中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：正 n 邊形光圈之路徑追蹤

關鍵詞：茶葉、氧化、變色

編號：080219

學校名稱：

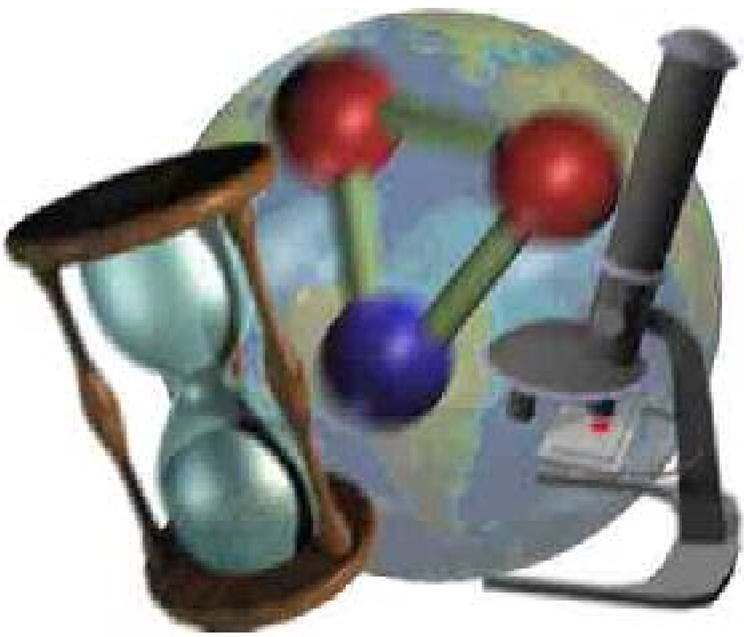
台北縣立福和國民中學

作者姓名：

廖櫻美、林佑莳、林佑蓉、田雅汶

指導老師：

鄭釧鋒、吳俞朋



摘要

本研究是[對於正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 邊上一點 P(含頂點)，想像自定點 P 朝鄰邊發出一條光線，若依逆(順)時針方向依序與每邊皆碰撞一次，經一圈而可回到 P 點，則此路徑稱為「光圈」。我們試著追蹤能形成光圈的光線行進路徑及其相關問題。]

本研究令 $\overline{A_1A_2}=1$、$\overline{A_1P}=s$ (其中 $0\le s\le 1$)，且以逆時針得光圈來討論：

1.根據[光的反射原理]，探討光圈之存在性，發現除定點 P 在正 2m 邊形或正三角形的頂點外，其餘皆有光圈。

2.將可形成光圈的路徑圖展開成[直線路徑圖]來探討。

3.由[直線路徑圖]，我們觀察到光圈的光線行進路徑可能存在三種：

(1)通過正 n 邊形的頂點，光線行進終止。

(2)不通過正 n 邊形的頂點，且產生路徑循環問題。

(3)不通過正 n 邊形的頂點，且路徑不循環。

4.發現出正 2m 邊形光圈皆為[完美光圈]。

5.發現正 2m+1 邊形光圈之路徑與有理數、無理數之特質有關。即當 s 值為有理數時，路徑會循環；當 s 值為無理數時，路徑不循環。

壹.研究動機：

在課堂中老師上到[選修課本第四冊平行的應用-反光篇]時，順便提到利用【光的反射定律】可以尋求最短路徑。後來我們到圖書館及網路上尋找相關資料，找到中華民國第二十九屆高中科展「**n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形**」，為利用正弦定理求內接多邊形周長最小值以及第三十八屆中小學科展的「**鏡射乾坤**」，內容為利用鏡射研究出內接多邊形周長最小值。若我們把鏡射改成利用[光的反射定律]，自凸 n 邊形邊上一點 P 發出一條光線，經多次反射。若能形成內接凸 n 邊形，則此內接凸 n 邊形的周長，剛好為過 P 點所有內接凸 n 邊形周長的最小值。當此光線回到 P 點，接著繼續前進，則此光線行進路徑會如何？是否有終點？是否有規律？……？一連串問號？驅使我們朝研究之路邁進。

貳.研究目的：

1.研究正 n 邊形具有何種光圈？

2.尋找解決正 n 邊形內能形成光圈的路徑追蹤辦法。

3.探討光圈的光線反射路徑類型。

4.探討光圈的光線路徑與出發點位置有何關連？

5.光圈的光線反射次數與出發點位置有何關係？

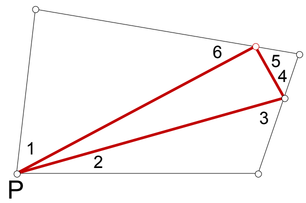
參.研究器材：電腦、*The Geometer's Sketchpad*

肆.研究過程：

一.前言：我們先定義下列名詞

1.光圈：對於凸 n 邊形邊上一點(含頂點)，想像自定點 P 朝鄰邊發出一條光線，若依逆(順)

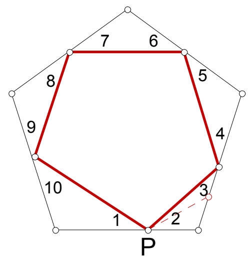
時針方向依序與每邊皆碰撞一次，經一圈而可回到 P 點，且此行進路線所構成的圖形為凸多邊形，稱之。(如圖一、二、三)



圖(一)

$\angle 3=\angle 4$

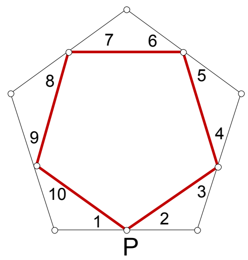
$\angle 5=\angle 6$



圖(二)

$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$

$\angle 7=\angle 8$，$\angle 9=\angle 10$



圖(三)

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，$\angle 9=\angle 10$

2.非完美光圈：若光圈為凸 n 邊形，且光線不可在此光圈無限循環，稱之。如(圖二)，其中 $\angle 1\neq\angle 2$。

3.完美光圈：若光圈為凸 n 邊形，且光線可在此光圈無限循環，稱之。如(圖三)，其中 $\angle 1=\angle 2$。

在尋找「過凸 n 邊形邊上一定點 P，所形成的內接凸 n 邊形中周長最小者」可利用 n-1 次鏡射得到。(當然，前提是過 P 點可形成前面所定義的完美或非完美光圈)。實際上此種鏡射方式與光的行進路徑不謀而合。至於，如何得到光圈？我們以正五邊形來探討：

1.過正五邊形 ABCDE 中，$\overline{AB}$ 上一點 P，作出光圈。

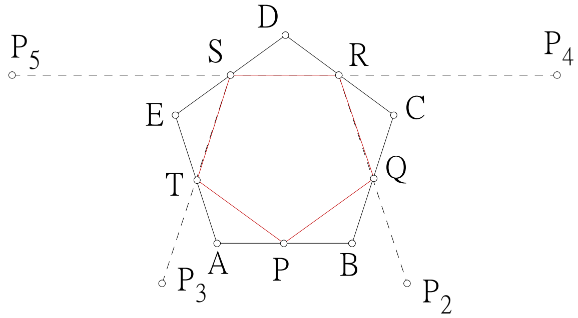
(1)分別作 P 關於 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AE}$ 之鏡射得像 P_2、P_3

(2)分別作 P_2 關於 $\overline{CD}$、P_3 關於 $\overline{DE}$ 之鏡射得像 P_4、P_5

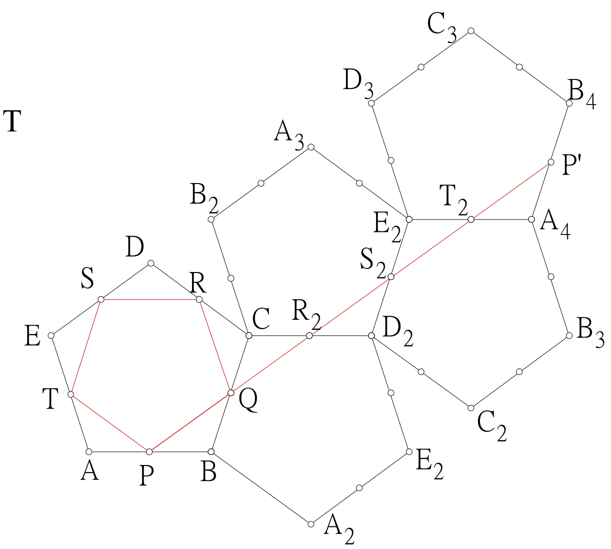
(3)連 $\overline{P_4P_5}$ 交 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 於 R、S

(4)分別連 $\overline{RP_2}$ 、 $\overline{SP_3}$ 交、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AE}$ 於 Q、T

(5)連 PQRST 得光圈 (如圖四)



(圖四)



(圖五)

2.將(圖四)作關於 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD_2}$ 、 $\overline{D_2E_2}$ 、 $\overline{E_2A_4}$ 之連續 4 次鏡射得(圖五)。

