討流程與研究架構，是站在展開圖具有「相同表面積」的基礎上，探討不同包裝方式的體積(容積)，並比較當「長寬比」改變時，不同包裝方式之體積比較。



一、　傳統包裝與三角立體包裝的展開圖面積比較

(一)　傳統鋁箔包的展開

把傳統鋁箔包壓扁、剪開後成為圖 4 所示，為二個長方形所構成

圖 4--傳統包裝鋁箔包展開圖

(二)　三角立體包的展開

依據數學課本(國編本)的三角錐展開圖方式，數學第四冊 P.136，圖 2-66 三角錐和它的展開圖。三角立體包裝的展開圖應為下第一種方式，如圖 5：

圖 5--數學課本所提到的三角錐之展開圖

(三)　傳統鋁箔包與三角立體包展開圖的比較

經過嘗試，對同一個三角立體包裝而言，展開圖可轉換為不同方式，展開圖的面積相同。圖 6 中右邊的直角三角形(陰影部分)移到左邊，最後的形狀與圖四相同。

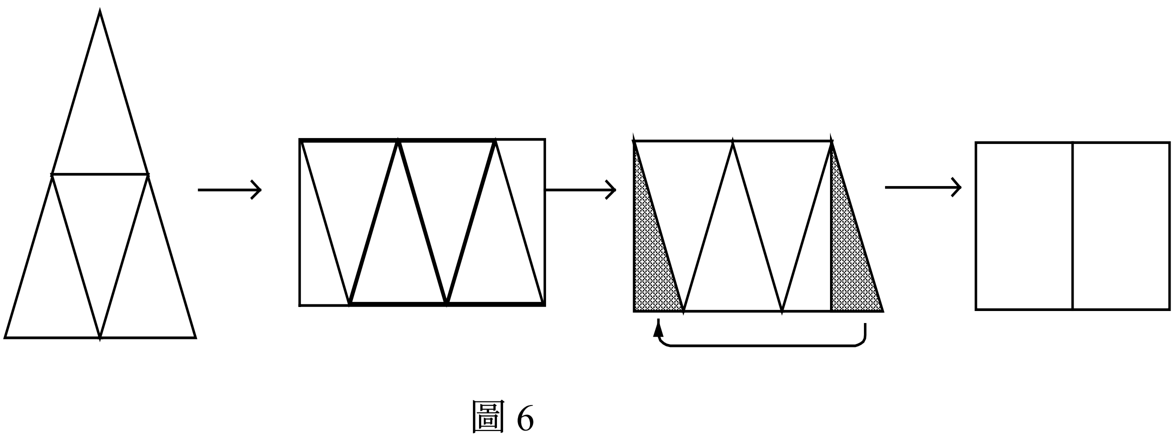


圖 6

## 二、 探討三角立體包裝的最大體積

市面上一般的「三角立體包」，正確的數學名稱應該是「三角錐」

依據錐體的體積 $V=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高

為求錐體的體積，以下針對影響體積的兩個變因：「底面積」與「高」，分別探討：

### (一) 「底面積」的探討

底面形狀為「同底、等高」之關係

雖然底面之形狀不同，但其面積均相等，如圖 7，底面積$=\frac{ab}{2}$

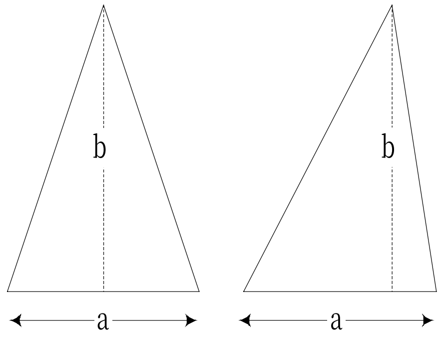



圖 7

### (二) 「高」的探討

當 $a$ 愈斜，在底面的投影長度就愈長($0\le$投影$\le a$)

$a$ 在底面上之投影、錐體的高形成一個直角三角形 (圖 8)

$a$ 之長度不變，$a$ 在底面上之投影愈長則高愈短

當一邊 $a\perp$另一邊 $a$ 時，$a$ 在底面上之投影最短，則高有最大值

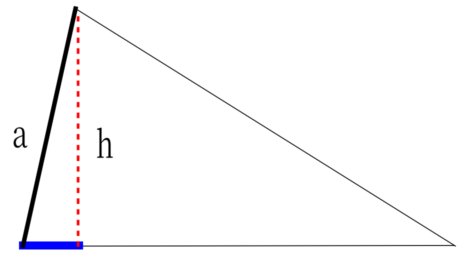



圖 8

### (三) 「高」的求法

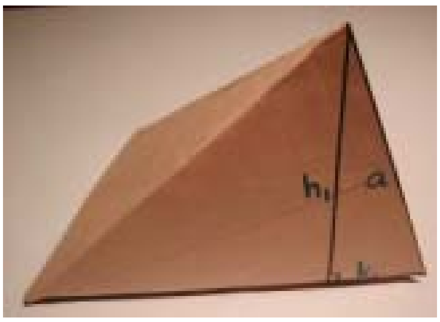
1. 方法一：由外向內求錐體的高

先直覺地單純用「商高定理」、「比與比例式」進行求「高」，過程繁複，終於求出高的一般式，過程如下：

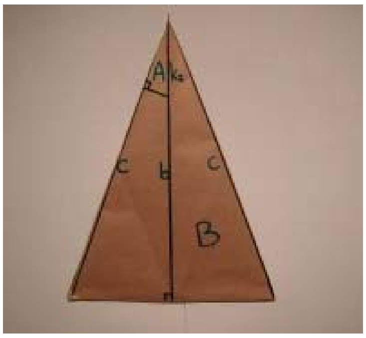
(1) 底面積 $\frac{ab}{2}=\frac{ch_1}{2}$ 求 $h_1$

