

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

物理科

科別：物理科

組別：國中組

作品名稱：『顯影素描機』大小任我行

關鍵詞：相似三角形、平面鏡成像、透鏡成像

編號：030106

學校名稱：

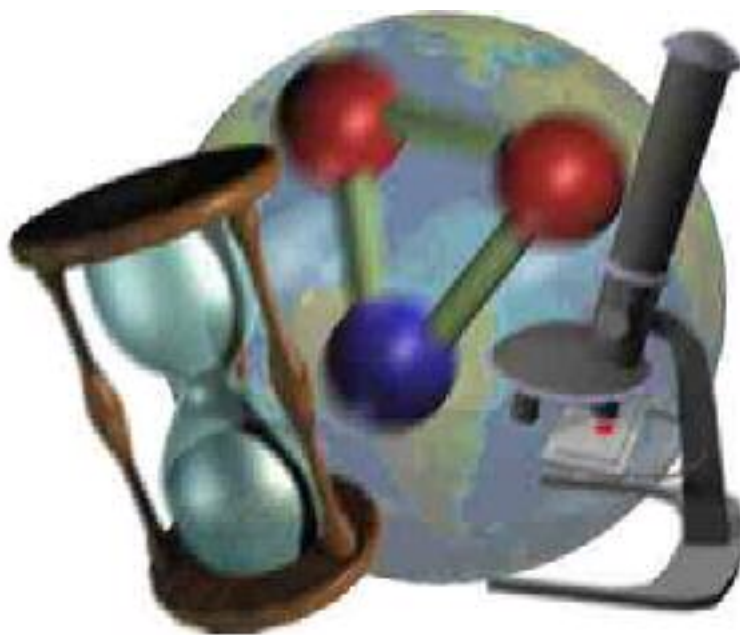
台中縣立豐東國民中學

作者姓名：

鄭品芳、楊承熹、羅聖淳、簡碩廷

指導老師：

賴月琴、簡金標



摘要

本作品從運用平面鏡反射、透鏡折射原理及數學相似三角形的公式倒推出凸、凹透鏡的鏡像公式後，並可藉由理論的推導、作圖，構想出可行的素描機設計。

我們以學校現有的凸、凹透鏡及回收紙箱、平面鏡等簡易工具，設計出第一代單凸透鏡素描機及第二代凸凹雙透鏡素描機，並能以定點觀測及驗證比較，可做到將景物縮小、放大成像於描圖紙上的目標。

壹、研究動機

又上素描課了，上次的蘋果，阿呆畫出了超爆笑的異形；這次的大樹，一向粗枝大葉的我說不定也成為同學的笑柄！害我趕緊坐到很有繪畫素養的阿芳旁邊。只見她手一舉、眼一眯、低頭就是畫一筆，看得我是一頭霧水，就這樣來來回回好多次，看得我頭都暈了，不過她的草圖也打得差不多了，真是厲害！

回家時，老妹問我數學「比例尺」單元，讓我想到了阿芳的手勢；約過了一個月後，老妹又問我「鏡像」單元，剎時靈光一閃，如果我拿鏡子照實物，反射鏡像…。實際做時結果與想像有一大段距離，比例大小很難調整及背對目標物而眼看鏡子…等不方便的地方。

我的難題反應在週記上，導師建議我參加科研社去找指導老師問問看，就這樣我踏上了科學之旅，和一些有志一同的伙伴邁向自己人生的另一個挑戰！

貳、研究目的

- 1.運用鏡面反射原理找出置於桌面而呈不同仰角的平面鏡成像圖
- 2.利用物理透鏡折射及數學相似三角形的理論推出鏡像公式
- 3.利用凸透鏡的焦距與物距、像距間的關係，試設計並製作一簡易的素描機
- 4.以設計的第一代素描機工具做定點觀測及實際比較
- 5.改進呈像大小成為物距遠近自如的第二代素描機
- 6.以設計的第二代素描機工具做定點觀測及實際比較

參、研究設備器材

No	器材	No	器材	No	器材或藥品
1	1公尺長鋼尺	7	凸透鏡	13	回收紙箱
2	平面鏡	8	凹透鏡	14	玻璃板
3	量角器	9	手電筒	15	膠帶
4	圖畫紙	10	白色西卡紙	16	繩子
5	描圖紙	11	壁報紙	17	竹棒
6	半透明塑膠片	12	皺紋紙	18	捲尺

