

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：輕鬆解有趣的益智遊戲「點燈」

關鍵詞：益智遊戲、黑白傳棋、點燈

編號：030405

學校名稱：

高雄市立龍華國民中學

作者姓名：

宋惟學、黃薏寧、陳竹軒、吳芳慈

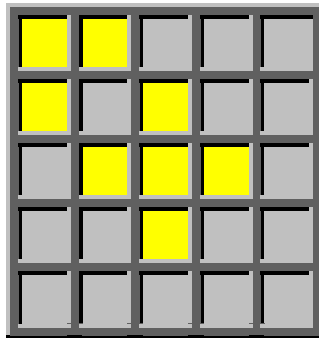
指導老師：

黃佩瑜、黃谷鳳



## 摘要

網路上有一個有趣的益智遊戲「點燈」，這個遊戲方法很簡單：就是動動腦筋，將畫面上的燈全部點亮就可過關。但是點燈的方法很特別，即是當你點選其中一個燈，該燈以及上下左右四方的燈將會變成與原來相反的狀況。亦即原本亮的燈會變暗；原本暗的燈會變亮。本篇作品主要研究點燈遊戲之基本原理與解法，根據點燈原理設計出一套解題工具（拼圖），並研究出一個「奇偶判別法」合併解題，此外，我們觀察出解的對稱性質與最佳解之規律性來加速破解點燈盤面的速度，進而嘗試將所得出之結論推廣到一般點燈盤面。



## 壹、研究動機

無意間在網路上發現一個有趣的益智小遊戲「點燈」，點了這個燈，旁邊的燈卻跟著被開關了，這樣開開關關，到底怎麼樣才能開啓所有的燈呢？這個小遊戲充滿了思考和推理的趣味性，引發我研究的動機，於是邀同學一同研究這個主題。這份研究正好跟我們學過的對稱圖形(康軒版數學一上第五單元)以及數形關係(康軒版數學一下第八單元)有很大的關連，因此我們研究起來更是得心應手！

## 貳、遊戲簡介

點燈遊戲在網路上原稱「all light game」，這個遊戲方法很簡單：就是動動腦筋，將畫面上的燈全部點亮就可過關。但是點燈的方法很特別，即是當你點選其中一個燈，該燈以及上下左右四方的燈將會變成與原來相反的狀況。亦即原本亮的燈會變暗；原本暗的燈會變亮。在網路上有許多玩家把這個遊戲改良成另一種遊戲「黑白傳棋」，其實原理和點燈遊戲是一樣的。

## 參、研究目的

- 一、瞭解點燈遊戲之原理，並且思索是否有快速方法解出複雜而頭疼的點燈問題，並嘗試解出  $m \times n$  ( $m \leq n$ ,  $1 \leq m, n \leq 12$ ) 的點燈盤面。
- 二、有系統的分析所有的點燈盤面是否具有一定的規則（如對稱性、旋轉性等），以幫助我們加快尋找解答的速度。
- 三、探討是不是所有的盤面都有解法，並且有效的判斷最佳解。

## 肆、研究設備及器材

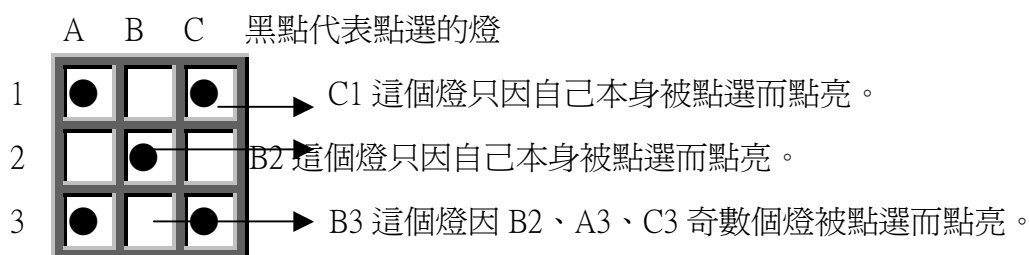
電腦、西卡紙、紙、筆、小白板、磁鐵。

## 伍、研究過程與方法

一開始我們玩這個遊戲時，就是嘗試錯誤的一直點，直到點出所有燈都亮起，然而這樣的作法，常常會在同一盞燈上點了好幾次都不自知，而且對於小的盤面我們還能很快的點出，到稍大的盤面時，幾乎像是在亂槍打鳥、海底撈針，不但沒有方法，也缺乏效率。於是，我們嘗試著去深入瞭解點燈遊戲的基本原理，期望能幫助我們找到一些解題的方向。

### 一、點燈原理：

所有的燈只有「開」和「關」兩種狀態，因此，若我們開關某盞燈偶數次，則燈還是暗的，而為了使每盞燈都被點亮，也就是每盞燈應該分別被開關奇數次。另一方面，由於點選其中一個燈會影響到該燈以及上下左右四方的燈，換句話說，每一盞燈的開關都受自己以及上下左右四方的燈所影響，若這五個燈裡面，共有奇數個燈被點，這個燈就會亮，若是偶數個，則這個燈就不會亮。以下用 3×3 的點燈盤面做說明：

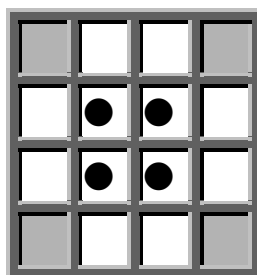
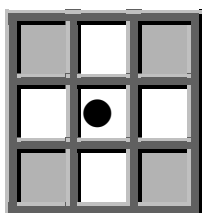


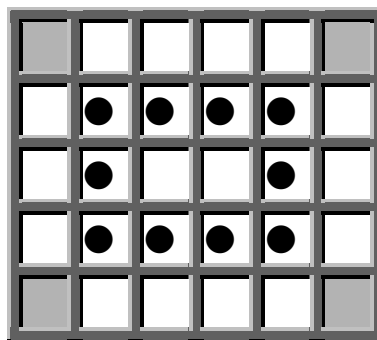
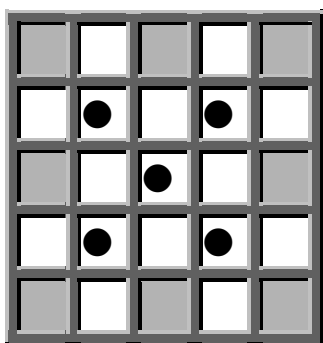
依此類推檢驗所有的燈是否都被開關奇數次(即每一盞燈與上下左右五個燈共被點奇數次)，若均合乎這個條件，則全部的燈都會被點亮。

