

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：模糊三角洲上消失的密室

關鍵詞：模糊角、模糊三角形、消失的密室

編號：030406

學校名稱：

高雄市立龍華國民中學

作者姓名：

鄒宜靜、王詩涵、翁詩雅、謝孟樺

指導老師：

許建銘、張佩琦



摘要

本文是應用我們在國中所學的許多幾何知識，先討論並解決：

- 一、模糊角的分角線作圖；
- 二、模糊角內部一點指向模糊角頂點的直線作圖。

然後藉著以上兩種基本作圖，設法直接在模糊三角形上作出如一般三角形的內接或內切幾何圖形。而已知條件設定為：儘管每個模糊三角形的模糊程度不一，但是等待完成的密室並未觸及模糊地帶。

由以上的說明，我們瞭解到最簡單的作圖法不一定就是有效的解決方法，也就是說，我們的研究內容必須要找出更多的基本作圖法以及更富彈性的密室作圖方法。

我們集思廣益想出許多種模糊角的分角線作圖法以及模糊角內部一點指向模糊角頂點的直線作圖法。對於國中數學問題中較為常見的三角形內接(或內切)圖形，我們發現：運用相似密室的「關鍵點作圖法」是一種實作較為簡易的密室作圖法；而以關鍵密室內部為作圖根據地的「關鍵密室作圖法」是一種可以有效迴避模糊地帶的密室作圖法，若延伸以上這些作圖法的觀念並靈活運用，則會成為一種高成功率的密室作圖法。

壹、研究動機：

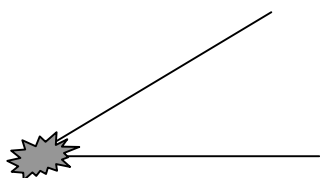
有一次上分散式資優班數學課，數學老師教了一個有關「**模糊角**」(指一個角無法辨識其頂點位置)的分角線作圖問題，而且老師在課堂上說：「可見一個三角形即使三個內角都是模糊角，我們還是可以作出它的內切圓唷！」也就是這一句話使得這個分角線作圖問題持續吸引不少同學的思考與討論，而且還有同學進一步提出：如果一個三角形的三個內角都是模糊角，那麼有沒有辦法完成這個三角形的其它內接或內切圖形？這個問題讓數學老師與幾位同學感到有趣，於是一些人就決定共同研究，並在數學老師積極鼓勵與熱心指導下，應用我們在國中所學到的：「相似形」、「分角線、中垂線性質」、「圓的性質」、「三角形、四邊形的性質」、「平行」與「對稱」等幾何知識以及「二次函數」的觀念，完成這份「模糊三角形上消失的密室」的研究報告。

貳、研究目的：

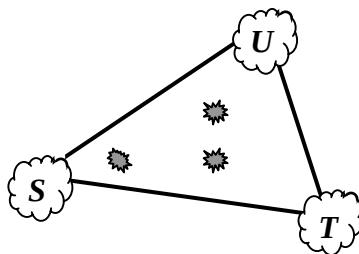
在模糊三角形上直接作出國中數學上常見的內接或內切圖形(本文也稱作密室)，即使模糊的範圍很廣泛，我們期望討論出可以簡化作圖程序或有效避開模糊地帶的密室作圖法，而且僅限在問題所給的模糊三角形上找回「消失的密室」。我們想要完成的密室有以下 6 種：①內切圓；②內接正方形；③兩種內接半圓弓形；④內接面積最大的矩形；⑤內接三邊中點連線的三角形。

參、名詞界定說明：

- 一、**模糊角**：指一個角在頂角處有了污損，以致於無法確定其頂點位置(如下圖(一))。
- 二、**模糊三角形**：一個三角形的三個內角都是模糊角，以致於無法確定三個內角的頂點位置，此種三角形稱為「**模糊三角形**」(本文皆視為 $\triangle STU$)，但是三角形內部可能還有零星的污損(稱為「**模糊地帶**」，如下圖(二))。



圖(一)



圖(二)

肆、研究過程：

- 一、首先設法找出更多的模糊角分角線作圖法，希望面臨不同模糊狀況時，有更多機會可以確定出模糊角的分角線位置。

經過我們的集思廣益，絞盡腦汁想出的方法共有 7 種：

(一)〔已知〕一個模糊角 $\angle S$ ，它兩邊的線為 L 、 M 。

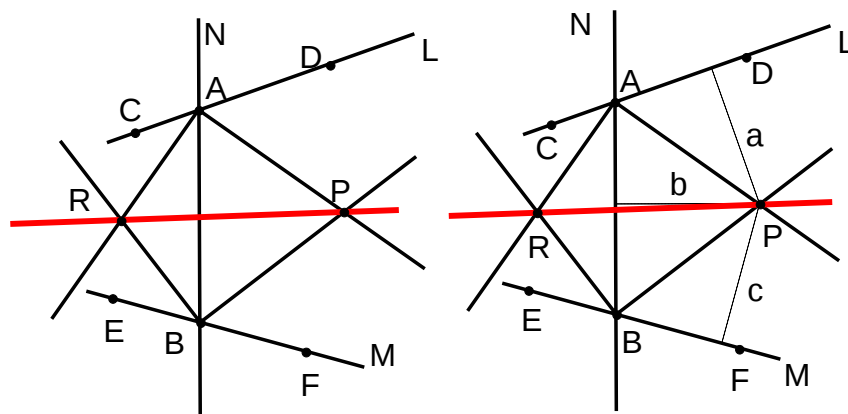
〔求作〕 $\angle S$ 的分角線。

〔作法 1〕(1)作任一截線 N 分別交 L 、 M 於 A 、 B 。

(2)分別作 $\angle DAB$ 、 $\angle FBA$ 之分角線交於 P 。

(3)分別作 $\angle CAB$ 、 $\angle EBA$ 之分角線交於 R 。

(4)連 $\overleftrightarrow{PR}$ ，則 $\overleftrightarrow{PR}$ 即為 $\angle S$ 的分角線。



〔作法 1 之證明〕

(1)由 P 分別向 L 、 N 、 M
作垂直線段，而令其長度
為 a 、 b 、 c 。

(2) $\because \overline{PA}$ 平分 $\angle DAB \quad \therefore a = b$
又 $\overline{PB}$ 平分 $\angle FBA \quad \therefore b = c$
 $\Rightarrow a = c$
 $\therefore P$ 也在 $\angle S$ 的分角線上。

(3)同理可證： R 也在 $\angle S$ 的分角線上。

(4)故 $\overleftrightarrow{PR}$ 為 $\angle S$ 的分角線。

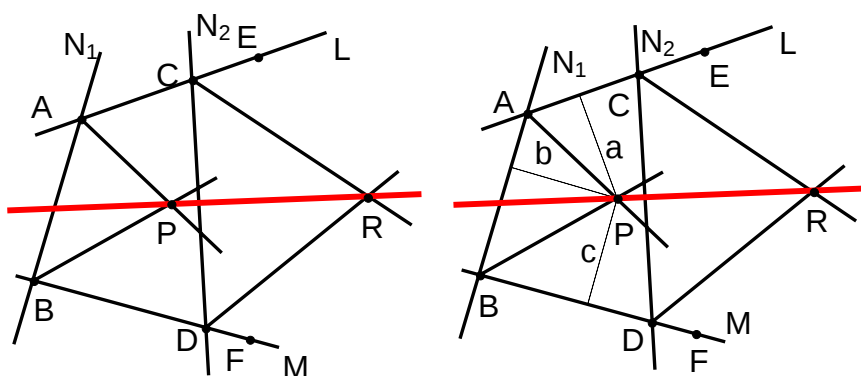
作法 1 是應用：
若一個角內部
某個點到此角
的兩邊等距
離，則此點必在
這個角的分角
線上。