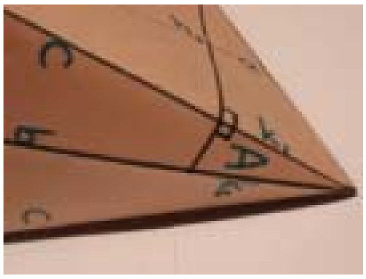
$c$ 是底面積等分兩全等直角三角形的斜邊長

(2) $h_1,a,k_1$ 是直角三角形的三邊長，用商高定理求 $k_1$



(3) 利用三角形 A 與三角形 B 為相似三角形，$k_1 : b = k_2 : c$ 求 $k_2$





(4) $k_2, a, H$ 是直角三角形的三邊長，用商高定理求 $H$

求得高 $H = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2 - a^4}}{2b}$

2. 方法二：由剖面求錐體的高

用「截面分析」、「商高定理」求「高」，步驟較簡單，過程如下：

(1)將錐體垂直剖開，如圖 9

縱切面可等分為兩全等直角三角形, 利用 $\dfrac{a}{2}$ 為一股，$b$ 為斜邊，求高 $d$

(2)利用 $\dfrac{ad}{2} = \dfrac{bH}{2}$ 面積相同，求高 $H$

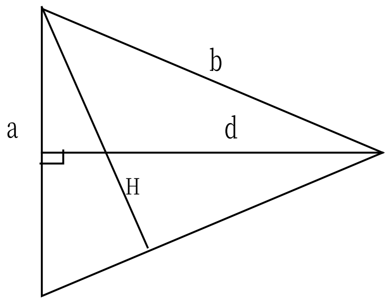



圖 9

(四) 三角錐最大體積的一般式

依據三種方法所求出「高」相同，$H = \dfrac{\sqrt{4a^2b^2 - a^4}}{2b}$

$V$ (錐體的體積最大值一般式) $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{ab}{2} \times H = \dfrac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{12} a^2 \cdots\cdots (1)$

特例：正四面體的體積

m&m′s 迷你巧克力三角立體包裝，正四面體為由四個全等的正三角形面構成的立體，如圖 10

底面為正三角形 $b = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}$

代入(1)式 V=$\dfrac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{12} a^2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{12} a^3$，$a$ 為一邊長。

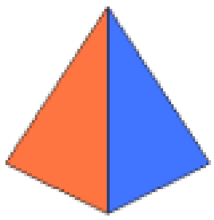


圖 10

三.　傳統鋁箔包裝的摺角大小對於體積之影響

依據數學課本所提，傳統鋁箔包裝的形狀屬於--「柱體」。

(一) 柱體的體積

柱體的體積 ＝ 底面積×高

$$= 2c(a-2c)(b-2c)\cdots\cdots(2)$$

其中，$c$ 為傳統鋁箔包展開圖中，四端角摺角的長度，(圖 11)

$c$ 為 $a$ 的函數，且 $0 < c < \frac{1}{2}a$

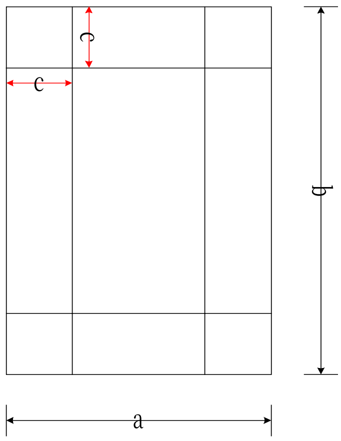



圖 11

(二) 柱體的最大體積

觀察(2)式可知，鋁箔包柱體的體積為 $c$ 的三次函數，目前尚未學到如何求得三次函數的極值。所以決定採用「數學實驗法」進行體積最大值的探討。

設 $c = xa$，使用 Microsoft Excel 試算表，給定 $a$ 與 $b$，$c$ 由 $0.01a \sim 0.49a$ 代入，將 $x$ 值與體積之關係畫出圖形，結果如圖 12。顯示：