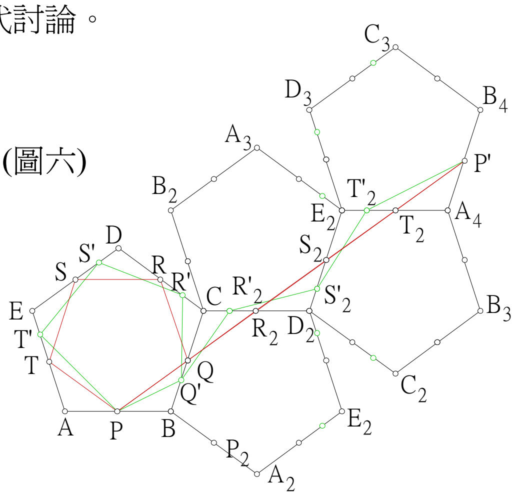
3.過 P 作任意內接五邊形 $PQ'R'S'T'$ 得(圖六)。

由(圖五)、(圖六)，可得結論：

1.形成光圈的光線路徑圖可以光的直線 $\overleftrightarrow{PP'}$ 來取代討論。

2.光圈 PQRST 的周長= $\overline{PP'} \le \overline{PQ'} + \overline{Q'R'_2}$ $+\overline{R'_2S'_2} + \overline{S'_2T'_2}$ $+\overline{T'_2P'}$ =五邊形 $PQ'R'S'T'$ 之周長。

(圖六)



3.利用(結論 2)可推廣証得：若凸 n 邊形有[非完美光圈]，則此[非完美光圈]之周長為過定點 P 之內接凸 n 邊形周長最小者。

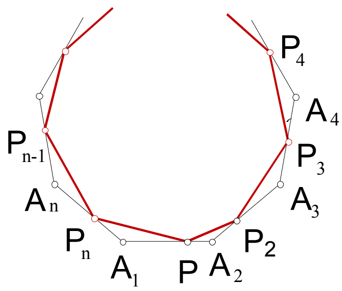
由上述三種光圈定義及[光的反射定律]，我們可初步得到下面結論：

$$\text{光圈}\begin{cases}1.\text{過頂點光圈：光線路徑終止於原出發點}P.\\ 2.\text{非完美光圈：}\begin{cases}(1)\text{：其周長為過邊上定點P 之內接n邊形周長最小值.}\\ (2)\text{：光線路徑形成光圈後,離開光圈,繼續前進.(如圖二,虛線)}\end{cases}\\ 3.\text{完美光圈：}\begin{cases}(1)\text{：其周長為凸}n\text{邊形中,所有內接}n\text{邊形周長之最小值.}\\ (2)\text{：光線路徑在光圈不停的前進.}\end{cases}\end{cases}$$

接著，進入我們的研究主題：

「想像從正 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 邊上一點 P 發出一條光線，當可形成光圈時之路徑軌跡及相關結論」。

二.正 n 邊形光圈的路徑相關問題研究：



圖<七>

根據光的「反射定律」，自正 n 邊形 $\overline{A_1A_2}$ 上一點(不含端點)P，出發所形成的光圈如圖<七>，則必

$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$，…，$\angle(2n-1)=\angle 2n$

至於∠1、∠2 有可能相等或不相等的兩種情況，與 n 是偶數或奇數有密切關係，底下分<問題一>n=2m 和<問題二>n=2m+1 兩種情形來討論，問題探討如下:

<問題一>：自正 2m 邊形邊上一點 P 發出一條光線，若可形成光圈，則為何種光圈？其光線路徑又如何？

由上述知，此問題為 n 是偶數的情形 n=2m

由 $\angle A_1 = \angle A_2 = \cdots = \angle A_{2m}$

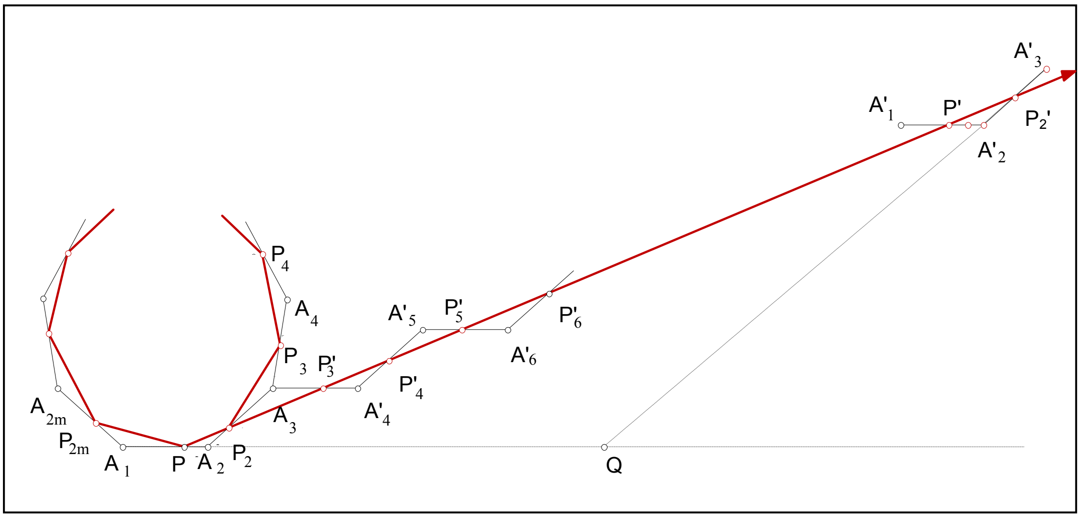
可得 $\angle 3 = \angle 4 = \angle 7 = \angle 8 = \cdots = \angle(4m-1) = \angle 4m$

又在 ΔA_1PP_n 、 ΔA_2PP_2 中

$\because \angle 1 = 180° - \angle A_1 - \angle 2n = 180° - \angle A_1 - \angle 4m = 180° - \angle A_2 - \angle 3 = \angle 2$

$\therefore \angle 5 = \angle 6 = \cdots = \angle(4m-3) = \angle(4m-2) = \angle 1 = \angle 2$

利用[前言]之＜結論 1＞可把光線在正 n 邊形內反射所形成的路徑以 $\overrightarrow{PP_2}$ 來取代。即將圖＜七＞改成圖＜八＞來討論



圖＜八＞

當我們延長 $\overline{PA_2}$ 及 $\overline{A'_3A'_2}$ 交於 Q

由於 $\angle A_1 = \angle A_2 = \cdots = \angle A_{2m}$

可得 $\overline{A_1A_2} \,//\, \overline{A_3A'_4} \,//\, \overline{A'_5A'_6} \,//\cdots//\, \overline{A'_{2m-1}A'_{2m}} \,//\, \overline{A'_1A'_2}$

$\overline{A_2A_3} \,//\, \overline{A'_4A'_5} \,//\, \overline{A'_6A'_7} \,//\cdots//\, \overline{A'_1A'_{2m}} \,//\, \overline{A'_2A'_3}$

$$\Rightarrow \frac{\overline{P'A'_2}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P'_2A'_2}}{\overline{P_2'Q}} \quad \Rightarrow \frac{\overline{P'A'_2}}{\overline{PA_2}+\overline{A_2Q}} = \frac{\overline{P'_2A'_2}}{\overline{P'_2A'_2}+\overline{A'_2Q}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{PA_2}+\overline{A_2Q}}{\overline{P'A_2'}} = \frac{\overline{P_2'A_2'}+\overline{A_2'Q}}{\overline{P_2'A_2'}} \quad \Rightarrow \frac{\overline{A_2Q}}{\overline{P'A'_2}} = \frac{\overline{A'_2Q}}{\overline{P'_2A'_2}} \quad (\because \overline{P'A'_2} = \overline{PA_2})$$

又 $\overline{A_2Q} = \frac{1}{2}$ 正 2m 邊形周長 $= \overline{A'_2Q}$

$\therefore \overline{PA_2} = \overline{P'A'_2} = \overline{P'_2A'_2} = \overline{P_2A_2}$

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \cdots = \angle(4m-1) = \angle 4m = \frac{180^\circ}{n}$$

$\Rightarrow$ 多邊形 $PP_2P_3\cdots P_{2m}$ 為等角 2m 邊形

即正 2m 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2m}$ 所形成之光圈皆為[完美光圈]。

特別地，當 P 在端點 A_1(或 A_2)上，由圖＜八＞可得，其路徑朝 $\overrightarrow{A_1A_3}$ (或 $\overrightarrow{A_2A_4}$)前進。但因我們限定光線在正 n 邊形內，根據光的「反射定律」，知光線終止於 A_3(或 A_4)。即此時無光圈。

結論：1. 若 P 不在頂點上，則正 2m 邊形必有光圈，且爲[完美光圈]，其光線路徑爲朝鄰邊以仰角 $\dfrac{180°}{2m}$ 射出形成等角 2m 邊形 $P_1P_2P_3\cdots P_{2m}$ 光圈，並在其周界不停的前進，即無終點。

2.若 P 在頂點上，則無光圈。

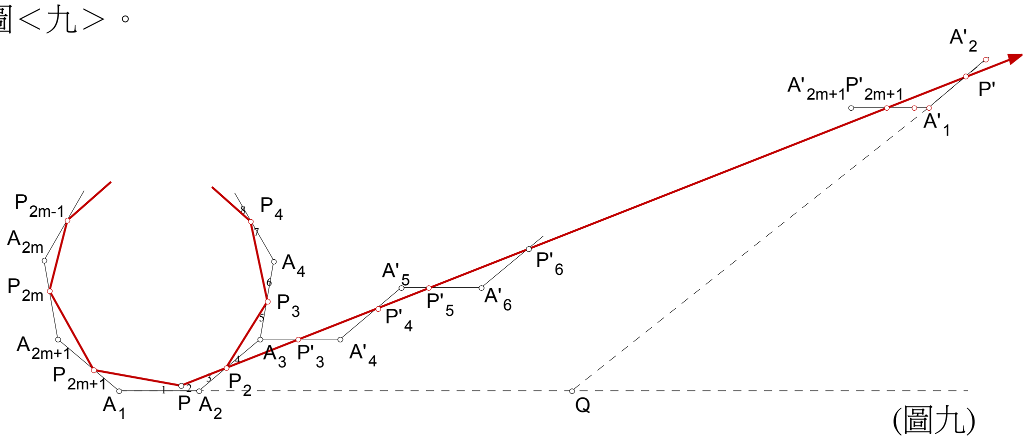
＜問題二＞：自正 2m+1 邊形上一點 P 發出一條光線，若可形成光圈，則爲何種光圈？其路徑又如何？