### 二、設計解題工具：

即使我們已經瞭解了點燈原理，好奇的我們仍不滿足，希望能夠設計出一個簡單的方法來更輕鬆的解決這個令大部分人頭疼的點燈問題。

我們首先先對於比較小的點燈盤面求解，並且把解記錄下來，發現，似乎點燈法並非任意的，而是由某些基本的點燈法所組成。如：



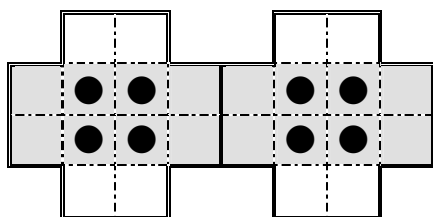


隨著盤面加大，基本點燈法便會增加，而每個基本點燈法都可被輕易的觀察到符合我們一開始所敘述的點燈原理。除此以外，我們更可以觀察到，每一個基本點燈法都是由較小基本點燈法重疊所組合而成的，因此，是否找出所有的基本點燈法並不影響我們設計拼圖的目的，因為即使我們有沒找到的基本點燈法，我們仍可以利用較小的拼圖拼出，只要我們捉住點燈原理，使得重疊的部分均為奇數層，仍可把解答找出，當然，這會增加拼圖的困難度。接下來，我們便開始著手製作簡單的拼圖，一開始我們只用了上面這四種基本點燈法。

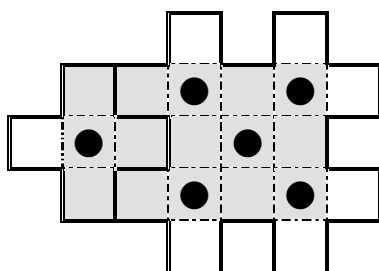
### 三、實驗的進行：

我們利用所設計的拼圖，來解  $m \times n$  ( $m \leq n$ ,  $1 \leq m, n \leq 12$ ) 的點燈盤面。  
實驗過程如下：

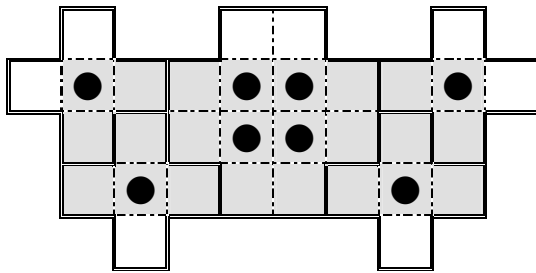
#### (1) 2x8 之點燈盤面



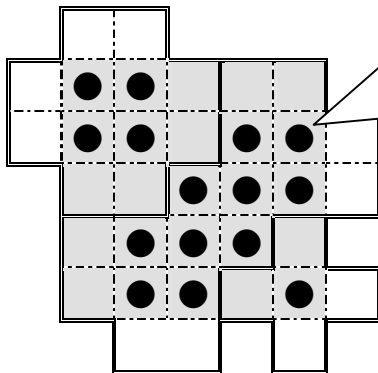
#### (2) 3x5 之點燈盤面



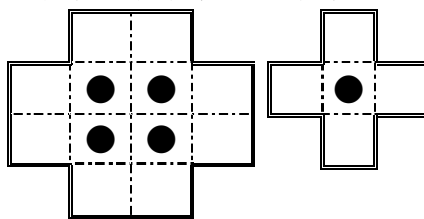
(3) 3x8 之點燈盤面



(4) 5x5 之點燈盤面



這塊拼圖其實是由各兩個



重疊所組成，由於往後很有可能會再遇到這樣的點燈法，於是我們把它定義成新的基本點燈法，並製作成拼圖加入拼圖中。

#### 四、分析實驗結果：

(1) 當  $m=1$  時

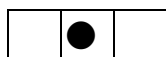
$1 \times 1$



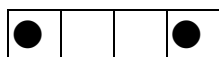
$1 \times 2$



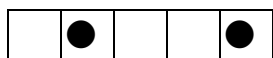
$1 \times 3$



$1 \times 4$



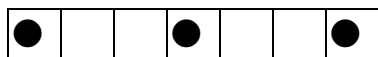
$1 \times 5$



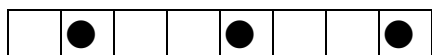
$1 \times 6$



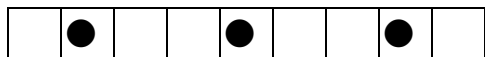
$1 \times 7$



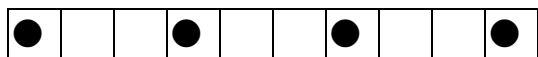
$1 \times 8$



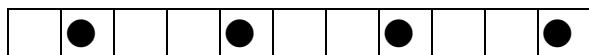
$1 \times 9$



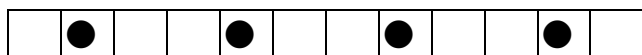
$1 \times 10$



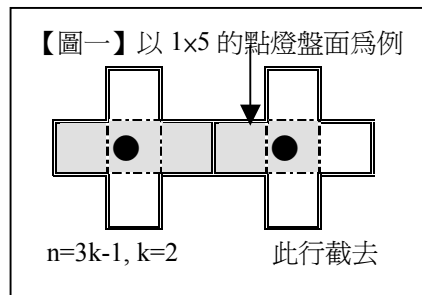
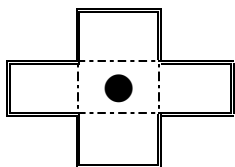
$1 \times 11$



$1 \times 12$



由以上結果知， $1 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ) 的點燈盤面都是由



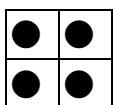
這個基本點燈法所組成的（每三行可以用一個這樣的基本點燈法之拼圖所組成，而若行數除三不足一，則不足的那一行可視作其中一邊被截去的那一行【如圖一】，若行數除三不足二，則不足的兩行可以視作兩邊同時被截去的那兩行），因此，我們可以輕易的推廣這個結論到所有  $1 \times n$  的點燈盤面，並且所找出來的解法均為最佳解。此外，導出簡單公式：

1×n 的點燈盤面之最佳解法為點選  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$  個燈。

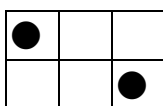
註：k 是自然數，若  $n=3k$ ，則  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k+2}{3} \right\rceil = k$ ；若  $n=3k-1$ ，則  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k+1}{3} \right\rceil = k$ ；  
若  $n=3k-2$ ，則  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3k}{3} \right\rceil = k$ 。（其中 k 代表共由 k 個拼圖所拼成，每一塊拼圖需點選一個燈。）