〔作法 2〕(1)作任意兩條截線 N_1 、 N_2 ，且分別交 L 、 M 於 A 、 C 和
 B 、 D 。

(2)分別作 $\angle EAB$ 、 $\angle FBA$ 之分角線交於 P 。

(3)分別作 $\angle ECD$ 、 $\angle FDC$ 之分角線交於 R 。

(4)作 $\overleftrightarrow{PR}$ ，則 $\overleftrightarrow{PR}$ 即為 $\angle S$ 的分角線。



〔作法 2 之證明〕

- (1) 由 P 分別向 L 、 N_1 、 M 作垂直線段，而令其長度為 a 、 b 、 c 。

(2) $\because \overline{PA}$ 平分 $\angle EAB \quad \therefore a = b$

又 $\overline{PB}$ 平分 $\angle FBA \quad \therefore b = c$

$\Rightarrow a = c$

$\therefore P$ 也在 $\angle S$ 的分角線上。

- (3) 同理可證： R 也在 $\angle S$ 的分角線上。

- (4) 故 $\overleftrightarrow{PR}$ 為 $\angle S$ 的分角線。

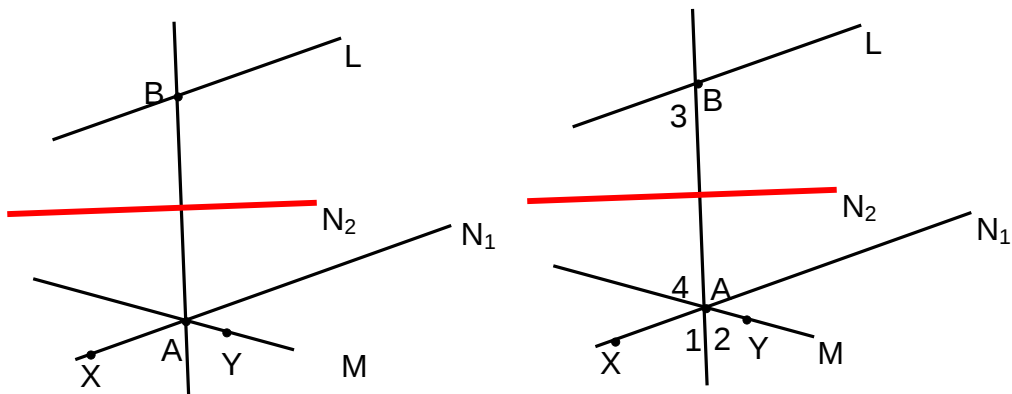
作法 2 應用到的數學性質與作法 1 相同。

- 〔作法 3〕(1) 在直線 M 上任取一點 A 。

- (2) 過 A 作直線 $N_1 \parallel L$ 。

- (3) 作 $\angle XAY$ 之分角線 $\overleftrightarrow{AB}$ 交 L 於 B 。

- (4) 作 $\overline{AB}$ 之中垂線 N_2 ，則 N_2 即為 $\angle S$ 的分角線。

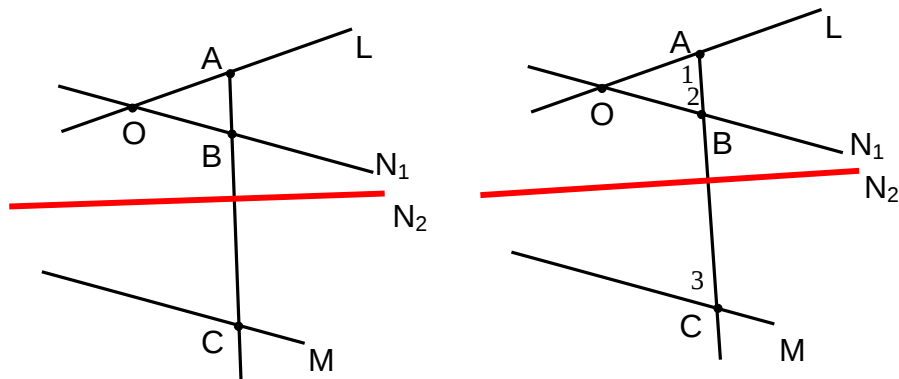


〔作法 3 之證明〕

- (1) $\because N_1 \parallel L \quad \therefore \angle 1 = \angle 3$
(2) $\because \overleftrightarrow{AB}$ 平分 $\angle XAY \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$
又 $\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow \angle 1 = \angle 4$
(3) 由(1)、(2)得 $\angle 3 = \angle 4$
即 $\triangle SAB$ 為等腰三角形，
 $\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$ 的中垂線會平分 $\angle S$ 。
故 N_2 即為 $\angle S$ 的分角線。

作法 3 是應用一個等腰三角形的底邊中垂線會平分其頂角的性質。

- 〔作法 4〕(1) 在直線 L 上取兩點 O 、 A 。
(2) 過 O 作直線 $N_1 \parallel M$ 。
(3) 以 O 為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑，畫弧交直線 N_1 於 B 點。
(4) 作 $\overleftrightarrow{AB}$ 交直線 M 於 C 。
(5) 作 $\overleftrightarrow{AC}$ 之中垂線 N_2 ，則直線 N_2 即為 $\angle S$ 的分角線。

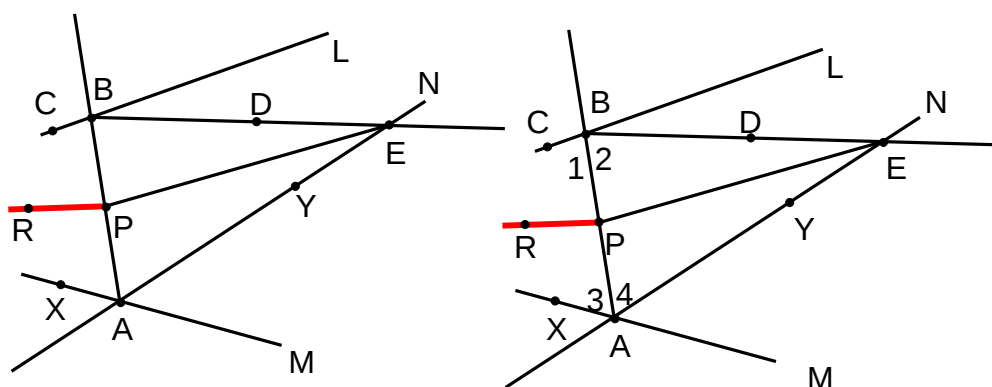


〔作法 4 之證明〕

- $\because N_1 \parallel M \quad \therefore \angle 2 = \angle 3$ (同位角)
 $\because \overline{OA} = \overline{OB} \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$
即 $\triangle SAC$ 為等腰三角形
 $\therefore \overleftrightarrow{AC}$ 之中垂線平分 $\angle S$ 。
故 $\overleftrightarrow{AC}$ 為 $\angle S$ 的分角線。

作法 4 應用到的數學性質與作法 3 相同。

- 〔作法 5〕(1)在直線 M 上任取一點 A 。
 (2)過 A 作任一直線 N 。
 (3)作 $\angle XAY$ 之分角線 $\overrightarrow{AB}$ 交 L 於 B 。
 (4)作 $\angle DBA = \angle CBA$ ，且 $\overrightarrow{BD}$ 交直線 N 於 E 。
 (5)作 $\angle BEA$ 之分角線 $\overrightarrow{EP}$ 交 $\overline{AB}$ 於 P 。
 (6)作 $\overrightarrow{PR}$ 且使 $\angle RPA = \angle APE$ ，則 $\overrightarrow{PR}$ 為 $\angle S$ 的分角線。



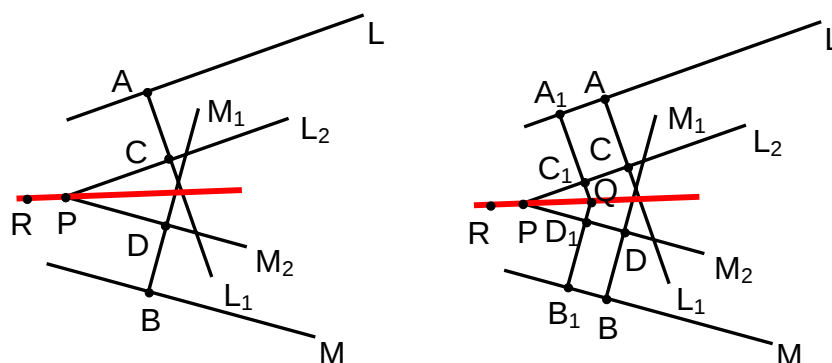
〔作法 5 之證明〕

- (1) $\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \overline{AB} = \overline{AB}$
 $\therefore \triangle ABS \cong \triangle ABE$ (ASA)
 即四邊形 $SAEB$ 為一個以
 $\overline{AB}$ 為對稱軸之線對稱圖形。
 (2) $\because \angle RPA = \angle EPA$ ，
 且 $\overline{PE}$ 平分 $\angle BEA$
 $\therefore \overline{PR}$ 平分 $\angle BSA$
 故 $\overrightarrow{PR}$ 為 $\angle S$ 的分角線。

作法 5 是應用線對稱圖形在對稱軸兩側的圖形互為鏡射的性質。

- 〔作法 6〕(1)分別在直線 L 、 M 上取 A 、 B 兩點。
 (2)過 A 作 $L_1 \perp L$ ，過 B 作 $M_1 \perp M$ 。
 (3)分別在 L_1 上取 C ，在 M_1 上取 D ，且使 $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。
 (4)分別過 C 、 D 作直線 $L_2 \parallel L$ ， $M_2 \parallel M$ ，且設 L_2 、 M_2 交於 P 。

(5)作 $\angle P$ 之分角線 $\overrightarrow{PR}$ ，則 $\overrightarrow{PR}$ 即為 $\angle S$ 之分角線。