由[前言]可知，此問題爲 n=2m+1 之情形，因此可得

$$\begin{cases}\angle 3=\angle 4=\angle 7=\angle 8=\cdots=\angle(4m-1)=\angle 4m=\angle 1\\ \angle 5=\angle 6=\angle 9=\angle 10=\cdots=\angle(4m+1)=\angle(4m+2)=\angle 2\end{cases}$$

可推得 $\angle P_2PP_{2m+1}=180°-(\angle 1+\angle 2)=180°-(\angle 3+\angle 2)=180°-\dfrac{360°}{n}=\angle A_2$

接著，同正 2m 邊形討論一樣。我們可將形成光圈之路徑圖改成無障礙直線路徑圖，如圖＜九＞。



(圖九)

1.特別地，當 P 在端點 A_1(或 A_2)，由上圖可知光線路徑爲 $A_1-P_2-P_3-\cdots-P_{2m}-A_1$(或 $A_2-P_3-P_4-\cdots-P_{2m+1}-A_2$)可得結論：

(1)當 m=1，無光圈。

(2)當 m>1，有光圈。

且兩者光線皆終止於原出發點 A_1(或 A_2)上。

2.當 P 不在端點上，且∠1=∠2

$\Rightarrow \Delta QPP'$ 爲等腰三角形

$\Rightarrow \overline{QP}=\overline{QP'} \quad \Rightarrow \overline{QA_2}+\overline{PA_2}=\overline{QA'_1}+\overline{P'A'_1}$

$$\Rightarrow (\overline{A_3A'_4}+\overline{A'_5A'_6}+\cdots+\overline{A'_{2m+1}A'_1})+\overline{PA_2}$$
$$=(\overline{A_2A_3}+\overline{A'_4A'_5}+\cdots+\overline{A'_{2m}A'_{2m+1}})+\overline{PA_1}$$

$$\Rightarrow \overline{PA_2}=\overline{PA_1}$$

即當 P 爲 $\overline{A_1A_2}$ 的中點時，可得**[完美光圈]**。

3.當 P 不在端點，且 $\angle 1 \neq \angle 2$

由上可得 P 不爲 $\overline{A_1A_2}$ 中點形成之光圈爲[非完美光圈]，其路徑將離開光圈，並依[光的反射定律]繼續前進。至於其路徑如何？我們將＜問題二＞分成＜問題二－1＞正三角形、＜問題二－2＞正五邊形及＜問題二－3＞一般正 2m+1 邊形來討論：

＜問題二－1＞：對於正△ $A_1A_2A_3$，P 在 $\overline{A_1A_2}$ 上，若 $\overline{A_1A_2}$ ＝1 單位長、$\overline{A_1P}$ ＝s 單位長（其中 0＜s＜1），自 P 發出一條光線形成光圈，其光線行進路徑會如何？

問題解決分析：

首先，將正△的光圈路徑圖改成無障礙之直線路徑圖，並予以座標化。但當我們將直線路徑圖置於直角座標平面上時，發現頂點座標並非全爲格子點座標，又因爲鏡射所得的圖形僅由三個方向構成。因此，經過我們研究，如以斜角座標平面來處理時，可將鏡射後的頂點皆化爲格子點座標。如此，可大幅簡化過程的討論，座標化如下：(見圖十)

①原點：$A_1(0，0)$

②x 軸：$\overleftrightarrow{A_1P}$

③y 軸：以 A_1 爲中心，將 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 逆時針旋轉 120^0($\Delta A_1A_2A_3$ 之外角)，得之

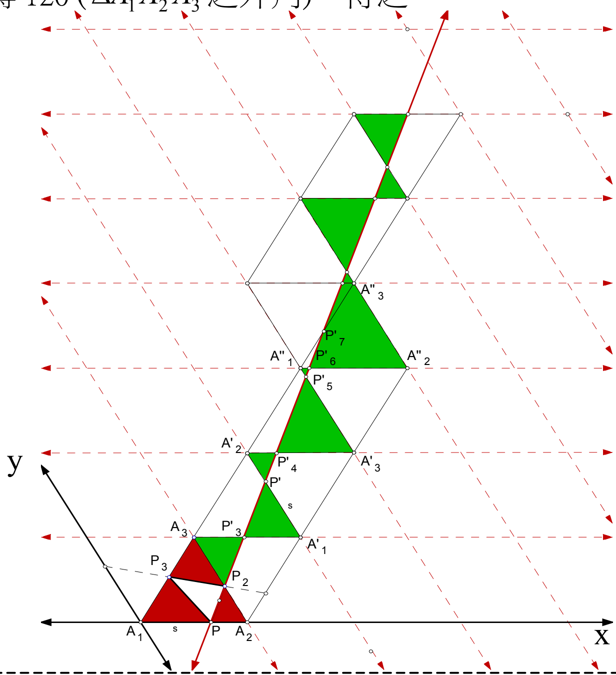
由(圖十)知　P(s，0)、$A_2(1，0)$、$A_3(1，1)$、$P'(2，1+s)$、$A'_1(2，1)$、$A'_2(2，2)$

可推得

$$\overleftrightarrow{PP'}:\frac{y-0}{x-s}=\frac{(1+s)-0}{2-s}$$
$$y=\frac{1+s}{2-s}(x-s)$$

$\overleftrightarrow{A_1A'_1}: y=\frac{1}{2}x$　　(當 s=0)

$\overleftrightarrow{A_2A'_2}: y=2(x-1)$　(當 s=1)



(圖十)

1.當$s=\frac{1}{2}$，由＜問題二＞研究可得

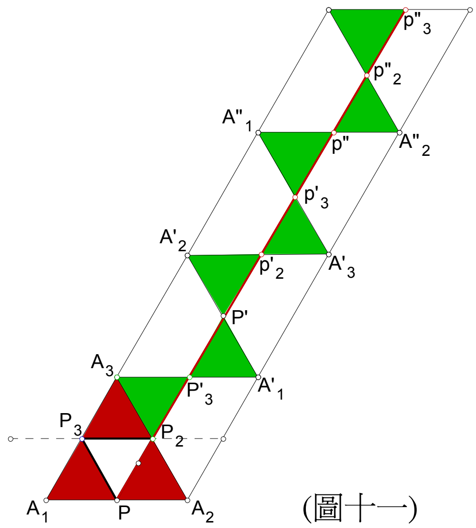
(1)光的直線路徑圖

$\overrightarrow{PP'}: y=x-\frac{1}{2}$

(2)光圈ΔPP_2P_3爲[完美光圈]

(3)路徑在ΔPP_2P_3周界不停的循環

(如圖十一)



(圖十一)

2.當$\frac{1}{2}<s<1$

光的直線路徑圖如圖(十二)

(1)由圖(十二)觀察可猜測下列幾種可能情形：

① $\overrightarrow{PP'}$通過正三角形的頂點，則還原在正△$A_1A_2A_3$內光線之行進會終止於頂點。

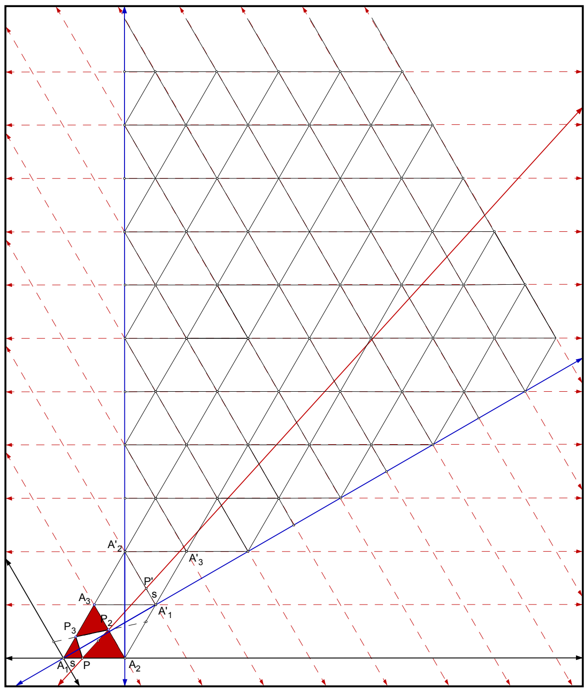
② $\overrightarrow{PP'}$不通過正三角形的頂點，則可能

ⓘ產生循環問題

ⓘⓘ產生不循環問題

(2)當$\overrightarrow{PP'}$通過正三角形的頂點，則此頂點座標可令爲 A(a，b)，a，b$\in N$

代入$\overrightarrow{PP'}$方程式得



(圖十二)

$$b=\frac{1+s}{2-s}(a-s)$$

$$\Rightarrow 2b-bs=a+as-s^2-s$$

$$\Rightarrow s^2-(a+b-1)s+2b-a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots [二\text{-}1.1]$$

$$\Rightarrow s=\frac{(a+b-1)\pm\sqrt{(a+b-1)^2-4(2b-a)}}{2}$$

由圖(十二)可觀察知 $a\geq 3, b\geq 3$

得判別式$(a+b-1)^2-4(2b-a)$

$=(a+1)^2+(b-5)^2+2ab-25>0$

∴ s 有解，即$\overrightarrow{PP'}$存在通過正三角形的頂點。

①當 s 爲有理數，顯然不合。($\because \frac{1}{2}<s<1$，而上述 s 值若有解，則 2s 值必爲

整數)

