

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：兩弦的變動

關鍵詞：幾何、兩圓的關係、公切線

編號：030408

學校名稱：

屏東縣立南榮代用國民中學

作者姓名：

羅南峰、倪惠芳、李皓皓

指導老師：

陳勝仕



摘要：

選修數學第五冊曾討論到相交兩點的兩圓，如圖(1)，證得兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 互相平行，於是，我們試著改變兩圓上的點 A、B 或 C、D 的位置，觀察改變後的圖形，並一一推證 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 是否仍然成立。

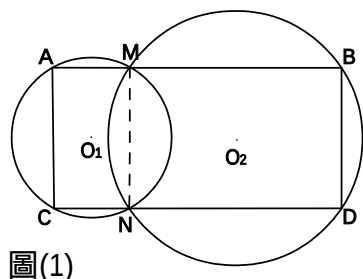
進一步移動兩圓的位置(外切、外離、內切)，當 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 通過外切、內切時的兩圓切點或外離時兩條內(外)公切線的交點時，經觀察後，我們將逐一證得 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 以及 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。

反過來求證逆命題：當兩圓外切、外離或內切時，兩圓上的兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 若互相平行且兩弦的比恰等於兩圓的半徑比，則 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 必將通過外切、內切時兩圓的切點或外離時兩條內(外)公切線的交點。

最後，將以上結果繼續推廣：當兩圓外切或內切時，兩圓上的兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 若互相平行但兩弦的比不等於兩圓的半徑比時，則 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的交點會是另作兩個外接圓的切點，且 $\overline{AC}$ 比 $\overline{BD}$ 會等於此兩外接圓的半徑比。

壹、研究動機：

在選修數學第五冊第二章，討論到多邊形與圓的關係時，我們曾證明過：



圖(1)

已知：如圖(1)，M、N 為兩圓的交點，過 M 點直線 AB 交圓 O_1 於 A 點，交圓 O_2 於 B 點，過 N 點直線 CD 交圓 O_1 於 C 點，交圓 O_2 於 D 點。

求證： $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

證明： $\because A、C、N、M$ 共圓 $\therefore \angle A = \angle MND$

又 $\because M、N、D、B$ 共圓 $\therefore \angle B + \angle MND = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$

證明完之後，老師要我們在已知條件下，試著改變 A、B 或 C、D 的位置，觀察 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 是否依然會成立？引起我們一探究竟。

貳、研究目的：

- 一、在已知的條件下(A、M、B 共線及 C、N、D 共線)，分別讓 A、C 在圓 O_1 上旋轉，B、D 在圓 O_2 上旋轉，觀察 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 是否依然會平行？
- 二、移動兩圓位置關係，就兩圓外切、外離和內切的情形，觀察 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 是否仍然成立？
- 三、目的二之逆命題是否成立？
- 四、將上述結果繼續推廣。

參、研究設備及器材：

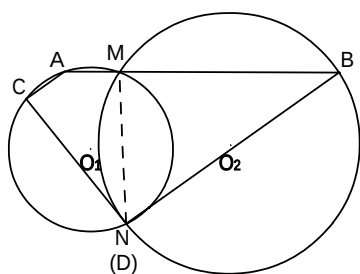
紙、筆、圓規、直尺、電腦、Word 2000、Flash 5

肆、研究過程或方法：

[研究過程一]：在已知的條件下(A、M、B 共線及 C、N、D 共線)，分別讓 A、C 在圓 O_1 上旋轉，B、D 在圓 O_2 上旋轉，觀察 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 是否依然會平行？

- (一) 在圖(1)的基礎上，C、D 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上順時針方向旋轉一圈，且 C、N、D 共線，其餘條件不變，看看 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 是否依然保持不變？
將 C、D 依順時針方向旋轉時，我們分別得到以下幾種結果：

結果 1



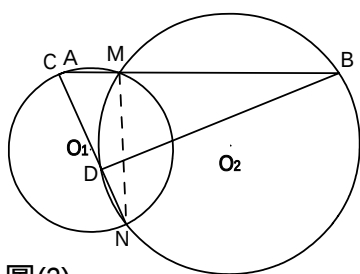
圖(2)

想法：在圖(1)中，D 點沿著 $\widehat{DN}$ 移動到 N 點之間的情形，都將與圖(1)的證法相同，因此直接將 D 點移到 N 點的位置。
(D、N 在不同位置時， $\widehat{DN}$ 為圓 O_2 之割線，就 D 點慢慢趨近 N 點，當 D、N 為同一點時， $\widehat{CD}$ 成為圓 O_2 之切線)

結果：當 D 移到 N 點，如圖(2)， $\widehat{CD}$ 成為圓 O_2 的切線，則 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$
證明： $\because$ A、C、N、M 共圓 $\therefore \angle A + \angle CDM = 180^\circ$

$$\text{又 } \angle B = \frac{1}{2} \widehat{MN} = \angle CDM \quad \therefore \angle A + \angle B = 180^\circ \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

結果 2



圖(3)

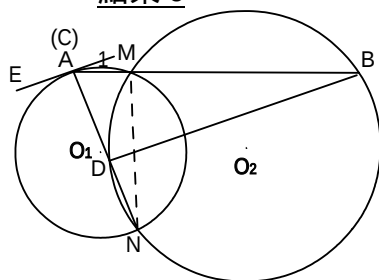
想法：D 點順移並保持 C、D、N 共線，則 A、C 位置會有三種情形：❶ C 在 A 的左方，如圖(3) ❷ C、A 重合，如圖(4) ❸ C 在 A 的右方，如圖(5)。

