

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

數學科

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：一個競賽題目的聯想~二項式係數整除性的研究

關鍵詞：組合數、帕斯卡三角形(巴斯卡三角形)、二項式係數

編號：030402

學校名稱：

台北縣立永和國民中學

作者姓名：

戴碩瑩、鍾榮哲、黃偉晉、廖科賢

指導老師：

陳永福



摘要

我們這份研究主要是看到了 IMO 預選題題冊裡面的一題「當 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 都不被 2 整除時，求 n 的條件？」後，決定要做更進一步、更大範圍的研究，我們把 2 換成其他質數或其他質數冪次方等，試著找出在符合所設條件時的 n 及質數 a 的關係。

這個研究分為兩部分：

- 一、探討二項式中某一單項 C_r^n ，若不被（或被）正整數 a 整除時， n 、 r 與 a 的關係。
- 二、探討二項式係數 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 都不被正整數 a 的倍數整除時， n 與 r 的關係。

◎ 第一部份，我們用了餘數的關係與不同的進位制去導出 n 、 r 與 a 的關係。

在此部份所得到的結果分成兩部分：

- (1) 當 a 只含一個質因數時，可求出 n 、 r 與 a 的關係。
- (2) 當 a 含有兩個以上的質因數時，則要同時滿足 a 的所有質因數的條件。

◎ 第二部份，我們用了兩種方法去證明我們的結果。

一個是用解原題所引申的方法去證的。

另一個是利用第一部份中所得到的結果去配合證明的。

在此部份所得到的結果分成二種：

- (1) a 只含一個質因數時，可求出 n 、 a 的關係之充要條件。
- (2) a 含有兩個以上的質因數，雖然我們不能有 n 、 a 的關係之充要條件，但卻可求出 n 的充分條件與例外的範圍。

接下來，再探討 n 項式係數時，運用了前面兩部分研究的結論。但由於 n 項式係數中受到了許多限制，我們只研究出了當 a 為質數時的條件。

而未來，我們除了希望能有更簡易的方法來表示 a 為合數時的條件，也希望能夠在 n 項式係數的研究中，能夠有更多的發揮。

壹、研究動機：

我們平日喜歡研究歷屆的數學競試試題，但很少找到一個有趣的題目供我們發揚光大。有一天，我們在一間社區圖書館涉獵知識時，閱覽到一套書籍，是歷屆的 IMO 預選題的合訂本。我們就拿來翻翻，結果找到一個不錯的問題：「二項式係數中，若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 皆不能被 2 整除，求 n 的條件？」，於是我們就把這問題拿來研究研究。

貳、研究工具：

紙，筆，電腦軟體(Microsoft Excel， Microsoft Word， Mathematica 4)，
四顆人腦。

參、研究目的：

- 一、對於二項式中的單項進行證明（不被整除）
- 二、對於二項式中的單項進行證明（被整除）
- 三、對於二項式進行證明（不被整除）
- 四、對於二項式進行證明（被整除）
- 五、對於 n 項式進行證明（不被整除）

肆、研究內容：

名詞說明與符號定義：

- ◎巴斯卡三角形：第 0 行是 1，第一行是 1、1，第二行以後每一項都是上一行與自己相鄰的兩個數的和，且第 n 行有 $n+1$ 項。
- ◎二項式定理：在二項式 $(x+1)^n$ 中，把 x^n 、 x^{n-1} 、 x^{n-2} 、……、 x^1 的係數排成一列，則其值與 C_0^n 、 C_1^n 、 C_2^n 、 C_3^n 、……、 C_n^n 相同，且與巴斯卡三角形第 n 行的值相同，稱為二項式定理。
- ◎ n 項式係數：用 $C_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^m$ 表示，其中， $m = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_n$
- 且 $C_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^m = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$ 。
- ◎ $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ：正整數 n 以 a 進位法表示之，可表示成 $(c+1)$ 位數。
- ◎ $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ：正整數 r 以 a 進位法表示之，可表示成 $(d+1)$ 位數。
- ◎ $\left[\frac{n}{a} \right]$ ：正整數 n 除以正整數 a 的商，取小於等於商之整數值。
- ◎ $\left[\frac{n}{a^2} \right]$ ：正整數 n 除以正整數 a^2 的商，取小於等於商之整數值。
- ◎ $\left[\frac{n}{a^r} \right]$ ：正整數 n 除以正整數 a^r 的商，取小於等於商之整數值。

一、對於二項式中的單項進行證明（不被整除）：

問題一：若 C_r^n 不被質數 a 整除，試求 n, r 和 a 的關係？

(一)猜測：若 C_r^n 不為質數 a 的倍數，且 $n = (\overline{M_d \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，
則對於所有 $M_i \geq N_i$ ($0 \leq i \leq d$)。（猜測想法請見附錄 2-1）

(二)證法：在 $n!$ 中，若 $n! = a^S \cdot k$ 且 a 不整除 k ，又 $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，

若 C_r^n 不被 a 整除，則分子的 a 的冪次方數必不大於分母的 a 的冪次方數。

所以可以導出下列不等式：

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\because n = r + (n-r)$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \text{ 必不小於 } \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\because n = r + (n-r)$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\text{設 } n = aX_0 + Y_0 \quad r = aX'_0 + Y'_0$$

$$\text{若 } Y_0 < Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = X_0 > \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor = X'_0 + X_0 - X'_0 - 1 = X_0 - 1 \text{ (不合)}$$

$$\text{若 } Y_0 \geq Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = X_0 = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor = X'_0 + X_0 - X'_0 = X_0$$

$$\text{設 } n = a^2X_1 + Y_1, \quad r = a^2X'_1 + Y'_1$$

$$\text{若 } Y_1 < Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = X_1 > \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor = X'_1 + X_1 - X'_1 - 1 = X_1 - 1 \text{ (不合)}$$

$$\text{若 } Y_1 \geq Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = X_1 = \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor = X'_1 + X_1 - X'_1 = X_1$$

.....

由上述所得結果，可以得到 $Y_0 \geq Y'_0, Y_1 \geq Y'_1, \dots$ 。

將 n, r 以 a 進位表示之，

$$\text{設 } n = (\overline{M_d \dots M_1 M_0})_a, \quad r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$$

$$\therefore Y_0 \geq Y'_0 \quad \therefore M_0 \geq N_0$$

$\therefore Y_1 \geq Y'_1 \quad \therefore M_1 \cdot a + M_0 \geq N_1 \cdot a + N_0 \quad \therefore (M_0 - N_0) \geq a(N_1 - M_1)$
 $\therefore M_0 < a, N_0 < a, M_0 - N_0 \geq 0$
 $\therefore M_0 - N_0 < a, N_1 - M_1 < 1$, 又 N_1 和 M_1 爲正整數 $\therefore M_1 - N_1 \geq 0 \quad \therefore M_1 \geq N_1$
 其他情況同理可得證。 $\therefore M_0 \geq N_0, M_1 \geq N_1, \dots, M_d \geq N_d$

結論：若 C_r^n 不爲質數 a 的倍數，且 $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，
 則對於所有 $M_i \geq N_i (0 \leq i \leq d)$ 。

範例一： $n=7909306971, r=88, a=7$

<解>：先將 7909306971 及 88 化爲 7 進制

$$7909306971 = 3666666666666_7, 88 = 154_7$$

$$\therefore 6 \geq 1, 6 \geq 5, 6 \geq 4 \text{ (對於所有 } M_i \geq N_i) \quad \therefore C_{88}^{7909306971} \text{ 不被 } 7 \text{ 整除}$$

範例二： $n=77948683, r=77948600, a=11$

<解>：先將 77948683 及 77948600 化爲 11 進制

$$77948683 = 3aaaaaa_{11}, 77948600 = 3aaaaa34_{11} \text{ (式子中 } a \text{ 的代表 } 10)$$

$$\therefore 3 \geq 3, a \geq a, a \geq a, a \geq a, a \geq a, a \geq 3, a \geq 4 \text{ (對於所有 } M_i \geq N_i) \quad \therefore C_{77948600}^{77948683} \text{ 不被 } 11 \text{ 整除}$$

問題二：若 C_r^n 不被 a^m (a 爲質數) 整除，試求 n 、 r 、 a 、 m 的關係？

(一)猜測：若 C_r^n 不爲 a^m 的倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，

則 $M_i < N_i$ 的組數與他們之前 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必小於 m 組。

(猜測想法請見附錄 2-1)

(二)證法： $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，若 C_r^n 不爲 a^m 的倍數，則分子的 a 的幕次必比分母的 a 的幕次

方小 m 次，所以，可導出下列不等式：

$$\left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n}{a^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{a^\infty} \right] < \left[\frac{r}{a} \right] + \left[\frac{r}{a^2} \right] + \dots + \left[\frac{r}{a^\infty} \right] + \left[\frac{n-r}{a} \right] + \left[\frac{n-r}{a^2} \right] + \dots + \left[\frac{n-r}{a^\infty} \right] + m \cdots (*)$$

$$\therefore n = r + (n-r)$$

$$\therefore \left[\frac{n}{a} \right] \geq \left[\frac{r}{a} \right] + \left[\frac{n-r}{a} \right], \left[\frac{n}{a^2} \right] \geq \left[\frac{r}{a^2} \right] + \left[\frac{n-r}{a^2} \right], \dots, \left[\frac{n}{a^\infty} \right] \geq \left[\frac{r}{a^\infty} \right] + \left[\frac{n-r}{a^\infty} \right]$$

$$\text{設 } n = aX_0 + Y_0, r = aX'_0 + Y'_0$$

$$\text{若 } Y_0 \geq Y'_0, \text{ 則 } \left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{r}{a} \right] + \left[\frac{n-r}{a} \right]$$

$$\text{若 } Y_0 < Y'_0, \text{ 則 } \left[\frac{n}{a} \right] = \left[\frac{r}{a} \right] + \left[\frac{n-r}{a} \right] + 1$$

$$\text{設 } n = a^2X_1 + Y_1, r = a^2X'_1 + Y'_1$$

$$\text{若 } Y_1 \geq Y'_1, \text{ 則 } \left[\frac{n}{a^2} \right] = \left[\frac{r}{a^2} \right] + \left[\frac{n-r}{a^2} \right]$$

$$\text{若 } Y_1 < Y'_1, \text{ 則 } \left[\frac{n}{a^2} \right] = \left[\frac{r}{a^2} \right] + \left[\frac{n-r}{a^2} \right] + 1$$

.....