②A(a，b)落在

$$\begin{cases} y > x - \dfrac{1}{2} \\ y < 2(x-1) \end{cases}$$

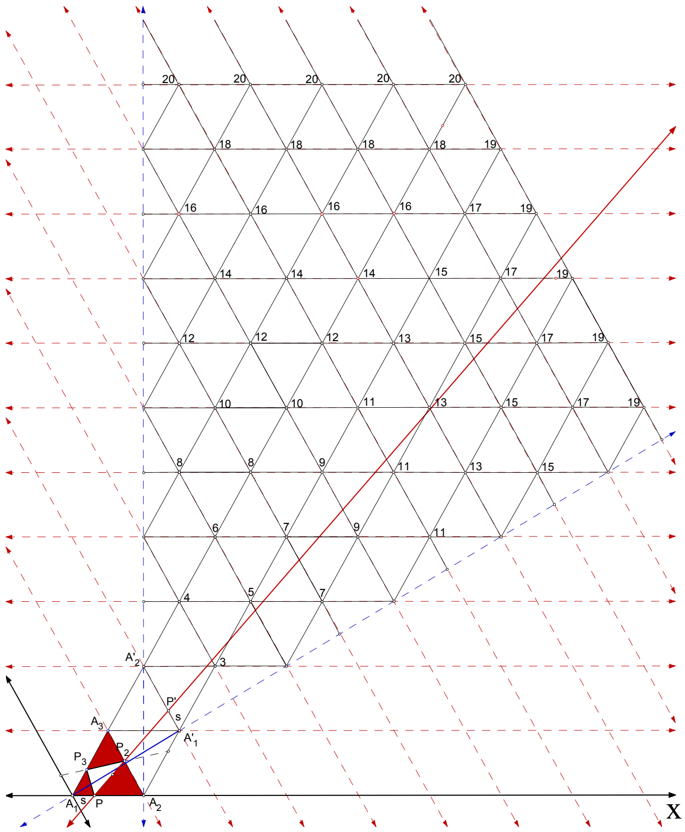
$$\Rightarrow \begin{cases} b > a - \dfrac{1}{2} \\ b < 2(a-1) \end{cases}$$

圖形區域內

$\Rightarrow a - \dfrac{1}{2} < b < 2(a-1)$

$\Rightarrow a \le b < 2(a-1)$

顯然，當$\dfrac{1}{2}$<s<1 時，$\overrightarrow{PP'}$可能通過正三角形的頂點，且此時$a \le b < 2(a-1)$，並可得知 s 值必為無理數。



(圖十三)

③當還原在正△$A_1A_2A_3$內，$\because \overline{PA}$穿越$2b$-1 個三角形，$\therefore$共反射 2(b-1)次，終止於頂點。(如圖十三)

又$\because A_1\ A_2\ A_1'\ A_3$為平行四邊形，其中$A_1(0,0)$、$A_2(1,0)$、$A_3(1,1)$，易得鏡射後△$A_1A_2A_3$三頂點所產生的像位置之點座標$(x_1, y_1)$、$(x_2, y_2)$、$(x_3, y_3)$必分別為$3\,|\,(x_1+y_1)$、$3\,|\,(x_2+y_2-1)$、$3\,|\,(x_3+y_3-2)$

$\therefore$由 A(a，b)可確知光線路徑會終止於△$A_1A_2A_3$那一頂點。

④當給定光線經 2(b-1)次，可反射後終止於頂點，則由$a \le b < 2(a-1)$可得

$\dfrac{1}{2}b + 1 < a \le b$

又對正 n 邊形，當$0 < s < 1$時，過 P 點皆同時有一順、逆時針之光圈，所以 s 值共有

$$2\left[b - (\frac{1}{2}b+1) + \frac{1}{2}\right] = 2\left[\frac{1}{2}(b-1)\right] \quad 個解$$

其逆時針所得光圈的光線直線路徑圖，第一次所通過的正三角形頂點座標

爲(b，b)、(b-1，b)、…….、($\left[\frac{1}{2}b+2\right]$，b)，且可確定每一種情況的光線路徑會終止於△$A_1A_2A_3$那一頂點。

(3)當$\overrightarrow{PP_2}$不通過正三角形的頂點，則

當產生循環問題，可令第一個循環點座標爲(a+s，b)其中a、$b\in N$

代入$\overleftrightarrow{PP'}$方程式，得

$$\begin{aligned}b&=\frac{1+s}{2-s}(a+s-s)\\&=\frac{1+s}{2-s}\cdot a\end{aligned}$$

①當 s 爲有理數

ⓘ令$s=\frac{q}{p}$，p、$q\in N$，$(p，q)=1$

$$\therefore b=\frac{1+\frac{q}{p}}{2-\frac{q}{p}}\cdot a$$

$$b(2p-q)=(p+q)\cdot a$$

$$p(2b-a)=q(a+b)$$

又$\because (p，q)=1$

$$\therefore\begin{cases}a+b=pt\\2b-a=qt\end{cases}\quad t\in N$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=\dfrac{p+q}{3}\cdot t\\[2ex]a=\dfrac{2p-q}{3}\cdot t\end{cases}$$

ⓘⓘ$\because (a+s,b)$爲循環點座標

$$\therefore 3|a+b$$

又$a+b=\frac{p+q}{3}\cdot t+\frac{2p-q}{3}\cdot t=p\cdot t$

$\therefore t$取3，得

$$\begin{cases}a=2p-q\\b=p+q\end{cases}\quad and\quad\begin{cases}p=\dfrac{a+b}{3}\\[2ex]q=\dfrac{2b-a}{3}\end{cases}$$

即第一次循環點座標 $P''(2p-q+\frac{q}{p},\ p+q)$

且 $\because \frac{1}{2}<s=\frac{q}{p}<1$

$\Rightarrow p<2q$

$\Rightarrow a-b=(2p-q)-(p+q)=p-2q<0$

$\therefore$ 可得 $\overline{PP''}$ 穿越 $2b$ 個三角形

即還原在正△ $A_1A_2A_3$ 內，光線路徑共反射 2b-1 次回到 P 點，再作無限次相同路徑的反射。

②當 s 為無理數

由 $b=\frac{1+s}{2-s}\cdot a$ 推得 $s=\frac{2b-a}{a+b}$ 為有理數，不合

至此我們確定，**當 s 值為無理數，則路徑不循環。**

又由上述得知當路徑 $\overrightarrow{PP'}$ 通過正三角形的頂點，則 s 值必為無理數。反之，s 值為無理數，則 $\overrightarrow{PP'}$ 是否必通過正三角形的頂點？

我們以 $0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<1$ 代入 $\overleftrightarrow{PP'}$ 方程式

由[二-1.1]可得

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(a+b-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2b-a=0$$

$$(5+2b-a)-[2\sqrt{6}+(a+b-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})]=0$$

$\because 2\sqrt{6}+(a+b-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})\neq 0$

$\therefore$ 不合，可得當 $s=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 路徑不到達頂點

即 s 值為無理數，光線在 $\Delta A_1A_2A_3$ 內可能終止於頂點或在內部作不循環的反射。

3.當 $0<s<\frac{1}{2}$

同上述討論，可得結論：

(1)①當 $\overrightarrow{PP'}$ 通過正三角形的頂點，則 s 值必為無理數。

②若直線路徑圖第一次所通過的頂點為 A(a，b)，則

$\because$ A(a，b)落在

$$\begin{cases} y > \frac{1}{2}x \\ y < x - \frac{1}{2} \end{cases}$$ 圖形區域內

$$\Rightarrow \begin{cases} b > \frac{1}{2}a \\ b < a - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}a < b < a$$

③**當還原到正△ $A_1A_2A_3$ 內，光線路徑共反射 2(a-1)-1=2a-3 次而終止於頂點(由圖十三可推得)**

△1**當** $3|a+b$ **，終止於** A_1

△2**當** $3|a+b-1$ **，終止於** A_2

△3**當** $3|a+b-2$ **，終止於** A_3

④ $\because \frac{1}{2}a < b < a$

$\therefore$ s 值之解共 $2\left[a-\frac{1}{2}a\right] = 2\left[\frac{1}{2}(a-1)\right]$ 個解

其逆時針所得光圈的光線路徑圖，第一次所通過的正三角形頂點座標為 (a，a-1)、(a，a-2)、…….、(a，a-$\left[\frac{1}{2}(a-1)\right]$)，且可確定每一種情況的光線路徑會終止於△ $A_1A_2A_3$ 那一頂點。

(2)當 $\overrightarrow{PP_2}$ 不通過正三角形的頂點，則

①**當 s 為有理數，可得路徑必循環，且**

ⅰ**第一次循環點座標** $P''(2p-q+\frac{q}{p}, p+q)$

ⅱ**還原在正△ $A_1A_2A_3$ 內，光線路徑共反射 $2a$-1 次回到 P 點，再作無限次相同路徑的反射。**

②**當 s 為無理數，則路徑不循環**

接著，我們提出下列兩例子，以更清楚的呈現上述研究結果：

範例一：自正△$A_1A_2A_3$，$\overline{A_1A_2}$上一點 P 發出一條光線以逆時針形成光圈，其中$\overline{A_1A_2}$ ＝1 單位長，$\overline{A_1P}=\frac{4}{5}$單位長，則其光線行進路徑如何？