結果：當 D 順移一小幅度到圖(3)的位置，連 $\widehat{DN}$ 交圓 O_1 於 C 點，則 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

❶ 證明： $\because$ A、C、N、M 共圓 $\therefore \angle A + \angle N = 180^\circ$

$$\text{又 } \angle N = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle B \quad \therefore \angle A + \angle B = 180^\circ \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

結果 3

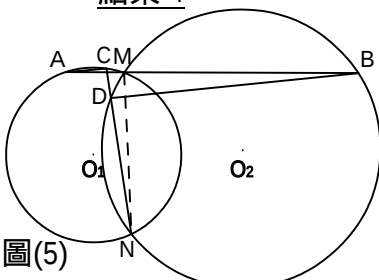


圖(4)

結果：D 繼續順移到圖(4)的位置，連 $\overrightarrow{DN}$ 交圓 O_1 於 C 點，此時 A、C 重合，作切線 $\overrightarrow{CE}$ ，則 $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{BD}$

②證明： $\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{AM} = \angle N$ 又 $\angle N = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle B$
 $\therefore \angle 1 = \angle B \therefore \overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{BD}$

結果 4

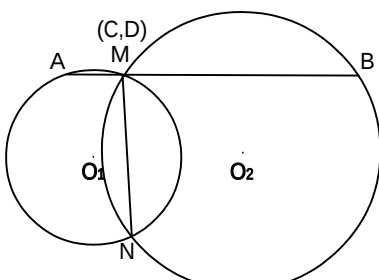


圖(5)

結果：D 再順移到圖(5)的位置，連 $\overrightarrow{DN}$ 交圓 O_1 於 C，則 $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$

③證明： $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle N$ 又 $\angle N = \frac{1}{2} \widehat{DM} = \angle B$
 $\therefore \angle A = \angle B \therefore \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$

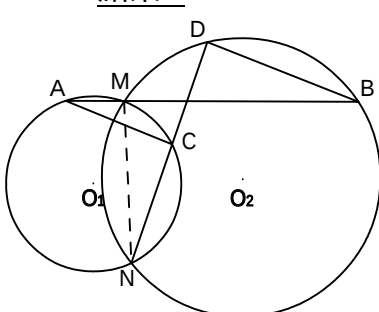
結果 5



圖(6)

想法：C、D 同時慢慢接近 M 點，看看 C、D、M 重合的情形
 結果：當 C、D 同時移到 M 點，如圖(6)，此時 A、B、C、D 四點共線。

結果 6



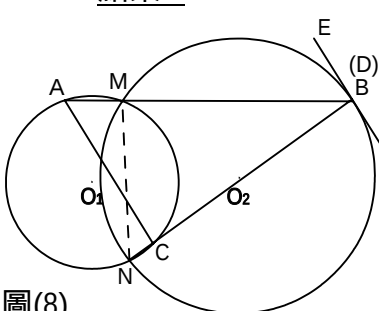
圖(7)

想法：C、D 離開 M 點，且 D、C、N 共線，則 D、B 位置會有三種情形：① D 在 B 的左方，如圖(7) ② D、B 重合，如圖(8) ③ D 在 B 的右方，如圖(9)。

結果：D 再順移到圖(7)的位置，連 $\overrightarrow{DN}$ 交圓 O_1 於 C，則 $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$

①證明： $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle N$ 又 $\angle N = \frac{1}{2} \widehat{DM} = \angle B \therefore \angle A = \angle B$
 $\therefore \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$

結果 7

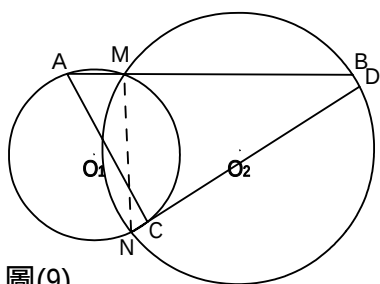


圖(8)

結果：當 D 移到 B 點位置，如圖(8)，此時作 $\overrightarrow{EB}$ 為圓 O_2 之切線，則 $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BE}$

②證明： $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle N$ 又 $\angle EBM = \frac{1}{2} \widehat{BM} = \angle N$
 $\therefore \angle A = \angle EBM \therefore \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BE}$

結果 8



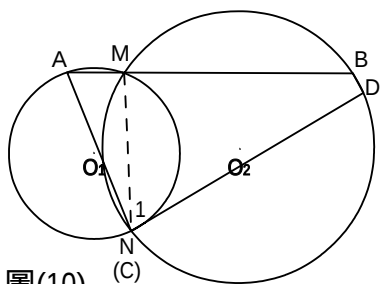
圖(9)

結果: D 繼續順移到圖(9)的位置, 連 $\overline{DN}$ 交圓 O_1 於 C, 則 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

① 證明: $\angle N = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle A$ 又 M、N、D、B 共圓

$$\therefore \angle B + \angle N = 180^\circ \quad \therefore \angle B + \angle A = 180^\circ \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

結果 9



圖(10)

想法: C 接近 N 點, 看看 C、N 重合的情形

結果: C 移到 N 點如圖(10), 此時 $\overline{CD}$ 為圓 O_1 之切線, 則 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

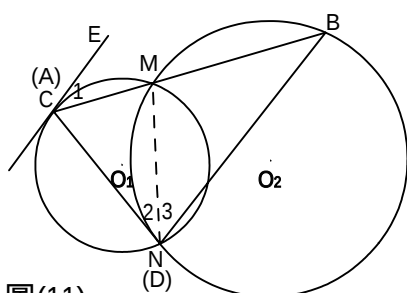
證明: $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{NM} = \angle 1$ $\because$ M、N、D、B 共圓 $\therefore \angle B + \angle 1 = 180^\circ$

$$\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

(二) 在圖(2)的基礎上, A、B 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上逆時針方向旋轉一圈, 且 A、M、B 共線, 其餘條件不變, 看看 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 是否依然保持不變?