肆、研究過程及方法

研究一：運用鏡面反射原理找出置於桌面而呈不同仰角的平面鏡成像圖

平面鏡成像符合光的反射定律及數學相似三角形原理的結果。其內容為：

(一)反射定律

1 入射線、反射線在法線的兩側，且發生在同一介質、同一平面上。

2 入射角=反射角。

(二)平面鏡成像

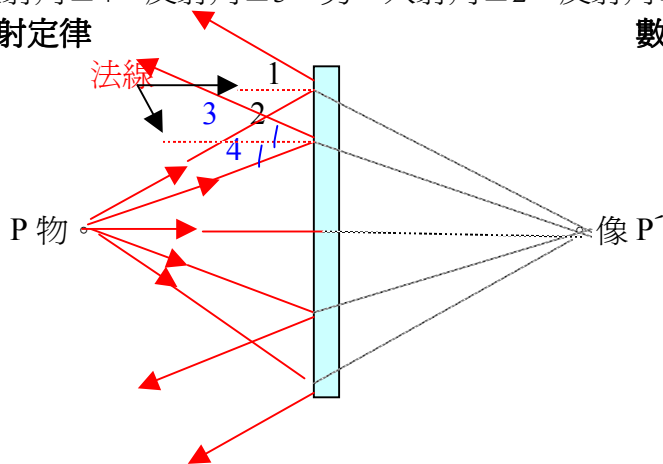
1 形成正立左右相反的相等虛像。

2 物距=像距。

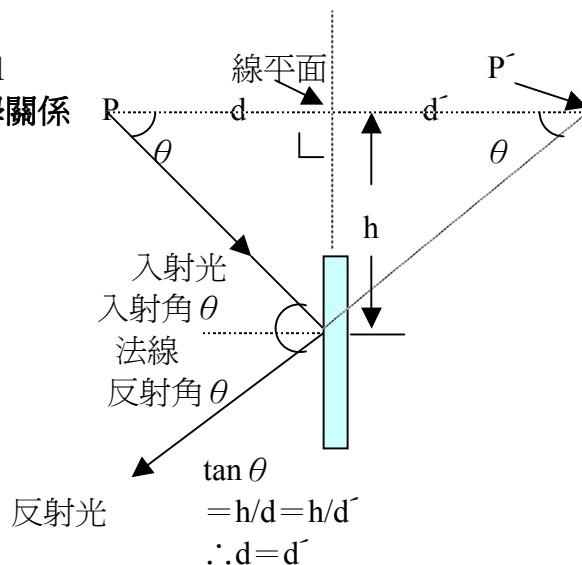
(三)其反射定律關係、數學三角關係如下圖所示：

入射角 $\angle 4$ =反射角 $\angle 3$ ，另一入射角 $\angle 2$ =反射角 $\angle 1$

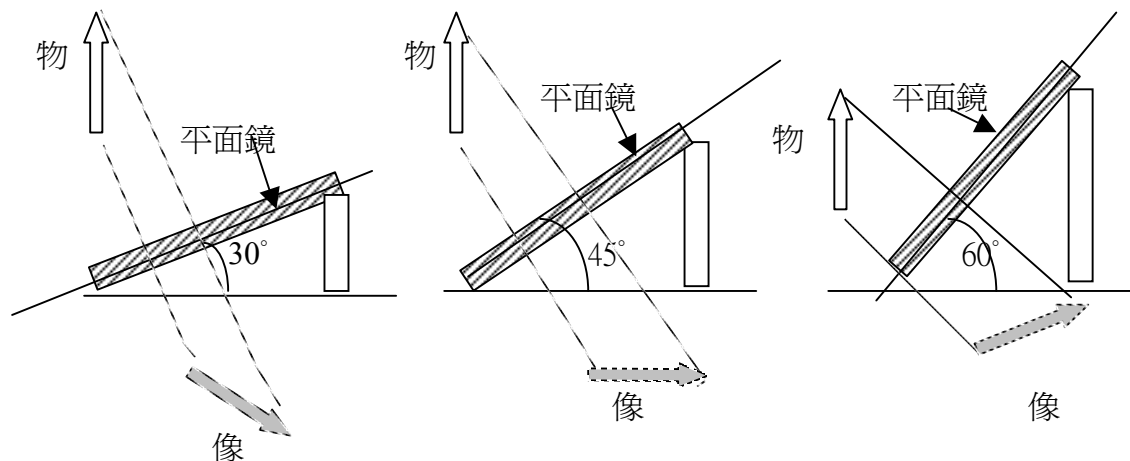
反射定律



數學關係



(四)所以，簡單的歸納鏡面反射原理即為：【物距=像距、物長=像長的正立相等、左右相反的虛像】，平面鏡若與桌面呈不同的 30° 、 45° 、 60° 仰角，其所形成的虛像的圖形如下：



討論：

- 1 由上面平面鏡與桌面呈不同的仰角作圖分析，已經很明顯的可知呈 45° 仰角的平面鏡成像會與水平面平行，所以顯影素描板可以平放，而眼睛只要從鏡面上方向素描板觀看即可。
- 2 若選擇呈 30° 仰角的平面鏡，則顯影素描板須呈右下傾，即眼睛應從與物異側的斜上方向素描板方向看才可以，這樣的效果有沒有比 45° 的要好，可以在實測時再予以驗證。
- 3 若選擇呈 60° 仰角的平面鏡，則顯影素描板須呈左下傾，即眼睛應從與物同側的斜上方向素描板方向看才行，這樣看，一則背對物體，二則有可能會因站在與物同側而遮住物光，那就太不方便了，所以這個角度就毋須再考慮了。