$\boxed{\text{當長寬比為 1.5 時，體積最大值發生於，} x = 0.20}$

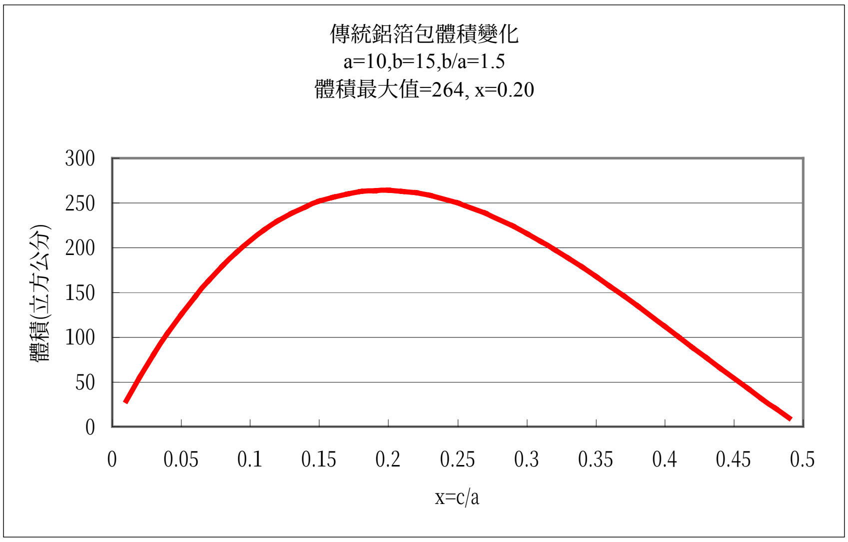



圖 12

改變鋁箔包展開圖的長寬比($\frac{b}{a}$)，$\frac{b}{a}$ 之值愈大，表示鋁箔包柱體愈長。其體積最大值與 $x$ 值會隨之改變，使用 Microsoft Excel 試算表模擬，將數據繪成圖表，(如圖 13)。顯示：$\boxed{\text{當長寬比為 2.0 時，體積最大值發生於，} x = 0.21}$

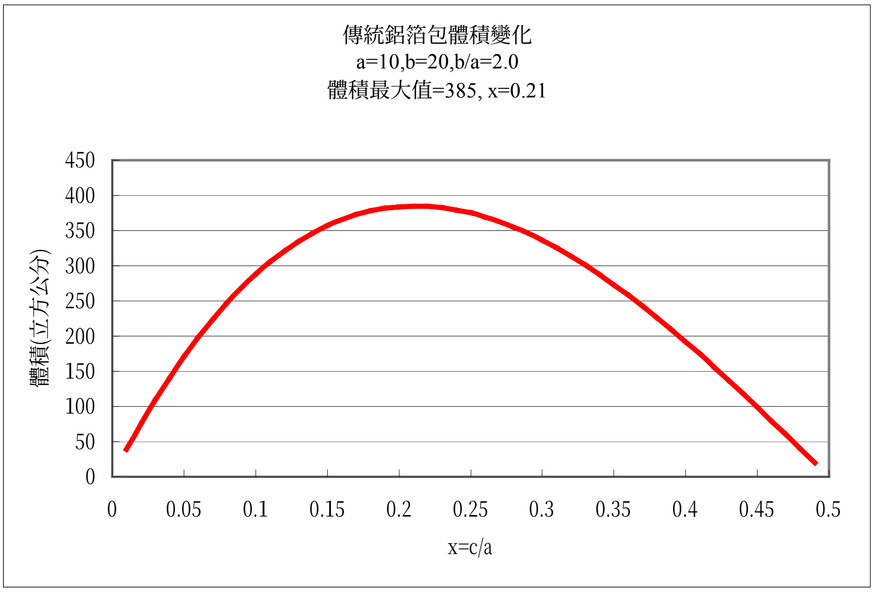



圖 13

改變$\frac{b}{a}$由 1~300，與發生體積最大值時的$x$值之關係，畫出以下圖；在下圖中可發現，$\boxed{\text{當}\ \frac{b}{a}\ \text{的值時愈大時，}\ x\ \text{值趨近於 0.25}}$ (如圖 14)。

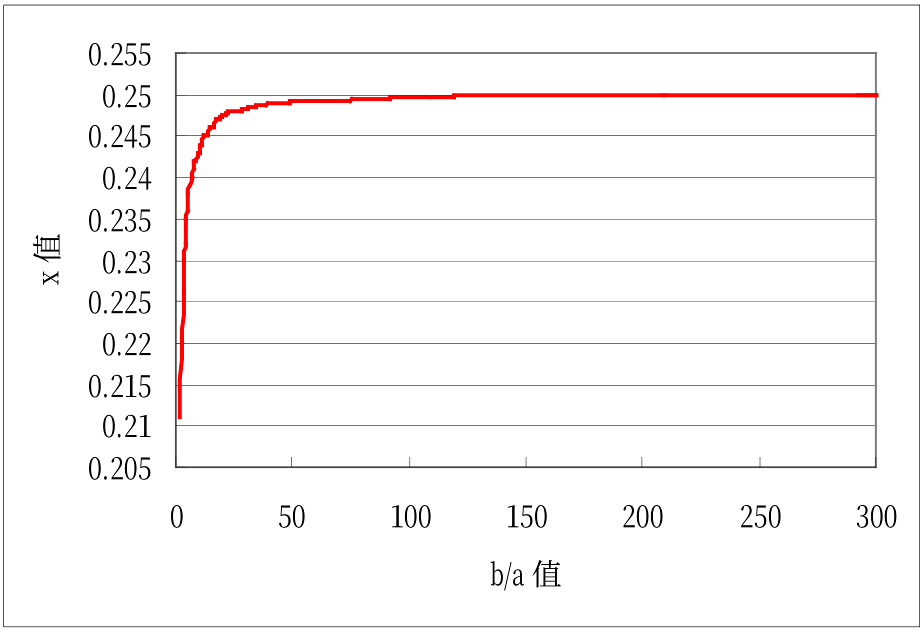



圖 14

## 小結

(1) 傳統鋁箔包的體積 = 長×寬×高 $=2c(a-2c)(b-2c)$
其中，$c$為傳統鋁箔包展開圖中，四端角摺角的長度，$c=xa$。

(2)依據實驗模擬，不斷地改變鋁箔包展開圖的長寬比($\frac{b}{a}$)，$\frac{b}{a}$之值愈大，表示鋁箔包柱體愈長。其體積最大值與 x 值會隨之改變。表示鋁箔包展開圖的長寬比與最大體積之摺角長度有關。