將 A、B 依逆時針方向旋轉時, 我們分別得到以下幾種結果:

結果 1



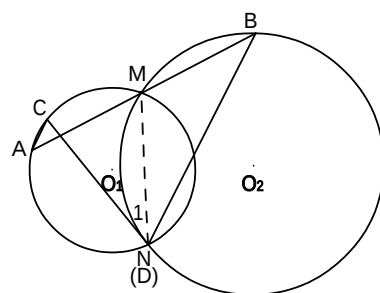
圖(11)

想法: 在圖(2)中, A 點逆時針方向移動, 並且保持 A、M、B 共線, 會有兩種情形: ① A、C 重合, 如圖(11) ② A 在 C 的左方, 如圖(12)

結果: 當 A 移到 C 點, 如圖(11), 作 $\overline{CE}$ 為圓 O_1 之切線, 則 $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$

① 證明: $\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{MN} = \angle B \quad \therefore \overline{CE} \parallel \overline{BD}$

結果 2

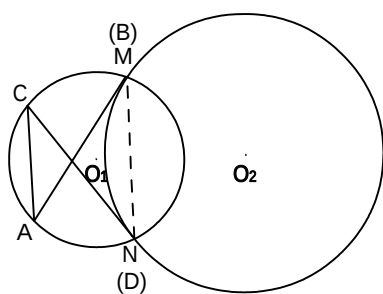


圖(12)

結果: A 點再順移一小幅度, 如圖(12)的位置, 連 $\overline{AM}$ 交圓 O_2 於 B 點, 則 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

② 證明: $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MN} = \angle B \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$

結果 3



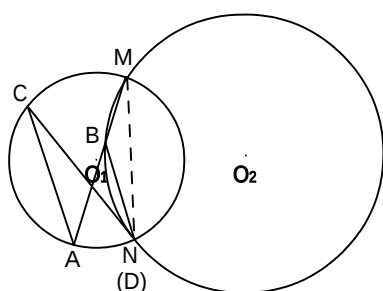
圖(13)

想法：B 慢慢接近 M 點，看看 B、M 重合的情形

結果：B 點順移到 M 點，如圖(13)，此時 $\overline{AB}$ 為圓 O_2 的切線，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle CNM = \frac{1}{2} \widehat{MN} = \angle B \quad \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 4



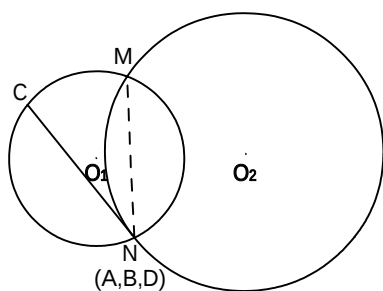
圖(14)

想法：B 離開 M 點，且 A、B、M 共線的情形

結果：B 繼續順移，如圖(14)，連 $\overline{BM}$ 交圓 O_1 於 A 點，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle C = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \angle M$ 又 $\angle M = \frac{1}{2} \widehat{BD} = \angle CDB$
 $\therefore \angle C = \angle CDB \quad \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 5

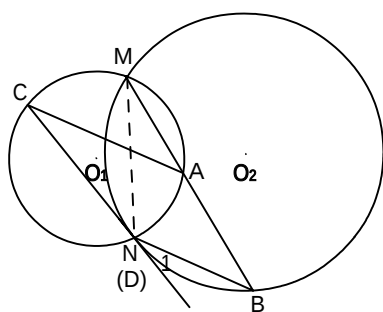


圖(15)

想法：A、B 慢慢接近 N 點，看看 A、B、N 重合的情形

結果：當 A、B 移到 N 點，如圖(15)，此時 A、B、C、D 四點共線。

結果 6



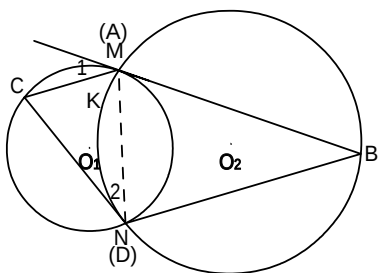
圖(16)

想法：A、B 離開 N 點，且 M、A、B 共線的情形

結果：A 點順移到圖(16)的位置，連 $\overline{MA}$ 交圓 O_2 於 B 點，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{BN} = \angle M$ $\angle C = \frac{1}{2} \widehat{AN} = \angle M \quad \therefore \angle C = \angle 1$
 $\therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 7



圖(17)

想法：A 慢慢接近 M 點，看看 A、M 重合的情形

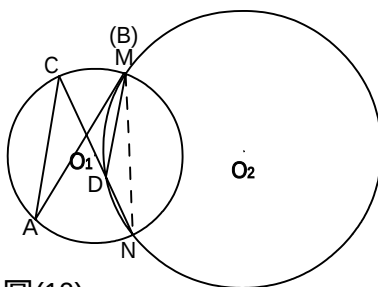
結果：A 移到 M 點，如圖(17)，此時 $\overline{BM}$ 為圓 O_1 之切線，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle 1$ $\angle B = \frac{1}{2} \widehat{MKN} = \angle 2 \therefore \angle B = \angle 1$
 $\therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