研究二：利用數學相似三角形及物理透鏡折射的理論推出鏡像公式

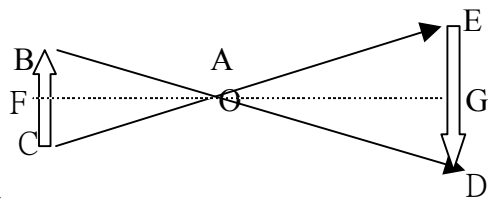
(一)數學相似三角形如右圖所示，物高 $BC \parallel$ 像高 ED ，

$\angle BAC = \angle DAE$ 為對角相等，

$\angle ABC = \angle ADE$ ， $\angle ACB = \angle AED$

$\therefore \triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 為兩相似三角形，因此其邊長成正比

$AF/BC = AG/ED$ ，物高：像高 = 物距 AF ：像距 AG



另一種相似三角形如右圖所示

A 點為光源發出處，DE 為物高(例如：手掌長度)，

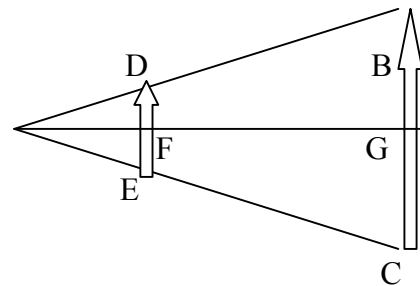
BC 為影高(例如：手影長度)，

$BC \parallel DE$ ， $\angle ACB = \angle ADE$ 、 $\angle ABC = \angle ADE$ 為內錯角相等，A

又同一頂角 $\angle BAC$

$\therefore \triangle ACB$ 與 $\triangle ADE$ 為兩相似三角形，因此其邊長成正比

高/底 = $AF/DE = AG/BC$



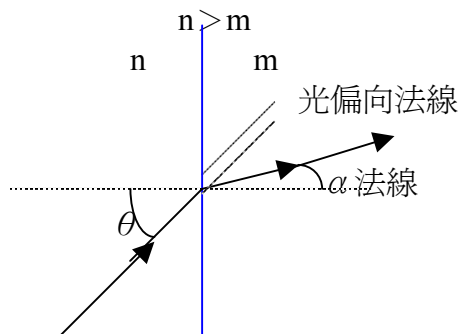
(二)欲了解透鏡成像需先知道折射定律及三稜鏡的折射才行

1 折射定律(law of refraction)：

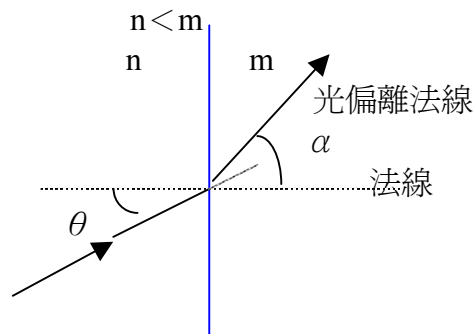
①入射光線與折射光線和法線必須在同一平面，折射光線和入射光線分別在法線的兩側。

②不論入射角如何改變，入射角的正弦與與折射角的正弦之比值，對於已知的兩種介質而言是一個定值，即折射率 $\sin \theta / \sin \alpha = n/m = \text{定值}$ ，為一常數。此式又稱為司乃耳定律。

2 折射率(refractive index)入射角之正弦與折射角之正弦的比值，叫做介質的折射率。光線進入折射率愈大的介質，曲折的程度就愈大。光的折射作用，是在兩種折射率不相等的介質的境界面發生。若兩個折射率相差愈大，折射能力就愈大。

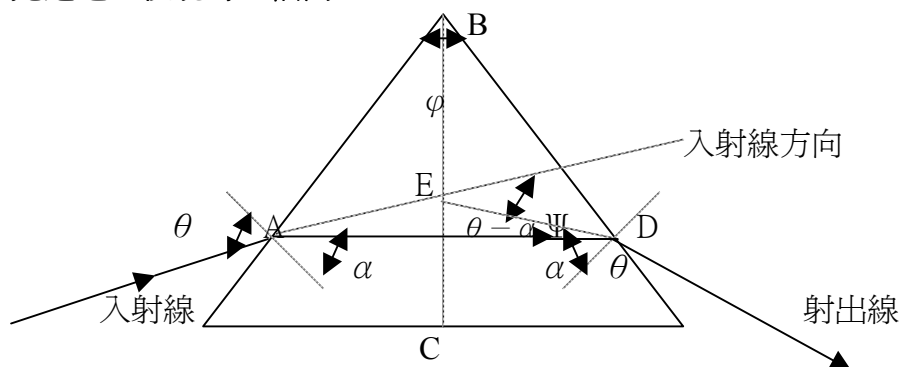


$$\begin{aligned} m \sin \alpha &= n \sin \theta \\ n &> m \\ \alpha &< \theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m \sin \alpha &= n \sin \theta \\ n &< m \\ \alpha &> \theta \end{aligned}$$