(2) 當  $m=2$  時

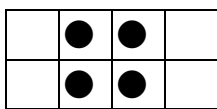
2×2



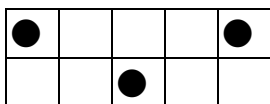
2×3



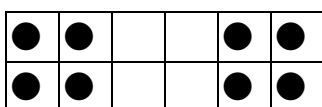
2×4



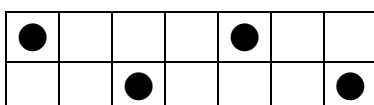
2×5



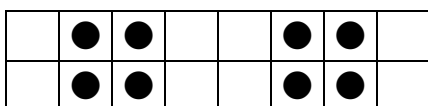
2×6



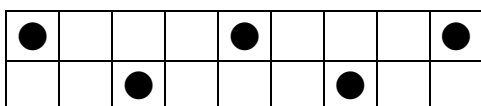
2×7



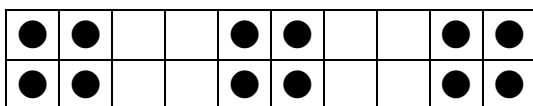
2×8



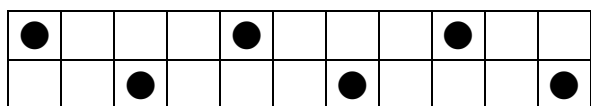
2×9



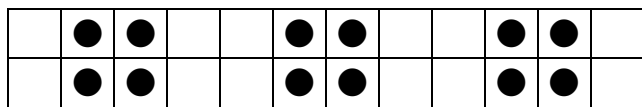
2×10



2×11

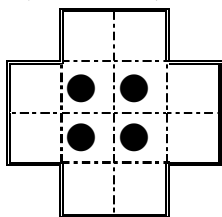


2x12



由以上結論知，

(A)  $2 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ,  $n$  是偶數) 的點燈盤面可以由

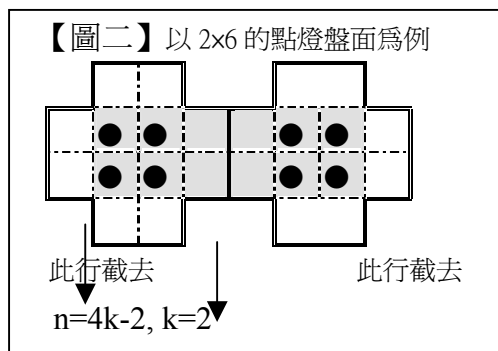


之點燈法唯一所組成(每四行可以用一個這樣的基本點燈法之拼圖所組成，而若行數為除四不足二，則不足的那兩行可視作兩邊被截去的那兩行【如圖二】)，所以我們可以把結論推廣到所有  $2 \times n$  ( $n$  是偶數) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解。我們依然可以推導出一個簡單的公式：

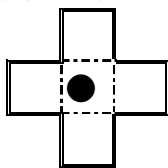
$2 \times n$  ( $n$  是偶數) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $4 \times \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil$  個燈。

註： $k$  是自然數，若  $n=4k$ ， $4 \times \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil = 4 \times \left\lceil \frac{4k+2}{4} \right\rceil = 4k$ ；若  $n=4k-2$ ， $4 \times \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil = 4 \times \left\lceil \frac{4k}{4} \right\rceil = 4k$ 。

(其中  $k$  代表共由  $k$  個拼圖所拼成，4 代表每塊拼圖需點選 4 個燈。)

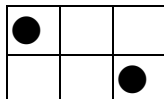
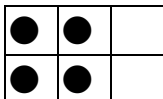


(B)  $2 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ,  $n$  是奇數) 的點燈盤面可以由



之基本點燈法上下鑲嵌而成(右邊加一行後，會有每兩行需有一個燈被點選的情形【如圖三】) 所以我們可以把結論推廣到所有  $2 \times n$  ( $n$  是奇數) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解。

注意：此最佳解並非唯一解，如以下均為  $2 \times 3$  點燈盤面的解法。

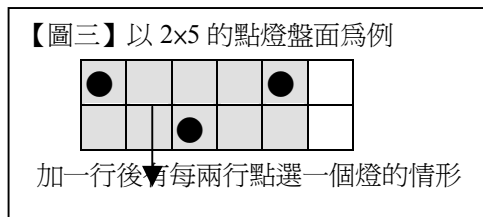


我們可以推導出一個簡單的公式：

$2 \times n$  ( $n$  是奇數) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$  個燈。

※ 解為最佳解之證明：

【證明】分析：先把  $2 \times n$  的點燈盤面所有可能組成之基本點燈法以及排列法找出



依照我們在之後所研究出之「奇偶判別法」可知

$m=2$  的第一行點燈法共  $2^2=4$  種情形，把這 4 種情形一一帶入，依序一行一行判斷該燈是否點選，直到某行的燈完全不點為止，我們發現有總共有以下點燈法：

|          |          |          |            |
|----------|----------|----------|------------|
|          |          |          |            |
| $A_1(4)$ | $B_1(1)$ | $B_2(1)$ | 同 $A_1(4)$ |

說明： $B_1(1)$ 代表 B 類點燈排列法，需點選 1 個燈。其中 A 類點燈法（第一行全點或第一行全不點）均相同，在排列後可以包含左右兩行也可以捨去不看。

我們發現，把這些點燈法分成二大類（A 類、B 類），同類型的可以依序鑲嵌，而不同類的則否，我們把他們所能組成的情形以及點燈數做一個表格如下：

|     | 點燈法                                 | 範例<br>( $k=1,2, \dots$ )                | 所組成可能 $n$ 值<br>( $k=1,2, \dots$ ) | 點燈個數                                                 |     |     |
|-----|-------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------|-----|-----|
| A 類 | $A_1(4)$                            | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>包含左右兩行      | $4k$                              | $4k=4 \times \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil$ | 唯一解 | 最佳解 |
|     |                                     | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>捨去左或右其中一行   | $4k-1$                            | $4k=n+1$                                             |     |     |
|     |                                     | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>同時捨去左右各一行   | $4k-2$                            | $4k=4 \times \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil$ | 唯一解 | 最佳解 |
| B 類 | $B_1(1) \longleftrightarrow B_2(1)$ | $B_1 B_2 \dots$ ( $k+1$ 個)<br>任由一個為起始皆可 | $(k+1)+k$<br>$=2k+1$              | $k+1 = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$       |     | 最佳解 |

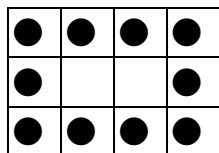
註：由以上表格可得出  $2 \times n$  ( $n \in N$ ) 均有解。