(三) 在圖(3)的基礎上，A、B 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上逆時針方向旋轉一圈，且 A、M、B 共線，其餘條件不變，看看 $\overline{AC} // \overline{BD}$ 是否依然保持不變？

將 A、B 依逆時針方向旋轉一圈時，我們分別得到以下幾種結果：

結果 1



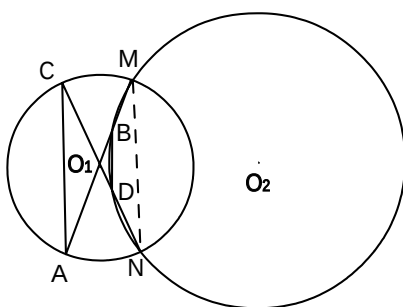
圖(18)

想法：在圖(3)中，B 點沿著 $\widehat{BM}$ 移動到 M 點之間的情形，其證法將與圖(4) (5)相同，因此直接將 B 點移到 M 的位置

結果：B 順移到 M 點，如圖(18)，此時 $\overline{AB}$ 為圓 O_2 之切線，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle AMD = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle N$ $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{CM} = \angle N$
 $\therefore \angle AMD = \angle A \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 2



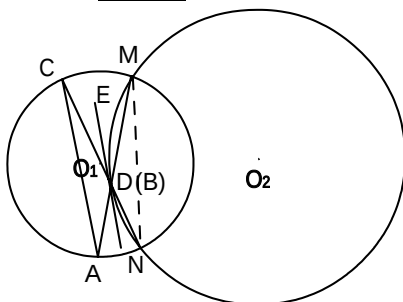
圖(19)

想法：B 離開 M 點，且 A、B、M 共線，則 B、D 位置會有三種情形：① B 在 D 的上方，如圖(19) ② B、D 重合，如圖(20) ③ B 在 D 的下方，如圖(21)

結果：B 繼續順移到圖(19)的位置，連 $\overline{BM}$ 交圓 O_1 於 A 點，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

①證明： $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle N \therefore B、D、N、M$ 共圓
 $\therefore \angle N = \angle ABD \therefore \angle A = \angle ABD \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 3

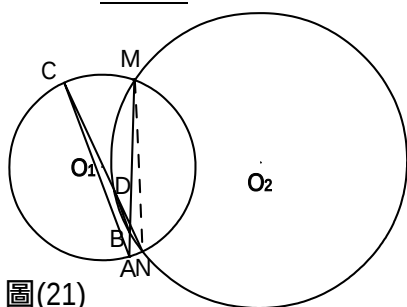


圖(20)

結果：B 移到 D 點，如圖(20)，作 $\overline{DE}$ 為切線，則 $\overline{AC} // \overline{DE}$

②證明： $\angle EDM = \frac{1}{2} \widehat{DM} = \angle N$ $\angle N = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle A$
 $\therefore \angle A = \angle EDM \therefore \overline{AC} // \overline{DE}$

結果 4

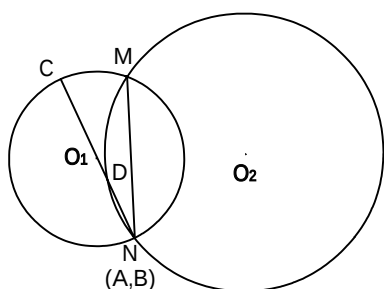


圖(21)

結果：B 繼續順移到圖(21)的位置，連 $\overline{BM}$ 交圓 O_1 於 A 點，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

③證明： $\angle DBM = \frac{1}{2} \widehat{DM} = \angle N$ $\angle A = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle N$
 $\therefore \angle A = \angle DBM \quad \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 5

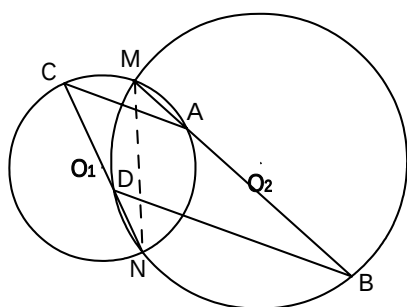


圖(22)

想法：A、B 慢慢接近 N 點，看看 A、B、N 重合的情形

結果：A、B 移到 N 點，如圖(22)，此時 A、B、C、D 四點共線。

結果 6



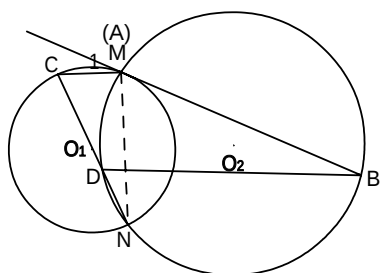
圖(23)

想法：A、B 離開 N 點，且 M、A、B 共線的情形

結果：B 移到圖(23)的位置，連 $\overline{BM}$ 交圓 O_1 於 A 點，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle CAM = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle N$ $\angle B = \frac{1}{2} \widehat{DM} = \angle N$
 $\therefore \angle CAM = \angle B \quad \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

結果 7



圖(24)

想法：A 慢慢接近 M 點，看看 A、M 重合的情形

結果：A 移到 M 點，如圖(24)，此時 $\overline{AB}$ 為圓 O_1 之切線，則 $\overline{AC} // \overline{BD}$

證明： $\angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{AC} = \angle N$ $\angle B = \frac{1}{2} \widehat{AD} = \angle N \quad \therefore \angle 1 = \angle B$
 $\therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

小結：

(一)在圖(1)的基礎上，將 C、D 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上順時針方向旋轉一圈，我們得到

9 個結果，證得 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 兩弦會互相平行或 A、B、C、D 四點共線。