(3)當 $\frac{b}{a}$ 的值時愈大時，$x$ 值趨近於 0.25。表示摺角對於體積的影響愈小，而且鋁箔包柱體的截面為正方形。

四、 三角立體包與傳統鋁箔包的體積比較

依據前二節的研究，在展開圖具有相同表面積的條件下，可以進行三角立體包與傳統鋁箔包的體積比較。

此二種包裝方式，在有相同的$a,b$條件下，體積分別為：

三角立體包的體積最大值 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times H = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{12} a^2 \cdots$ (1)

傳統鋁箔包的體積= 長x寬x高=$V_2 = 2c(a-2c)(b-2c) \cdots\cdots\cdots$(2)

其中，$c$ 為傳統鋁箔包展開圖中，四端角摺角的長度，$c = xa$

其體積最大值與 x 有關。

二種包裝方式的體積差異(%)=$\frac{V_2 - V_1}{V_2} \times 100\% \cdots\cdots\cdots$(縱座標)

傳統鋁箔包展開圖中的「長寬比」=$\frac{b}{a}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(橫座標)

選定三種與本研究相關的主要形體，m&m's 迷你三角立體包裝，一般鋁箔包展開圖的尺寸，再把長寬比拉大，設固定$a = 10$，取相應的$b$值，分別代入(1)式、(2)式，得到傳統鋁箔包與三角立體包裝的體積，列表比較如下：

| 項目 | 寬 | 長 | 長寬比 | 三角立體包裝 | 傳統鋁箔包 | | 體積差異 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $\frac{b}{a}$ | $V_1$ | $x$ | $V_2$ | $\frac{V_2 - V_1}{V_2}$ |
| m&m's 迷你包 | 10 | 8.66 | 0.866 | 118 | 0.154 | 119 | 0.91% |
| 一般鋁箔包 | 10 | 15 | 1.5 | 236 | 0.196 | 264 | 10.74% |
| 長寬比拉大 | 10 | 3000 | 300 | 50000 | 0.250 | 74875 | 33.22% |

為觀察長寬比對體積差異的整體狀況，使用 Microsoft Excel 試算表，比較(1)式與(2)式，得到以下關係圖(圖 15)