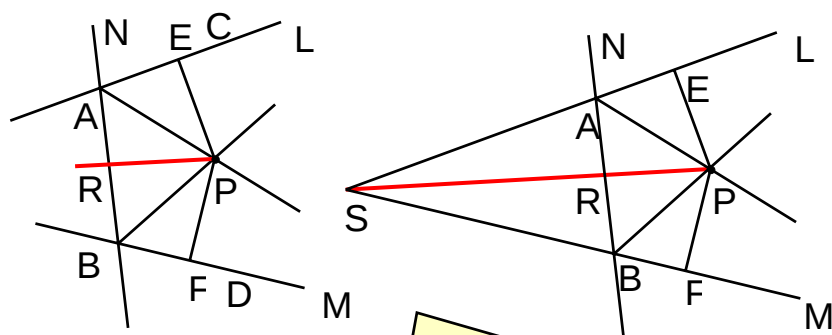


〔作法 6 之證明〕

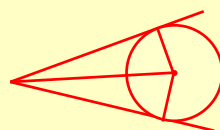
- (1)任取 $\overrightarrow{PR}$ 上一點 Q 。
- (2)自 Q 作直線 L_2 的垂線，
分別交 L 、 L_2 於 A_1 、 C_1 。
- (3)自 Q 作直線 M_2 的垂線，
分別交 M 、 M_2 於 B_1 、 D_1 。
- (4) $\because \overrightarrow{PR}$ 為 $\angle P$ 之分角線 $\therefore \overline{QC_1} = \overline{QD_1}$ 。
- (5) $\because AA_1C_1C$ 、 BB_1D_1D 為矩形
 $\therefore \overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ ， $\overline{B_1D_1} = \overline{BD}$
又 $\overline{AC} = \overline{BD} \therefore \overline{A_1C_1} = \overline{B_1D_1}$ 。
- (6) $\overline{QC_1} + \overline{A_1C_1} = \overline{QD_1} + \overline{B_1D_1} \Rightarrow \overline{QA_1} = \overline{QB_1}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{PR}$ 上一點 Q 會在 $\angle S$ 之分角線上。
故 $\overrightarrow{PR}$ 為 $\angle S$ 之分角線。

作法 6 應用
到的數學性
質與作法 1
相同。

- 〔作法 7〕
- (1)作任一截線 N 分別交 L 、 M 於 A 、 B 。
 - (2)分別作 $\angle CAB$ 、 $\angle DBA$ 之分角線交於 P 。
 - (3)自 P 作 L 與 M 的垂直線段 $\overline{PE} \perp L$ ， $\overline{PF} \perp M$ ，垂足分別為 E 和 F 。
 - (4)作 $\angle EPF$ 的分角線交 $\overline{AB}$ 於 R ，則 $\overrightarrow{PR}$ 即為 $\angle S$ 的分角線。



作法 7 的靈感來自以下的圖形性質：



〔作法 7 之證明〕

(1) 連 $\overline{SP}$ 。

(2) 因為 $\angle SEP = \angle SFP = 90^\circ$ ， $\overline{PE} = \overline{PF}$ (理由同作法 1)

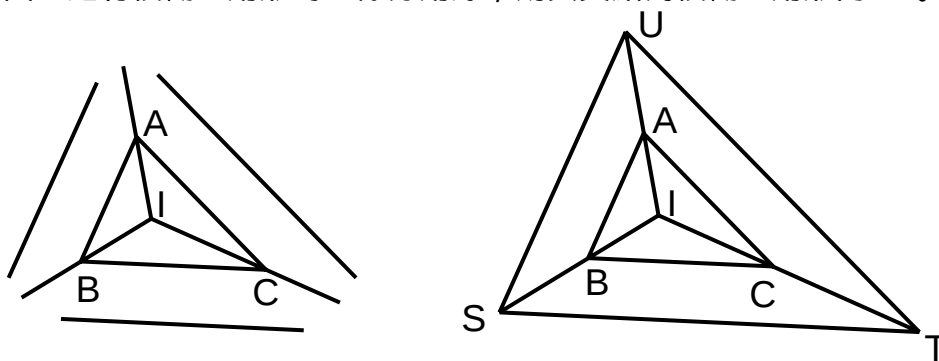
且 $\overline{SP} = \overline{SP}$ 所以 $\triangle SEP \cong \triangle SFP$ (RHS)

$\Rightarrow \angle EPS = \angle FPS \Rightarrow \overline{PS}$ 平分 $\angle EPF$ 。

又 $\overline{PR}$ 平分 $\angle EPF$ 故 $\overline{PR}$ 為 $\angle S$ 的分角線。

二、解決模糊角的分角線作圖問題，我們接著要解決：如何重建「消失的密室」？

(一) 下圖左邊有模糊三角形的三條分角線，則其交點為模糊三角形內心 I 。



在其中兩條分角線分別取 A 、 B 兩點，且使 $\overline{AB}$ 平行於模糊三角形的一邊，作 $\overline{AC}$ 平行於模糊三角形的另外一邊，再連 $\overline{BC}$ 。

〔求證〕 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心。

〔說明〕 如上圖右邊 $\because \overline{AB} \parallel \overline{SU} \therefore \overline{BI} : \overline{BS} = \overline{AI} : \overline{AU}$

又 $\overline{AC} \parallel \overline{TU} \therefore \overline{AI} : \overline{AU} = \overline{CI} : \overline{CT}$

$$\Rightarrow \overline{BI} : \overline{BS} = \overline{CI} : \overline{CT}$$

$\therefore \overline{BC} \parallel \overline{ST}$ 故可推得 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心。

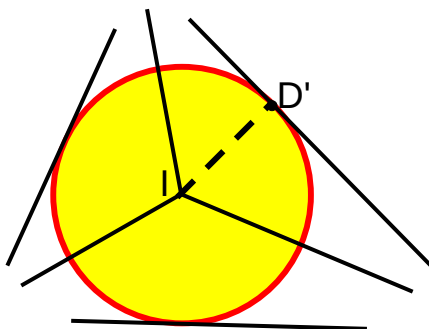
(二)現在我們只要利用模糊三角形的內心，或者先作出 $\triangle STU$ 的分身 $\triangle ABC$ 上的密室，再利用投射和相似對應的觀念，就可以重現模糊三角形上消失的密室。

1.密室之一：內切圓。

〔作法〕(1)作模糊三角形的內心 I 。

(2)作 $\overline{ID'} \perp \overline{ST}$ ，垂足令為 D' 。

(3)以 I 為圓心， $\overline{ID'}$ 為半徑作圓 I ，圓 I 即為所求。

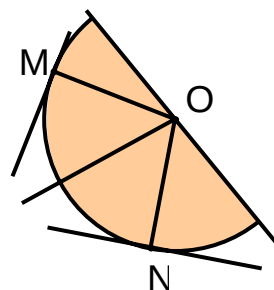


2.密室之二：半圓弓形(直徑在模糊三角形的一邊上，半圓與另兩邊相切)。

〔作法〕(1)作一個模糊角(另外兩個角皆不是鈍角)的分角線交其對邊於 O 。

(2)過 O 作此模糊角兩邊的垂直線段 $\overline{OM}$ 和 $\overline{ON}$ ， M 、 N 為兩個垂足。

(3)以 O 為圓心， $\overline{OM}$ 為半徑所作的半圓弓形(直徑在 O 點所在的邊上)即為所求。



3.密室之三：內接正方形。

〔第一階段〕建立 $\triangle ABC$ 的內接正方形。

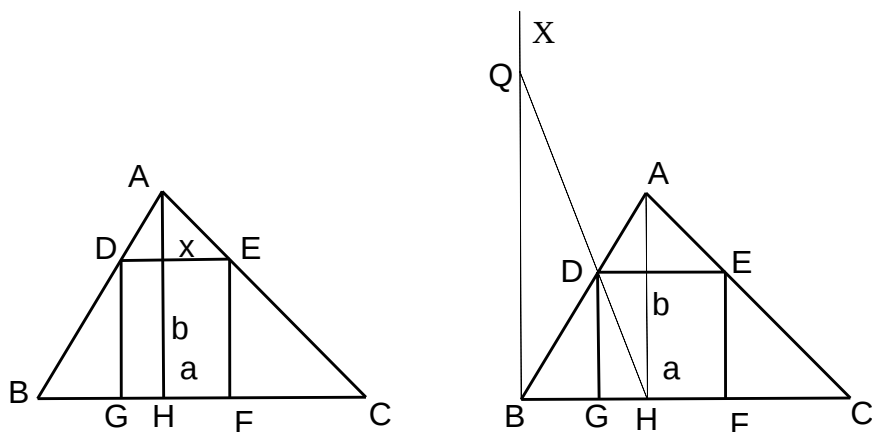
〔分析〕如圖中，設 $DEFG$ 為 $\triangle ABC$ 的內接正方形，

若 $\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，且令 $\overline{AH} = b$ ， $\overline{BC} = a$

設 $\overline{DE} = x$ $\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow bx = ab - ax$$

$$\Rightarrow (a+b)x = ab \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}。$$



〔作法〕(1)如上圖右，作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 H 。

(2)過 B 作 $\overline{BX} \perp \overline{BC}$ 。

(3)在 $\overline{BX}$ 上取 Q 點，且使 $\overline{BQ} = \overline{BC}$ 。

(4)連 $\overline{HQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D 。

(5)作 $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 G 。

(6)以 $\overline{DG}$ 為邊作內接矩形 $DEFG$ ，則矩形 $DEFG$ 即為所求。

〔證明〕 $\because \overline{BQ} \parallel \overline{DG} \parallel \overline{AH}$

$$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BH}} \dots\dots ① \quad \frac{\overline{DG}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BH}} \dots\dots ②$$

$$①+② \Rightarrow \frac{\overline{DG}}{a} + \frac{\overline{DG}}{b} = 1$$

$$\Rightarrow (a+b)\overline{DG} = ab \Rightarrow \overline{DG} = \frac{ab}{a+b}$$