(3)當  $m=3$  時

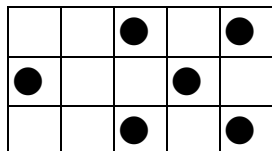
3x3

|   |   |   |
|---|---|---|
| ● |   | ● |
|   | ● |   |
| ● |   | ● |

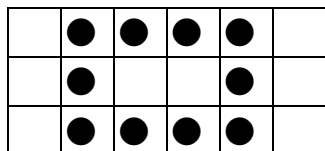
3x4



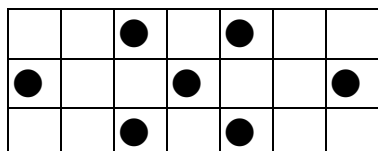
3x5



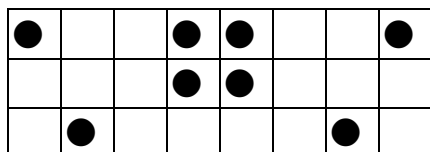
3x6



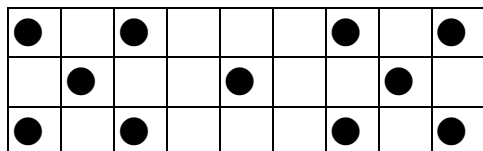
3x7



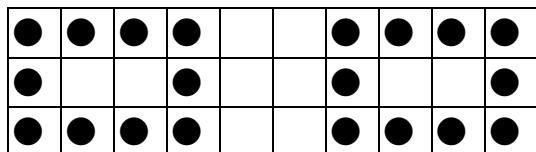
3x8



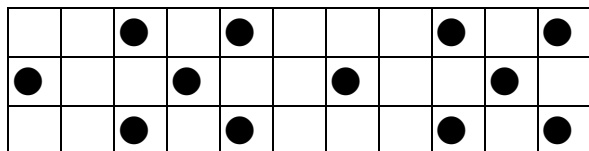
3x9



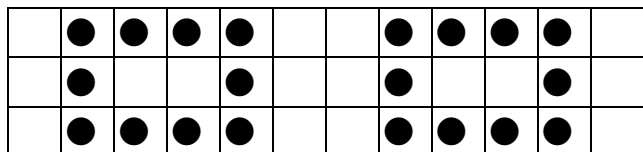
3x10



3x11

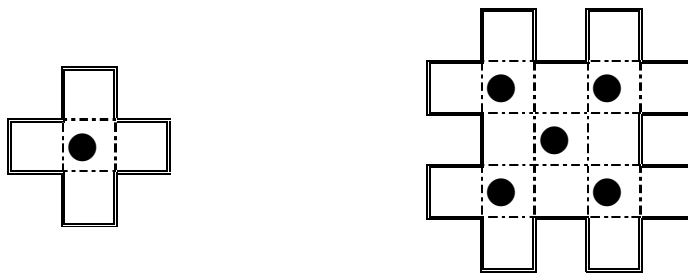


3x12



由以上結論知，

(A)  $3 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ,  $n$  為奇數) 的點燈盤面可以由以下兩種拼圖所組成



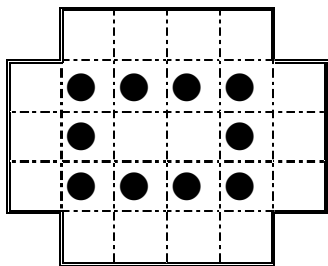
所以我們可以把結論推廣到所有  $3 \times n$  ( $n$  是奇數) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解（非唯一解）。我們可以利用簡單的歸納法推導出幾個公式：

$3 \times n$  ( $n$  是奇數； $n=6k-3, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k-1)$  個燈。

$3 \times n$  ( $n$  是奇數； $n=6k-1, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k)$  個燈。

$3 \times n$  ( $n$  是奇數； $n=6k+1, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k+1)$  個燈。

(B)  $3 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12, n$  為偶數； $n=6k-2, n=6k, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面可以由

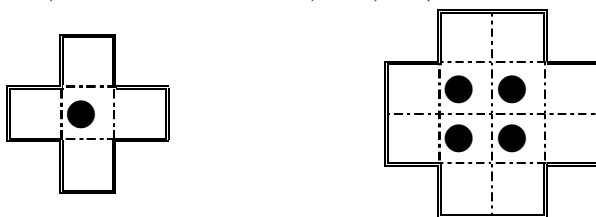


之點燈法所組成(每六行可由一個這樣的基本點燈法之拼圖所組成，而若行數除六不足二，則不足的兩行我們可以將它視作兩邊截掉的那兩行)，所以我們可以把結論推廣到所有  $3 \times n$  ( $n$  為偶數； $n=6k-2, n=6k, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解(唯一解)。我們可以推導出一個簡單的公式：

$3 \times n$  ( $n$  是偶數； $n=6k-2, n=6k, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(10k)$  個燈。

註： $k$  代表共由  $k$  個拼圖所拼成， $10$  代表每塊拼圖需被點選  $10$  個燈。

(C)  $3 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12, n$  為偶數； $n=6k+2, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面可以由

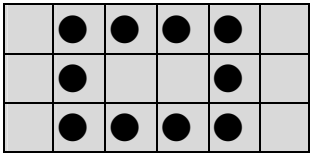
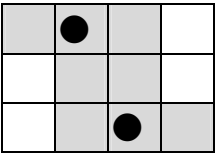
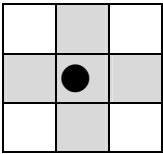
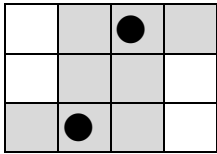
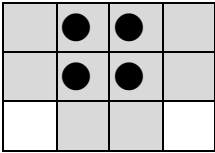
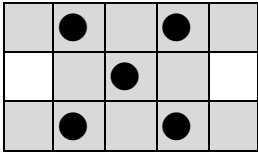
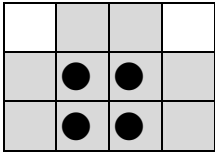
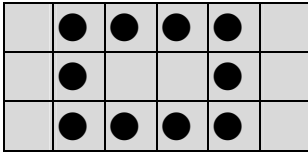


之點燈法所組成，所以我們可以把結論推廣到所有  $3 \times n$  ( $n$  為偶數； $n=6k+2, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解（非唯一解）。我們可以利用簡單的歸納法推導出一個公式：  
 $3 \times n$  ( $n$  為偶數； $n=6k+2, k=1,2,\dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(n=6k+2)$  個燈。

※ 解為最佳解之證明：

【證明】分析：先把  $3 \times n$  的點燈盤面所有可能組成之基本點燈法以及排列法找出  
 依照我們在之後所研究出之「奇偶判別法」可知

$m=3$  的第一行點燈法共  $2^3=8$  種情形，把這  $8$  種情形一一帶入，依序一行一行判斷該燈是否點選，直到某行的燈完全不點為止，我們發現有總共有以下點燈法：