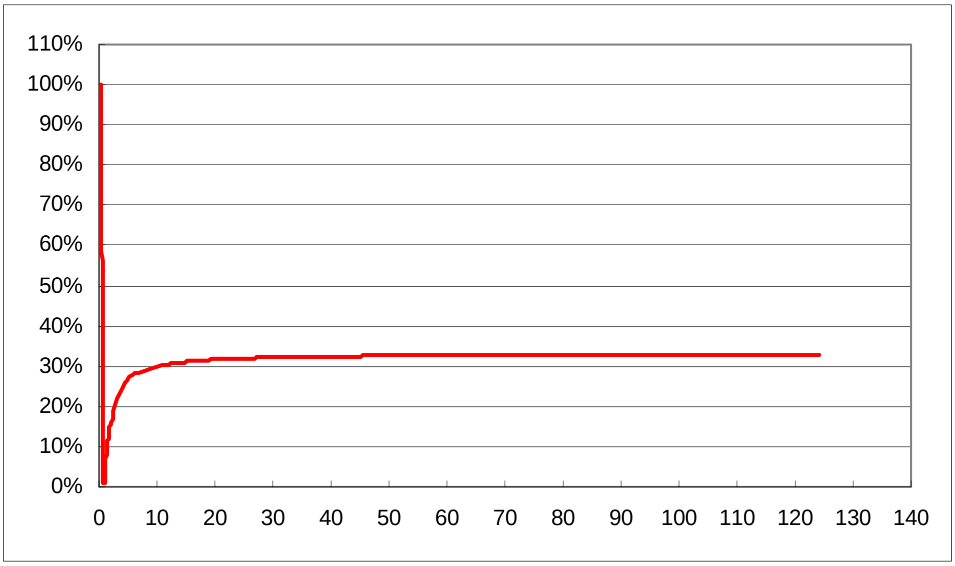



圖 15

將長寬比為 0.6~10 之間體積差異，如圖 16，顯示在長寬比約 0.8~0.85 時有最小值

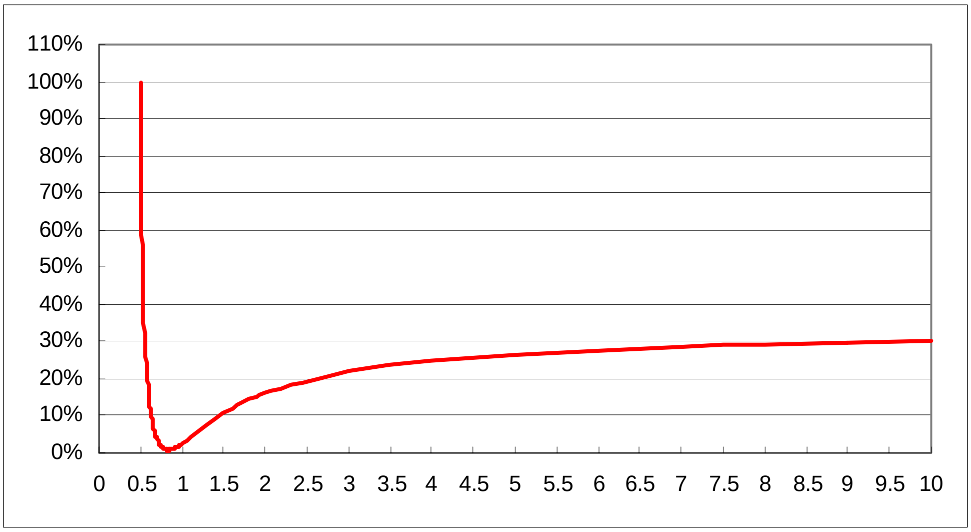



圖 16

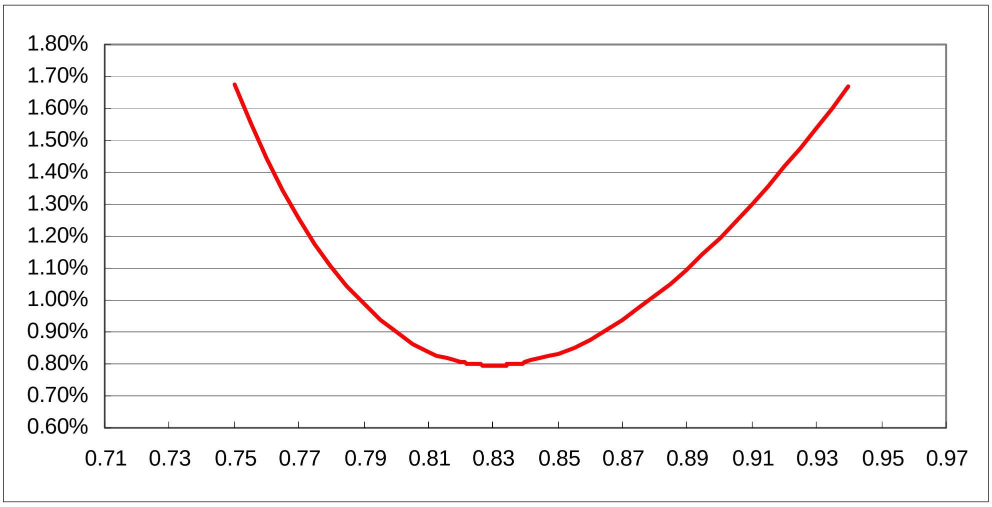


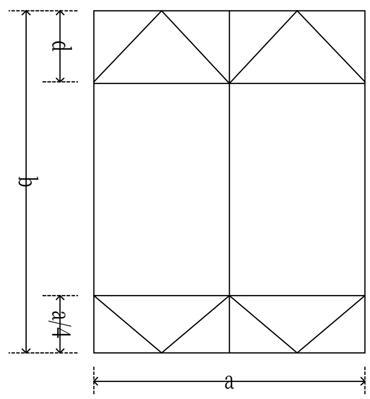

圖 17

將長寬比為 0.75~0.95 之間體積差異整理如圖 17，在長寬比為 0.83 時有最小值

五、　另類包裝的體積探討---牛奶紙盒的突出部分對於體積之影響

探討了兩種包裝後，我在便利商店看到了另一種包裝--牛奶紙盒包裝，牛奶紙盒是由一個四方柱與一個四角錐所構成的

右圖為展開圖之一半，$a$ 是牛奶盒 $\frac{1}{2}$ 寬，$b$ 是牛奶紙盒高，$d$ 的範圍在 $\frac{a}{4} \sim b-\frac{a}{4}$ 之間




四方柱的部分 $=(\frac{a}{2})^2(b-\frac{a}{4}-d)$

四角錐的部分 $=\frac{1}{3}\times(\frac{a}{2})^2\times\sqrt{d^2-\frac{a^2}{16}}$，

四角錐的高 $=\sqrt{d^2-(\frac{a}{4})^2}=\sqrt{d^2-\frac{a^2}{16}}$

牛奶紙盒體積：

$$V=\frac{a^2}{48}\left(\ (4b-a-4c)+\sqrt{c^2-\frac{a^2}{16}}\ \right)$$

將此算式代入 Excel 試算表，給定 $a,b,d$，其中 $d$ 的範圍在 $\frac{a}{4}$ 至 $b-\frac{a}{4}$ 之間，得到圖 18，上部四角錐(摺角)愈大時，整個包裝的體積愈小。