因爲要符合(*)式，所以滿足 $Y_i < Y'_i$ 的個數必小於 m 個。

設 $n = (\overline{M_c \cdots M_1 M_0})_a$, $r = (\overline{N_d \cdots N_1 N_0})_a$ ($c \geq d$)

1、若 $Y_k \geq Y'_k$, 則 $a^k M_k + a^{k-1} M_{k-1} + \cdots + a M_1 + M_0 \geq a^k N_k + \cdots + N_0$

則 $a^k (M_k - N_k) \geq a^{k-1} (N_{k-1} - M_{k-1}) + \cdots + (N_0 - M_0)$

(1)若 $M_{k-1} > N_{k-1}$, 則 $M_k \geq N_k$

(2)若 $M_{k-1} < N_{k-1}$, 則 $M_k > N_k$

(3)若 $M_{k-1} = N_{k-1}$, 則 $M_k \geq N_k$

2、若 $Y_k < Y'_k$, 則 $a^k M_k + a^{k-1} M_{k-1} + \cdots + a M_1 + M_0 < a^k N_k + \cdots + N_0$

則 $a^k (M_k - N_k) < a^{k-1} (N_{k-1} - M_{k-1}) + \cdots + (N_0 - M_0)$

(1)若 $M_{k-1} > N_{k-1}$, 則 $M_k < N_k$

(2)若 $M_{k-1} < N_{k-1}$, 則 $M_k \leq N_k$

(3)若 $M_{k-1} = N_{k-1}$, 則 $M_k \leq N_k$

由上述條件知, 若 $M_k > N_k$, 則 $Y_k \geq Y'_k$, 若 $M_k < N_k$, 則 $Y_k < Y'_k$

若 $M_k = N_k$, 則探討 N_{k-1} 與 M_{k-1} 的關係, 若 $N_{k-1} > M_{k-1}$, $Y_{k-1} \geq Y'_{k-1}$, 同時, $Y_k < Y'_k$;

若 $M_{k-1} > N_{k-1}$, $Y_{k-1} < Y'_{k-1}$, $Y_k < Y'_k$, 若 $M_{k-1} = N_{k-1}$, 再探討 $M_{k-2} = N_{k-2}$, 以此法繼續討論下去, 即可得出所要證明的結果。

結論: 若 C_r^n 不為 a^m 的倍數, $n = (\overline{M_c \cdots M_1 M_0})_a$, $r = (\overline{N_d \cdots N_1 N_0})_a$

則(1)若 $M_i < N_i$, 則算一組

(2)若 $M_i = N_i$, 則比較右邊那一位, 一直比較到某一位 $M_k \neq N_k$ 時, $k < i$,

① $M_k > N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 k 組都不算

② $M_k < N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 $k+1$ 組共算成 $i-k$ 組

將(1)(2)中所得的組數相加, 則其和必小於 m 組。

範例一: $n=585937499, r=86, a=5, m=2$

<解>: 先將 585937499 及 86 化為 5 進制

$585937499 = 2144444444444_5$,

$86 = 321_5$

$S = 000$

$\therefore 4\epsilon 3$, 寫 0, $4\epsilon 2$, 寫 0, $4\epsilon 1$, 寫 0

$S = 0 + 0 + 0 = 0 < 2$ ($M_i < N_i$ 的組數與他們之前 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必小於 m 組)

$\therefore C_{86}^{585937499}$ 不被 5 的 2 次方整除

範例二: $n=41504822198929, r=120, a=23, m=2$

<解>: 先將 41504822198929 及 120 化為 23 進制

$41504822198929 = 100mmmmmmmm_{23}$ (式子中 m 的代表 22)

$120 = 55_{23}$

$S = 00$

$\therefore m\epsilon 5$, 寫 0, $m\epsilon 5$, 寫 0

$S = 0 + 0 = 0 < 2$ ($M_i < N_i$ 的組數與他們之前 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必小於 m 組)

$\therefore C_{120}^{41504822198929}$ 不被 23 的 2 次方整除

二、對於二項式中的單項進行證明（被整除）：

問題三：若 C_r^n 被質數 a 整除，試求 n 、 r 、 a 的關係？

(一)猜測：若 C_r^n 為質數 a 倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$
則存在至少一個 $M_i < N_i$ ($0 \leq i \leq d$)。(猜測想法請見附錄 2-1)

(二)證法： $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，若 C_r^n 被 a 整除，則分子的 a 的幕次方數必大於分母 a 的幕次方數。所以可以導出下列不等式：

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\therefore n = r + (n-r)$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\text{若 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\text{則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor \text{ 或 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor \text{ 或 } \dots \text{ 或 } \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\text{設 } n = aX_0 + Y_0, r = aX'_0 + Y'_0$$

$$\text{若 } Y_0 < Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = X_0 > \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor = X'_0 + X_0 - X'_0 - 1 = X_0 - 1$$

$$\text{若 } Y_0 \geq Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = X_0 = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor = X'_0 + X_0 - X'_0 = X_0$$

$$\text{設 } n = a^2 X_1 + Y_1, r = a^2 X'_1 + Y'_1$$

$$\text{若 } Y_1 < Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = X_1 > \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor = X'_1 + X_1 - X'_1 - 1 = X_1 - 1$$

$$\text{若 } Y_1 \geq Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = X_1 = \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor = X'_1 + X_1 - X'_1 = X_1$$

$\therefore$ 若上述不等式成立，則 $Y_0 < Y'_0$ 或 $Y_1 < Y'_1$ 或 $\dots$ ，必至少有一個會成立。

$$\text{設 } n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$$

$$\text{設 } Y_i < Y'_i, \text{ 則 } M_i a^i + M_{i-1} a^{i-1} + \dots + M_0 a^0 < N_i a^i + N_{i-1} a^{i-1} + \dots + N_0 a^0$$

$$(M_i - N_i) a^i + (M_{i-1} - N_{i-1}) a^{i-1} + \dots + (M_0 - N_0) a^0 < 0$$

$$\therefore a > M_k - N_k > -a, \text{ 其中 } 0 \leq k \leq d, \therefore M_i - N_i < 0 \therefore M_i < N_i$$

$$\boxed{\text{結論}}: \text{若 } C_r^n \text{ 為質數 } a \text{ 倍數, } n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$$

則存在至少一個 $M_i < N_i$ ($0 \leq i \leq d$)。

範例一： $n=27512614111, r=55, a=31$

<解>：先將 27512614111 及 55 化為 31 進制

$$27512614111 = 100000000_{31}, 55 = 1o_{31} \quad (\text{式子中 } o \text{ 的代表 } 24)$$

$$\therefore 0 < 1, 0 < o \text{ (存在至少一個 } M_i < N_i) \therefore C_{55}^{27512614111} \text{ 被 } 31 \text{ 整除}$$

範例二： $n=279841, r=58, a=23$

<解>：先將 279841 及 58 化為 23 進制

$$279841=10000_{23}, 58=2c_{23}$$

$\therefore 0 < c$ ，or $0 < 2$ （存在至少一個 $M_i < N_i$ ） $\therefore C_{58}^{279841}$ 被 23 整除

問題四：若 C_r^n 被 a^m （ a 為質數）整除，試求 n 、 r 、 a 、 m 的關係？

(一)猜測：若 C_r^n 為 a^m 的倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，
則 $M_i < N_i$ 的組數與他們之前 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必大於等於 m 組。
(猜測想法請見附錄 2-1)

(二)證明： $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，若 C_r^n 為 a^m 的倍數，則分子的 a 的幕次方必比分母的 a 的幕次

方大於等於 m 次，所以，可導出下列不等式：

$$\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor + m \cdots (\times)$$

$$\because n=r+[n-r] \quad \therefore \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor; \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n}{a^\infty} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{r}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\text{設 } n = aX_0 + Y_0, \quad r = aX'_0 + Y'_0$$

$$\text{若 } Y_0 \geq Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor$$

$$\text{若 } Y_0 < Y'_0, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a} \right\rfloor + 1$$

$$\text{設 } n = a^2 X_1 + Y_1, \quad r = a^2 X'_1 + Y'_1$$

$$\text{若 } Y_1 \geq Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor$$

$$\text{若 } Y_1 < Y'_1, \text{ 則 } \left\lfloor \frac{n}{a^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{a^2} \right\rfloor + 1$$