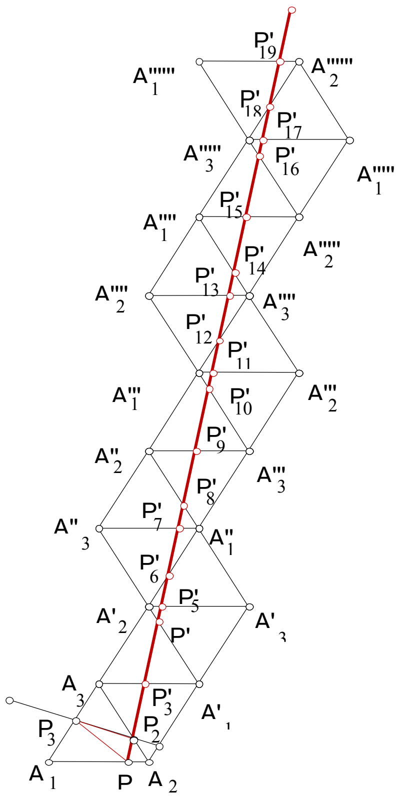
解析：$\because s=\frac{4}{5}$ $\quad\therefore p=5\,,q=4$

$\Rightarrow P(\frac{4}{5}\,,0)\,,P'(2\,,1\frac{4}{5})$，$(a\,,b)=(2p-q\,,p+q)=(6\,,9)$

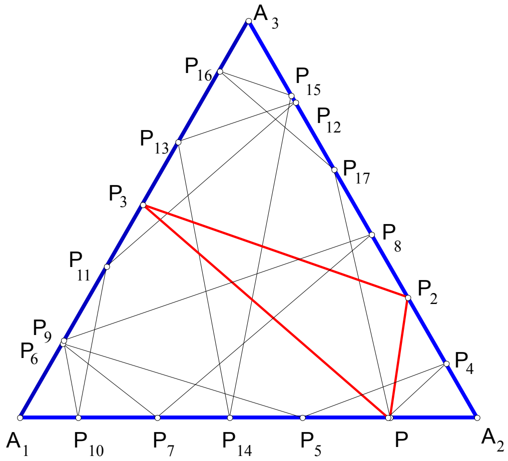
①可得光線直線路徑圖第一次循環點座標 $P''\,(6\frac{4}{5}\,,9)$

②每一次循環路徑共反射 2b-1=17 次回到 P 點

③利用以上的資料,我們可畫出以下圖＜十四＞光線行進路線展開圖及圖＜十五＞光線在單一三角形內不斷反射的過程。



圖＜十四＞



圖＜十五＞

範例二：自正△$A_1A_2A_3$，$\overline{A_1A_2}$上一點 P 發出一條光線形成光圈，其中$\overline{A_1A_2}$ ＝1 單位長，若經第 8 次反射可終止於頂點，則$\overline{A_1P}$應為幾單位長？並作出光線行進路徑圖。

解析：①當光圈為逆時針

∵已知 8 次反射終止於頂點

$\therefore \frac{1}{2} < s < 1$

且 $2(b-1)=8 \quad \therefore b=5$ 又 $a \le b < 2(a-1) \quad \therefore a=5,4$

$\Rightarrow$ 光線直線路徑第一次通過點座標 $A(4,5)$ 、 $A(5,5)$

代入 $s=\dfrac{(a+b-1)\pm\sqrt{(a+b-1)^2-4(2b-a)}}{2}$

得 $s=4\pm\sqrt{10}$, $\dfrac{9\pm\sqrt{61}}{2}$ $(4+\sqrt{10}$, $\dfrac{9+\sqrt{61}}{2}$ 不合)

ⓘ當 $s=4-\sqrt{10}$ 光線終止於 A_1

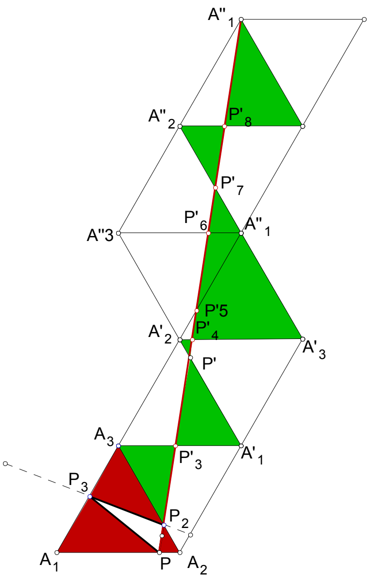
ⓘⓘ當 $s=\dfrac{9-\sqrt{61}}{2}$ 光線終止於 A_2

②當光圈爲順時針

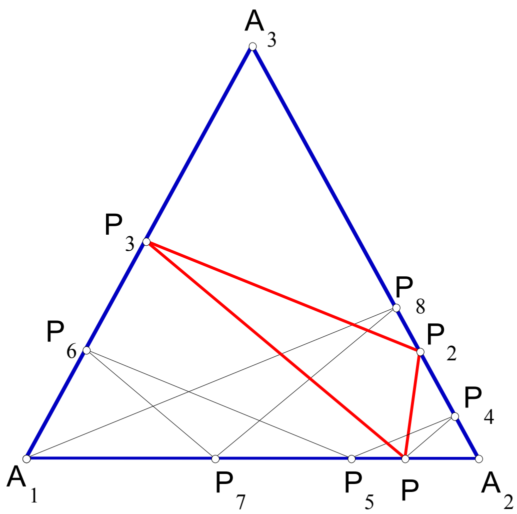
由①可得 $s=1-(4-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3$

及 $s=1-(\dfrac{9-\sqrt{61}}{2})=\dfrac{\sqrt{61}-7}{2}$

利用以上資料，我們可作出當 $s=4-\sqrt{10}$ 的兩種路徑圖如(圖十六)、(圖十七)。(另三種情況的作圖方式相同，因版面關係，所以略去)



(圖十六)



(圖十七)

＜問題二－2＞：對於正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ ，P 在 $\overline{A_1A_2}$ 上，若 $\overline{A_1A_2}$ ＝1 單位長， $\overline{A_1P}$ ＝s 單位長（其中 0＜s＜1），自 P 發出一條光線形成光圈，其光線行進路徑會如何？

問題解決分析：

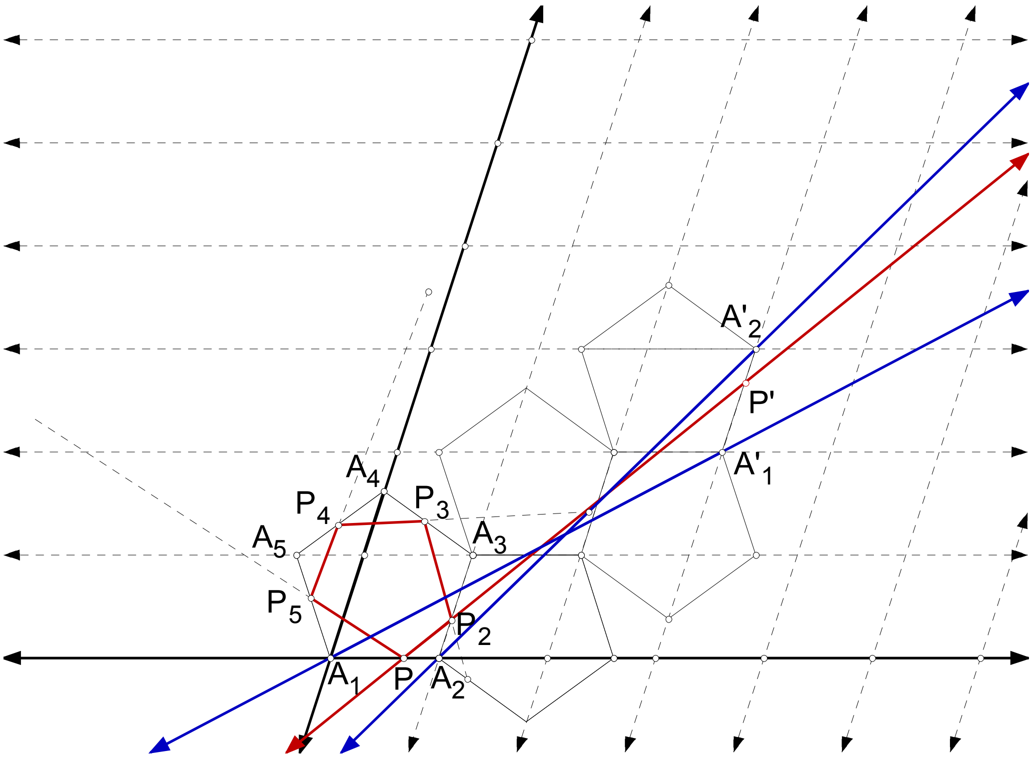
同正三角形的解決方式一樣，我們可將正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的光圈路徑圖改成無障礙

之直線路徑圖，並座標化如下：(如圖十八)

①原點：$A_1(0，0)$

②x 軸：$\overleftrightarrow{A_1P}$

③y 軸：以 A_1 爲中心，將 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 逆時針旋轉 72^0(正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 之外角)得之。



(圖十八)