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| $A_1(10)$                                                                         | $B_1(2)$                                                                          | $C_1(1)$                                                                           | $B_3(2)$                                                                            |
|  |  |  |  |
| $B_2(4)$                                                                          | $C_2(5)$                                                                          | $B_4(4)$                                                                           | 同 $A_1(10)$                                                                         |

說明：  $B_1(2)$ 代表 B 類點燈排列法，需點選 2 個燈。其中 A 類點燈法（第一行全點或第一行全不點）均相同，在排列後可以包含左右兩行也可以捨去不看。

我們發現，把這些點燈法分成三大類（A 類、B 類、C 類），同類型的可以依序鑲嵌，而不同類的則否，我們把他們所能組成的情形以及點燈數做一個表格如下：

|        | 點燈法                                                               | 範例<br>$k=1,2,3,\dots$                          | 所組成可能 n 值<br>( $k=1,2, \dots$ )   | 點燈個<br>數                                                                             |     |                |
|--------|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|----------------|
| A<br>類 | $A_1(10)$                                                         | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>包含左右兩行             | $6k$                              | $10k$                                                                                | 唯一解 | 最佳解            |
|        |                                                                   | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>捨去左或右其中一行          | $6k-1$                            | $10k$                                                                                |     |                |
|        |                                                                   | $A_1 A_1 \dots$ ( $k$ 個)<br>同時捨去左右各一行          | $6k-2$                            | $10k$                                                                                | 唯一解 | 最佳解            |
| B<br>類 | $B_1(2) \longrightarrow B_2(4)$<br>$B_4(4) \longleftarrow B_3(2)$ | $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$ ( $2k$ 個)<br>任由一個為起始皆可 | $2 \times 2k + (2k-1)$<br>$=6k-1$ | $(2+4) \times k$<br>$=6k$                                                            |     | 最佳解            |
|        |                                                                   | $B_1 B_2 B_3 B_4 \dots$ ( $2k+1$ 個)            | $2 \times (2k+1) + 2k$<br>$=6k+2$ | $B_1$ 或 $B_3$<br>起始<br>點( $6k+2$ )<br>個燈<br>$B_2$ 或 $B_4$<br>起始<br>點( $6k+4$ )<br>個燈 |     | $6k+2$<br>為最佳解 |
| C<br>類 | $C_1(1) \longrightarrow C_2(5)$<br>$C_2(5) \longleftarrow C_1(1)$ | $C_1 C_2 \dots$ ( $2k$ 個)<br>任由一個為起始皆可         | $(1+3)k + (2k-1)$<br>$=6k-1$      | $(1+5)k$<br>$=6k$                                                                    |     | 最佳解            |
|        |                                                                   | $C_1 C_2 C_1 \dots$ ( $2k+1$ 個)                | $(1+3)k + 1 + 2k$<br>$=6k+1$      | $(1+5)k + 1$<br>$=6k+1$                                                              | 唯一解 | 最佳解            |

|  |  |                                |                              |                       |     |     |
|--|--|--------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----|-----|
|  |  | $C_2 C_1 C_2 \cdots (2k-1)$ 個) | $(3+1)k-1+(2k-2)$<br>$=6k-3$ | $(1+5)k-1$<br>$=6k-1$ | 唯一解 | 最佳解 |
|--|--|--------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----|-----|

註：由以上表格可得出  $3 \times n$  ( $n \in N$ ) 均有解。

(4) 當  $m=4$  時

4×4

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   |   | ● |   |
| ● |   |   |   |
|   |   |   | ● |
|   | ● |   |   |

4×5

|  |   |   |   |  |
|--|---|---|---|--|
|  | ● | ● | ● |  |
|  | ● |   | ● |  |
|  | ● |   | ● |  |
|  | ● | ● | ● |  |

4×6

|   |  |   |   |  |   |
|---|--|---|---|--|---|
| ● |  |   |   |  | ● |
|   |  | ● | ● |  |   |
|   |  | ● | ● |  |   |
| ● |  |   |   |  | ● |

4×7

|   |   |  |   |  |   |   |
|---|---|--|---|--|---|---|
|   |   |  | ● |  |   |   |
| ● | ● |  |   |  | ● | ● |
| ● | ● |  |   |  | ● | ● |
|   |   |  | ● |  |   |   |

4×8

|   |   |   |  |  |   |   |   |
|---|---|---|--|--|---|---|---|
| ● | ● | ● |  |  | ● | ● | ● |
| ● |   | ● |  |  | ● |   | ● |
| ● |   | ● |  |  | ● |   | ● |
| ● | ● | ● |  |  | ● | ● | ● |

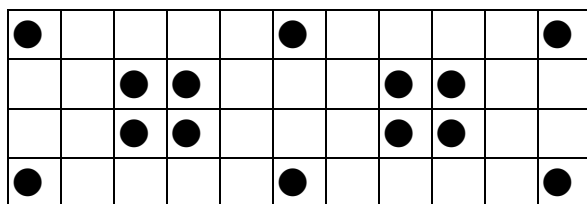
4×9

|   |  |   |   |  |   |  |   |   |
|---|--|---|---|--|---|--|---|---|
| ● |  |   |   |  | ● |  |   |   |
|   |  | ● | ● |  |   |  | ● | ● |
|   |  | ● | ● |  |   |  | ● | ● |
| ● |  |   |   |  | ● |  |   |   |

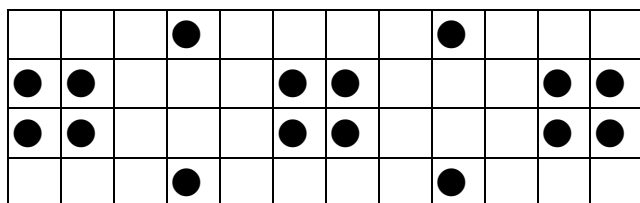
4×10

|  |   |   |   |  |  |   |   |   |  |
|--|---|---|---|--|--|---|---|---|--|
|  | ● | ● | ● |  |  | ● | ● | ● |  |
|  | ● |   | ● |  |  | ● |   | ● |  |
|  | ● |   | ● |  |  | ● |   | ● |  |
|  | ● | ● | ● |  |  | ● | ● | ● |  |

4×11

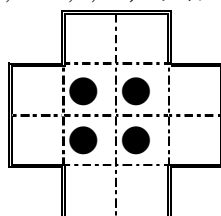
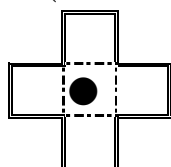


4×12



由以上結論知，

(A)  $4 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ,  $n=5k+1, 5k+2, 5k+4$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面可以由以下兩種拼圖所組成



所以我們可以把結論推廣到所有  $4 \times n$  ( $n=5k+1, 5k+2, 5k+4$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面。