因為要符合(*)式，所以滿足 $Y_i < Y'_i$ 的個數必大於等於 m 個。

$$\text{設 } n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, \quad r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a \quad (c \geq d)$$

$$1、\text{若 } Y_k \geq Y'_k, \text{ 則 } a^k M_k + a^{k-1} M_{k-1} + \dots + a M_1 + M_0 \geq a^k N_k + \dots + N_0$$

$$\text{則 } a^k (M_k - N_k) \geq a^{k-1} (N_{k-1} - M_{k-1}) + \dots + (N_0 - M_0)$$

$$(1)\text{若 } M_{k-1} > N_{k-1}, \text{ 則 } M_k \geq N_k$$

$$(2)\text{若 } M_{k-1} < N_{k-1}, \text{ 則 } M_k > N_k$$

$$(3)\text{若 } M_{k-1} = N_{k-1}, \text{ 則 } M_k \geq N_k$$

$$2、\text{若 } Y_k < Y'_k, \text{ 則 } a^k M_k + a^{k-1} M_{k-1} + \dots + a M_1 + M_0 < a^k N_k + \dots + N_0$$

$$\text{則 } a^k (M_k - N_k) < a^{k-1} (N_{k-1} - M_{k-1}) + \dots + (N_0 - M_0)$$

$$(1)\text{若 } M_{k-1} > N_{k-1}, \text{ 則 } M_k < N_k$$

$$(2)\text{若 } M_{k-1} < N_{k-1}, \text{ 則 } M_k \leq N_k$$

$$(3)\text{若 } M_{k-1} = N_{k-1}, \text{ 則 } M_k \leq N_k$$

由上述條件知，若 $M_k > N_k$ ， $Y_k \geq Y'_k$ ，若 $M_k < N_k$ ， $Y_k < Y'_k$

若 $M_k = N_k$ ，則探討 N_{k-1} 與 M_{k-1} 的關係，若 $N_{k-1} > M_{k-1}$ ， $Y_{k-1} \geq Y'_{k-1}$ ，同時， $Y_k < Y'_k$ ；若 $M_{k-1} > N_{k-1}$ ，

$Y_{k-1} < Y'_{k-1}$, $Y_k < Y'_k$, 若 $M_{k-1} = N_{k-1} \dots$, 再探討 $M_{k-2} = N_{k-2}$, 以此法繼續討論下去, 即可得

出所要證明的結果。

結論：若 C_r^n 不為 a^m 的倍數, $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$, $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$

則(1)若 $M_i < N_i$, 則算一組

(2)若 $M_i = N_i$, 則比較右邊那一位, 一直比較到某一位 $M_k \neq N_k$ 時, $k < i$,

① $M_k > N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 k 組都不算

② $M_k < N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 $k+1$ 組共算成 $i-k$ 組

將(1)(2)中所得的組數相加, 則其和必大於等於 m 組。

範例一： $n=343, r=45, a=7, m=2$

<解>：先將 343 及 45 化為 7 進制

$$343 = 1000_7$$

$$45 = 63_7$$

$$S = 11$$

$\because 0 < 3$, 寫 1, 下一位, $0 < 6$, 寫 1

$S = 1 + 1 = 2 \geq 2$ ($M_i < N_i$ 的組數與他們之後 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必大於等於 m 組)

$\therefore C_{45}^{343}$ 被 7 的 2 次方整除

範例二： $n=14641, r=50, a=11, m=2$

<解>：先將 14641 及 50 化為 11 進制

$$14641 = 10000_{11}$$

$$50 = 46_{11}$$

$$S = 11$$

$\because 0 < 4$, 寫 1, $0 < 6$, 寫 1

$S = 1 + 1 = 2 \geq 2$ ($M_i < N_i$ 的組數與他們之後 $M_{i-1} = N_{i-1}$ 的組數之和必大於等於 m 組)

$\therefore C_{50}^{14641}$ 被 11 的 2 次方整除

三、對於二項式進行證明（不被整除）：

問題五：（原題）若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 都不能被 2 整除，求 n 的條件？

（一）猜測：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 皆不能被 2 整除，則 $n=2^m-1$ 。

（m 為正整數）

（二）證法：

1、充分性：

$$C_r^n = \frac{(2^m-1)!}{r!(2^m-1-r)!} = \frac{(2^m-1) \times (2^m-2) \times (2^m-3) \times (2^m-4) \dots \times (2^m-r)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r}$$

$$= \frac{(2^m-1)}{1} \times \frac{(2^m-2)}{2} \times \frac{(2^m-3)}{3} \times \frac{(2^m-4)}{4} \times \dots \times \frac{(2^m-r)}{r}$$

設 j 為 1~r 之中的任一整數，且 $j=2^s \times b_j$ (b_j 為奇數且 $m>s$)

$$\text{則 } \frac{(2^m-j)}{j} = \frac{(2^m-2^s b_j)}{2^s b_j} = \frac{(2^{m-s}-b_j)}{b_j}$$

因為 b_j 為奇數， $2^{m-s}-b_j$ 也是奇數， $\therefore \frac{(2^m-j)}{j} = \frac{(2^{m-s}-b_j)}{b_j}$ 也是奇數。

$\therefore$ 連乘積 $\frac{(2^m-1)}{1} \times \frac{(2^m-2)}{2} \times \frac{(2^m-3)}{3} \times \frac{(2^m-4)}{4} \times \dots \times \frac{(2^m-r)}{r} = C_r^n$ 也是奇數。

$\therefore$ 不被 2 整除。

2、必要性：

若 n 不等於 2^m-1 ，則有兩種可能：

(1) $n=2^m \times h-1$ ($2\Phi h$ 且 $k \neq 1, m \neq 0$)

$$C_r^n = \frac{(2^m \times h-1)!}{r!(2^m \times h-1-r)!}$$

$$= \frac{(2^m \times h-1) \times (2^m \times h-2) \times (2^m \times h-3) \times (2^m \times h-4) \dots \times (2^m \times h-r)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times r}$$

$$= \frac{(2^m \times h-1)}{1} \times \frac{(2^m \times h-2)}{2} \times \frac{(2^m \times h-3)}{3} \times \frac{(2^m \times h-4)}{4} \times \dots \times \frac{(2^m \times h-r)}{r}$$

設 j 為 1~r 之中的任一整數，且 $j=2^s \times b_j$ (b_j 為奇數)

$$\text{則 } \frac{(2^m \times h-j)}{j} = \frac{(2^m \times h-2^s \times b_j)}{2^s \times b_j} = \frac{(2^{m-s} \times h-b_j)}{b_j}$$

當 $m=s$ 時，

$$\frac{(2^m \times h-j)}{j} = \frac{(2^{m-s} \times h-b_j)}{b_j} = \frac{(h-b_j)}{b_j}$$

再設 $h=2e+1$ ，則當 $1=b_j$ 時

$$\frac{(h-b_j)}{b_j} = 2e \text{ (也就是 } r \text{ 取 } 2^m \text{ 時)} \therefore C_r^n \text{ 為 } 2 \text{ 的倍數}$$

(2). $n=2h$ 取 $C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = n=2h$ 即為偶數，所以此題得證。

結論：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 都不為 2 的倍數

則 $n=2^m \cdot k-1$ ，且 $1 \leq k < 2$ ，m、k 為正整數。

範例一：n=63

<解>：∵ $63=2^6-1$ ∴ C_0^{63} 、 C_1^{63} 、……、 C_{63}^{63} 都不被2整除

範例二：n=15

<解>：∵ $15=2^4-1$ ∴ C_0^{15} 、 C_1^{15} 、……、 C_{15}^{15} 都不被2整除

問題六：若 C_0^n 、 C_1^n 、 C_2^n 、 C_3^n 、……、 C_n^n 都不能被質數a整除，求n、a的關係？

(一)猜測：若 C_0^n 、 C_1^n 、 C_2^n 、 C_3^n 、……、 C_n^n 皆不能被質數a整除，

則 $n = a^m \cdot k - 1$ ， $k \in \{1, 2, 3, \dots, a-1\}$ (m、k是正整數)

(猜測想法請見附錄 3-1)

(二)證法：

<證法一>

1、充分性：

$$\begin{aligned} C_r^n &= \frac{(a^m \times k - 1)!}{r!(a^m \times k - 1 - r)!} \\ &= \frac{(a^m \times k - 1) \times (a^m \times k - 2) \times (a^m \times k - 3) \times (a^m \times k - 4) \times \dots \times (a^m \times k - r)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times r} \\ &= \frac{(a^m \times k - 1)}{1} \times \frac{(a^m \times k - 2)}{2} \times \frac{(a^m \times k - 3)}{3} \times \frac{(a^m \times k - 4)}{4} \times \dots \times \frac{(a^m \times k - r)}{r} \end{aligned}$$

設j為1~r之中的任一整數，且 $j = a^s \times b_j$ (b_j 不為a的倍數且 $m \geq s$)

①當 $m > s$

$$\text{則 } \frac{(a^m \times k - j)}{j} = \frac{(a^m \times k - a^s b_j)}{a^s b_j} = \frac{(a^{m-s} \times k - b_j)}{b_j}$$

因為a不整除 b_j ，a也不整除 $a^{m-s} \times k - b_j$ ，

$$\therefore \text{連乘積 } \frac{(a^m \times k - 1)}{1} \times \frac{(a^m \times k - 2)}{2} \times \frac{(a^m \times k - 3)}{3} \times \frac{(a^m \times k - 4)}{4} \times \dots \times \frac{(a^m \times k - r)}{r} = C_r^n$$

也不是a的倍數。

②當 $m = s$ 則 $b_j < k$

$$\frac{(a^m \times k - j)}{j} = \frac{(a^m \times k - a^s b_j)}{a^s b_j} = \frac{(a^{m-s} \times k - b_j)}{b_j} = \frac{(k - b_j)}{b_j}$$

同樣的，因為a不整除 b_j ，a也不整除 $k - b_j$ ，

$$\therefore \text{連乘積 } \frac{(a^m \times k - 1)}{1} \times \frac{(a^m \times k - 2)}{2} \times \frac{(a^m \times k - 3)}{3} \times \frac{(a^m \times k - 4)}{4} \times \dots \times \frac{(a^m \times k - r)}{r} = C_r^n$$