3 光通過三稜鏡時之偏向



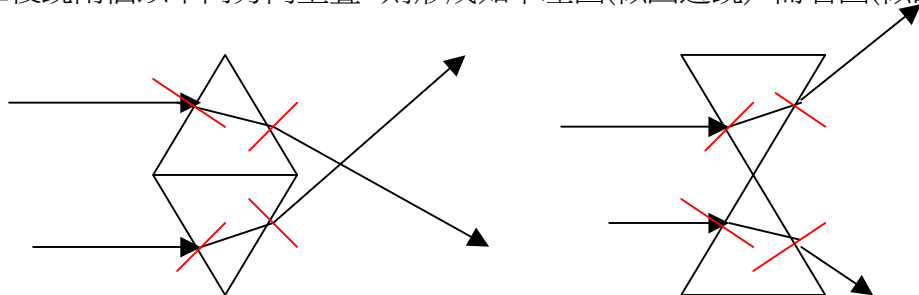
考慮簡單的對稱情形為。入射光在 AB 面折射之入射角為 θ ，折射角為 α ，在 BD 面發生折射之入射角為 α ，折射角為 θ ，AD 垂直於 BC，首先 $\alpha = 1/2 \varphi$ ， Ψ 為三角形 AED 之一外角，故 $\Psi = 2(\theta - \alpha)$ ，以 $1/2 \varphi$ 取代 α ，解 φ 得 $\varphi = 1/2(\varphi + \Psi)$
 若玻璃對空氣的折射率為 n ，由折射定律可知光由空氣進入三稜鏡，
 滿足 $\sin \theta = n \sin \alpha$ 或 $\sin [(\Psi + \theta)/2] = n \sin \varphi / 2$

$$n = \sin [(\Psi + \theta)/2] / \sin \varphi / 2$$

由此可知：玻璃的折射率不同，偏向角也會不同。稜鏡對不同色光(波長不一樣)有不同的折射率，那麼就會有不同的偏向角，所以複合光白光入射三稜鏡會產生色散現象。

4 組合三稜鏡的偏向

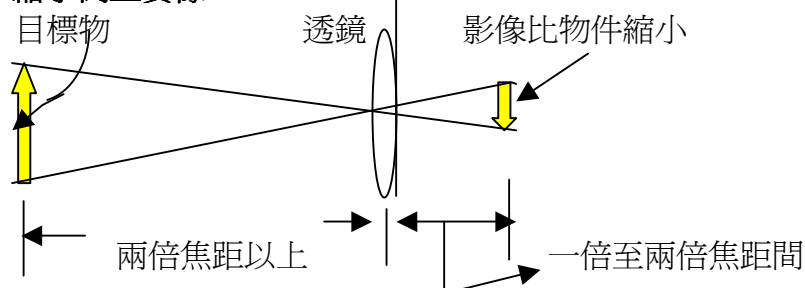
若將三稜鏡兩個以不同方向重疊，則形成如下左圖(似凸透鏡)，而右圖(似凹透鏡)的折射現象。



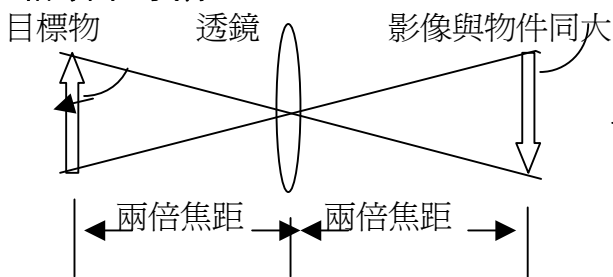
由光通過三稜鏡的偏向可知，光通過凸透鏡會向厚玻璃方向偏折，凹透鏡也是。所以，凸透鏡是會聚透鏡，而凹透鏡是發散透鏡。