並且所找出的解為最佳解（非唯一解），我們可以利用簡單的歸納法推導出幾個公式：

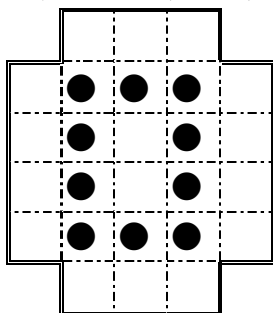
$4 \times n$  ( $n=5k+1$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k+2)$  個燈。

$4 \times n$  ( $n=5k+2$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k+4)$  個燈。

$4 \times n$  ( $n=5k+4$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k+6)$  個燈。

注意：其中  $4 \times 4$  的點燈盤面雖也可以上述點燈法解之，但我們找出另一組解法（如第十頁圖示），而這組解法為其最佳解。

(B)  $4 \times n$  ( $1 \leq n \leq 12$ ,  $n=5k$ ,  $n=5k+3$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面可以由



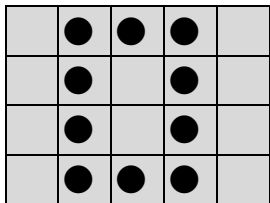
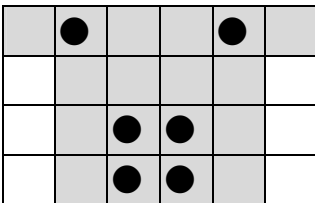
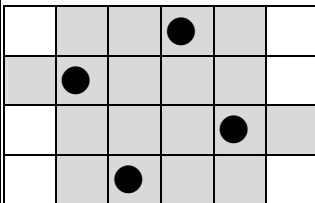
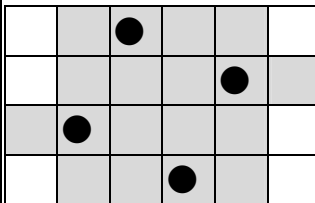
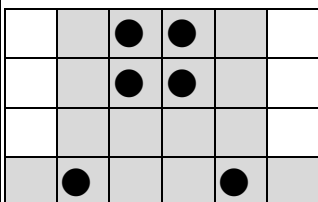
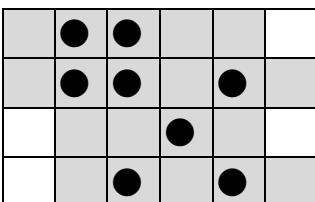
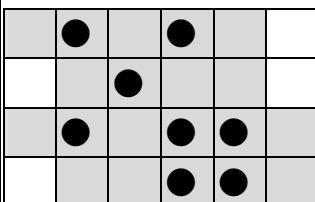
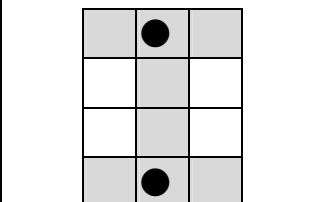
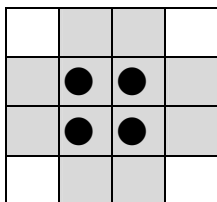
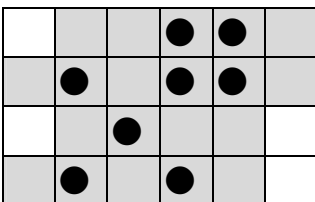
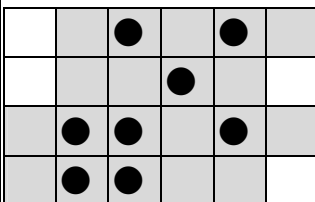
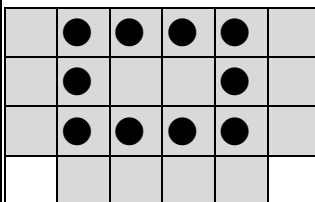
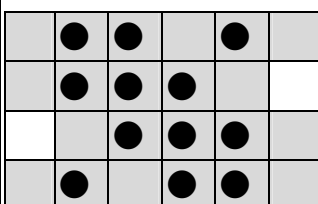
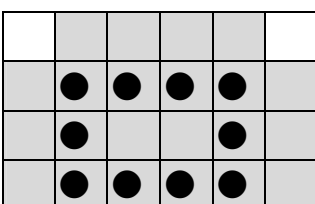
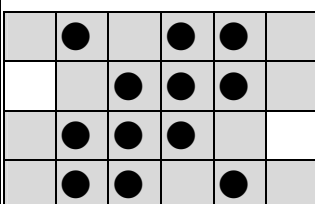
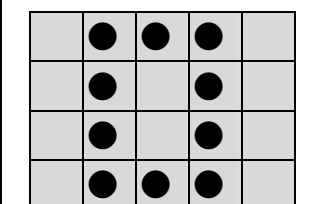
之點燈法所組成(每五行可由一個這樣的基本點燈法之拼圖所組成，而若行數除五不足二，則不足的兩行我們可以將它視作兩邊截掉的那兩行)，所以我們可以把結論推廣到所有  $4 \times n$  ( $n=5k$ ,  $n=5k-2$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面，並且所找出的解為最佳解（唯一解）。我們可以推導出一個簡單的公式：

$4 \times n$  ( $n=5k$ ,  $n=5k-2$ ,  $k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(10k)$  個燈。

註：k 代表共由 k 個拼圖所拼成，10 代表每塊拼圖需被點選 10 個燈。

※解為最佳解之證明：

【證明】分析：先把  $4 \times n$  的點燈盤面所有可能組成之基本點燈法以及排列法找出 依照我們在之後所研究出之「奇偶判別法」可知  $m=4$  的第一行點燈法共  $2^4=16$  種情形，把這 16 種情形一一帶入，依序一行一行判斷該燈是否點選，直到某行的燈完全不點為止，我們發現有總共有以下點燈法：

|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |    |    |
| $A_1(10)$                                                                           | $B_1(6)$                                                                            | $C_1(4)$                                                                             | $D_1(4)$                                                                              |
|   |   |   |   |
| $E_1(6)$                                                                            | $F_1(8)$                                                                            | $F_2(8)$                                                                             | $G_1(2)$                                                                              |
|  |  |  |  |
| $G_2(4)$                                                                            | $H_1(8)$                                                                            | $H_2(8)$                                                                             | $E_2(10)$                                                                             |
|  |  |  |  |
| $C_2(12)$                                                                           | $B_2(10)$                                                                           | $D_2(12)$                                                                            | 同 $A_1(10)$                                                                           |

說明： $B_1(6)$ 代表 B 類點燈排列法，需點選 6 個燈。其中 A 類點燈法（第一行全點或第一行全不點）均相同，在排列後可以包含左右兩行也可以捨去不看。