也不是a的倍數。

2、必要性：

若 $n \neq a^m \times k - 1$ ，則有四種可能：

(1) $n = a^m \times h - 1$ ($h > a$ 且 a 不整除 h)

設 $h = ae + t$, ($e \geq 1$, $a \nmid e$, $a > t$)

$$C_r^n = \frac{[a^m(ae+t)-1]!}{r! \times [a^m(ae+t)-1-r]!} = \frac{(a^{m+1}e + a^m t - 1) \times \dots \times (a^{m+1}e + a^m t - r)}{1 \times 2 \times \dots \times r}$$

取 $r = a^m \times t$

$$\begin{aligned} \text{則 } C_r^n &= \frac{(a^{m+1}e + a^m t - 1) \times \dots \times (a^{m+1}e)}{1 \times 2 \times \dots \times (a^m t)} \\ &= \frac{(a^{m+1}e + a^m t - 1) \times \dots \times (a^{m+1}e + 1)ae}{1 \times 2 \times \dots \times (a^m t - 1) \times t} = C_{r-1}^n \times \frac{ae}{t} \end{aligned}$$

$\therefore C_{r-1}^n \in N$, 又 $a \nmid t \quad \therefore C_r^n$ 為 a 之倍數

(2). 當 $n = ah - d$ ($a - 1 > d > 1$), 取 $r = a - 1$

$\therefore d \geq 2 \quad \therefore C_r^n$ 分母沒有 a 的倍數，但分子有 a 的倍數，也就是 C_r^n 為 a 的倍數。

(3). 當 $n = ah + 1$

取 $r = a^k - 1$ (a^k 為 1 到 n 裡面最大的 a 的幕次方數)

這時，分子的 a 的幕次方數必大於分母的 a 的幕次方數，所以 C_r^n 為 a 的倍數。

(4). 當 $n = ah$

取 $r = 1$, $C_r^n = n = ah$ 為 a 的倍數。 所以此題得證。

<證法二>

設： $n = (\overline{M_c \dots M_d \dots M_1 M_0})_a$, $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$

根據問題一的結論，

若 C_r^n 不為質數 a 倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_d \dots M_1 M_0})_a$, $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$

對於所有 $M_i \geq N_i$ ($0 \leq i \leq d$)

$\therefore$ 對任意的 r , C_r^n 都不能被 a 整除 $\therefore M_0, M_1, \dots, M_{c-1}$ 都要是 $(a-1)$

又 $n \geq r \quad \therefore M_c$ 永遠不小於 N_c

$\therefore$ 除了 M_c 可任意變動外， $M_{c-1}, M_{c-2}, \dots, M_1, M_0$ 皆要為 $(a-1)$

$\therefore n = a^m \times k - 1$, 且 $1 \leq k < a$

結論：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 都不為質數 a 的倍數

則 $n = a^m \times k - 1$, 且 $1 \leq k < a$, m, k 為正整數。

範例一： $a=23, n=183$

<解>： $\therefore 183 = 23 \times 8 - 1 \quad \therefore C_0^{183}, C_1^{183}, \dots, C_{183}^{183}$ 都不被質數 23 整除

範例二： $a=19, n=189$

<解>： $\therefore 189 = 19 \times 10 - 1 \quad \therefore C_0^{189}, C_1^{189}, \dots, C_{189}^{189}$ 都不被質數 19 整除

問題七：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 都不被 a^m (a 為質數) 整除，求 n, a, m 之關係？

(一)猜測：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 皆不能被 a^m (a 為質數) 整除，

則 $n = a^s \cdot k - 1, k \in \{1, 2, 3, \dots, a^m - 1\}$ (k 為正整數) (猜測想法請見附錄 3-2)

(二)證法：

首先，根據問題二的結論：

$n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，若 C_r^n 不為 a^m 的倍數，

其 $M_i < N_i$ 與其後 $M_i = N_i$ 的組數和必小於 m 組。

對於 $n < a^m$ ：此條件成立是明顯的。

對於 $n \geq a^m$ ： $n = (\overline{M_c \dots M_m \dots M_1 M_0})_a$

若 $M_{c-m}, \dots, M_1, M_0$ 不全為 $a-1$ ，不妨假設 $M_k \neq a-1$ ($0 \leq k \leq c-m$)，

必可以找到一個 $r = (\overline{M_c \dots (M_k + 1) \dots M_1 M_0})_a$ 使 C_r^n 為 a^m 的倍數

$\therefore M_{c-m}, \dots, M_1, M_0$ 必須全為 $a-1$ ，而其它項 ($M_c, \dots, M_{c-m+1}$ 項) 可任意變化

$\therefore n = (\overline{M_c \dots (M_{c-m+1} + 1) \dots (a-1) \dots (a-1)})_a$ 。

$\therefore n+1 = M_c a^c + M_{c-1} a^{c-1} + \dots + (M_{c-m+1} + 1) a^{c-m+1}$ 。

$n+1 = a^{c-m+1} (M_c a^{m-1} + \dots + M_{c-m+1} + 1)$ ，其中 $M_c a^{m-1} + \dots + M_{c-m+1} + 1 \leq a^m$

1、若 $M_c a^{m-1} + \dots + M_{c-m+1} + 1 < a^m$ ，則 $n = a^s k - 1$ ，且 $2 \leq k < a^m$ ，($s = c - m + 1$)

2、若 $M_c a^{m-1} + \dots + M_{c-m+1} + 1 = a^m$ ，則 $n = a^s - 1$ ，($s = c + 1$)

$\therefore n = a^s k - 1$ ，且 $1 \leq k < a^m$

結論：若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 都不為 a^m (a 為質數) 的倍數

則 $n = a^s \cdot k - 1$ ，且 $1 \leq k < a^m$ ， m, k 為正整數。

範例一： $a=7^2, n=146$

<解>： $\because 146 = 7^2 \times 3 - 1 \quad \therefore C_0^{146}, C_1^{146}, \dots, C_{146}^{146}$ 都不被 7 的 2 次方整除

範例二： $a=3^4, n=161$

<解>： $\because 161 = 3^4 \times 2 - 1 \quad \therefore C_0^{161}, C_1^{161}, \dots, C_{161}^{161}$ 都不被 3 的 4 次方整除

問題八：若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 a ($a = X_1 \times X_2, X_1, X_2$ 為質數， $X_1 > X_2$) 整除時，求 n 與 X_1, X_2 的關係？

證明：因為 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 a 整除，所以取 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 X_1 或 X_2 整除時 n 之條件，必可滿足。也就是當 $n = X_1^m \times k - 1$ ($k < X_1, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m \times h - 1$ ($h < X_2, h \in \mathbb{N}$) 時，原題必定成立。接下來，我們要討論當 n 不是上述的數時， n 為何數時會使原題成立。【此時 n 稱做「例外」】。

設集合 A 為 $n = X_1^m \times k - 1$ ($k < X_1, k \in \mathbb{N}$)，集合 B 為 $n = X_2^m \times h - 1$ ($h < X_2, h \in \mathbb{N}$)

則根據餘數的概念，

$\overline{A}$ 分為 (1) $n = X_1^m \times k_1 - 1$ ($k_1 > X_1, X_1 \nmid k_1$)

(2) $n=X_1 \times h_1 + S_1$ ($0 \leq S_1 < X_1 - 1$) 兩部分
 $\overline{B}$ 分成(1) $n=X_2^m \times k_2 - 1$ ($k_2 > X_2$, $X_2 \nmid k_2$)
 (2) $n=X_2 \times h_2 + S_2$ ($0 \leq S_2 < X_2 - 1$) 兩部分
 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 即是「例外」所在。

我們可以把 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 分為三部份：

1. 當 $n = X_1 h_1 + S_1 = X_2 h_2 + S_2$

$\therefore X_1 \nmid n+1$, $X_2 \nmid n+1$ $\therefore$ 可設 $n = X_1 \times X_2 \times h_3 + S_3$ 且 X_1 、 $X_2 \nmid S_3 + 1$

$$C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 h_3 + S_3 - r + 1}{n - r + 1}, \text{ 取 } r = S_3 + 1, \text{ 則 } C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 h_3}{S_3 + 1}$$

$\therefore X_1$ 、 $X_2 \nmid S_3 + 1$ $\therefore$ 當 h_3 大於 0 時， C_r^n 為 $X_1 X_2$ 的倍數。

$\therefore$ 只有當 h_3 等於 0 時，也就是 $n < X_1 X_2$ ($n = S_3$) 時，才有可能為「例外」。

2. 當 $n = X_1^m \times k_1 - 1 = X_2 \times h_2 + S_2$ (X_1 、 X_2 可互換)

$\therefore X_2 \nmid n+1$ $\therefore X_2 \nmid k_1$

$$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r}, \text{ 取 } r = X_1^{m+1} \times X_2 - 1$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m+1} \times X_2}{X_1^m (k_1 - X_1 \times X_2)} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1 X_2}{k_1 - X_1 X_2}$$

$\therefore X_1$ 、 $X_2 \nmid k_1$ $\therefore$ 若 $k_1 > X_1 X_2$ 時， C_r^n 為 $X_1 X_2$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $X_1 < k_1 < X_1 X_2$ 時， $n = X_1^m k_1 - 1$ 時，才有可能為「例外」。

3. 當 $n = X_1^{m1} \times k_1 - 1 = X_2^{m2} \times k_2 - 1$

$n = X_1^{m1} X_2^{m2} \times k_4 - 1$ (X_1 、 $X_2 \nmid k_4$, $X_2^{m2} k_4 > X_1$)

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r}, \text{ 取 } r = X_1^{m1+1} X_2^{m2+1} - 1,$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1+1} X_2^{m2+1}}{X_1^{m1} X_2^{m2} k_4 - X_1^{m1+1} X_2^{m2+1}} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1 X_2}{(k_4 - X_1 X_2)}$$