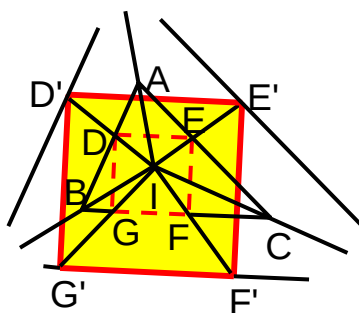
故正方形 $DEFG$ 合於所求。

〔第二階段〕作模糊三角形的內接正方形。

〔作法〕(1)作 $\overrightarrow{ID}$ 、 $\overrightarrow{IE}$ 、 $\overrightarrow{IF}$ 、 $\overrightarrow{IG}$ 分別交模糊三角形之三邊於 D' 、 E' 、 F' 、 G' 。

(2)連 $\overline{D'E'}$ 、 $\overline{E'F'}$ 、 $\overline{D'G'}$ 。

(3)四邊形 $D'E'F'G'$ 即為所求之內接正方形。



4.密室之四：半圓弓形(直徑兩端點在模糊三角形兩邊上，半圓與第三邊相切)。

〔第一階段〕建立 $\triangle ABC$ 的內接半圓弓形。

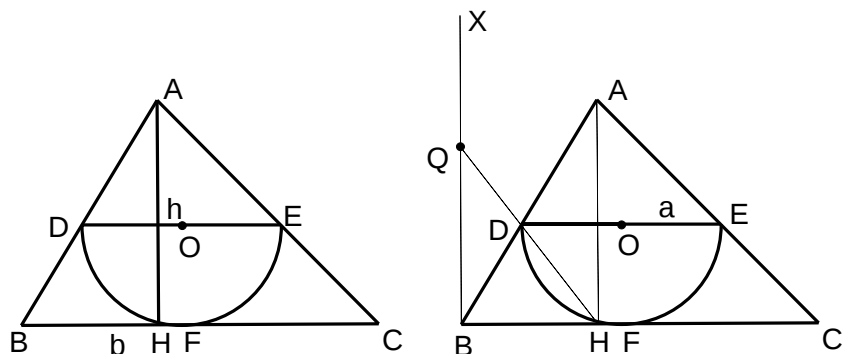
〔分析〕如下圖左， $\overline{DE}$ 為半圓 O 的直徑，且半圓切 $\overline{BC}$ 於 F ，

$\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，且令 $\overline{AH} = h$ ， $\overline{OD} = a$ ， $\overline{BC} = b$

$$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}, \frac{h}{h-a} = \frac{b}{2a}$$

$$hb - ab = 2ah, 2ah + ab = hb, a(2h + b) = hb$$

$$a = \frac{hb}{2h + b}, \frac{1}{a} = \frac{2h + b}{bh} = \frac{2}{b} + \frac{1}{h}.$$



〔作法〕(1)作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ，且交 $\overline{BC}$ 於 H 。

(2)過 B 作 $\overline{BX} \perp \overline{BC}$ 。

(3)在 $\overline{BX}$ 取 Q 點，使 $\overline{BQ} = \frac{b}{2}$ 。

(4)連 $\overline{HQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D ，作 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，交 $\overline{AC}$ 於 E 。

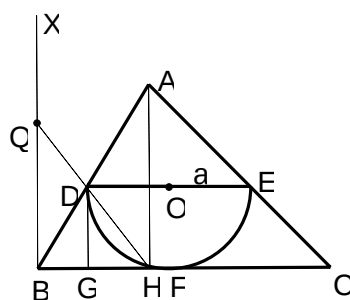
(5)以 $\overline{DE}$ 為直徑，作半圓，則半圓弓形即為所求。

〔證明〕(1)作 $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 G 。

(2) $\because \overline{BQ} \parallel \overline{DG} \parallel \overline{AH}$

$$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BH}} \dots\dots ①$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{BH}} \dots\dots ②$$



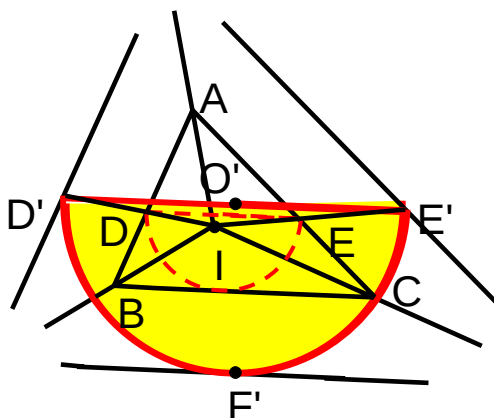
$$①+② \Rightarrow \frac{\overline{DG}}{\frac{b}{2}} + \frac{\overline{DG}}{h} = 1 \dots\dots ③$$

$$③ \div \overline{DG} \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{1}{h} = \frac{1}{\overline{DG}} \Rightarrow \overline{DG} = a = \overline{OD}$$

$\therefore$ 以 $\overline{DE}$ 為直徑所作的半圓會切 $\overline{BC}$ 於 F ,
故半圓弓形合於所求。

〔第二階段〕作模糊三角形的內接半圓弓形。

- 〔作法〕 (1)作 $\overline{ID}$ 、 $\overline{IE}$ 、 $\overline{IF}$ 分別交模糊三角形之三邊於 D' 、 E' 。
(2)連 $\overline{D'E'}$ 。
(3)以 $\overline{D'E'}$ 為直徑作半圓切模糊三角形的一邊於 F' 。
(4)半圓 O' 與 $\overline{D'E'}$ 組成的圖形，即為所求之內接半圓弓形。



5.密室之五：內接面積最大的矩形。

〔第一階段〕建立 $\triangle ABC$ 的內接面積最大的矩形。

〔分析〕如下圖左，設 $DEFG$ 為 $\triangle ABC$ 的內接矩形，若 $\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，且令 $\overline{AH} = b$ ， $\overline{BC} = a$
設 $\overline{DE} = x$ $\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$

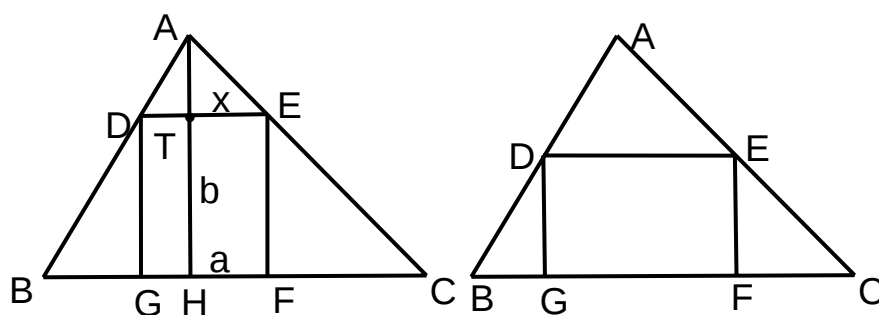
$$\therefore \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AH}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\overline{AT}}{b}$$

$$\Rightarrow \overline{AT} = \frac{bx}{a} \Rightarrow \overline{DG} = b - \frac{bx}{a}$$

$$\begin{aligned} DEFG \text{ 面積} &= x(b - \frac{b}{a}x) = -\frac{b}{a}x^2 + bx \\ &= -\frac{b}{a}\left[x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] + \frac{ab}{4} \\ &= -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab}{4} \leq \frac{ab}{4} \end{aligned}$$

$\therefore$ 當 $x = \frac{a}{2}$ 時， $DEFG$ 的面積最大。

即 D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 中點時，可得到面積最大的內接矩形。



〔作法〕(1)取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 中點分別為 D 、 E 。

(2)連 $\overline{DE}$ 。

(3)作 $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G ，作 $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 。

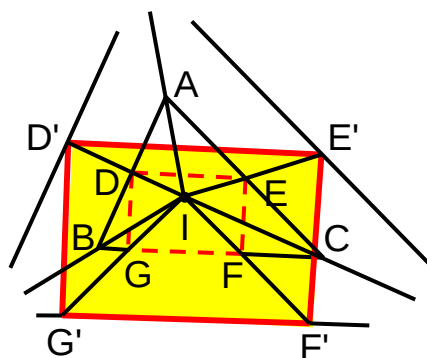
(4)矩形 $DEFG$ 即為 $\triangle ABC$ 內接面積最大的矩形。

〔第二階段〕作模糊三角形的內接面積最大的矩形。

〔作法〕(1)作 $\overrightarrow{ID}$ 、 $\overrightarrow{IE}$ 、 $\overrightarrow{IF}$ 、 $\overrightarrow{IG}$ 分別交模糊三角形之三邊於 D' 、 E' 、 F' 、 G' 。

(2)連 $\overline{D'E'}$ 、 $\overline{E'F'}$ 、 $\overline{D'G'}$ 。

(3)矩形 $D'E'F'G'$ 即為所求之內接面積最大的矩形。



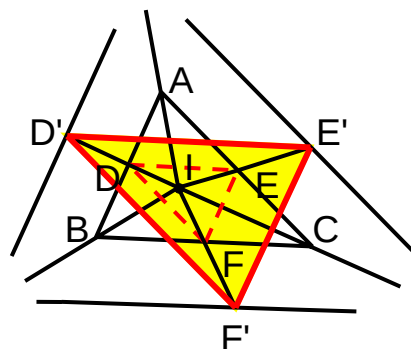
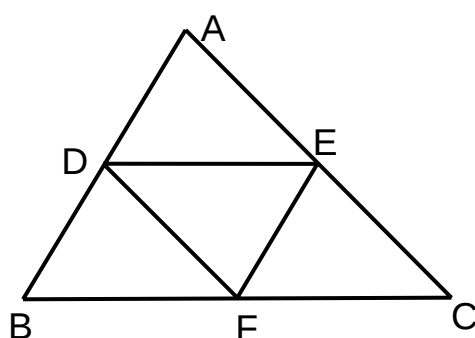
6. 密室之六：內接三邊中點連線的三角形。