(二)在圖(2)的基礎上，將 A、B 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上逆時針方向旋轉一圈，我們得到

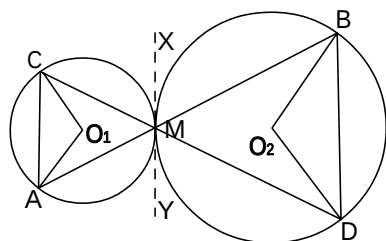
7 個結果，證得 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 兩弦會互相平行或 A、B、C、D 四點共線。

(三)在圖(3)的基礎上，將 A、B 分別在圓 O_1 、圓 O_2 上逆時針方向旋轉一圈，我們得到

7 個結果，證得 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 兩弦會互相平行或 A、B、C、D 四點共線。

[研究過程二]：移動兩圓的位置關係，觀察 $\overline{AC} // \overline{BD}$ 是否仍然成立？

(一)外切：相交兩點的兩圓慢慢往兩側移動至圖(25)的位置，假設 M 為兩圓之切點， $\overline{XY}$ 為公切線，若 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 M 點，則 ① $\overline{AC} // \overline{BD}$ ② $\overline{AC} : \overline{BD}$ = 兩圓的半徑比



圖(25)

①證明： $\angle CAM = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle CMX$ $\angle MBD = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle DMY$

$\therefore \angle CMX = \angle DMY \therefore \angle CAM = \angle MBD \therefore \overline{AC} // \overline{BD}$

②證明：設圓 O_1 、圓 O_2 半徑分別為 r 、 R

在 $\triangle ACO_1$ 與 $\triangle BDO_2$ 中

$\angle O_1 = 2\angle CMA$ $\angle O_2 = 2\angle BMD$

$\therefore \angle CMA = \angle BMD \therefore \angle O_1 = \angle O_2$

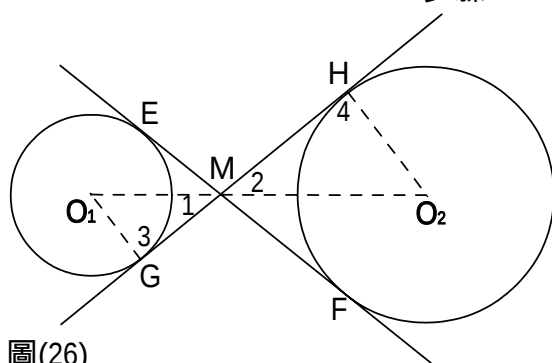
又 $\overline{CO_1} : \overline{DO_2} = \overline{AO_1} : \overline{BO_2} = r : R$

$\therefore \triangle ACO_1 \sim \triangle BDO_2$

$\therefore \overline{AC} : \overline{BD} = r : R$

(二)外離：在圖(25)的基礎上，兩圓再繼續往兩側移動，如圖(26)，則以下將循兩個步驟來說明 $\overline{AC} // \overline{BD}$

步驟 1：



圖(26)

已知：如圖(26)，M 為兩圓內公切線的交點，設圓 O_1 、圓 O_2 半徑分別為 r 、 R ，且兩內公切線與兩圓切於 E、F、G、H 四點

求證： $\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{r}{R}$

證明：在 $\triangle O_1GM$ 、 $\triangle O_2HM$ 中

$\angle 1 = \angle 2$ $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$

$\therefore \triangle O_1GM \sim \triangle O_2HM \therefore \frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{\overline{O_1G}}{\overline{O_2H}} = \frac{r}{R}$

步驟 2：

已知：如圖(27)， $\overline{CD}, \overline{AB}$ 交於 M，其中 M 為兩內公切線的交點，則 ① $\overline{AC} // \overline{BD}$ ② $\overline{AC} : \overline{BD}$ = 兩圓的半徑比

① 證明：在 $\triangle O_1IM$ 和 $\triangle O_2JM$ 中， $\angle 1 = \angle 2$ 、 $\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \triangle O_1IM \sim \triangle O_2JM \therefore$ 由步驟 1 得知 $\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{r}{R}$

$\therefore \frac{\overline{IO_1}}{\overline{JO_2}} = \frac{r}{R}$ 設 $\overline{O_1I} = Xr$ $\overline{O_2J} = XR$

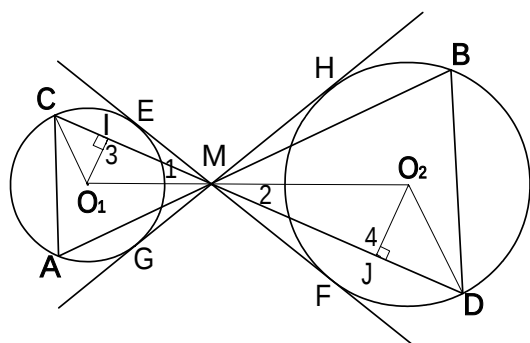
又 $\frac{\overline{IM}}{\overline{JM}} = \frac{r}{R}$ 設 $\overline{IM} = Yr$ $\overline{JM} = YR$

在 $\triangle CO_1I$ 中

$\overline{CI} = \sqrt{\overline{CO_1}^2 - \overline{IO_1}^2} = \sqrt{r^2 - X^2 r^2} = r\sqrt{1 - X^2}$

同理在 $\triangle O_2JD$ 中 $\overline{JD} = R\sqrt{1 - X^2}$

$\therefore \overline{CM} = \overline{CI} + \overline{IM} = r(\sqrt{1 - X^2} + Y)$