$\therefore$ 若 $k_4 > X_1 X_2$, C_r^n 為 $X_1 X_2$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $k_4 < X_1 X_2$ 時，也就是 $n = X_1^{m1} X_2^{m2} k_4 - 1$ (X_1 、 $X_2 \nmid k_4$) 時，才有可能為「例外」。

結論：若 C_0^n 、 C_1^n 、..... C_n^n 均不被 a ($a = X_1 \times X_2$, X_1 、 X_2 為質數) 整除，

① 當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1$, $k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2$, $h \in \mathbb{N}$) 時必定成立。

② 當 1. $n < X_1 \times X_2$

2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1 X_2$)

3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1 X_2$)

4. $n = X_1^{m1} X_2^{m2} k - 1$ ($\frac{X_1}{X_2^{m2}} < k < X_1 X_2$) 時均有可能成立。

範例一： $n=13$, $X_1=5$, $X_2=3$, $X_1 \times X_2=15$

<解>： $\therefore 1. n < 15$

$$2. n = 3^0 \times 14 - 1 \quad (14 < 15)$$

$$3. n = 5^0 \times 14 - 1 \quad (14 < 15)$$

$\therefore 13$ 有可能為 15 的例外，(請見附錄 8) 發現 13 為 15 的例外

範例二： $n=34$ ， $X_1=5$ ， $X_2=3$ ， $X_1 \times X_2=15$

＜解＞ $\because 1.n=5 \times 7-1$ ($7 < 15$)

$\therefore 34$ 有可能為 15 的例外，(請見附錄 8)，發現 34 不為 15 的例外

問題九：若 C_0^n 、 C_1^n 、…… C_n^n 均不被 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$ ，(X_1 、 X_2 、……、 X_q 為質數， $X_1 > X_2 > \cdots > X_q$) 整除時，求 n 與 X_1 、 X_2 、……、 X_q 的關係？

證明：因為 C_0^n 、 C_1^n 、…… C_n^n 均不被 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_q$ 整除，所以取 C_0^n 、 C_1^n 、…… C_n^n 均不被 X_1 或 X_2 或……或 X_q 整除時 n 之條件，必可滿足。也就是，當 $n=X_1^m \times k-1$ ($k < X_1$ ， $k \in \mathbb{N}$) 或 $n=X_2^m \times h-1$ ($h < X_2$ ， $h \in \mathbb{N}$) 或……或 $n=X_q^m \times p-1$ ($p < X_q$ ， $p \in \mathbb{N}$) 時，原題必定成立。接下來，我們要討論當 n 不是上述的數時， n 為何數時會使原題成立。【此時 n 稱做「例外」】。

設集合 A 為 $n=X_1^m \times k-1$ ($k < X_1$ ， $k \in \mathbb{N}$)

集合 B 為 $n=X_2^m \times h-1$ ($h < X_2$ ， $h \in \mathbb{N}$)

……

集合 Q 為 $n=X_q^m \times p-1$ ($p < X_q$ ， $p \in \mathbb{N}$)

則根據餘數的概念，

$\bar{A}$ 分為 $n=X_1^m \times k_1-1$ ($k_1 > X_1$ ， $X_1 \nmid k_1$)

$n=X_1 \times h_1 + S_1$ ($0 \leq S_1 < X_1-1$) 兩部分

$\bar{B}$ 分成 $n=X_2^m \times k_2-1$ ($k_2 > X_2$ ， $X_2 \nmid k_2$)

$n=X_2 \times h_2 + S_2$ ($0 \leq S_2 < X_2-1$) 兩部分

……

$\bar{Q}$ 分成 $n=X_q^m \times k_q-1$ ($k_q > X_q$ ， $X_q \nmid k_q$)

$n=X_q \times h_q + S_q$ ($0 \leq S_q < X_q-1$) 兩部分

$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \cdots \cap \bar{Q}$ 即是「例外」所在。

我們可以把 $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \cdots \cap \bar{Q}$ 分為 $n+1$ 個部份；

1. 當 $n=X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 n 個

$\because X_1, X_2, \dots, X_q \nmid n+1 \quad \therefore$ 可設 $n=X_1 X_2 \cdots X_q h_u + S_u$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_q \nmid S_u+1$

$C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 \cdots X_q h_u + S_u - r + 1}{S_u + 1}$ ，取 $r=S_u+1$ ，則 $C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 \cdots X_q h_u}{S_u + 1}$

$\because X_1, X_2 \nmid S_u+1 \quad \therefore$ 當 h_u 大於 0 時， C_r^n 為 $X_1 X_2 \cdots X_q$ 的倍數。

$\therefore$ 只有當 h_u 等於 0 時，也就是 $n < X_1 X_2 \cdots X_q$ ($n=S_u$) 時，才有可能為「例外」。

2. 當 $n=X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 $n-1$ 個，可設 $n=X_q^m k_q-1$

$\because X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid n+1$

$\therefore$ 可設 $n=X_1 X_2 \cdots X_{q-1} \times h_t + S_t$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid S_t+1 \quad \therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid n+1$

$\because X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid X_q \quad \therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid k_q$

$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r} = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{X_q^m k_q - r - 1}$ ，取 $r=X_q^{m+1} \times X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{q-1} - 1$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_q^{m+1} \times X_1 \times \dots \times X_{q-1}}{X_q^m (k_q - X_1 \times X_2 \times \dots \times X_q)} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 \dots X_q}{k_q - X_1 X_2 \dots X_q}$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_q \quad \therefore$ 若 $k_q > X_1 X_2 \dots X_q$ 時, C_r^n 為 $X_1 X_2 \dots X_q$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $X_q < k_q < X_1 X_2 \dots X_q$ 時, $n = X_q^m k_q - 1$ 時, 才有可能為「例外」。

3. 當 $n = X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 $n-2$ 個, 可設 $n = X_q^{m1} \times k_{q-1} - 1, n = X_{q-1}^{m2} \times k_{q-1} - 1$

$$n = X_q^{m1} X_{q-1}^{m2} k_z - 1 \quad (X_q, X_{q-1} \nmid k_z, X_q^{m1} k_z > X_{q-1})$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid n+1 \quad \therefore$ 可設 $n = X_1 X_2 \dots X_{q-2} h_z + S_z$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid S_z + 1$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid n+1$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid X_q \quad \therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid k_z$

$$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n} = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{X_q^{m1} X_{q-1}^{m2} k_z - r - 1}, \text{ 取 } r = X_q^{m1+1} \times X_{q-1}^{m2} \times X_1 \times \dots \times X_{q-2} - 1,$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_q^{m1+1} \times X_1 \times \dots \times X_{q-1}^{m2+1}}{X_q^{m1} X_{q-1}^{m2} (k_z - X_1 \times X_2 \times \dots \times X_q)} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 \dots X_q}{k_z - X_1 X_2 \dots X_q}$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_z \quad \therefore$ 若 $k_z > X_1 X_2 \dots X_q$ 時, C_r^n 為 $X_1 X_2 \dots X_q$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $\frac{X_{q-1}}{X_q^{m1}} < k_z < X_1 X_2 \dots X_q$ 時, 也就是 $n = X_q^{m1} X_{q-1}^{m2} k_z - 1$ 時, 才有可能為「例外」。

.....

n. 當 $n = X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 0 個

$$n = X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} k_d - 1 \quad (X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_d, X_2^{m2} \dots X_q^{mq} k_d > X_1)$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n}, \text{ 取 } r = X_1^{m1+1} X_2^{m2+1} \dots X_q^{mq} - 1, C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1 X_2 \dots X_q}{(k_d - X_1 X_2 \dots X_q)}$$

$\therefore$ 若 $k_d > X_1 X_2 \dots X_q, C_r^n$ 為 $X_1 X_2 \dots X_q$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $\frac{X_1}{X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq}} < k_d < X_1 X_2 \dots X_q$ 時, 也就是 $n = X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} k_d - 1$ 時, 才有可能為「例外」。

結論: 若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_q$ 整除,

① 當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2, h \in \mathbb{N}$) 或.....或 $n = X_q^m t - 1$ ($t < X_q, t \in \mathbb{N}$) 時必定成立。

② 當 1. $n < X_1 X_2 \dots X_q$

2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$)

3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$)

.....

(q+1). $n = X_q^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$)

(q+2). $n = X_1^{m1} X_2^{m2} k - 1$ ($\frac{X_1}{X_2^{m2}} < k < X_1 X_2 \dots X_q$)

.....