〔第一階段〕建立 $\triangle ABC$ 內接三邊中點連線的三角形。

〔作法〕(1)分別取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點 D 、 E 、 F 。

(2)連 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{DF}$ 。

(3)則 $\triangle DEF$ 即為 $\triangle ABC$ 內接三邊中點連線的三角形。



〔第二階段〕作模糊三角形之內接三邊中點連線的三角形。

〔作法〕(1)作 $\overrightarrow{ID}$ 、 $\overrightarrow{IE}$ 、 $\overrightarrow{IF}$ 分別交模糊三角形之三邊於 D' 、 E' 、 F' 。

(2)連 $\overline{D'E'}$ 、 $\overline{E'F'}$ 、 $\overline{D'F'}$ 。

(3) $\triangle D'E'F'$ 即為所求模糊三角形之內接三邊中點連線的三角形。

三、但是對於內心位置剛好受到污損的模糊三角形而言，以上的大多數作法就不大管用了。於是我們考慮作出模糊角內任一點指向模糊角頂點的直線。

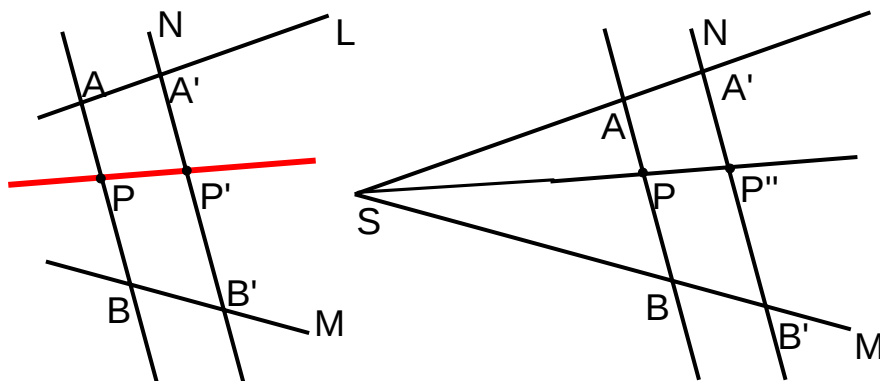
經過我們的分工合作，絞盡腦汁想出的方法也是有 7 種：

〔已知〕一個模糊角 $\angle S$ ，它的兩邊為 L 、 M ，而 P 為 $\angle S$ 內的一點。

〔求作〕 $\overrightarrow{PS}$ 。

〔作法 1〕(1)過 P 作一直線分別交 L 與 M 於 A 、 B 。

- (2)作直線 N 平行 $\overline{AB}$ ，且分別交 L 與 M 於 A' 、 B' 。
 (3)在 $\overline{A'B'}$ 上取 P' ，使得 $\overline{A'P'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB}$ 。
 (4)作 $\overrightarrow{PP'}$ ，則 $\overrightarrow{PP'}$ 即為 $\overrightarrow{PS}$ 。



〔作法 1 之證明〕 (1)作 $\overrightarrow{PS}$ 交 $\overline{A'B'}$ 於 P'' 。

$$(2) \because \overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$$

$$\therefore \frac{\overline{AP''}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{SP''}}{\overline{SP}} \dots\dots ①$$

$$\frac{\overline{P''B'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{SP''}}{\overline{SP}} \dots\dots ②$$

$$\text{由①、②} \Rightarrow \frac{\overline{AP''}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{P''B'}}{\overline{PB}}$$

$$\Rightarrow \overline{AP''} : \overline{P''B'} = \overline{AP} : \overline{PB}$$

$$(3) \because \overline{AP'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB}$$

$$\therefore \overline{AP''} : \overline{P''B'} = \overline{AP'} : \overline{P'B'}$$

$$\therefore P'' \text{ 即為 } P' \text{，故 } \overrightarrow{PP''} \text{ 即為 } \overrightarrow{PS}。$$

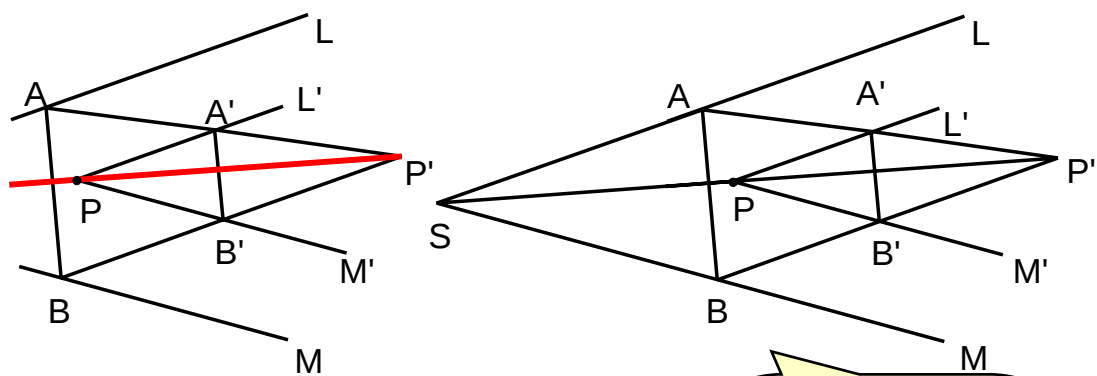
作法 1 主要是應用相似三角形的對應邊會成比例的性質。

〔作法 2〕 (1)過 P 作直線 $L' \parallel L$ ，作直線 $M' \parallel M$ 。

(2)分別在 L' 與 M' 上任取 A' 、 B' ，連 $\overline{A'B'}$ 。

(3)作一直線 $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ，且分別交 L 與 M 於 A 、 B 。

(4)連 $\overrightarrow{AA'}$ 與 $\overrightarrow{BB'}$ 交於 P' ，再作 $\overrightarrow{PP'}$ ，則 $\overrightarrow{PP'}$ 即為 $\overrightarrow{PS}$ 。



作法 2 主要也是應用到相似形的觀念。

〔作法 2 之證明〕 $\because L' \parallel L, M' \parallel M$ 又 $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

$$\therefore \triangle ASB \sim \triangle A'PB'$$

同理 $\triangle AP'B \sim \triangle A'P'B'$ 。

$\Rightarrow$ 四邊形 $ASB'P' \sim$ 四邊形 $A'PB'P'$ 。

$\Rightarrow P'$ 是兩個相似形的對應點。

$\Rightarrow S$ 和 P 也是兩個相似形的對應點，故 $\overleftrightarrow{PP'}$ 即為 $\overleftrightarrow{PS}$ 。

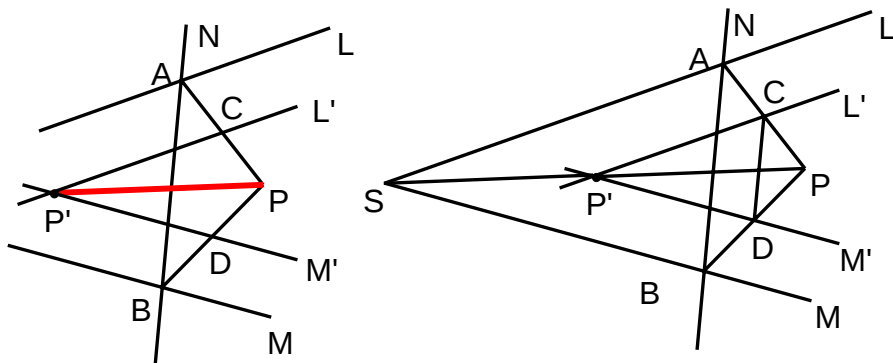
〔作法 3〕 (1) 作直線 N ，分別交 L, M 於 A, B 。

(2) 連 $\overline{AP}, \overline{BP}$ 。

(3) 分別取 $\overline{AP}, \overline{BP}$ 的中點 C, D 。

(4) 過 C, D 分別作直線 $L' \parallel L, M' \parallel M$ ，且 L', M' 交於 P' 。

(5) 連 $\overline{PP'}$ ，則 $\overleftrightarrow{PP'}$ 即為 $\overleftrightarrow{PS}$ 。



〔作法 3 之證明〕 (1) 連 $\overline{CD}$ 。

(2) $\because L' // L, M' // M$, 又 $\overline{CD} // \overline{AB}$

$\Rightarrow \triangle CP'D \sim \triangle ASB, \triangle CPD \sim \triangle APB$