圖(27)

$$\overline{DM} = \overline{DJ} + \overline{JM} = R(\sqrt{1-X^2} + Y)$$

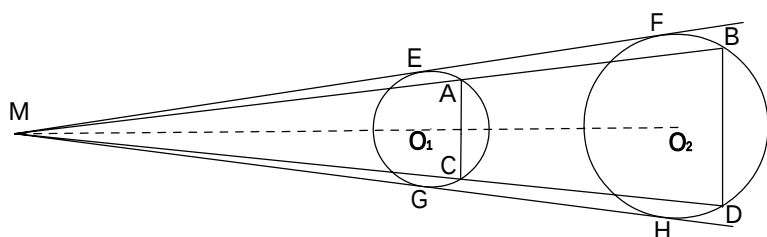
$$\therefore \frac{\overline{CM}}{\overline{DM}} = \frac{r}{R} \quad \text{同理} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{r}{R} \quad \text{又} \quad \angle CMA = \angle DMB$$

$$\therefore \triangle ACM \sim \triangle BDM \quad \therefore \angle A = \angle B \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

② 證明：設圓 O_1 、圓 O_2 半徑分別為 r 、 R

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

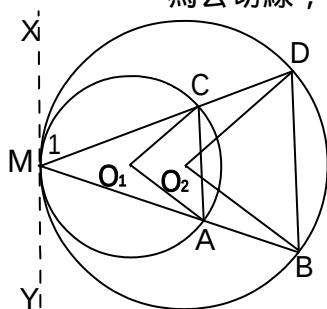
$$\therefore \triangle ACM \sim \triangle BDM \quad \therefore \overline{AC} : \overline{BD} = \overline{CM} : \overline{DM} = r : R$$



圖(28)

同理，我們可由內公切線推想到外公切線，如圖(28)， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 交於 M ，其中 M 為兩外公切線的交點，如同圖(27)之證明，可證得 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。

(三)內切：相交兩圓的兩圓慢慢往內側移動至圖(29)的位置，假設 M 為兩圓之切點， $\overline{XY}$ 為公切線，若 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 交於 M 點，則 ① $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ② $\overline{AC} : \overline{BD}$ = 兩圓的半徑比



圖(29)

$$\text{① 證明：} \angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MC} = \angle MAC \quad \angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle MBD$$

$$\therefore \angle MAC = \angle MBD \quad \therefore \overline{AC} \parallel \overline{BD}$$

② 證明：設圓 O_1 、圓 O_2 半徑分別為 r 、 R

在 $\triangle CO_1A$ 與 $\triangle DO_2B$ 中

$$\angle O_1 = 2\angle CMA \quad \angle O_2 = 2\angle DMB \quad \therefore \angle O_1 = \angle O_2$$

$$\text{又} \quad \overline{CO_1} : \overline{DO_2} = \overline{AO_1} : \overline{BO_2} = r : R \quad \therefore \triangle CO_1A \sim \triangle DO_2B$$

$$\therefore \overline{AC} : \overline{BD} = r : R$$

小結：

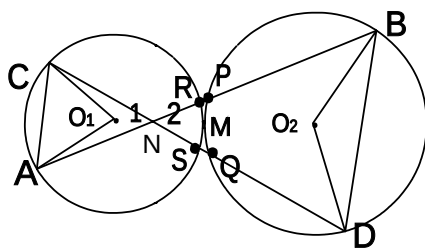
(一)外切：過兩圓切點(M 點)之兩直線 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ ，如圖(25)，則兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 會平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。

(二)外離：過兩圓兩內公切線或外公切線之交點(M 點)之兩直線 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ ，如圖(27) (28)，則兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 會平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。

(三)內切：過兩圓切點(M 點)之兩直線 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ ，如圖(29)，則兩弦 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 會平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。

[研究過程三]：進一步探討其逆命題是否成立？

(一)外切：若圓 O_1 、圓 O_2 相切於 M ， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD} = r : R$ ，其中 r 為圓 O_1 半徑， R 為圓 O_2 半徑，則 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 相交於 M 點



圖(30)

證明：如圖(30)，假設 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 N

連 $\overline{O_1A}, \overline{O_1C}, \overline{O_2B}, \overline{O_2D}$

$$\because \overline{AC} : \overline{BD} = \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = \overline{O_1A} : \overline{O_2B} = r : R$$

$\therefore \triangle O_1CA \sim \triangle O_2DB$ (SSS 相似性質)

$$\therefore \angle O_1 = \angle O_2$$

(1) 若 N 在圓 O_2 之圓外：

$\therefore \angle 2$ 為圓 O_2 之圓外角

$$\therefore \angle 2 = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{PQ}) < \frac{1}{2} \widehat{BD} = \frac{1}{2} \angle O_2$$

又 $\therefore \angle 1$ 為圓 O_1 之圓內角

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{RS}) > \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} \angle O_1$$

$$\because \angle O_1 = \angle O_2 \quad \therefore \angle 2 < \angle 1 \text{ 產生矛盾}$$

($\because \angle 2, \angle 1$ 為對頂角)