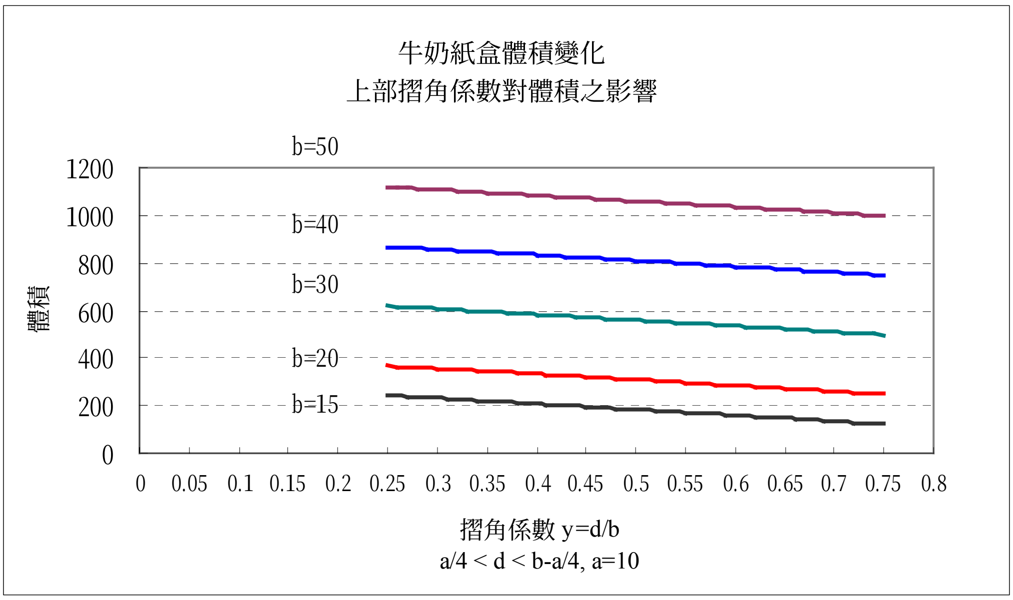



圖 18

六、　不摺角包裝方式的體積比較

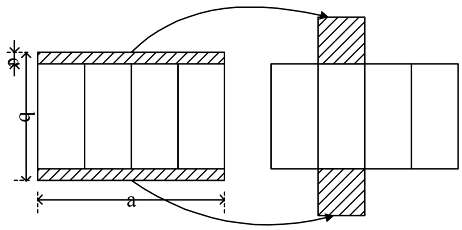
發現還有一種牛奶包裝的展開圖很特別，下邊有摺角，頂部沒有摺角，如下圖所示，如果不要摺角，展開圖有相同的表面積，體積又比較如何？

有三片面積相同的矩形包裝材料，矩形的寬為$a$、長為$b$， $a \ge b$，，設法圍成三種不同的包裝方式，比較體積：

(一) 三角錐的體積：

三角錐本來就沒有摺角，依研究(二)「探討三角立體包裝的最大體積」得到的體積算法， $a$以$\frac{a}{2}$代入，得體積$V = \frac{\sqrt{16b^2 - a^2}}{96}a^2$

(二) 正方柱體的體積：




先將展開圖捲起，使$b$線段兩端重合，摺出四個角，使俯視圖為一空心正方形(邊為$\frac{a}{4}$)，再將$e$為長的部分截下，拼湊成兩底，則$a \times e = \frac{a}{4} \times \frac{a}{4} = \frac{a^2}{16}$，

得$e = \frac{a}{16}$，上下各有一片。

方柱的高$= b - \frac{a}{16} \times 2 = b - \frac{a}{8}$

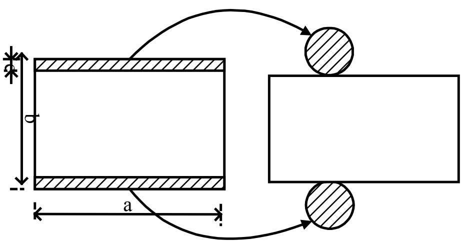
體積 ＝ 底面積Ⅹ高$= \frac{a}{4} \times \frac{a}{4} \times (b - \frac{a}{8}) = \frac{a^2 b}{16} - \frac{a^3}{128}$

(三) 圓柱體的體積：

將展開圖捲起，使$b$線段兩端重合，俯視圖為一空心圓形，且$a = 2\pi \cdot r$，

$r = \frac{a}{2\pi}$則底面積$\pi \cdot r^2 = \frac{a^2}{4\pi}$，上下各有一片拼湊成兩底，所以$a \times e = \frac{a^2}{4\pi}$，

得$e = \frac{a}{4\pi}$ ，




圓柱的高$= b - \frac{a}{4\pi} \times 2 = b - \frac{a}{2\pi}$

體積 ＝ 底面積Ⅹ高

$$= \frac{a^2}{4\pi}(b - \frac{a}{2\pi}) = \frac{a^2 b}{4\pi} - \frac{a^3}{8\pi^2}$$

(四) 三種包裝之體積比較：

先前的研究已知：有摺角的傳統鋁箔包體積 ＞ 三角立體包裝體積
因為沒有摺角的正方柱體積 ＞ 摺角的傳統鋁箔包體積
所以沒有摺角的正方柱體積 ＞ 三角錐體的體積

圓柱體體積 － 正方柱體的體積

$$= \frac{a^2b}{4\pi} - \frac{a^3}{8\pi^2} - \frac{a^2b}{16} - \frac{a^3}{128} = a^2b\left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{16}\right) - a^3\left(\frac{1}{8\pi^2} - \frac{1}{128}\right)$$

因為$\left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{16}\right)$ 0.25581，$\left(\frac{1}{8\pi^2} - \frac{1}{128}\right)$ 0.00485，當 $b \geq \frac{a}{4}$