(三)凸透鏡的成像法

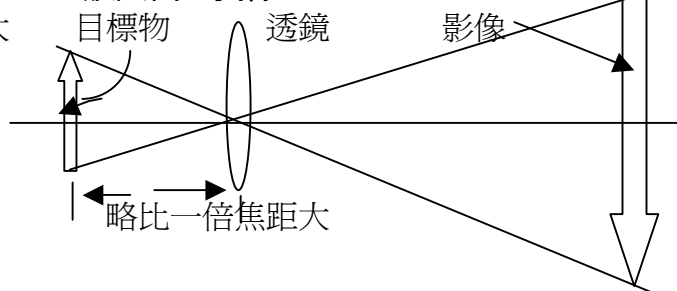
1 縮小倒立實像



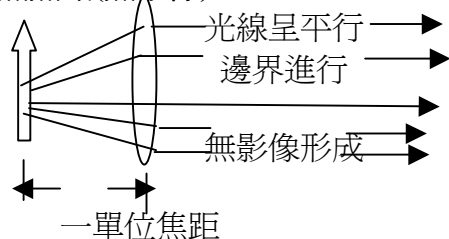
2 相等倒立實像



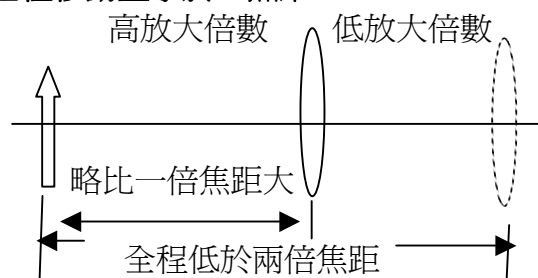
3 放大倒立實像



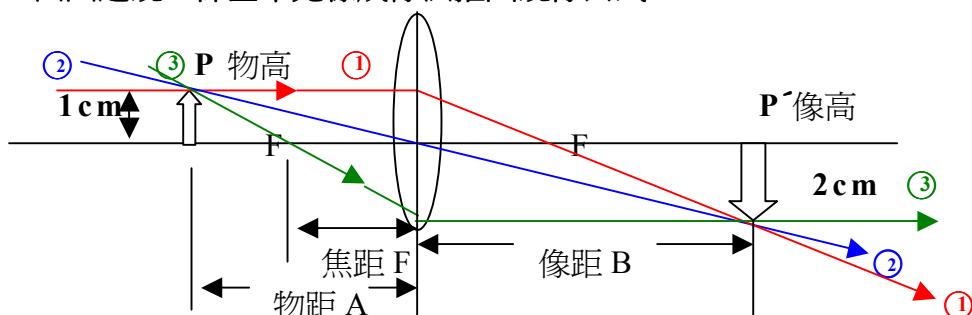
4 無焦點(無影像)



5 全程移動量小於一焦距



6 由凸透鏡三條基本光線成像法推出鏡像公式



$$P/A = P'/B \quad P/P' = A/B \quad A/B = F/(B-F)$$

$$P/F = P'/(B-F) \quad P/P' = F/(B-F)$$

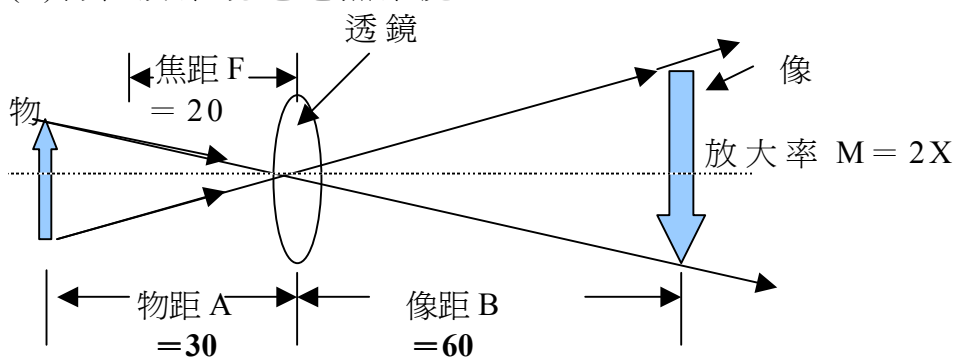
$$B/A = (B-F)/F = B/F - F/F = B/F - 1$$

$$B/A + 1 = B/F \quad \therefore \text{得證：} \left[\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F} \right] \cdots \text{凸透鏡的鏡像公式}$$