$\Rightarrow$ 四邊形 $PASB \sim$ 四邊形 $PCP'D$ 。

$\therefore P$ 是兩個相似形的對應點。

$\therefore P', S$ 也是兩個相似形的對應點。

$\therefore$ 故 $\overrightarrow{PP'}$ 即為 $\overrightarrow{PS}$ 。

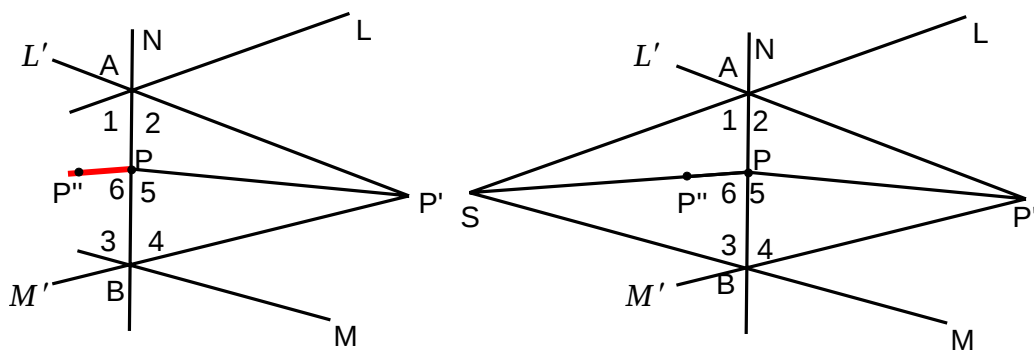
作法 3 應用到的數學性質與作法 2 相同。

〔作法 4〕 (1) 過 P 作直線 N 分別交 L, M 於 A, B 。

(2) 過 A 作直線 L' , 使 $\angle 2 = \angle 1$, 過 B 作直線 M' , 且使 $\angle 4 = \angle 3$ 。

(3) 設 L' 與 M' 交於 P' , 連 $\overline{PP'}$ 。

(4) 過 P 作 $\overline{PP''}$, 且使 $\angle 6 = \angle 5$, 則 $\overline{PP''}$ 即為 $\overline{PS}$ 。



〔作法 4 之證明〕 (1) $\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \overline{AB} = \overline{AB}$ 。

$\therefore \triangle ASB \cong \triangle AP'B$ 。

$\Rightarrow ASBP'$ 即為以 $\overline{AB}$ 為對稱軸的線對稱圖形。

$\Rightarrow \overline{PS}, \overline{PP'}$ 互為鏡射。

(2) $\because \angle 6 = \angle 5 \therefore \overline{PP''}$ 即為 $\overline{PS}$ 。

作法 4 是應用線對稱圖形在對稱軸兩側的圖形互為鏡射的性質。

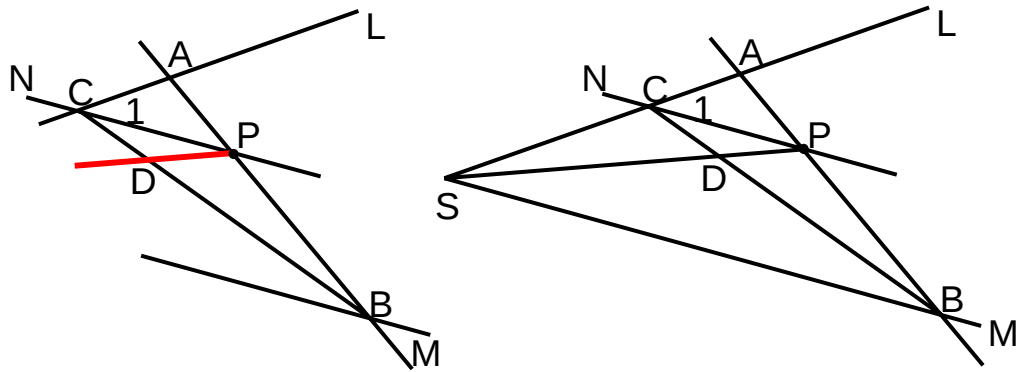
〔作法 5〕 (1) 過 P 作直線 $N // M$, 交直線 L 於 C 。

(2) 過 P 作 $\overline{AB}$, 分別交 L, M 於 A, B , 且使 $\angle NPA = \angle 1$ 。

(3) 連 $\overline{BC}$ 。

(4)過 P 作 $\overrightarrow{PD}$ ，且使 $\angle CPD = \angle PCD$ ，而 $\overrightarrow{PD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 。

(5)則 $\overrightarrow{PD}$ 即為 $\overrightarrow{PS}$ 。



〔作法 5 之證明〕(1) $\because \angle 1 = \angle APC$ ， $N \parallel M$

$$\therefore \angle ASB = \angle ABS$$

$\Rightarrow \triangle ASB$ 為等腰三角形。

$$(2) \because \angle PCB = \angle CPS$$

$$\text{又 } \angle CPD = \angle PCD = \angle PCB$$

$$\therefore \angle CPD = \angle CPS，\text{故 } \overrightarrow{PD} \text{ 即為 } \overrightarrow{PS}。$$

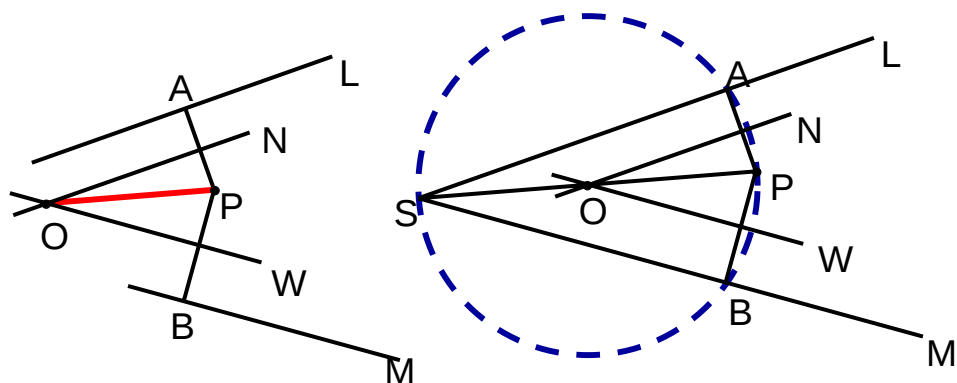
作法 5 是應用等腰三角形的性質以及鏡射的觀念。

〔作法 6〕(1)作 $\overline{PA}$ 垂直 L ，並交直線 L 於 A 。

(2)作 $\overline{PB}$ 垂直 M ，且交直線 M 於 B 。

(3)分別作 $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 之中垂線 N 、 W ，且令直線 N 、 W 交於 O 。

(4) $\overrightarrow{PO}$ 即為 $\overrightarrow{PS}$ 。



作法 6 主要是應用我們所學到數學性質：(1)圓上任一弦的中垂線必通過圓心；(2)一圓的直徑兩端點與圓上其它一點可連成直角三角形。

〔作法 6 之證明〕(1) $\because \angle PAS + \angle PBS = 180^\circ$

$\therefore P、A、S、B$ 共圓 O 。

(2) $\because \angle A = 90^\circ \therefore \overline{PS}$ 為圓 O 的直徑。

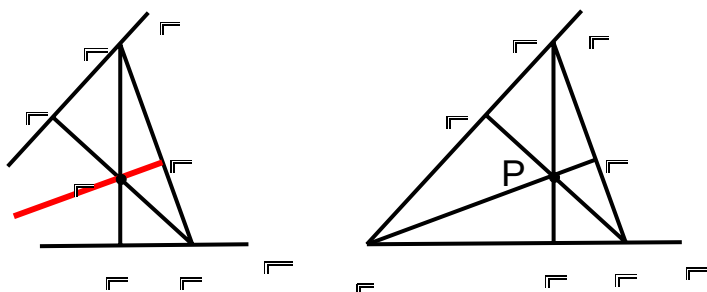
又 $\overline{PO}$ 為半徑 $\therefore \overline{PO}$ 即為 $\overline{PS}$ 。

〔作法 7〕(1) 作 $\overline{PA} \perp L$ 且與 L 交於 A ，且作 $\overline{PA}$ 交直線 M 於 C 點。

(2) 作 $\overline{PB} \perp M$ 且與 M 交於 B ，且作 $\overline{PB}$ 交直線 L 於 D 點。

(3) 連 $\overline{CD}$ 。

(4) 過 P 作 $\overline{PE} \perp \overline{CD}$ 交 $\overline{CD}$ 於 E 點，則 $\overline{PE}$ 即為 $\overline{PS}$ 。



〔作法 7 之證明〕(1) $\because \overline{CA} \perp L, \overline{DB} \perp M$

$\therefore P$ 為 $\triangle SCD$ 的垂心。

(2) 又 $\overline{PE} \perp \overline{CD} \therefore \overline{PE}$ 過 S 點

$\Rightarrow \overline{PE}$ 即為 $\overline{PS}$ 。

作法 7 主要是應用一個三角形三個邊上的高會交於同一點(垂心)。

四、能夠由三角形內部一點，作出此點指向模糊角頂點的直線，就可運用更簡易且不侷限靠內心的作圖法，來完成重建模糊三角形上消失的密室。以下的密室作圖法稱為**關鍵點作圖法**：設法找到相似密室的**關鍵點**指向模糊角頂點的直線，再找到此關鍵點在模糊三角形邊上的對應點，然後運用平行的性質，就可完成密室了。