圓柱體體積 － 正方柱體的體積 $> 0$

$\boxed{\text{所以圓柱體體積 > 正方柱體的體積 > 三角錐體的體積}}$

用 Excel 輔助繪圖比較三種立體包裝的體積，由圖 19 可佐證以上推論

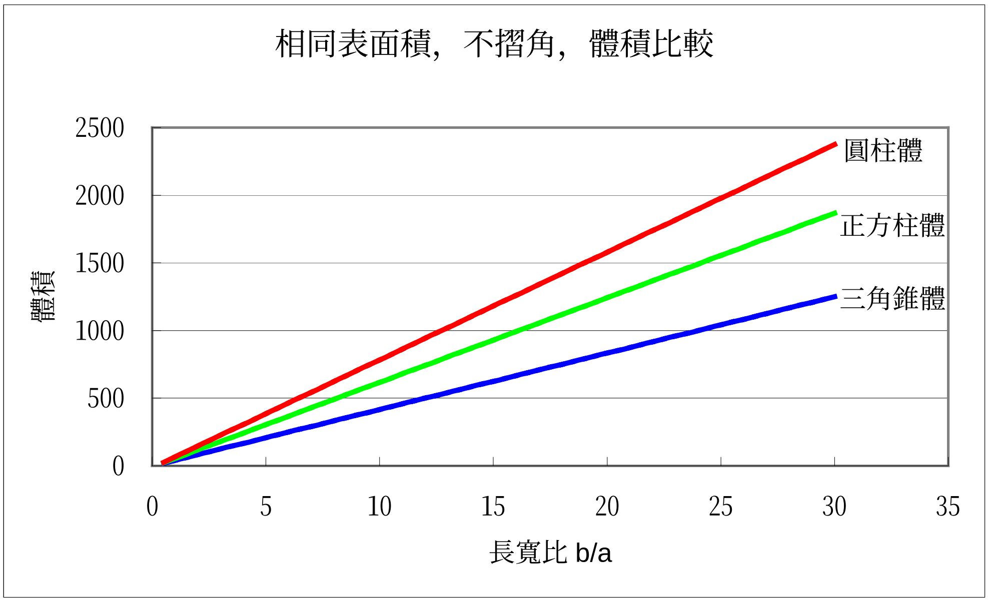



圖 19

# 伍、研究結果

依據本研究的研究目的，各相關的研究結果如下：

一、 探討三角立體包裝的最大體積

(一) 依據相同底面積之比較基礎，三角立體包體積最大值發生於「錐體的高」最大值時。

(二)三角立體包體積最大值=$V$ =， $a$ 為展開圖一邊之寬， $b$ 為展開圖一邊之長。

(一)

二、 傳統鋁箔包裝的摺角大小對於體積之影響

(一) 傳統鋁箔包的體積 = 長 Ｘ 寬 Ｘ 高 $=2c(a-2c)(b-2c)$，其中 $c$ 為傳統鋁箔包展開圖中，四端角摺角的長度， $c=xa$ 。

(二) 改變鋁箔包展開圖的長寬比($\frac{b}{a}$)，當 $\frac{b}{a}$ 值愈大，表示鋁箔包柱體愈長，其體積最大值與摺角係數 $x$ 值會隨之改變。

(三) 當 $\frac{b}{a}$ 的值時愈大時， $x$ 值趨近於為 0.25，且鋁箔包柱體的截面為正方形。

三、 三角立體包與傳統鋁箔包的體積最大值比較

(一) 在展開圖相同表面積與長寬比條件下，傳統鋁箔包的體積最大值「大於」三角立體包裝的體積最大值。

(二) 當長寬比值為 0.866(趨近於 $\frac{\sqrt{3}}{2}$)，三角立體包為「正四面體」，二種包裝方式的體積最大值差異百分比約為 0.9 %

(三) 二種包裝的體積的最小值發生於當長寬比為 0.83 時，差異約為 0.8 %

(四) 當長寬比值愈大時，二種包裝的體積差異趨近於 33.3% $\frac{1}{3}$

四、 另類包裝的體積探討---牛奶紙盒的突出部分對於體積之影響

(一) 牛奶紙盒是由一個四方柱與一個四角錐所構成的。當上部四角錐(摺角)愈大時，整個包裝盒的體積愈小。

(二) 改變不同長寬比也得到同樣的結論。

五、 不摺角包裝方式的體積比較

仍然在展開同的表面積相同之條件下，採用不摺角的包裝方式時，

圓柱體體積 ＞ 正方柱體的體積 ＞ 三角錐體的體積

# 陸、討論

一、　鋁箔包展開圖之長寬比與最大體積之間的關係

調查市售傳統鋁箔包，發現展開圖的寬(即本研究中的 $a$ 值)，大約為 10cm，而它的長(即本研究中的 $b$ 值)則大多為 14~16cm，代表其長寬比( $\frac{b}{a}$ 值)介於 1.4~1.6 之間。

依據第(2)節的研究，如果長寬比 $\frac{b}{a}$ 的值時愈大時，三角立體包裝的最大體積仍然是 $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{ab}{2} \times H = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{12} a^2$