(2^q+1). $n = X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} k - 1$ ($\frac{X_1}{X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq}} < k < X_1 X_2 \dots X_q$) 時均有可

能成立。

範例一： $n=13, X_1=5, X_2=3, X_3=2, X_1 \times X_2=30$

<解>：∵ $1.n < 30$

$$2.n=2^1 \times 7 - 1 \quad (7 < 30)$$

$$3.n=3^0 \times 14 - 1 \quad (14 < 30)$$

$$4.n=5^0 \times 14 - 1 \quad (14 < 30)$$

∴ 13 有可能為 30 的例外，（請見附錄 8）發現 13 為 30 的例外

範例二： $n=29, X_1=5, X_2=3, X_3=2, X_1 \times X_2=30$

<解>：∵ $1.n < 30$

$$2.n=2^1 \times 15 - 1 \quad (15 < 30)$$

$$3.n=3^1 \times 10 - 1 \quad (10 < 30)$$

$$4.n=5^1 \times 6 - 1 \quad (6 < 30)$$

∴ 29 有可能為 30 的例外，（請見附錄 8）發現 29 不為 30 的例外

問題十：若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 a 整除時 ($a = X_1^{m_1} \times X_2^{m_2}, X_1, X_2$ 為質數, $X_1^{m_1} > X_2^{m_2}$)，
求 n 與 X_1, X_2 的關係？

證明：因為 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 a 整除，所以取 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $X_1^{m_1}$ 或 $X_2^{m_2}$ 整除時 n 之條件，必可滿足。也就是當 $n = X_1^{m_1} k - 1$ ($k < X_1^{m_1}, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^{m_2} h - 1$ ($h < X_2^{m_2}, h \in \mathbb{N}$) 時，原題必定成立。接下來，我們要討論當 n 不是上述的數時， n 為何數時會使原題成立。【此時 n 稱做「例外」】。

設集合 A 為 $n = X_1^m \times k - 1$ ($k < X_1^{m_1}, k \in \mathbb{N}$)

集合 B 為 $n = X_2^m \times h - 1$ ($h < X_2^{m_2}, h \in \mathbb{N}$)

則根據餘數的概念，

$\overline{A}$ 分為 $n = X_1^m \times k_1 - 1$ ($k_1 > X_1^{m_1}, X_1 \nmid k_1$)

$n = X_1 \times h_1 + S_1$ ($0 \leq S_1 < X_1 - 1$) 兩部分

$\overline{B}$ 分成 $n = X_2^m \times k_2 - 1$ ($k_2 > X_2^{m_2}, X_2 \nmid k_2$)

$n = X_2 \times h_2 + S_2$ ($0 \leq S_2 < X_2 - 1$) 兩部分

$\overline{A} \cap \overline{B}$ 即是「例外」所在。

我們可以把 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 分為三部份：

1. 當 $n = X_1 h_1 + S_1 = X_2 h_2 + S_2$

$$\because X_1 \nmid n+1, X_2 \nmid n+1$$

$$\therefore \text{可設 } n = X_1^{m_1} X_2^{m_2} h_3 + S_3 \text{ 且 } X_1, X_2 \nmid S_3 + 1$$

$$C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1^{m_1} X_2^{m_2} h_3 + S_3 - r + 1}{S_3 + 1}, \text{ 取 } r = S_3 + 1, C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1^{m_1} X_2^{m_2} h_3}{S_3 + 1} \because X_1, X_2 \nmid S_3 + 1$$

∴ 當 h_3 大於 0 時， C_r^n 為 $X_1 X_2$ 的倍數。

∴ 當 h_3 等於 0 時，也就是 $n < X_1^{m_1} X_2^{m_2}$ ($n = S_3$) 時，才有可能為「例外」。

2. 當 $n = X_1^m \times k_1 - 1 = X_2 \times h_2 + S_2$ (X_1, X_2 可互換)

$$\because X_2 \nmid n+1 \therefore X_2 \nmid k_1$$

$$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r} = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{X_1^m k_1 - r - 1}, \text{ 取 } r = X_1^{m+1} \times X_2^{m2} - 1,$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m+1} \times X_2^{m2}}{X_1^m (k_1 - X_1^{m1} \times X_2^{m2})} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2}}{k_1 - X_1^{m1} X_2^{m2}} \quad \because X_1, X_2 \nmid k_1$$

$\therefore$ 若 $k_1 > X_1^{m1} X_2^{m2}$ 時， C_r^n 為 $X_1^{m1} X_2^{m2}$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $k_1 < X_1^{m1} X_2^{m2}$ 時，也就是 $n = X_1^m k_1 - 1$ 時，才有可能為「例外」。

3. 當 $n = X_1^{w1} k_1 - 1 = X_2^{w2} k_2 - 1$

$$n = X_1^{w1} X_2^{w2} k_4 - 1 \quad (X_1, X_2 \nmid k_4, X_2^{w2} k_4 > X_1^{w1})$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r}, \text{ 取 } r = X_1^{w1+m1} X_2^{w2+m2} - 1,$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{w1+m1} X_2^{w2+m2}}{X_1^{w1} X_2^{w2} k_4 - X_1^{w1+m1} X_2^{w2+m2}} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2}}{(k_4 - X_1^{m1} X_2^{m2})}$$

$\therefore$ 若 $k_4 > X_1^{m1} X_2^{m2}$ ， C_r^n 為 $X_1^{m1} X_2^{m2}$ 的倍數

$\therefore$ 只有當 $k_4 < X_1^{m1} X_2^{m2}$ 時，也就是 $n = X_1^{w1} X_2^{w2} k_4 - 1$ 時，才有可能為「例外」。

結論：若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 a ($a = X_1^{m1} \times X_2^{m2}$, X_1, X_2 為質數) 整除時，

① 當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1}$, $k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2^{m2}$, $h \in \mathbb{N}$) 時必定成立。

② 當 1. $n < X_1^{m1} X_2^{m2}$

2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2}$)

3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2}$)

4. $n = X_1^{w1} X_2^{w2} k - 1$ ($\frac{X_1^{m1}}{X_2^{w2}} < k < X_1^{m1} X_2^{m2}$) 時均有可能成立。

範例一： $n=22, X_1=5, X_2=2, m1=1, m2=3, X_1^{m1} \times X_2^{m2}=40$

<解> $\therefore 1. n < 40$

$$2. n = 2^0 \times 23 - 1 \quad (23 < 40)$$

$$3. n = 5^0 \times 23 - 1 \quad (23 < 40)$$

$\therefore 22$ 有可能為 40 的例外，(請見附錄 8) 發現 22 為 40 的例外

範例二： $n=21, X_1=5, X_2=2, m1=1, m2=3, X_1^{m1} \times X_2^{m2}=40$

<解> $\therefore 1. n < 40$

$$2. 2^1 \times 11 - 1 \quad (11 < 40)$$

$$3. 5^0 \times 22 - 1 \quad (22 < 40)$$

$\therefore 21$ 有可能為 40 的例外，(請見附錄 8) 發現 21 不為 40 的例外

問題十一：若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq}$, ($X_1, X_2, \dots, X_q$ 為質數, $X_1 > X_2 > \dots > X_q$) 整除時, 求 n 與 $X_1, X_2, \dots, X_q$ 的關係?

證明：因為 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq}$ 整除, 所以取 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 X_1^{m1} 或 X_2^{m2} 或 $\dots$ 或 X_q^{mq} 整除時 n 之條件, 必可滿足。也就是當 $n = X_1^{m1}k - 1$ ($k < X_1^{m1}, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^{m2}h - 1$ ($h < X_2^{m2}, h \in \mathbb{N}$) 或 $\dots$ 或 $n = X_q^{mq}p - 1$ ($p < X_q^{mq}, p \in \mathbb{N}$) 時, 原題必定成立。接下來, 我們要討論當 n 不是上述的數時, n 為何數時會使原題成立。【此時 n 稱做「例外」】。

設集合 A 為 $n = X_1^{m1}k - 1$ ($k < X_1^{m1}, k \in \mathbb{N}$)

集合 B 為 $n = X_2^{m2}h - 1$ ($h < X_2^{m2}, h \in \mathbb{N}$)

.....

集合 Q 為 $n = X_q^{mq}p - 1$ ($p < X_q^{mq}, p \in \mathbb{N}$)

則根據餘數的概念,

$\overline{A}$ 分成 $n = X_1^{m1}k_1 - 1$ ($k_1 > X_1^{m1}, X_1 \nmid k_1$)

$n = X_1h_1 + S_1$ ($0 \leq S_1 < X_1 - 1$) 兩部分

$\overline{B}$ 分成 $n = X_2^{m2}k_2 - 1$ ($k_2 > X_2^{m2}, X_2 \nmid k_2$)

$n = X_2h_2 + S_2$ ($0 \leq S_2 < X_2 - 1$) 兩部分

.....

$\overline{Q}$ 分成 $n = X_q^{mq}k_q - 1$ ($k_q > X_q^{mq}, X_q \nmid k_q$)

$n = X_qh_q + S_q$ ($0 \leq S_q < X_q - 1$) 兩部分

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \dots \cap \overline{Q}$ 即是「例外」所在。

我們可以把 $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \dots \cap \overline{Q}$ 分為 $n+1$ 個部份;

1. 當 $n = X_ih_i + S_i$ 的 i 元素有 n 個

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_q \nmid n+1$

$\therefore$ 可設 $n = X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} h_u + S_u$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_q \nmid S_u + 1$

$C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} h_u + S_u - r + 1}{S_u + 1}$, 取 $r = S_u + 1$,

$$C_r^n = C_{r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} h_u}{S_u + 1}$$

$\therefore X_1, X_2 \nmid S_u + 1$ $\therefore$ 當 h_u 大於 0 時, C_r^n 為 $X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$ 的倍數。

$\therefore$ 只有當 h_u 等於 0 時, 也就是 $n < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$ ($n = S_u$) 時, 才有可能為「例外」。

2. 當 $n = X_ih_i + S_i$ 的 i 元素有 $n-1$ 個, 可設 $n = X_q^{mq}k_q - 1$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid n+1$ $\therefore$ 可設 $n = X_1 X_2 \dots X_{q-1} h_t + S_t$ 且 $X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid S_t + 1$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid n+1$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid X_q \therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-1} \nmid k_q$

$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n} = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{X_q^{mq}k_q - r - 1}$, 取 $r = X_q^{m+mq} \times X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_{q-1}^{m(q-1)} - 1$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_q^{m+mq} \times X_1^{m1} \times \dots \times X_{q-1}^{m(q-1)}}{X_q^{mq} \left(k_q - X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq} \right)} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}}{k_q - X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}}$$

$\therefore X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_q$, $\therefore$ 若 $k_q > X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$ 時, C_r^n 為 $X_1 X_2 \dots X_q$ 的倍數