我們發現，把這些點燈排列法分成八大類（A 類、B 類、C 類、D 類、E 類、F 類、G 類、H 類），同類型的可以依序鑲嵌，而不同類的則否，我們把他們所能組成的情形以及點燈數做

一個表格如下：

注意：4x4 這個盤面要特別討論，他可以由 A 類、B 類、C 類、D 類、E 類、F 類、H 類七類的點燈排列法單獨組成，或是由兩個 G 類點燈排列法鑲嵌而成，很明顯  $C_1(4)$  與  $D_1(4)$  是其最佳解。

|        | 點燈法                                                                     | 範例<br>( $k=1,2, \dots$ )                   | 所組成可能 $n$ 值<br>( $k=1,2, \dots$ )            | 點燈個數                                                                                                                                                             |     |     |
|--------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| A<br>類 | $A_1(10)$                                                               | $A_1 A_1 \dots (k \text{ 個})$<br>包含左右兩行    | <b><math>5k</math></b>                       | <b><math>10k</math></b>                                                                                                                                          | 唯一解 | 最佳解 |
|        |                                                                         | $A_1 A_1 \dots (k \text{ 個})$<br>捨去左或右其中一行 | <b><math>5k+4</math></b>                     | <b><math>10k+10</math></b>                                                                                                                                       |     |     |
|        |                                                                         | $A_1 A_1 \dots (k \text{ 個})$<br>同時捨去左右各一行 | <b><math>5k-2</math></b>                     | <b><math>10k</math></b>                                                                                                                                          | 唯一解 | 最佳解 |
| B<br>類 | $B_1(6) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} B_2(10)$ | $B_1 B_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | 由 $B_1$ 起始<br><b><math>6(k+1)+4 \times \left[ \frac{k+1}{2} \right]</math></b><br>由 $B_2$ 起始<br><b><math>6(k+1)+4 \times \left[ \frac{k+2}{2} \right]</math></b> |     |     |
| C<br>類 | $C_1(4) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} C_2(12)$ | $C_1 C_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | 由 $C_1$ 起始<br><b><math>4(k+1)+8 \times \left[ \frac{k+1}{2} \right]</math></b><br>由 $C_2$ 起始<br><b><math>4(k+1)+8 \times \left[ \frac{k+2}{2} \right]</math></b> |     |     |
| D<br>類 | $D_1(4) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} D_2(12)$ | $D_1 D_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | 與 C 類同                                                                                                                                                           |     |     |
| E<br>類 | $E_1(6) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} E_2(10)$ | $E_1 E_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | 與 B 類同                                                                                                                                                           |     |     |
| F<br>類 | $F_1(8) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} F_2(8)$  | $F_1 F_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | <b><math>8k+8</math></b>                                                                                                                                         |     |     |
| G<br>類 | $G_1(2) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} G_2(4)$  | $G_1 G_2 \dots (2k+2 \text{ 個})$           | $3(k+1)+(2k+1)$<br><b><math>=5k+4</math></b> | $6(k+1)$<br><b><math>=6k+6</math></b>                                                                                                                            |     | 最佳解 |
|        |                                                                         | $G_1 G_2 \dots (2k+1 \text{ 個})$           | $3k+1+2k$<br><b><math>=5k+1</math></b>       | <b><math>6k+2</math></b>                                                                                                                                         | 唯一解 | 最佳解 |
|        |                                                                         | $G_2 G_1 \dots (2k+1 \text{ 個})$           | $3k+2+2k$<br><b><math>=5k+2</math></b>       | <b><math>6k+4</math></b>                                                                                                                                         | 唯一解 | 最佳解 |
| H<br>類 | $H_1(8) \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} H_2(8)$  | $H_1 H_2 \dots (k+1 \text{ 個})$            | $4(k+1)+k$<br><b><math>=5k+4</math></b>      | 與 F 類同                                                                                                                                                           |     |     |

註：由以上表格可得出  $4 \times n$  ( $n \in N$ ) 均有解。

※證明  $4 \times n$  ( $n=5k+4, k=1, 2, \dots$ ) 的點燈盤面之最佳解法為點選  $(6k+6)$  個燈。

【證明】比較所有  $n=5k+4$  的排列方法的點燈個數：

因為  $10k+10 > 8k+8 > 6k+6$

$$6(k+1)+4 \times \left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil > 6(k+1)+4 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$$

$$4(k+1)+8 \times \left\lceil \frac{k+2}{2} \right\rceil > 4(k+1)+8 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$$

所以只需比較  $6k+6, 6(k+1)+4 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil, 4(k+1)+8 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$  之大小即可

$$6(k+1)+4 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 4(k+1) - 8 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil = 2(k+1) - 4 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \geq 2(k+1) - 4 \times \left( \frac{k+1}{2} \right) = 0$$

$$4(k+1)+8 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 6(k+1) = 8 \times \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil - 2(k+1) \geq 8 \times \frac{k}{2} - 2(k+1)$$

$$= 4k - 2k - 2 = 2k - 2 \geq 0 \quad (\because k \geq 1)$$

由上可知，當  $n=5k+4$  時，其最佳解的點燈個數為  $6k+6$ 。

(5) 當  $m \geq 5$  時

當點燈盤面進行到  $m=5$  時，拼圖的困難度增加，隨著盤面的加大，我們必須定義新的基本點燈法，這個過程是很辛苦的，而且需要很大的恆心與毅力來完成，所幸我們有老師的指引，加上同學與師長的鼓勵與打氣，讓我們順利的把  $m \times n$  ( $m \leq n, 1 \leq m, n \leq 12$ ) 的點燈盤面全解出來(附件一)。當然，在解題的過程中，我們有許多新的發現，這是很令我們振奮的結果！我們把它記錄於下！

## 五、拼圖法之外的新發現：

1. 在我們進行實驗的過程中，我們發現，每一個新的基本點燈法出現，似乎都具有對稱性，有的是線對稱（對稱軸為橫軸、縱軸或對角線），有的是點對稱，而我們的拼圖排列方式似乎也具有對稱性，這樣的結論有助於我們尋找新的基本點燈法或是解法！
2. 我們發現每一個點燈盤面，每一行（列）的點燈法都被前兩行（列）的結果所唯一決定，只要第一行（列）的點燈法固定，便可依規則把以下的盤面的解決定，若到最後一行（列）仍符合我們一開始所敘述的點燈原理，則這個點燈盤面便會被成功解出！（**奇偶判別法**）至於第一行（列）該如何決定，才容易成功呢？由 (1.) 的發現可知，解大多都具備對稱性，因此我們的第一行（列）解可以令其對稱，通常解都可被試出來。當然，若這樣的判別法和拼圖法一同進行，便會得到相得益彰的效果。