由(圖十八)知

$P(s，0)$、$A_2(1，0)$、$A_3(1，1)$、$P'(3，2+s)$、$A'_1(3，2)$、$A'_2(3，3)$

可推得

$$\overleftrightarrow{PP'}: \frac{y-0}{x-s} = \frac{(2+s)-0}{3-s}$$

$$y = \frac{2+s}{3-s}(x-s)$$

$$\overleftrightarrow{A_1A'_1}: y = \frac{2}{3}x \qquad (當\ s=0)$$

$$\overleftrightarrow{A_2A'_2}: y = \frac{3}{2}(x-1) \qquad (當\ s=1)$$

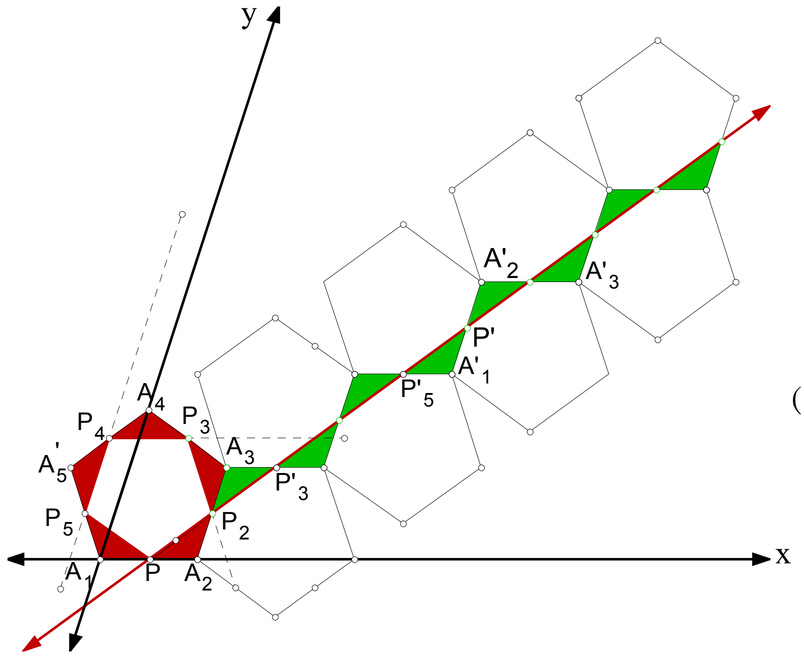
==

1.當 $s = \dfrac{1}{2}$

(1)光的直線路徑圖 $\overleftrightarrow{PP'}: y = x - \dfrac{1}{2}$

(2)光圈五邊形 $PP_2P_3P_4P_5$ 爲[完美光圈]

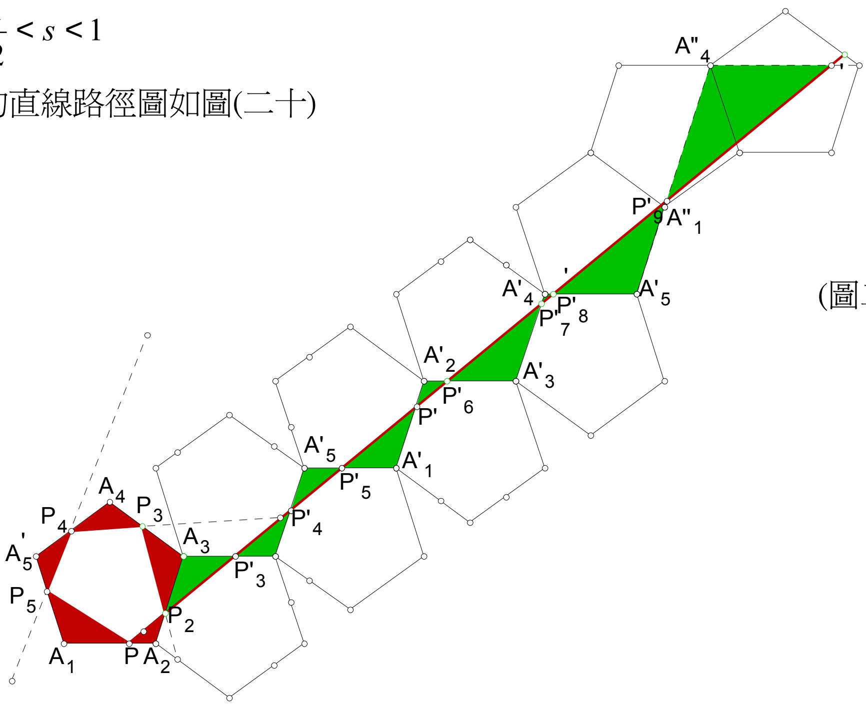
(3)路徑在 $PP_2P_3P_4P_5$ 周界不停的循環(如圖十九)



(圖十九)

2.當 $\frac{1}{2} < s < 1$

光的直線路徑圖如圖(二十)



(圖二十)

(1)由圖(二十)觀察可猜測下列幾種可能情形：

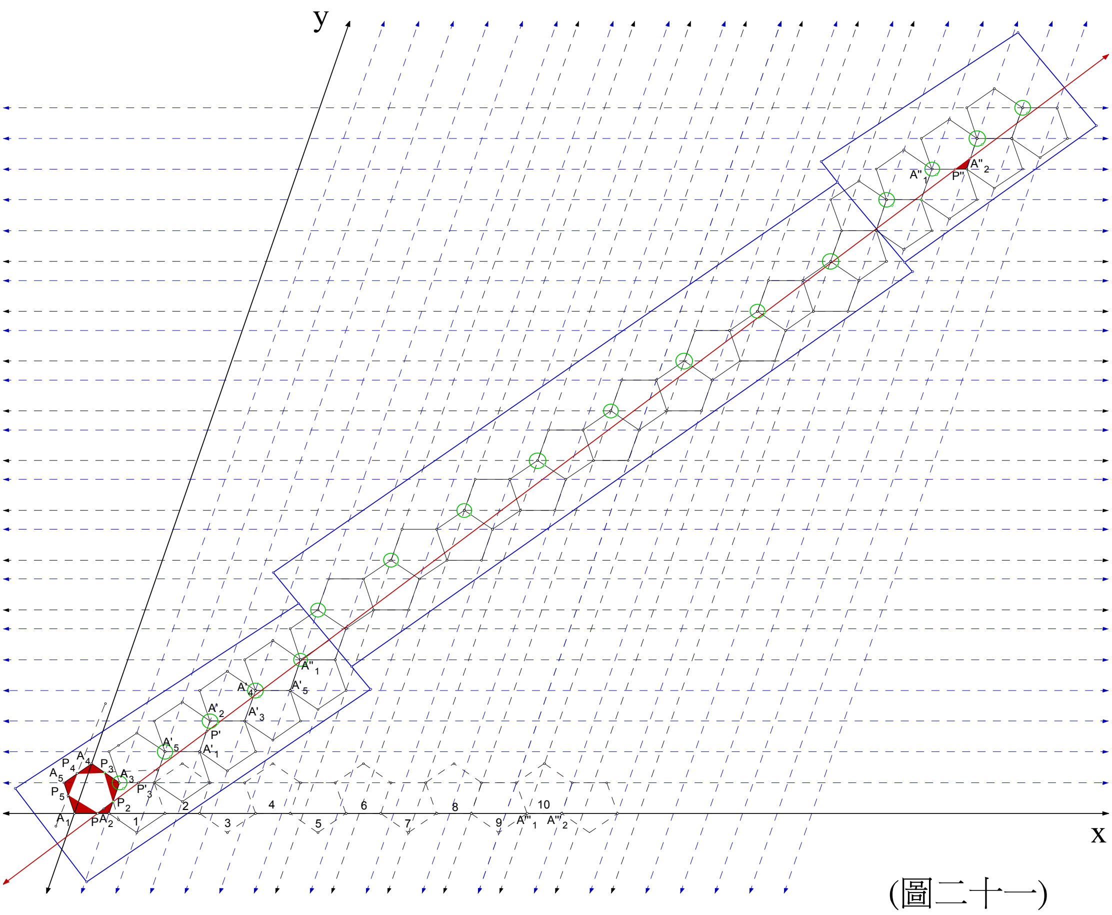
① $\overrightarrow{PP_2}$ 通過正五邊形的頂點，則還原在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 光線之行進會終止於頂點。

② $\overrightarrow{PP_2}$ 不通過正五邊形的頂點，則可能

ⓘ產生循環問題

ⓘⓘ產生不循環問題

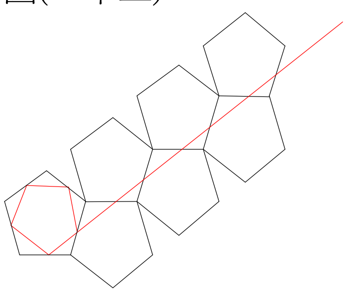
(2)利用 GSP 我們繪出當 $s=\frac{2}{3}$ 時的直線路徑圖(圖二十一)



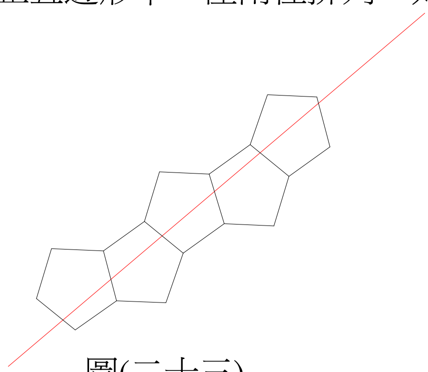
(圖二十一)

由圖(二十一)可發現：

①隨著光線的直線路徑圖鏡射所得的正五邊形中，僅兩種排列。如圖(二十二)、圖(二十三)



圖(二十二)



圖(二十三)

②利用圖(二十二)、圖(二十三)兩種排列，可將圖(二十一)直線路徑圖分區，並針對圖中**[圈起來的頂點]**予以探討可得

◇1每個頂點為兩個正五邊形所共同擁有，得每一區皆有偶數個正五邊形。

◇2從奇數區跨越偶數區 y 座標增加 $j(j=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$ 單位