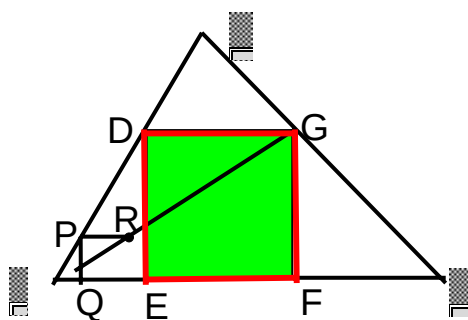
1. 密室之一：內接正方形。

〔已知〕模糊 $\triangle STU$ 。

〔求作〕正方形 $DEFG$ ，使 $\overline{EF}$ 在 $\overline{ST}$ 上， D 在 $\overline{SU}$ 上， G 在 $\overline{UT}$ 上。

〔作法〕(1) 在 $\overline{SU}$ 上取一點 P ，過 P 作 $\overline{PQ} \perp \overline{ST}$ 於 Q 。

(2) 作 $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$ ，且取 $\overline{PR} = \overline{PQ}$ 。



(3)作 $\overrightarrow{SR}$ 交 $\overline{UT}$ 於 G 。

(4)過 G 點作 $\overline{GF} \perp \overline{ST}$ 交 $\overline{ST}$ 於 F 。

(5)過 G 點作 $\overline{GD} \perp \overline{GF}$ ，

交 $\overline{SU}$ 於 D ，過 D 點作

$\overline{DE} \perp \overline{DG}$ 交 $\overline{ST}$ 於 E ，則 $DEFG$ 即為所求。

由以上的內接正方形的作圖可以看出，只要在模糊三角形上，找到如上圖中的關鍵點 R ，並作出其指向模糊三角形頂點 S 的直線（即 $\overrightarrow{RS}$ ），再由 $\overrightarrow{RS}$ 與 $\angle S$ 對邊的交點定出密室的對應點，很快就可以作出密室了。

2.密室之二：內接半圓弓形。

〔已知〕模糊 $\triangle STU$ 。

〔求作〕半圓弓形 DEF ，使半圓弧 DEF 與 $\overline{ST}$ 相切於 F ，直徑 DE 兩端點分別在 $\overline{TU}$ 、 $\overline{SU}$ 上。

〔作法〕(1)在 $\overline{SU}$ 任取一點 P ，過 P 作 $\overline{PQ} \perp \overline{ST}$ 於 Q 。

(2)過 P 作 $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$ ，且使 $\overline{PR} = 2\overline{PQ}$ 。

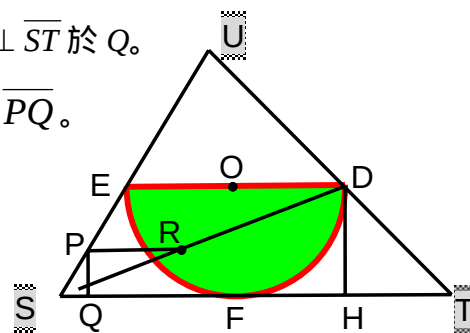
(3)作 $\overrightarrow{SR}$ 交 $\overline{TU}$ 於 D 。

(4)作 $\overline{DH} \perp \overline{ST}$ 交 $\overline{ST}$ 於 H 。

(5)過 D 作 $\overline{DE} \perp \overline{DH}$ 交 $\overline{SU}$ 於 E 。

(6)以 $\overline{DE}$ 為直徑畫半圓 O ，切 $\overline{ST}$ 於 F ，

則半圓 O 與 $\overline{DE}$ 所組成的圖形即為所求。



3.密室之三：內接面積最大的矩形。

〔已知〕模糊 $\triangle STU$ 。

〔求作〕內接面積最大矩形 $DEFG$ ，使 $\overline{EF}$ 在 $\overline{ST}$ 上， D 、 G 分別在 $\overline{SU}$ 、 $\overline{TU}$ 上。

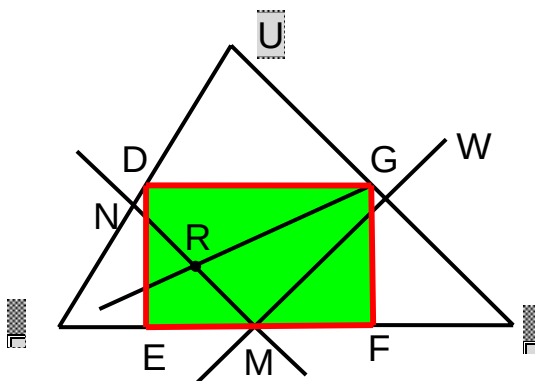
〔作法〕(1)作直線 $W \perp \overline{TU}$ ，且交 $\overline{ST}$ 於 M 。

(2)過 M 作 $\overline{MN} \perp W$ ，且交 $\overline{SU}$ 於 N ，則 $\overline{MN} \parallel \overline{TU}$ 。

(3)取 $\overline{MN}$ 中點 R 。

(4)作 $\overline{SR}$ 交 $\overline{TU}$ 於 G ，過 G 作 $\overline{GF} \perp \overline{ST}$ ，交 $\overline{ST}$ 於 F 。

(5)過 G 作 $\overline{GD} \perp \overline{GF}$ ，交 $\overline{SU}$ 於 D ，過 D 作 $\overline{DE} \perp \overline{DG}$ ，交 $\overline{ST}$ 於 E ，則矩形 $DEFG$ 即為所求。



4. 密室之四：內接三邊中點連線的三角形。

〔已知〕模糊 $\triangle STU$ 。

〔求作〕 $\triangle DEF$ ，且 D 、 E 、 F 分別是 $\overline{SU}$ 、 $\overline{ST}$ 、 $\overline{TU}$ 的中點。

〔作法〕(1)作直線 $W \perp \overline{TU}$ ，且交 $\overline{ST}$ 於 M 。

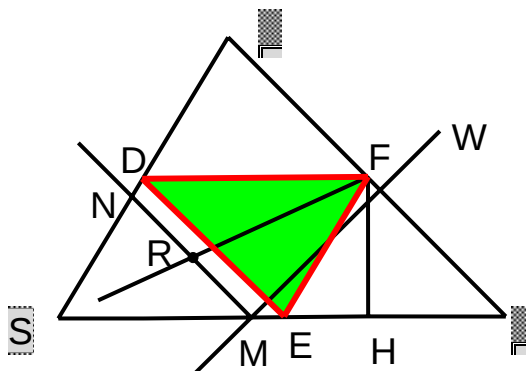
(2)過 M 作 $\overline{MN} \perp W$ ，且交 $\overline{SU}$ 於 N ，則 $\overline{MN} \parallel \overline{TU}$ 。

(3)取 $\overline{MN}$ 中點 R ，作 $\overline{SR}$ 交 $\overline{TU}$ 於 F 。

(4)作 $\overline{FH} \perp \overline{ST}$ 交 $\overline{ST}$ 於 H ，過 F 作 $\overline{DF} \perp \overline{FH}$ 交 $\overline{SU}$ 於 D 。

(5)過 F 作 $\overline{EF}$ 交 $\overline{ST}$ 於 E ，且使 $\angle DFE = \angle UDF \Rightarrow \overline{EF} \parallel \overline{SU}$ 。

(6)連 $\overline{DE}$ ，則 $\triangle DEF$ 即為所求。



伍、討論：

以上我們所探討出的各種密室作圖法，雖然都是值得參考且實用的作法，但是由於我們是把作圖環境考慮在模糊的條件之下，因此我們想到：是否有「關鍵密室」，可以藉由它使得其它密室與模糊三角形的交點更有效率的被找出來？

有的這種想法後，我們才想到運用「三邊中點連線的三角形」(以下稱它為「關鍵密室」)，理由是這個三角形與另外三個被分割出的三角形全等，而且它與原模糊三角形是邊長為 1 比 2 的相似三角形，而且我們也經由「大力思索」而證明出一個模糊三角形的內心必在其關鍵密室內部，因此只要關鍵密室內部不觸及任何模糊地帶，就可以其內部為相似密室的作圖根據地，再依比例找到模糊三角形邊上的密室交點了。我們將此作圖法稱為「關鍵密室作圖法」，它的延伸作圖的觀念與作法將是一個可以有效迴避模糊地帶的密室作圖法。

[已知]如右圖， $\triangle XYZ$ 的三邊中點為 D 、 E 、 F 。

[求證] $\triangle XYZ$ 的內切圓圓心 I 必在 $\triangle DEF$ 內部。

[證明]作 $\overline{XH} \perp \overline{YZ}$ 垂足為 H 。若設內切圓半徑為 r 。

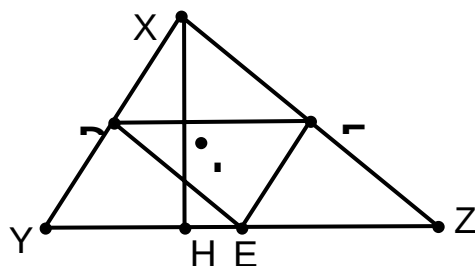
$$\therefore \frac{1}{2}(\overline{XY} + \overline{XZ} + \overline{YZ}) \times r = \frac{1}{2} \times \overline{YZ} \times \overline{XH}$$

$$\therefore \overline{YZ} \times \overline{XH} > (\overline{YZ} + \overline{YZ}) \times r$$

$$2r < \overline{XH} \Rightarrow r < \frac{1}{2} \overline{XH}$$

由此可推得 I 點不在 $\triangle XDF$ 邊上或內部。

同理 I 點也不在 $\triangle YDE$ 和 $\triangle ZEF$ 邊上或內部，故 I 點必在 $\triangle DEF$ 內部。



以下我們就以完成模糊三角形的內切圓及內接正方形這兩個密室的作圖過程作說明：

(一)先以關鍵點的觀念，完成模糊三角形上的關鍵密室作圖(作法如上頁的密室之四)。

【如下頁圖(一)中的 $\triangle DEF$ 】

(二)完成關鍵密室的兩個內角平分線，並確定分角線與對邊的交點。

【如下頁圖(二)中的 $\triangle DEF$ 與兩內角平分線 $\overline{QE}$ 、 $\overline{FR}$ 】

(三)利用關鍵密室與另外三個被分割的三角形會全等的性質，可以作出模糊三角形的兩條分角線而確定出內心的位置，只要再確定半徑長($\triangle DEF$ 內切圓半徑的 2 倍長)就可作出內切圓這個密室了。