$\Rightarrow$ N 不在圓 O_2 之圓外

(2) 若 N 在圓 O_1 之圓外

同(1)之證明，將產生矛盾情形

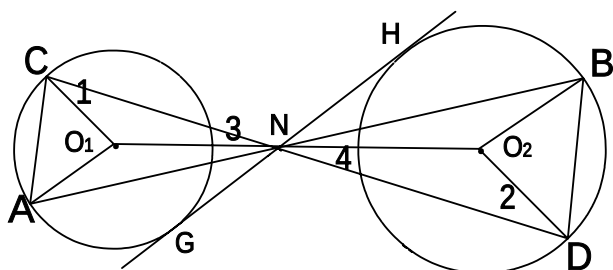
$\Rightarrow$ N 不在圓 O_1 之圓外

(3) 由(1)、(2)得知 N 不在圓 O_1 及圓 O_2 之圓外

故 $N=M$ ，即 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 相交於 M 點

(二) 外離：若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD} = r : R$ ，其中 r 為圓 O_1 半徑， R 為圓 O_2 半徑， M 為兩圓內公切線交點，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 相交於 M 點

證明：(1) 假設 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 N，如圖(31)



圖(31)

$$\because \overline{AC} : \overline{BD} = \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = \overline{O_1A} : \overline{O_2B} = r : R$$

$\therefore \triangle O_1CA \sim \triangle O_2DB$

$$\therefore \angle ACO_1 = \angle BDO_2$$

$$\text{又} \because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \angle ACN = \angle BDN \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$$

(2) 連 $\overline{O_1N}, \overline{O_2N}$

$$\because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \triangle ACN \sim \triangle BDN$$

$$\therefore \overline{CN} : \overline{DN} = \overline{AC} : \overline{BD} = r : R$$

$$\text{又} \angle 1 = \angle 2 \text{ 且 } \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = r : R$$

$$\therefore \triangle CO_1N \sim \triangle DO_2N \quad \therefore \angle 3 = \angle 4$$

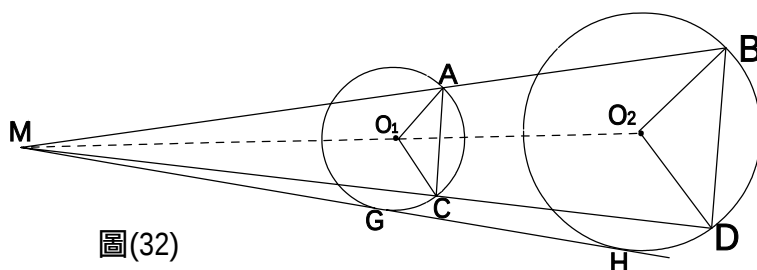
$$\text{得知 N 在 } \overline{O_1O_2} \text{ 上且 } \overline{O_1N} : \overline{O_2N} = r : R \text{ ----- ①}$$

(3) 作內公切線 $\overline{GH}$ 交 $\overline{O_1O_2}$ 於 M，如圖(26)

$$\text{由圖(26)之推證得知 } \overline{O_1M} : \overline{O_2M} = r : R \text{ ----- ②}$$

由①、②得知 $N=M$

即 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 相交於 M 點

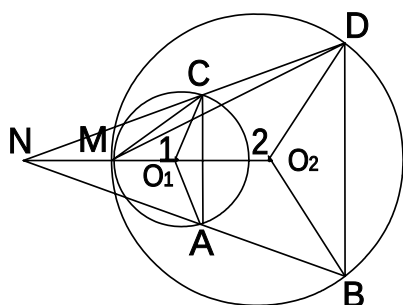


圖(32)

同理，我們可以在外公切線上得到相同的結果：如圖(32)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD} = r : R$ ，其中 r 為圓 O_1 半徑， R 為圓 O_2 半徑， M 為兩圓外公切線的交點，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 相交於 M 點

(三)內切：若圓 O_1 、圓 O_2 相切 M ， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD} = r : R$ ，其中 r 為圓 O_1 半徑， R 為圓 O_2 半徑，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 相交於 M 點

證明：如圖(33)，假設 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 N



圖(33)

(1) 連 $\overline{O_1A}, \overline{O_1C}, \overline{O_2B}, \overline{O_2D}$

$$\because \overline{AC} : \overline{BD} = \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = \overline{O_1A} : \overline{O_2B} = r : R$$

$$\therefore \triangle O_1CA \sim \triangle O_2DB$$

$$\therefore \angle O_1CA = \angle O_2DB$$

$$\text{又} \because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \angle ACN = \angle BDN$$

$$\therefore \angle NCO_1 = \angle NDO_2$$

(2) $\because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \quad \therefore \triangle ACN \sim \triangle BDN$

$$\therefore \overline{CN} : \overline{DN} = \overline{AC} : \overline{BD} = r : R$$

$$\text{又} \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = r : R$$

$$\therefore \triangle CO_1N \sim \triangle DO_2N$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \therefore N \text{ 在 } \overline{O_1O_2} \text{ 上}$$

(3) 連 $\overline{MC}, \overline{MD}$

在 $\triangle MO_1C, \triangle MO_2D$ 中

$$\because \angle 1 = \angle 2 \quad \text{又} \overline{O_1M} : \overline{O_2M} = \overline{O_1C} : \overline{O_2D} = r : R$$

$$\therefore \triangle CO_1M \sim \triangle DO_2M$$

$$\therefore \angle MCO_1 = \angle MDO_2$$

$$\therefore M \text{ 在 } \overline{CD} \text{ 上}$$

(4) N 是 $\overline{O_1O_2}, \overline{CD}$ 的交點

M 亦是 $\overline{O_1O_2}, \overline{CD}$ 的交點

$$\therefore N = M$$

即 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 M 點

小結：

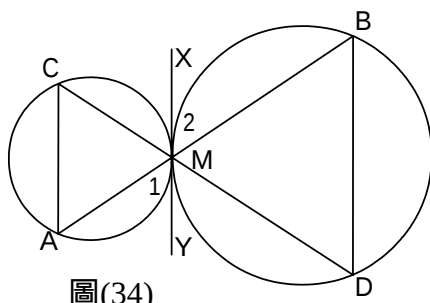
(一)外切：兩圓之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 如圖(30)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比，連接 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 兩直線之交點恰為兩圓外切時的切點。