◇3從偶數區跨越奇數區 x 座標增加 1 單位，y 座標增加 2 單位

從而可得每區[圈起來的頂點]座標之一般化為

第 2t 區末項座標為

$((e+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1})+(k_1+k_2+\cdots+k_t-t)j$，

$(e+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1}+t-1)+(k_1+k_2+\cdots+k_t)j)$

第 2t+1 區末項座標為

$((e+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1}+h_t)+(k_1+k_2+\cdots+k_t-t)j$，

$(e+t+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1}+h_t)+(k_1+k_2+\cdots+k_t)j)$

其中：◇①第一區[圈起來的頂點]末項座標(e，e)

◇②k_i 表第 2i 區圈起來的頂點個數(即第 2i 區共 $2k_i$ 個正五邊形)

◇③h_i 表第 2i+1 區圈起來的頂點個數(即第 2i+1 區共 $2h_i$ 個正五邊形)

③從第一次鏡射後的正五邊形開始數，每連續 10 個正五邊形，就產生第 10 個圖形與原正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 相關位置同方向。實際上，當我們將正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 沿著 x 軸方向連續翻轉至一定點，再沿著平行 y 軸連續翻轉至定位。若翻轉次數為 10 的倍數，則可得與原正五邊形相關位置同方向的正五邊形。且**每連續 2 個翻轉會將正五邊形圖形平移 1+j 個單位長**。

因此，翻轉到定位，得到與原正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 相關位置同方向之正五邊形時，因為最後一個[圈起來的頂點]座標為(a+cj，b+dj)，所以可得下面結論：

◇① $10 \mid a+b+c+d$

◇② $a+b=c+d$

(3)當 $\overrightarrow{PP'}$ 通過正五邊形的頂點，則此頂點座標可令為 $A(a+cj\,,\,b+dj)$

其中 a 、 $b \in N$, $j=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (正五邊形的對角線長)

代入 $\overleftrightarrow{PP'}$ 方程式得

$$b+dj=\frac{2+s}{3-s}(a+cj-s)$$

$$\Rightarrow 3b-bs+d(3-s)j=2a+as-s^2-2s+c(2+s)j$$

$$\Rightarrow [s^2-(a+b-2)s+3b-2a]-[(c+d)s+(2c-3d)]j=0 \cdots\cdots\cdots\cdots[二\text{-}2.1]$$

①當 s 為有理數，由[二-2.1]式中可得

$$s^2-(a+b-2)s+3b-2a=0$$

$$\Rightarrow s=\frac{(a+b-2)\pm\sqrt{(a+b-2)^2-4(3b-2a)}}{2} \text{ 不合}$$

($\because \dfrac{1}{2}<s<1$，而上述 s 值若有解，則 2s 值必為整數)

②光線的直線路徑是否存在通過頂點？

我們以 A(6，6)代入[二-2.1]化簡得

$$s^2 - 10s + 6 = 0$$

$$s = 5 \pm \sqrt{19}\ (5+\sqrt{19}\text{ 不合})$$

$$\because \frac{1}{2} < 5 - \sqrt{19} < 1$$

∴存在光線路徑終止於頂點，且此時 s 值必為無理數。

(4)當 $\overrightarrow{PP_2}$ 不通過正五邊形的頂點，則

如產生循環問題，可令第一個循環點座標為 $A(a+cj+s\,,b+dj)$ 其中 a 、$b \in N$, $j = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

代入 $\overleftrightarrow{PP'}$ 方程式，得

$$\begin{aligned} b + dj &= \frac{2+s}{3-s}(a+cj+s-s) \\ &= \frac{2+s}{3-s}\cdot(a+cj) \end{aligned}$$

$\Rightarrow 3b - bs + d(3-s)j = 2a + as + c(2+s)j$ ································[二-2.2]

$\Rightarrow [(a+b)s + 2a - 3b] + [(c+d)s + 2c - 3d]j = 0$

①∵第一次循環必發生在第 2t+1 區，根據第 2t+1 區一般化座標

$((e+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1}+h_t)+(k_1+k_2+\cdots+k_t-t)j$，

$(e+t+h_1+h_2+\cdots+h_{t-1}+h_t)+(k_1+k_2+\cdots+k_t)j)$

得 b=a+t d=c+t

又∵a+b=c+d (由圖二十一發現結論得之)

∴a+(a+t)=c+(c+t)⇒a=c⇒b=d

即**當(a+cj+s，b+dj)為循環點座標，則必 a=c 且 b=d**

代入[二-2.2]式中得

$[(a+b)s + (2a-3b)] + [(a+b)s + (2a-3b)]j = 0$

整理得 $s = \dfrac{(3b-2a)(1+j)}{(a+b)(1+j)} = \dfrac{3b-2a}{a+b}$

∴s 必為有理數

可得結論：

當 s 為無理數，則路徑不循環。

我們以 $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$ 代入 $\overleftrightarrow{PP'}$ 方程式

由[二-2.1]可得

$$[(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - (a+b-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (3b-2a)] - [(c+d)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (2c-3d)]j = 0$$

$$[5-2\sqrt{6}-(a+b-2)(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(3b-2a)]-[(c+d)(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2c-3d)]j=0$$

$\because$無理數部分不為 0

$\therefore$不合，可得當 $s=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 路徑不到達頂點

即 s 值為無理數，光線在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內可能終止於頂點或在內部作不循環的反射。

②$\because$ s 為有理數，由[二-2.2]式中可得

$$(a+b)s+2a-3b=0$$

$$\Rightarrow b=\frac{2+s}{3-s}\cdot a$$

ⓘ令 $s=\dfrac{q}{p}$ ， p 、 $q\in N$ ，$(p\ ，\ q)=1$

$$\therefore b=\frac{2+\frac{q}{p}}{3-\frac{q}{p}}\cdot a$$

$$b(3p-q)=(2p+q)\cdot a$$

$$p(3b-2a)=q(a+b)$$

又$\because (p\ ，\ q)=1$

$$\therefore \begin{cases} a+b=pr \\ 3b-2a=qr \end{cases} \quad r\in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=d=\dfrac{2p+q}{5}\cdot r \\ a=c=\dfrac{3p-q}{5}\cdot r \end{cases}$$

ⓘⓘ$\because (a+cj+s\ ,\ b+dj)$ 為循環點座標，$\therefore (a+cj\ ,\ b+dj)$ 必為 A_1 之像。

由(圖二十一)的發現，可知 $10 \mid a+b+c+d$

又 $a+b+c+d=2\cdot\dfrac{3p-q}{5}\cdot r+2\cdot\dfrac{2p+q}{5}\cdot r=2pr$

$\therefore$取 $r=5$ 時，可得第一次循環，且此時

$$\begin{cases} a=c=3p-q \\ b=d=2p+q \end{cases}$$

即**第一次循環點座標** $P''(3p-q+3pj-qj+\dfrac{q}{p},2p+q+2pj+qj)$

當還原在正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內，光線路徑共反射

(a+b+c+d-1)=2(3p-q)+2(2p+q)-1=10p-1 次

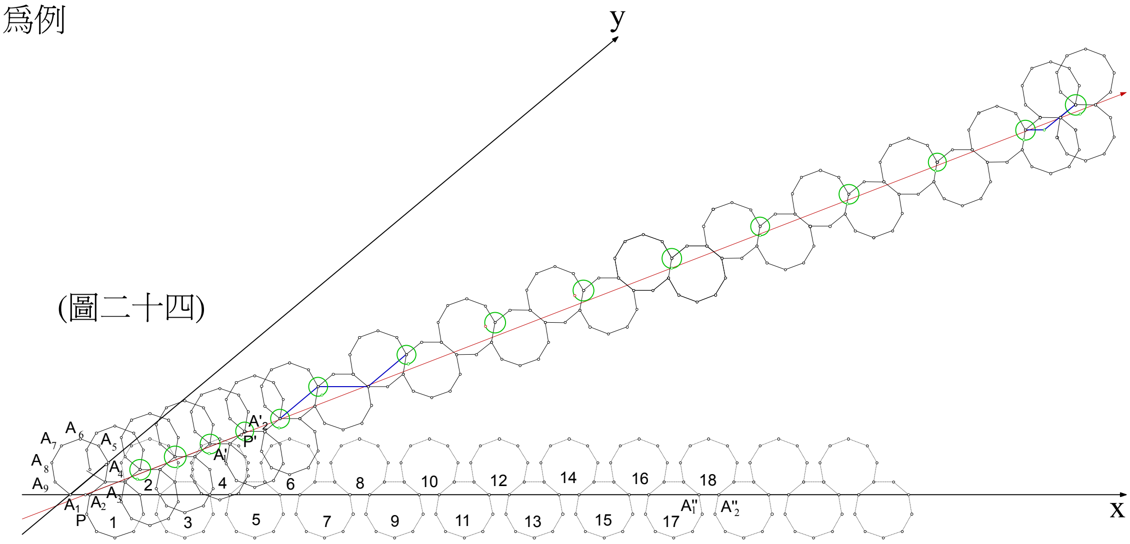
3.當 $0<s<\frac{1}{2}$ 其結論與 $\frac{1}{2}<s<1$ 相同。

最後，我們將正三角形與正五邊形的研究，推廣到正 2m+1 邊形，問題如下：

＜問題二－3＞：對於正 2m+1 邊形 $A_1A_2\cdots A_{2m+1}$，P 在 $\overline{A_1A_2}$ 上，若 $\overline{A_1A_2}$ ＝1 單位長，$\overline{A_1P}$＝s 單位長（其中 0＜s＜1），自 P 發出一條光線形成光圈，其光線行進路徑會如何？