【如下頁圖(三)中取 $\overline{DK} = \overline{FQ}$ ，並作 $\angle FKM = \angle FQE$ 使得 $\overline{KM} \parallel \overline{EQ}$ ，可推得 $\overline{KM}$ 為

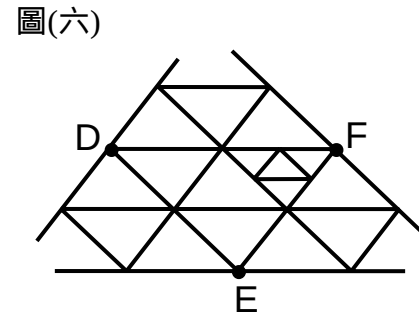
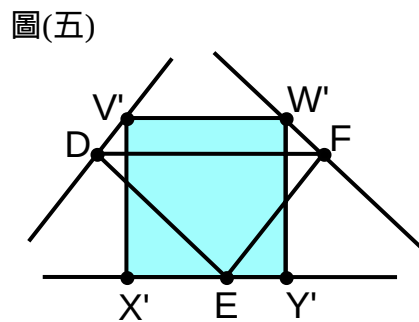
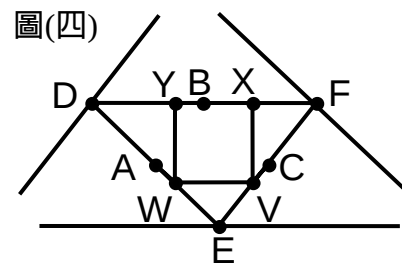
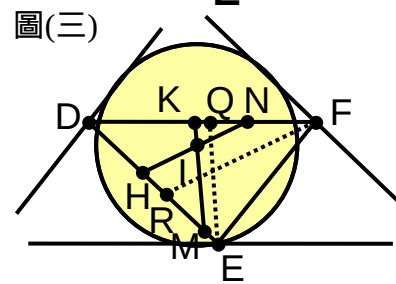
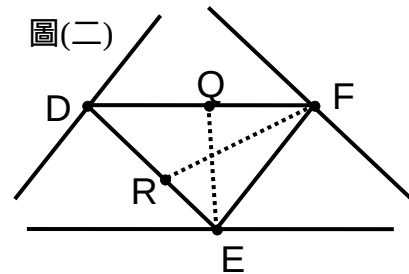
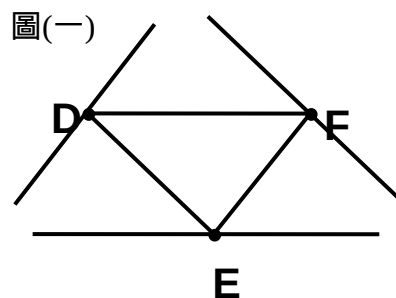
模糊角 $\angle U$ 的分角線，同樣的作法再作 $\angle S$ 的分角線 $\overleftrightarrow{HN}$ ，就可找到模糊三角形的內心 I 。】

(四)作出關鍵密室的三邊中點與內接正方形。

【如下頁圖(四)中的 A 、 B 、 C 三點與內接正方形 $XYWV$ 。】

(五)經由作圖(四)中取出關鍵密室的各邊中點與內接正方形的頂點間的距離，並在模糊三角形的邊上找到內接正方形的頂點，密室就不難完成了。

【如下頁圖(五)取 $\overline{DV'} = 2\overline{CV}$ ， $\overline{FW'} = 2\overline{AW}$ ， $\overline{XE} = 2\overline{XB}$ ， $\overline{YE} = 2\overline{YC}$ ，並作 $X'Y'W'V'$ 。】

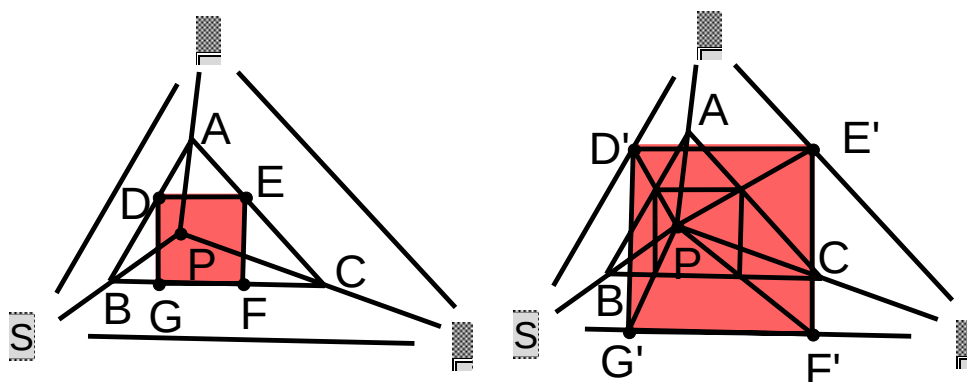


如果將「關鍵密室作圖法」的觀念延伸(如上圖(六))，也就是只要往關鍵密室更下層、更合適的「三邊中點連線的三角形」作圖，直到有一個「三邊中點連線的三角形」(愈大愈好)的內部完全不觸及模糊地帶，再以其內部為相似密室的作圖根據地，並如同之前內切圓與內接正方形的作圖方式，相信只要掌握正確的比例，理論上它是一種高成功率密室作圖法。

陸、結論：

- 一、我們只要在模糊三角形內部找一適當的點(包含內心)，作出此點指向三個模糊角頂點的三條直線，並利用平行的性質，先在模糊三角形內部作一個相似三角形，再利用投射與相似對應的觀念，就可以作出密室了。

如下圖示，假設 P 為模糊 $\triangle STU$ 內部的一點，首先作出 P 點指向三個模糊角頂點的直線，並作 $\overline{AB} \parallel \overline{SU}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{ST}$ (則 $\overline{AC} \parallel \overline{TU}$)，接著作出 $\triangle ABC$ 的內接正方形 $DEFG$ ，然後分別作 $\overline{PD}$ 、 $\overline{PE}$ 、 $\overline{PF}$ 、 $\overline{PG}$ 交 $\triangle STU$ 的三邊於 D' 、 E' 、 F' 、 G' ，則 $\triangle STU$ 的密室正方形 $D'E'F'G'$ 就完成了。



- 二、我們進一步發現：利用「關鍵點作圖法」先找出相似密室的關鍵點，作出此點指向模糊三角形某個頂點的直線，並找到此關鍵點在模糊三角形邊上的對應點，再運用平行的性質作出模糊三角形的密室，是一種較簡單的密室作圖法。
- 三、我們研究以內心或其它特定点而作出指向 $\triangle STU$ 頂點的直線作圖，為了是想呈現解決問題的多樣方法，希望可以在不同模糊程度之下，仍可找到重建密室的方法。也可以說儘管一個模糊角的分角線作圖以及模糊角內部一點指向模糊角頂點的直線作圖皆多達 7 種以上，但並不表示最簡單的作法就一定可以成功作出圖形。
- 四、如果模糊三角形的關鍵密室未(或很少)觸及模糊地帶，則先完成關鍵密室後，再使用「關鍵密室作圖法」，是一種可以有效迴避模糊地帶的密室作圖法。如果將此作圖觀念延伸，往關鍵密室更下層的「三邊中點連線的三角形」作圖，直到有一個「三邊中點連線的三角形」(愈大愈好)的內部完全不觸及模糊地帶，再以其內部為相似密室的作圖根據地，只要掌握正確的比例，理論上它是一種高成功率的密室作圖法。
- 五、此次的研究歷程與成果，讓我們將整個在國中所學到的幾何知識做一次融合、整理與應用。我們藉由設定模糊困境，進一步試圖找出種種排除困境與達成任務的方

法，研究過程雖然辛苦，卻讓我們感覺非常有意義，更讓我們進一步體會到數學知識的實用與奧妙。

柒、參考資料：

- 一、李恭晴、陳昭地等編「國民中學數學第五冊」(民 91.8)。台北市：國立編譯館。
- 二、李恭晴、陳昭地等編「國民中學數學第四冊」(民 91.1)。台北市：國立編譯館。

評語

從一個不完整模糊角的分角線出發，利用教材內容做完整而充分的發揮，且能表現出一題多解的精神，尤其是在幾何基本知識的表現上，對國中學生而言更是一件相當完美的作品。