7 物與像的數學關係

$1/F = 1/A + 1/B$ 其中 F 表示焦距，A 表物距，B 表像距。

(1) 物位於距鏡超過焦距處



① 像在何處？

例如：已知透鏡焦距 F 為 20cm，而物距 A 為 30cm，則像距 B 應為？

$$F = 20, A = 30, \text{由透像成像公式 } 1/B = 1/F - 1/A = (A - F)/A F$$

$$\therefore B = A \times F / (A - F) = 30 \times 20 / (30 - 20) = 60$$

② 像有多大？

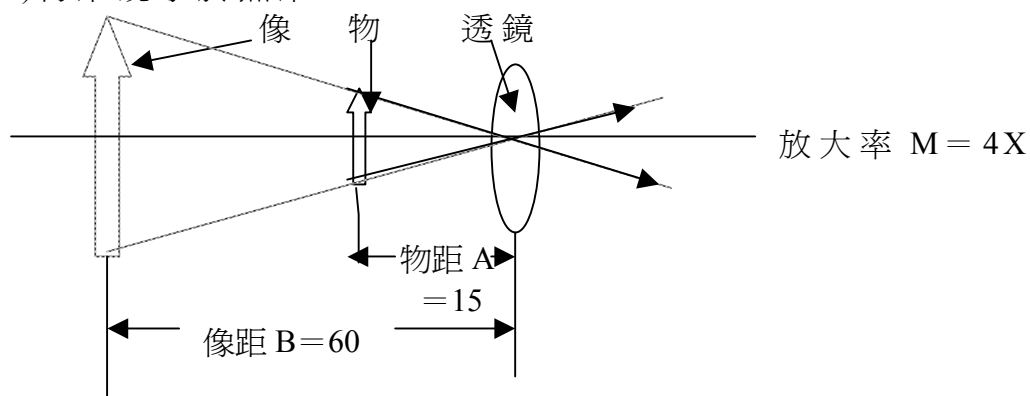
例如：已知透鏡焦距為 20cm，物距為 30cm，物長為 10 cm，則像長應為？

由透像成像公式 $1/B = 1/F - 1/A = (A - F)/A F$ ，已算出像距為 60 cm，那麼根據相似三角形原理，其線性放大率為 $B/A = 60/30 = 2$ ，所以若物體有 10 cm 高，則像高應為 $10 \times 2 = 20(\text{cm})$ 了。

其實物距 A、像距 B、焦距 F、放大率 M 四者變數關係算法可以歸納如下表：

1	$A = B/M$	$A = 60/2 = 30$
2	$A = F/M + F$	$A = 20/2 + 20 = 30$
3	$A = F \times B / (B - F)$	$A = 20 \times 60 / (60 - 20) = 30$
4	$B = A \times M$	$B = 30 \times 2 = 60$
5	$B = A \times F / (A - F)$	$B = 30 \times 20 / (30 - 20) = 60$
6	$B = (M + 1) \times F$	$B = (2 + 1) \times 20 = 60$
7	$F = A \times B / (A + B)$	$F = 30 \times 60 / (30 + 60) = 20$
8	$F = A \times M / (M + 1)$	$F = 30 \times 2 / (2 + 1) = 20$
9	$F = B / (M + 1)$	$F = 60 / (2 + 1) = 20$
10	$M = B/A$	$M = 60/30 = 2$
11	$M = F / (A - F)$	$M = 20 / (30 - 20) = 2$
12	$M = (B - F) / F$	$M = (60 - 20) / 20 = 2$
13	$1/F = 1/A + 1/B$	$1/F = 1/30 + 1/60 = 3/60 = 1/20 \quad \therefore F = 20$
14	$1/A = 1/F - 1/B$	$1/A = 1/20 - 1/60 = 2/60 = 1/30 \quad \therefore A = 30$
15	$1/B = 1/F - 1/A$	$1/B = 1/20 - 1/30 = 1/60 \quad \therefore B = 60$

(2)物距鏡小於焦距



①像在何處？

例如：已知透鏡焦距 F 為 20cm，而物距 A 為 15cm，則像距 B 應為？

$F = 20$ ， $A = 15$ ，由透像成像公式 $1/B = 1/A - 1/F = (F - A)/A F$

$\therefore B = A \times F / (F - A) = 15 \times 20 / (20 - 15) = 60$

②像有多大？

例如：已知透鏡焦距為 20cm，物距為 15cm，物長為 10 cm，則像長應為？

由透像成像公式 $1/B = 1/A - 1/F = (F - A)/A F$ ，已算出像距為 60 cm，那麼根據相似三角形原理，其線性放大率為 $B/A = 60/15 = 4$ ，

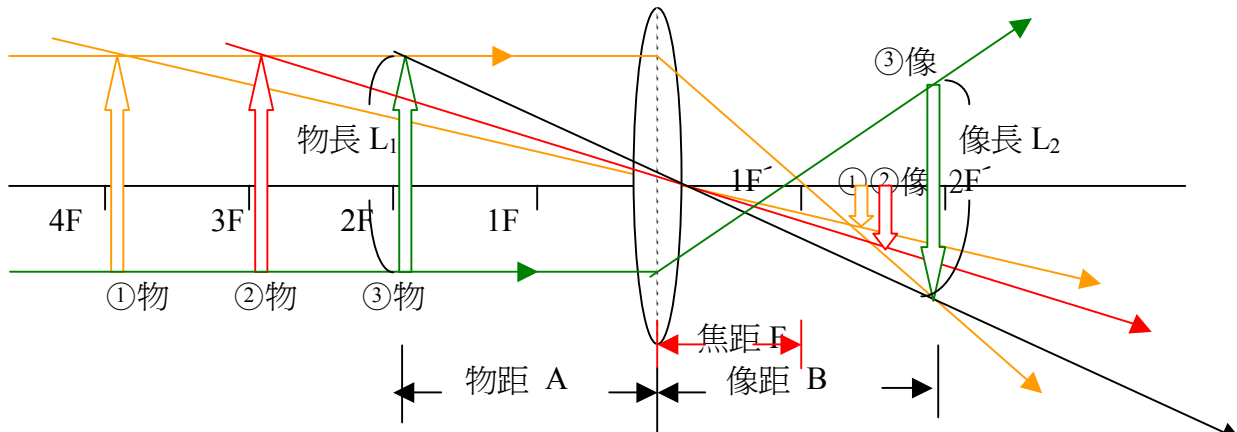
所以若物體有 10 cm 高，則像高應為 $10 \times 4 = 40(\text{cm})$ 了。