但是，傳統鋁箔包的體積最大值= $V_2 = 2c(a-2c)(b-2c)$，　$c = 0.25a$

此 $x$=0.25 表示，傳統鋁箔包裝「截面」成為「正方形」時，會發生最大體積值，該形狀就好像「正方形柱體」的樣子。

二、　三角立體包與傳統鋁箔包的體積比較

當長寬比值愈大時，圖形中二種包裝的體積差異(%)趨近於 33.3%　$\frac{1}{3}$ 之涵意，討論如下：

依據第(2)節的研究，如果長寬比 $\frac{b}{a}$ 的值時愈大時，

三角立體包裝的最大體積 $V_1 = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{12} a^2 \quad \frac{b}{6} a^2$

傳統鋁箔包體積最大值= $V_2 = 2c(a-2c)(b-2c) \quad \frac{b}{4} a^2$，　$c = 0.25a$

二種包裝方式的體積差異= $\frac{V_2 - V_1}{V_2} = (\frac{b}{4} a^2 - \frac{b}{6} a^2) \div (\frac{b}{4} a^2) = \frac{1}{3}$

使用 Microsoft Excel 模擬與數學式推導，均顯示二種包裝的差異約為 33.3%

三、　其他包裝方式

市面上還可以觀察到其他的飲料包裝方式，例如牛奶紙包裝至少就有下列二種：

(一) 光泉高鈣調味乳：底面為正方形，紙包中間段略成圓形，頂部為正方形但四角為圓角。

(二) 統一瑞穗鮮乳：底面為正方形，紙包中間段也是正方形，頂部封口凸出為內容積類似為「四角錐」的樣子。只要是展開圖之面積相同，就可以比較。

這讓我想起在小學時有一數學題目：
給每位小朋友一條長度一樣的繩子，在地面上圍成什麼形狀，其圍成的面積最大？
答案：「圓形」。

我想，如果鋁箔包的製造公司把鋁箔包做成「圓柱體」，就好像睡覺用的「長條抱枕」(如圖 20)，其截面為「圓形」，體積會比「正方柱體」更大。

圖 20

# 柒、結論

依據這次的研究，我對各種常見的包裝方式有比較有更深入的認識：

一、 在展開圖具有相同的表面積條件下，三角立體包裝”看起來”容量裝得比較多，但經仔細探討後，發現它並不會比傳統鋁箔包裝得多。澄清了我原先的錯覺。

二、 目前市售 m&m's 迷你巧克力三角立體包裝(近似正四面體)，雖然三角立體包裝長度會比較長(兩端沒有摺角)，看起來裝得比較多，但是三角立體包裝的體積卻比四角柱包裝的體積最大值減少約 0.9%　(註：目前仍無四角柱包裝之 m&m's 巧克力)

三、 目前市售傳統鋁箔包展開圖之長寬比約為 1.5 時，若採用三角立體包裝(兩端沒有摺角)，雖然長度比較長，它的容積比傳統包裝容積最大值減少約 10.7%

四、 傳統鋁箔包展開圖之長寬比為增加到 30 以上時，三角立體包裝與傳統包的長度十分相近，但三角立體包裝的體積最大值卻比傳統包裝的體積最大值減少約 33.3%

五、 仍然在展開同的表面積相同之條件下，採用「不摺角」的包裝方式時，

「圓柱體體積」 >「 正方柱體的體積」 > 「三角錐體的體積」

研究心得：

一、這次研究所用的材料全都在我家巷子口的便利商店可以取得，爺爺、奶奶也聽得懂我的研究主題，建議同學們可以試著動手做做看。 ***It's fun！***

二、這次科展討論的是糖果、飲料的包裝, 我有正當理由常去超市、便利商店買東西吃，經常吃吃喝喝，試試各種商品，也有另類的觀察，有很多心得，過程雖然投入比較多時間，但能把國中課本所學的數學工具應用到日常生活中，深深覺得「我能看見那看不見的」，而且我能把它「算出來」，整個探討的過程感覺真的很有趣。

三、根據我的研究結論，可以提供給飲料或食品的製造公司做參考，將來市面上也許會增加更多種產品包裝方式，可以吸引消費者的眼光；除了數學上的探討之外或許會有些其他的價值。

後續相關研究：

一、 這個主題可以繼續發展到更大範圍, 包括其他包裝方式的體積比較, 也可以討論「整箱」的包裝方式，例如，為了搬運或堆放，三角立體包裝要如何排列成整個箱子。

二、 如果，給一面積固定的紙板，在空間中，構成怎麼樣的一個多面體，體積會最大？

三、與紙板的「形狀」有關嗎？　例如，圍成橄欖球、足球的展開圖之形狀就不同，若表面積相同，體積相同嗎？ 相差多少？

這將是個「有限表面積、求體積最大值」的問題。要分析此問題，可能會使用極限與導函數等數學工具，我很有興趣繼續學習、探索此問題。

## 捌、參考資料

一、國民中學數學課本第二冊/國立編譯館/民國 91 年

參考：第三章 比與比例式

二、國民中學數學課本第三冊/國立編譯館/民國 91 年

參考：1- 4 商高定理

三、國民中學數學課本第四冊/國立編譯館/民國 92 年

參考：2- 4 生活中的立體圖形

四、Matthew Watkins & Matt Tweed 著/葉偉文譯/一生受用的公式/台北市/天下遠見出版股份有限公司/頁 20 /民國 91 年

參考：三角錐體的體積=$\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高

## 評語

很生活化的題材，對作品內容甚為熟練，表達生動自然且充滿自信，唯主題內容的深度較為欠缺是美中不足的地方。