我們以  $5 \times 5$  的點燈盤面說明如下：

黑點代表點選的燈

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ● | ● | ● | ○ | ○ |
| 2 | ● | ○ | ● | ○ | ● |
| 3 | ● | ○ | ● | ● | ○ |
| 4 | ● | ● | ○ | ● | ● |
| 5 | ○ | ● | ○ | ○ | ○ |

首先，第一排點燈法任意決定

A2 這個燈是否要點選決定於 A1 此燈的開關狀況，因為 A1 需被開關奇數次，為了符合這個條件，A2 必須點選！

同理，B2 這個燈是否要點選決定於 B1 此燈的開關狀況，因為 B1 需被開關奇數次，所以 B2 不能點選！

依此類推，每一列依序解出。

A5 這個燈共被開關了偶數次(只被 A4、B5 此兩燈影響)，與點燈原理不合，所以此非一組解！我們重新給定第一列起始點燈法！

黑點代表點選的燈

|   | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ● | ● | ○ | ○ | ○ |
| 2 | ● | ● | ○ | ● | ● |
| 3 | ○ | ○ | ● | ● | ● |
| 4 | ○ | ● | ● | ● | ○ |
| 5 | ○ | ● | ● | ○ | ● |

給定另一組起始點燈法！

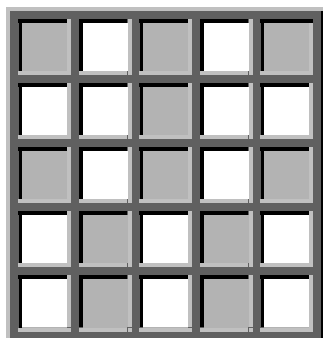
依上述的判別法依序把每一列解出。

最後一列每一個燈也均被開關奇數次，符合點燈原理，因此，這是一組解！

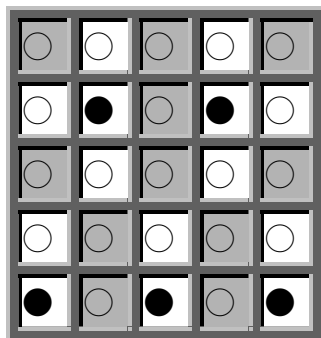
- 在紀錄  $m \times n$  ( $m \leq n$ ,  $1 \leq m, n \leq 12$ ) 所有點燈盤面之解的過程中，我們發現  $5 \times 11$  這個點燈盤面找不到具對稱性的解，因為其第一行的點燈法總共有  $2^5 = 32$  組的可能性，我們利用程式下去跑共找出 16 組解，而這 16 組解全非具對稱性的解！因此，我們可以得到一個結論，雖然大多的點燈盤面解具對稱性，但我們並不能把這樣的性質推廣至任何一個點燈盤面！
- 當然點燈盤面不見得所有的燈原本都是暗的，若初始盤面中原先就有幾個燈是亮的，我們依然可以利用 (2.) 所說的判別法把解解出！我們對這樣的結果感到很興奮，因為我們從網路上找到另一種類似的遊戲「allout」，它總共有 52 個盤面，初始盤面的燈都不是全暗的，希望透過與「點燈」同樣的遊戲規則把整個點燈盤面所有的燈都關掉，透過之前的討論與發現，我們可以利用科學的方法一次就解決每一個盤面！（附件二）

如：以下這盤面為「allout」遊戲的第二關，我們該如何把所有的燈全關掉呢？

(空白者為此燈初始狀況為亮的)



- (A) 首先我們分析整個盤面，發現每一個燈當它原先是亮的，則它須被開關奇數次才會被關掉，至於原先就暗的燈，需要開關偶數次或是不被開關才會維持關掉的狀態！
- (B) 由於這個初始盤面是左右對稱的，因此我們可以猜測這組盤面的解也應該是左右對稱的，這對我們決定第一列的解很有幫助！（我們先假設第一列的燈都不被點選），然後第二列、第三列的解隨之被決定出，很幸運的，到第五列時，解仍符合規則，我們便輕易的解出了這盤面。



## 陸、研究結果

- 一、點燈原理：所有的燈只有「開」和「關」兩種狀態，因此，若我們開關某盞燈偶數次，則燈還是暗的，而為了使每盞燈都被點亮，也就是每盞燈應該分別被開關奇數次。另一方面，由於點選其中一個燈會影響到該燈以及上下左右四方的燈，換句話說，每一盞燈的開關都受自己以及上下左右四方的燈所影響，若這五個燈裡面，共有奇數個燈被點，這個燈就會亮，若是偶數個，則這個燈就不會亮。
- 二、每一個點燈盤面，每一行（列）的點燈法都被前兩行（列）的結果所決定，只要第一行（列）的點燈法固定，便可依規則把以下的盤面的解決定，若到最後一行（列）仍符合我們一開始所敘述的點燈原理，則這個點燈盤面便會被成功解出！
- 三、利用拼圖法以及結論二之判別法合併解題，我們可以發現， $m \times n$  ( $m \leq n$ ,  $1 \leq m, n \leq 12$ ) 的點燈盤面中，除了  $5 \times 11$  的點燈盤面外，都至少會有一組具對稱性的解，當  $m=1、2、3、4$  時，所有的點燈盤面均有解，且最佳解的步驟數具有規律性。

## 柒、討論與結論

關於點燈遊戲，還有許多問題值得我們繼續探討，比如，是不是所有的盤面都有解( $m \geq 5$ )？我們如何判斷所解出來的解為最佳解？最佳解的步驟數是否具有規律性呢？甚至，我們可以討論，是否每個點燈盤面的解法唯一？或是解法數也具有規律性？在決定第一列(行)的點燈法時是否有什麼規則或訣竅？由於時間有限，我們期望將來我們能夠繼續完成它。

做完這次的科展，我們發現，生活中其實有許多問題可以用科學的方法被有系統且快速的解決，思考與研究的過程是令人驚奇而有成就感的，而討論、合作更是我們成功順利完成這份研究的主要因素，我們在這次的研究裡，獲益良多！

## 捌、參考資料

- 一、蔡明原，林順喜，1998，一個有趣的益智遊戲「點燈」之電腦解法及分析，*中華民國資訊學會通訊*，第一卷第四期，頁 7-13。
- 二、康軒版國中數學課本一上 第五單元 對稱圖形。
- 三、康軒版國中數學課本一下 第八單元 數形關係。
- 四、網址：<http://yauger.24cc.com/> 益智遊樂網。

## 評語

從一個有趣的遊戲出發，利用分解與疊合的技巧給出了小數字的完整解答。也提出了解決較大數字的想法，隱約的已有了  $n$  維向量與基底的概念。對國中生而言是十分難得的作品。