∴只有當 $k_q < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$ 時，也就是 $n = X_q^m k_q - 1$ 時，才有可能為「例外」。

3. 當 $n = X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 $n-2$ 個，可設 $n = X_q^{w1} k_q - 1$ ， $n = X_{q-1}^{w2} k_{q-1} - 1$

$$n = X_q^{w1} X_{q-1}^{w2} k_z - 1 \quad (X_q, X_{q-1} \nmid k_z, X_q^{w1} k_z > X_{q-1}^{m(q-1)})$$

$$\because X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid n+1$$

$$\therefore \text{可設 } n = X_1 X_2 \dots X_{q-2} h_z + S_z \text{ 且 } X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid S_z + 1$$

$$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid n+1$$

$$\therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid X_q \quad \therefore X_1, X_2, \dots, X_{q-2} \nmid k_z$$

$$C_r^n = C_{n-r}^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r} = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{X_q^{w1} X_{q-1}^{w2} k_z - r - 1}$$

$$\text{取 } r = X_q^{w1+mq} \times X_{q-1}^{w2+m(q-1)} \times X_1^{m1} \times \dots \times X_{q-2}^{m(q-2)} - 1$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_q^{w1+mq} \times X_1^{m1} \times \dots \times X_{q-1}^{w2+m(q-1)}}{X_q^{w1} X_{q-1}^{w2} (k_z - X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq})} = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}}{k_z - X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}}$$

$$\therefore X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_z$$

$$\therefore \text{若 } k_z > X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \text{ 時， } C_r^n \text{ 為 } X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \text{ 的倍數}$$

$$\therefore \text{只有當 } \frac{X_{q-1}^{m(q-1)}}{X_q^{mq}} < k_z < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \text{ 時，也就是 } n = X_q^{w1} X_{q-1}^{w2} k_z - 1 \text{ 時，才有可能為}$$

「例外」。

.....

n. 當 $n = X_i h_i + S_i$ 的 i 元素有 0 個

$$n = X_1^{w1} X_2^{w2} \dots X_q^{wq} k_d - 1 \quad (X_1, X_2, \dots, X_q \nmid k_d, X_2^{w2} \dots X_q^{wq} k_d > X_1^{m1})$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{r+1}{n-r} \text{ 取 } r = X_1^{w1+m1} X_2^{w2+m2} \dots X_q^{wq+mq} - 1$$

$$C_r^n = C_{n-r-1}^n \times \frac{X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}}{(k_d - X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq})}$$

$$\therefore \text{若 } k_d > X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}, C_r^n \text{ 為 } X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \text{ 的倍數}$$

$$\therefore \text{只有當 } \frac{X_1^{m1}}{X_2^{w2} \dots X_q^{wq}} < k_d < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \text{ 時，也就是 } n = X_1^{w1} X_2^{w2} \dots X_q^{wq} k_d - 1 \text{ 時，才}$$

有可能為「例外」。

結論：若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$ 整除，

① 當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1}, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2^{m2}, h \in \mathbb{N}$) 或.....或 $n = X_q^m t - 1$ ($t < X_q^{mq}, t \in \mathbb{N}$) 時必定成立。

② 當 1. $n < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$

$$2. n = X_1^m k - 1 \quad (k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq})$$

$$3. n = X_2^m k - 1 \quad (k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq})$$

.....

$$(q+1). n = X_q^m k - 1 \quad (k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq})$$

$$(q+2). n = X_1^{w1} X_2^{w2} k - 1 \quad \left(\frac{X_1^{m1}}{X_2^{w2}} < k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq} \right)$$

.....

$(2^q+1). n=X_1^{w_1}X_2^{w_2}\cdots X_q^{w_q}k-1$ ($\frac{X_1^{m_1}}{X_2^{w_2}\cdots X_q^{w_q}} < k < X_1^{m_1}X_2^{m_2}\cdots X_q^{m_q}$) 時均有
可能成立。

範例一： $n=19, X_1=7, X_2=3, X_3=2, m_1=1, m_2=2, m_3=2, X_1^{m_1}X_2^{m_2}X_3^{m_3}=252$

<解>：1. $n < 252$

$$2. n=2^2 \times 5 - 1 \quad (5 < 252)$$

$$3. n=3^0 \times 20 - 1 \quad (20 < 252)$$

$$4. n=7^0 \times 20 - 1 \quad (20 < 252)$$

∴ 19 有可能為 252 的例外，(請見附錄 8) 發現 19 為 252 的例外

範例二： $n=51, X_1=7, X_2=3, X_3=2, m_1=1, m_2=2, m_3=2, X_1^{m_1}X_2^{m_2}X_3^{m_3}=252$

<解>：1. $n < 252$

$$2. n=2^2 \times 13 - 1 \quad (13 < 252)$$

$$3. n=3^0 \times 52 - 1 \quad (52 < 252)$$

$$4. n=7^0 \times 52 - 1 \quad (52 < 252)$$

∴ 51 有可能為 252 的例外，(請見附錄 8) 發現 51 不為 252 的例外

結論應用：根據問題十的結論，我們在②-4 的狀況中得知： $n=X_1^{w_1}X_2^{w_2}\cdots k-1$ ($\frac{X_1^{m_1}}{X_2^{w_2}} < k <$

$X_1^{m_1}X_2^{m_2}$) 時， $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 有可能都不被 $X_1^{m_1}X_2^{m_2}$ 整除。根據問題八的結論，

我們在②-4 的狀況中得知： $n=X_1^{m_1}X_2^{m_2}k-1$ ($\frac{X_1}{X_2^{m_2}} < k < X_1X_2$) 時， $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 有

可能都不被 X_1X_2 整除。容易看出， $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 都不被 X_1X_2 整除的 n 一定包含於都不被 $X_1^{m_1}X_2^{m_2}$ 整除的 n 。但根據問題十和問題八結論，卻發現在問題十 k 的底限卻不一定比在問題八 k 的底限小 (m_1 越大，底限越大)，最終，問題十 k 的範圍變成無意義。但因 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 都不被 X_1X_2 整除的 n 一定包含於都不被 $X_1^{m_1}X_2^{m_2}$ 整除的 n ，所以問題八 k 的取值範圍也變成無意義。這樣，便可把②-4 的狀況刪除，達到化簡的目的。同樣的方法也可以應用在問題九、問題十、問題十一上。

四、對於二項式進行證明(被整除)：

問題十二：若 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n$ 中都能被正整數 a 整除、求 n, a 的關係？

(一) 證法：本題可分為三部份：

1、 a 為質數。 2、 a 為質數冪次方。 3、 a 為含有兩個質因數以上的合數。

分項討論：

1、由問題三的結論可知：當 C_r^n 為質數 a 的倍數時，

$$n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a, \quad r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a, \quad \text{必存在至少一對 } M_i < N_i, \quad 0 \leq i \leq d.$$

當 n, r 都是 a 的倍數時，結果顯然成立。

因為若後面不全是 0，也就是 $n = (\overline{100 \dots k \dots 00})_a$ ，則只要是 $r = (\overline{00 \dots 010 \dots 00})_a$ 時，

C_r^n 便不是 a 的倍數。

若頭位數字不為 1，即 $n = (\overline{k000 \dots 00})_a$ ，則只要 $r = (\overline{1000 \dots 00})_a$ 時， C_r^n 也不是 a

的倍數。也就是 $n=a^m$ 。

2、由問題四的結論可知：當 C_r^n 為 a^m (a 為質數) 的倍數時， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$
 $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，則 $M_i < N_i$ 的組數與他們之後 $M_i = N_i$ 的組數之和必大於等於 m 組，
 也是 a 的倍數。

$\therefore$ 若存在 n 使上述條件滿足， $n = (\overline{1000 \dots 00})_a$ ，

但若 $m \geq 2$ 時，取 $r = (\overline{0100 \dots 00})_a$ 時，不滿足開頭的條件（只有一對 $M_i < N_i$ ），

所以，只有當 $m=1$ 時， $n = (\overline{1000 \dots 00})_a$ 為解。即 $n=a^m$ 。

3、設 $a = X_0^{y_0} \cdot X_1^{y_1} \cdot \dots \cdot X_m^{y_m}$ ，

則 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n$ 皆被 a 整除，也就是說， $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n$
 能被 $X_0^{y_0} \cdot X_1^{y_1} \cdot \dots \cdot X_m^{y_m}$ 整除，當然也能被 X_0, X_1 所整除。

根據 1. 的結論， $n = X_0^k, n = X_1^s$ ，但是很明顯地 $X_0^k \neq X_1^s$ ，

所以，這種情況下 n 不存在。

結論：若 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n$ 都是 a 的倍數，則 a 必為質數且 $n=a^m$ ， m 為正整數。

範例一： $a=5, n=25$

<解>： $\because 25=5^2 \therefore C_1^{25}, C_2^{25}, \dots, C_{24}^{25}$ 都被 5 整除

範例二： $a=11, n=121$

<解>： $\because 121=11^2 \therefore C_1^{121}, C_2^{121}, \dots, C_{120}^{121}$ 都被 11 整除

五、對於 n 項式進行證明（不被整除）：

問題十三：若 $C_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^m$ 不被質數 a 整除，求 $m, k_1, k_2, k_3, \dots, k_n, a$ 的關係？

(一)推論：若 $C_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^m$ 不為質數 a 的倍數，把 $m, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 都以 a 進制表示，
 則對於所有 $M_{0_i} \geq M_{1_i} + M_{2_i} + M_{3_i} + \dots + M_{n-1_i}$