(二)外離：兩圓之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 如圖(31)(32)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比，連接 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 兩直線之交點恰為兩內公切線或外公切線之交點。

(三)內切：兩圓之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 如圖(33)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比，連接 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 兩直線之交點恰為兩圓內切時的切點。

[研究過程四]：將上述結果繼續推廣。

推廣 1



圖(34)

已知：如圖(34)， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{AB}, \overline{CD}$ 交於 M 點

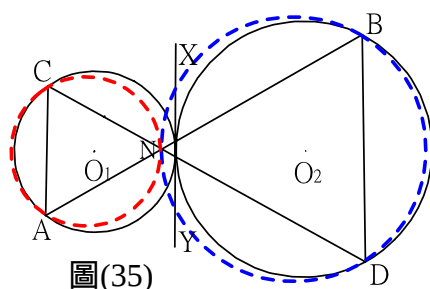
求證：圓 ACM、BDM 外切於 M 點

證明：過 M 作圓 ACM 的切線 $\overline{XY}$ $\therefore \angle C = \frac{1}{2} \widehat{AM} = \angle 1$

$\because \angle 1 = \angle 2$ 又 $\because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \therefore \angle C = \angle D$

$\therefore \angle D = \angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{BM} \therefore \overline{XY}$ 為圓 BDM 之切線

$\therefore M$ 為圓 ACM、BDM 之切點

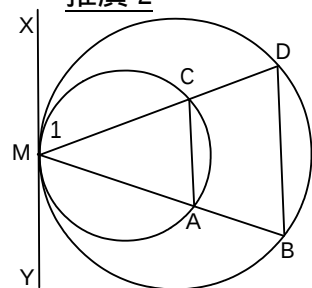


圖(35)

小結：

如圖(35)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 但 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 不等於圓 O_1 、圓 O_2 的兩圓半徑比，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的交點 N 不會是圓 O_1 、圓 O_2 兩圓的切點，但 N 點將是圓 ACN、BDN 兩圓的切點且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 會等於圓 ACN、BDN 兩圓的半徑比。

推廣 2



圖(36)

已知：如圖(36)， $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{CD}, \overline{AB}$ 交於 M 點

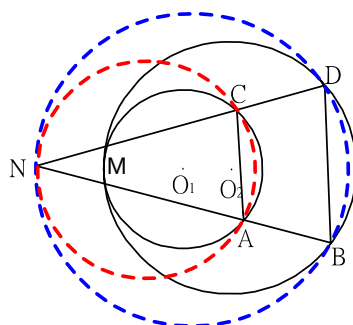
求證：圓 ACM、BDM 內切於 M 點

證明：過 M 作圓 DBM 的切線 $\overline{XY}$ $\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MD} = \angle B$

$\because \overline{AC} \parallel \overline{BD} \therefore \angle B = \angle CAM$

$\therefore \angle CAM = \angle 1 = \frac{1}{2} \widehat{MC} \therefore \overline{XY}$ 為圓 ACM 之切線

$\therefore M$ 為圓 ACM、BDM 之切點



圖(37)

小結：

如圖(37)，若 $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 但 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 不等於圓 O_1 、圓 O_2 之兩圓半徑比，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的交點 N 不會是圓 O_1 、圓 O_2 兩圓的切點，但 N 點將是圓 ACN 、 BDN 兩圓的切點且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 會等於圓 ACN 、 BDN 兩圓的半徑比。

伍、結論：

- 一、課堂上所學到的幾何題目，大致都是單一方式的求證，我們試著以移動點的方式來探討幾何問題，使得原命題以多角度觀點加以分析及驗證，因而改變了我們對數學所存有的刻板印象，並提升我們研究的興趣。
- 二、(一)當兩圓外切或內切時，過此兩圓切點的兩直線，分別與兩圓相交所取得之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 會互相平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比。
(二)當兩圓外離時，過兩圓兩內公切線或外公切線的交點之兩條直線，分別與兩圓相交所取得之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 會互相平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於兩圓的半徑比，如圖(27)(28)。
- 三、在結論二中之兩弦 $\overline{AC}, \overline{BD}$ ，若互相平行且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 恰等於兩圓的半徑比，當連結 $\overline{AB}, \overline{CD}$ ，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 兩直線交點恰為兩圓外切、內切時的切點或兩圓外離時兩內(外)公切線的交點。
- 四、結論二(一)中的 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 兩弦，若互相平行但 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 不等於兩圓的半徑比，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的交點(N)，會是 $\triangle ACN, \triangle BDN$ 兩外接圓的切點，如圖(35)(37)，且 $\overline{AC} : \overline{BD}$ 等於此兩外接圓的半徑比。

陸、參考資料：

- 一、李恭晴 國中數學選修第五冊 第二版 台北 國立編譯館 113 頁 2002
- 二、網址 <http://www.csjh.tpc.edu.tw/~tsou/j5/j5-2213.htm> (圓中弦的探索)
- 三、徐本順 數學解題中的動態思維 第一版 河南科學技術出版社 232 頁 1998
- 四、張景中 平面幾何新路 第二版 台北 九章出版社 420 頁 1995
- 五、孫文先 平面幾何 第四版 台北 九章出版社 294 頁 1986

評語

由課本教材出發，分析很完整，作者對作品內容也甚為熟練，惜發展受限，延伸性稍缺為其美中不足之處。