問題解決分析：

將正五邊形的探討過程推廣到正 2m+1 邊形，以正九邊形的直線路徑圖(如圖二十四)爲例



(圖二十四)

從圖中可觀察到與正五邊形之發現有相同的結果。

1. 僅兩種排列

2. j= $\overline{A_2A_5}$ 之長度

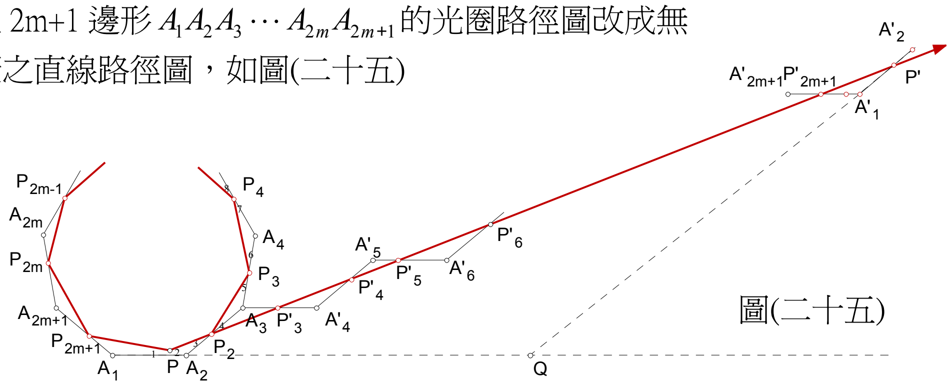
3. 翻轉到定位，得到與原正九邊形 $A_1A_2\cdots A_9$ 相關位置同方向之正九邊形時，

   最後一個[圈起來的頂點]座標(a+cj，b+dj)，必定使得

   $18 \mid a+b+c+d$

因此，我們可類推出結論：

將正 2m+1 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2m}A_{2m+1}$ 的光圈路徑圖改成無障礙之直線路徑圖，如圖(二十五)



圖(二十五)

並座標化如下：(如圖二十五)

①原點：$A_1(0，0)$

②x 軸：$\overleftrightarrow{A_1P}$

③y 軸：以 A_1 為中心，將 $\overleftrightarrow{A_1P}$ 逆時針旋轉 $\dfrac{360^0}{2m+1}$ (正 2m+1 邊形 $PP_2P_3\cdots P_{2m}P_{2m+1}$ 之外角)得之。

$\because P(s\,,0)\quad \therefore P'(m+1\,,m+s)$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{PP'}:\frac{y-0}{x-s}=\frac{(m+s)-0}{m+1-s}$$

$$y=\frac{m+s}{m+1-s}(x-s)$$

$$\overleftrightarrow{A_1A'_1}:y=\frac{m}{m+1}x \qquad (\text{當 } s=0)$$

$$\overleftrightarrow{A_2A'_2}:y=\frac{m+1}{m}(x-1) \qquad (\text{當 } s=1)$$

1.當 $s=\dfrac{1}{2}$

(1)光的直線路徑圖 $\overrightarrow{PP'}:y=x-\dfrac{1}{2}$

(2)光圈 2m+1 邊形 $PP_2P_3\cdots P_{2m}P_{2m+1}$ 為完美光圈

(3)路徑在 2m+1 邊形 $PP_2P_3\cdots P_{2m}P_{2m+1}$ 周界不停的循環

2.當 $\dfrac{1}{2}<s<1$

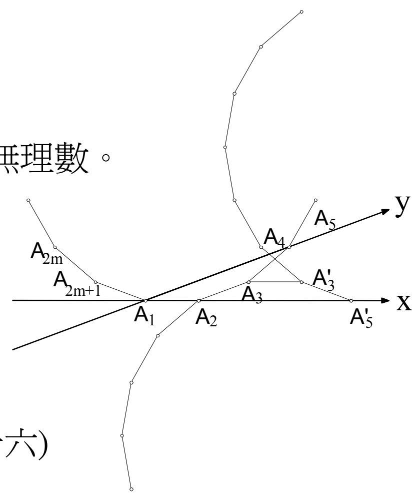
(1)當 $\overrightarrow{PP'}$ 通過正 2m+1 邊形的頂點，則 s 值為無理數。

(2)當 $\overrightarrow{PP_2}$ 不通過正 2m+1 邊形的頂點，則

①當產生循環問題，可令循環點座標為 $A(a+cj+s\,,b+dj)$

其中 a ，$b\in N$, $j=$ $\overline{A_2A_5}$ 長度(如圖二十六)

，且 s 值為有理數，$a=c$ ，$b=d$



(圖二十六)

代入 $\overleftrightarrow{PP'}$ 方程式，得

$$b+dj=\frac{m+s}{m+1-s}(a+cj+s-s)$$

$$=\frac{m+s}{m+1-s}\cdot(a+cj)$$

$$\Rightarrow (m+1)b-bs+d(m+1-s)j=ma+as+c(m+s)j$$

$\Rightarrow [(a+b)s+ma-(m+1)b]+[(c+d)s+mc-(m+1)d]j=0$

$\because$ s 爲有理數

$\therefore (a+b)s+ma-(m+1)b=0$

$\Rightarrow b=\dfrac{m+s}{m+1-s}\cdot a$

ⓘ令 $s=\dfrac{q}{p}$ ， p 、 $q\in N$ ， $(p$ ， $q)=1$

$$\therefore b=\frac{m+\frac{q}{p}}{m+1-\frac{q}{p}}\cdot a$$

$b[(m+1)p-q]=(mp+q)\cdot a$

$p[(m+1)b-ma)=q(a+b)$

又 $\because (p$ ， $q)=1$

$$\therefore \begin{cases} a+b=pr \\ (m+1)b-ma=qr \end{cases} \quad r\in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=d=\dfrac{mp+q}{2m+1}\cdot r \\ a=c=\dfrac{(m+1)p-q}{2m+1}\cdot r \end{cases}$$

ⓘⓘ $\because (a+cj+s\ ,b+dj)$ 爲循環點座標

又 $a+b+c+d=2\cdot\dfrac{(m+1)p-q}{2m+1}\cdot r+2\cdot\dfrac{mp+q}{2m+1}\cdot r=2pr$

$\therefore$ 取 $t=2m+1$ ，得

$$\begin{cases} a=c=(m+1)p-q \\ b=d=mp+q \end{cases}$$

即**第一次循環點**

$$P''((m+1)p-q+[(m+1)p-q]j+\frac{q}{p},mp+q+(mp+q)j])$$

當還原在正 2m+1 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_{2m}A_{2m+1}$ 內，光線路徑共反射

a+b+c+d-1=2[(m+1)p-q]+2(mp+q)-1=2(2m+1)p-1 次回到 P 點，再作無限次相同路徑的反射。

②當 s 爲無理數，則路徑不循環。

(3)當 $0<s<\dfrac{1}{2}$ 其結論與 $\dfrac{1}{2}<s<1$ 相同

至此，成功的解決光圈路徑相關問題。而因上述的研究，結論甚多。因此我們扼要的取出重點，放於[陸.結論]。

伍.結論：

對於正 n 邊形，我們發現：

一. 1.當 s=0(或 s=1)，則

(1)若 n 為偶數，則無光圈

(2)若 n 為奇數，且

①當 n=3，則無光圈

②當 $n \geq 5$，則有光圈，且光線路徑終止於出發點 A_1(或 A_2)。

2.當 s=$\frac{1}{2}$，則光圈為正多邊形的[完美光圈]，且光線路徑在光圈不停的循環。

3.當$\frac{1}{2}$<s<1

(1)若 n 為偶數，則光圈為自 P 點以仰角$\frac{180°}{n}$朝鄰邊射出得之。並且可為等角多邊形的[完美光圈]，且光線路徑在光圈不停的循環。

(2)若 n 為奇數，且

①當 s 為有理數，其中$s=\frac{q}{p}$、$(p,q)=1$，則光線路徑為循環路徑。

ⅰ當 n=3，每一循環路徑皆反射 2(p+q)-1 次

ⅱ當 n>3，每一循環路徑皆反射 2np-1 次

②當 s 為無理數，則

ⅰ光線路徑可能終止於頂點

並可猜測此時 S 值必型如$\alpha+\beta\sqrt{\gamma}$，其中$\alpha,\beta$為有理數，$\sqrt{\gamma}$為無理數

ⅱ光線路徑可能為不循環路徑

4.當$0<s<\frac{1}{2}$，

僅當 s 為有理數，且 n=3 時，每一循環路徑皆反射 2(2p-q)-1 次。其餘同$\frac{1}{2}$<s<1 之結論。

二.光線的直線路線圖$\overrightarrow{PP_2}: y=\frac{m+s}{m+1-s}(x-s)$，其中 n=2m+1。

三.光圈的路徑共有三種。

四.光線路徑與 s 值為有理數、無理數有關。

五.當 n 為奇數且 n>3 時，若光線為循環路徑，其每一循環的反射次數僅與 n、p 值有關。

陸.參考資料：

1.國民中學數學第四冊選修課本
2.中華民國第二十九屆中小學科展--------「n 邊形內具有最小周長的內接 n 邊形」
3.中華民國第三十八屆中小學科展--------「鏡射乾坤」

評語

利用對稱的概念探討正 n 邊形內光線的反射情況，給出了完整的解答。充份活用了國中所學到的座標幾何次和二次函數等概念，可看出對國中教材已有了通盤性的了解，十分難得。