(二)證法：若 $C_{(k_1, k_2, \dots, k_n)}^m$ 不為質數 a 的倍數，則可導出不等式：

$$\left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{a^\infty} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_1}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_2}{a^\infty} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\because m = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_n$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_1}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_2}{a^\infty} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^\infty} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_1}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_1}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_2}{a^\infty} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_n}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^\infty} \right\rfloor \cdots (\#)$$

$$\text{又 } m = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_n$$

$$\therefore \left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor,$$

$$\left\lfloor \frac{m}{a^2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{k_1}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{m}{a^\infty} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{k_1}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^\infty} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^\infty} \right\rfloor$$

為了符合 (#) 式，

$$\left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor ,$$

$$\left\lfloor \frac{m}{a^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1}{a^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^2} \right\rfloor , \dots , \left\lfloor \frac{m}{a^\infty} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k_1}{a^\infty} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a^\infty} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a^\infty} \right\rfloor$$

設 $m = aX_0 + Y_0$, $k_1 = aX'_0 + Y'_0$, $\dots$, $k_n = aX'_0 + Y'_0$

1、若 $Y_0 \geq Y'_0 + \dots + Y'_0$, 則 $\left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor = X_0 = \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor$

2、若 $Y_0 < Y'_0 + \dots + Y'_0$, 則 $\left\lfloor \frac{m}{a} \right\rfloor = X_0 = \left\lfloor \frac{k_1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k_2}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k_n}{a} \right\rfloor$ (不合)

$\therefore Y_0 \geq Y'_0 + \dots + Y'_0$, $Y_1 \geq Y'_1 + \dots + Y'_1$, $\dots$, $Y_{n-2} \geq Y'_{n-2} + \dots + Y'_{n-2}$

設 $m = (\overline{M_{0c_0} \dots M_{0_1} M_{0_0}})_a$

$k_1 = (\overline{M_{1c_1} \dots M_{1_1} M_{1_0}})_a$, $\dots$, $k_{n-1} = (\overline{M_{n-1c_{n-1}} \dots M_{n-1_1} M_{n-1_0}})_a$

與二項式係數同理，對於所有 $M_{0_i} \geq M_{1_i} + M_{2_i} + M_{3_i} + \dots + M_{n-1_i}$

結論：若 $C^m(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 不為一質數 a 的倍數，把 $m, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 都以 a 進制表示，則對於所有 $M_{0_i} \geq M_{1_i} + M_{2_i} + M_{3_i} + \dots + M_{n-1_i}$

問題十四：若 m 固定， $k_1, k_2, \dots, k_n$ 皆可變， $C^m(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 都不被質數 a 整除，求 $m, k_1, k_2, \dots, k_n, a$ 的關係？

(一)證法：設： $m = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$

1、若 $c \neq 0$ ，且 $n \geq 3$

可選擇 $k_1 = a-1, k_2 = 1, k_3 = k_4 = \dots = k_{n-2} = k_{n-1} = 0$

$k_n = M_c \times a^c + M_{c-1} \times a^{c-1} + \dots + M_1 \times a^1 + M_0$ ，根據之前的結論

$\therefore M_0 \geq a-1+1+0+0+\dots+0$ $\therefore$ 為 a 的倍數， $\therefore \rightarrow \leftarrow$

2、若 $c=0$ ，且 $n \geq 3$

$\therefore M_0 = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

$\therefore$ 不管 M_0 怎麼分到 $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ， $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 永遠不會比 M_0 大

3、若 $n=2$ ，則結論如同二項式

4、若 $n=1$ ，則係數永遠為 1，恆不被整除

結論： m 固定時，若都不為 a (a 為質數) 的倍數

則：1、當 $n \geq 3$ 時， $a-1 \geq m \geq 0$

2、當 $n=2$ 時， $m = a^t \cdot k-1$ ， t, k 為正整數。

3、當 $n=1$ 時， $m \geq 0$

伍、結論：

- 1、若 C_r^n 不為質數 a 倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，
則對於所有 $M_i \geq N_i$ 均可成立 ($0 \leq i \leq d$)。
- 2、若 C_r^n 不為 a^m 的倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$
則(1)若 $M_i < N_i$ ，則算一組
(2)若 $M_i = N_i$ ，則比較右邊那一位，一直比較到某一位 $M_k \neq N_k$ 時， $k < i$ ，
① $M_k > N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 k 組都不算
② $M_k < N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 $k+1$ 組共算成 $i-k$ 組
將(1)(2)中所得的組數相加，則其和必小於 m 組。
- 3、若 C_r^n 為質數 a 的倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$ ，
則存在至少一個 $M_i < N_i$ ($0 \leq i \leq d$)。
- 4、若 C_r^n 不為 a^m 的倍數， $n = (\overline{M_c \dots M_1 M_0})_a$ ， $r = (\overline{N_d \dots N_1 N_0})_a$
則(1)若 $M_i < N_i$ ，則算一組
(2)若 $M_i = N_i$ ，則比較右邊那一位，一直比較到某一位 $M_k \neq N_k$ 時， $k < i$ ，
① $M_k > N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 k 組都不算
② $M_k < N_k \Rightarrow$ 第 i 組、……、第 $k+1$ 組共算成 $i-k$ 組
將(1)(2)中所得的組數相加，則其和必大於等於 m 組。
- 5、若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 中都不為質數 a 的倍數，
則 n 的通式為： $n = a^m \times k - 1$ ， m 為自然數， $k = \{1, 2, 3, \dots, a-2, a-1\}$ 。
- 6、 a^m 為一個質數 a 的幕次方，若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_n^n$ 中都不為 a^m 的倍數，
則 n 的通式為： $n = a^t \times k - 1$ ， t, k 為正整數， $k = \{1, 2, 3, \dots, a^m - 2, a^m - 1\}$ 。
- 7、若 $C_1^n, C_2^n, C_3^n, \dots, C_{n-1}^n$ 中都為質數 a 的倍數，
則 n 的通式為： $n = a^m$ ， m 為正整數。
- 8、若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $a = X_1 \times X_2$ 整除時 (X_1, X_2 為質數， $X_1 > X_2$)，
則①當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1, k \in N$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2, h \in N$) 時必定成立。
②當 1. $n < X_1 X_2$
2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1 X_2$)
3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1 X_2$) 時均有可能成立。
- 9、若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $a = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_q$ 整除時 ($X_1, X_2, \dots, X_q$ 為質數， $X_1 > X_2 > \dots > X_q$)，
則①當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1, k \in N$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2, h \in N$) 或……或 $n = X_q^m t - 1$ ($t < X_q, t \in N$) 時必定成立。
②當 1. $n < X_1 X_2 \dots X_q$
2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$)
3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$)
……
(q+1). $n = X_q^m k - 1$ ($k < X_1 X_2 \dots X_q$) 時均有可能成立。
- 10、若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $a = X_1^{m1} \times X_2^{m2}$ 整除時 (X_1, X_2 為質數， $X_1^{m1} > X_2^{m2}$)，
則①當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1, k \in N$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2, h \in N$) 時必定成立。
②當 1. $n < X_1^{m1} X_2^{m2}$
2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2}$)

3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2}$) 時均有可能成立。

11、若 $C_0^n, C_1^n, \dots, C_n^n$ 均不被 $a = X_1^{m1} \times X_2^{m2} \times \dots \times X_q^{mq}$, ($X_1, X_2, \dots, X_q$ 為質數, $X_1 > X_2 > \dots > X_q$) 整除時,

則①當 $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1}, k \in \mathbb{N}$) 或 $n = X_2^m h - 1$ ($h < X_2^{m2}, h \in \mathbb{N}$) 或……或 $n = X_q^m t - 1$ ($t < X_q^{mq}, t \in \mathbb{N}$) 時必定成立。

②當 1. $n < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$

2. $n = X_1^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$)

3. $n = X_2^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$)

……

(q+1). $n = X_q^m k - 1$ ($k < X_1^{m1} X_2^{m2} \dots X_q^{mq}$) 時均有可能成立。

12、若 $C \binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ 不為質數 a 的倍數, 把 $m, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ 都以 a 進制表示,

則對於所有 $M_i \geq M_{1i} + M_{2i} + \dots + M_{(n-1)i}$ (都是充要條件)

13、若 m 固定, $k_1, k_2, \dots, k_n$ 皆可變, $C \binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ 都不為質數 a 的倍數

則: ①當 $n \geq 3$ 時, $a-1 \geq m \geq 0$

②當 $n=2$ 時, $m = a^m \times k - 1$ ($1 \leq k \leq a-1$)

③當 $n=1$ 時, $m \geq 0$

陸、研究展望：

若 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \dots, C_n^n$ 皆不能被 $a_1^{b1} \times a_2^{b2} \times \dots \times a_p^{bp}$ 整除, 求 n 的條件?

根據之前的結論, 所有的 n 都在這些範圍中:

1. $n < a_1^{b1} \times a_2^{b2} \times \dots \times a_p^{bp}$

2. $n = a_1^b \times k - 1$ ($k < a_1^{b1} \times a_2^{b2} \times \dots \times a_p^{bp}$)

3. $n = a_2^b \times k - 1$ ($k < a_1^{b1} \times a_2^{b2} \times \dots \times a_p^{bp}$)

.....

(p+1). $n = a_p^b \times k - 1$ ($k < a_1^{b1} \times a_2^{b2} \times \dots \times a_p^{bp}$)

但這是我們目前最貼近的必要條件, 非充分條件。

所以, 我們會更加努力埋首研究, 盼望能盡速做出必要條件。

柒、參考資料：

- 1、中等數學 天津師大出版
- 2、高中數學課本第四冊 龍騰文化出版社
- 3、組合學講義 建興出版社
- 4、趣味數論 九章出版社

評語

題材內容深度夠，表達能力亦佳。
惜與國中教材的連結稍嫌不足。