同樣的，物距 A、像距 B、焦距 F、放大率 M 四者變數關係算法可以歸納如下表：

1	$A = B/M$	$A = 60/4 = 15$
2	$A = F - F/M$	$A = 20 - 20/4 = 15$
3	$A = F \times B / (B + F)$	$A = 20 \times 60 / (60 + 20) = 15$
4	$B = A \times M$	$B = 15 \times 4 = 60$
5	$B = A \times F / (F - A)$	$B = 15 \times 20 / (20 - 15) = 60$
6	$B = (M - 1) \times F$	$B = (4 - 1) \times 20 = 60$
7	$F = A \times B / (B - A)$	$F = 15 \times 60 / (60 - 15) = 20$
8	$F = A \times M / (M - 1)$	$F = 15 \times 4 / (4 - 1) = 20$

9	$F = B/(M - 1)$	$F = 60/(4 - 1) = 20$
10	$M = B/A$	$M = 60/15 = 4$
11	$M = F/(F - A)$	$M = 20/(20 - 15) = 4$
12	$M = (B + F)/F$	$M = (60 + 20)/20 = 4$
13	$1/F = 1/A - 1/B$	$1/F = 1/15 - 1/60 = 3/60 = 1/20 \quad \therefore F = 20$
14	$1/A = 1/F + 1/B$	$1/A = 1/20 + 1/60 = 4/60 = 1/15 \quad \therefore A = 15$
15	$1/B = 1/A - 1/F$	$1/B = 1/15 - 1/20 = 1/60 \quad \therefore B = 60$

8 綜合凸透鏡倒立實像圖予以推測及計算(凸透鏡成虛像圖與本作品無關，故不予作圖討論之)



我們若以焦距為 20cm 的凸透鏡及平面鏡的配合下，做成可將物體移形換影的顯影箱，則若已知物高大小，設定它在何處(物距)時；會在我們顯影箱內的何處(像距①~⑤)，形成多大的像高(⑥~⑩)。計算試例如下：

物距(A)	像距(B)	物高(L ₁)	像高(L ₂)
40cm	①40 cm	20 cm	⑥20 cm
60 cm	②30	20 cm	⑦10
80 cm	③26.7	20 cm	⑧6.675
100 cm	④25	20 cm	⑨5
120 cm	⑤24	20 cm	⑩4

先由凸透鏡的鏡像公式推出像距 B：

$$1/A + 1/B = 1/F, \quad 1/B = 1/F - 1/A = (A-F)/FA, \quad \therefore B = FA/(A-F)$$

①若物距為 40cm，則像距 = $20 \times 40 / (40 - 20) = 40(\text{cm})$ 。

②若物距為 60cm，則像距 = $20 \times 60 / (60 - 20) = 30(\text{cm})$ 。

③若物距為 80cm，則像距 = $20 \times 80 / (80 - 20) = 26.7(\text{cm})$ 。

④若物距為 100cm，則像距 = $20 \times 100 / (100 - 20) = 25(\text{cm})$ 。

⑤若物距為 120cm，則像距 = $20 \times 120 / (120 - 20) = 24(\text{cm})$ 。

再依據數學的相似三角形公式推出像高：

$$L_1/A = L_2/B, \quad \therefore L_2 = L_1/A \times B$$

⑥若物高 20cm 在物距為 40cm 時，則像高 = $(20/40) \times 40 = 20(\text{cm})$ 。

⑦若物高 20cm 在物距為 60cm 時，則像高 = $(20/60) \times 30 = 10(\text{cm})$ 。

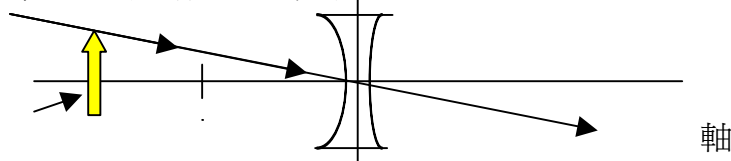
⑧若物高 20cm 在物距為 80cm 時，則像高 = $(20/80) \times 26.7 = 6.675(\text{cm})$ 。

⑨若物高 20cm 在物距為 100cm 時，則像高 = $(20/100) \times 25 = 5(\text{cm})$ 。

⑩若物高 20cm 在物距為 120cm 時，則像高 = $(20/120) \times 24 = 4(\text{cm})$ 。

(四)凹透鏡的成像法

1 通過透鏡中心的光線不生偏向。

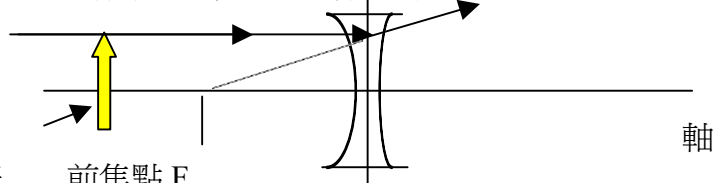


物體

F

軸

2 平行於軸的光線折射後，就像由前焦點發出。

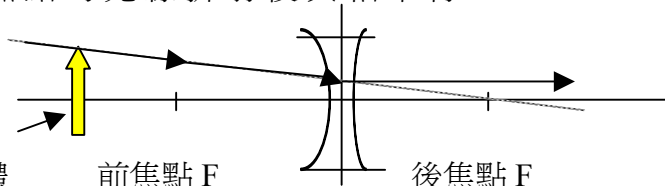


物體

前焦點 F

軸

3 延伸向後焦點的光線折射後與軸平行

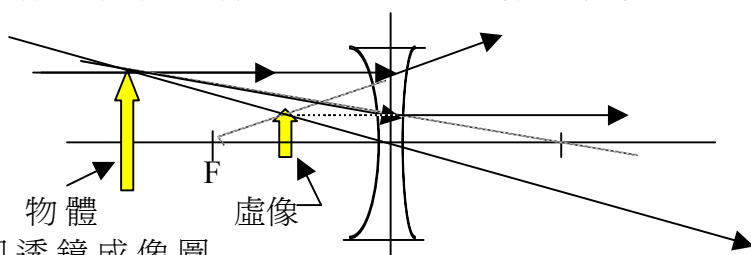


物體

前焦點 F

後焦點 F

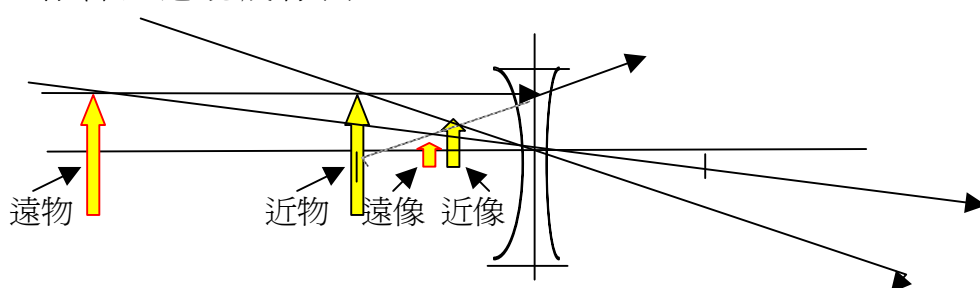
4 三條光線之任何二條的交點可定出像的位置



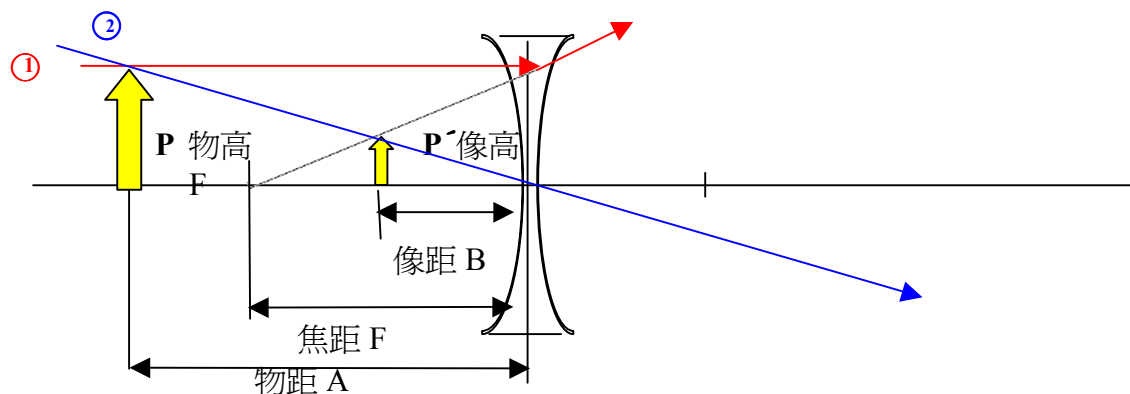
物體

虛像

5 綜合凹透鏡成像圖



6 由凹透鏡基本光線成像法推出鏡像公式



$$P/A = P'/B \quad P/P' = A/B \quad F/P = (F-B)/P' \quad FP' = (F-B)P \quad P/P' = F/(F-B)$$

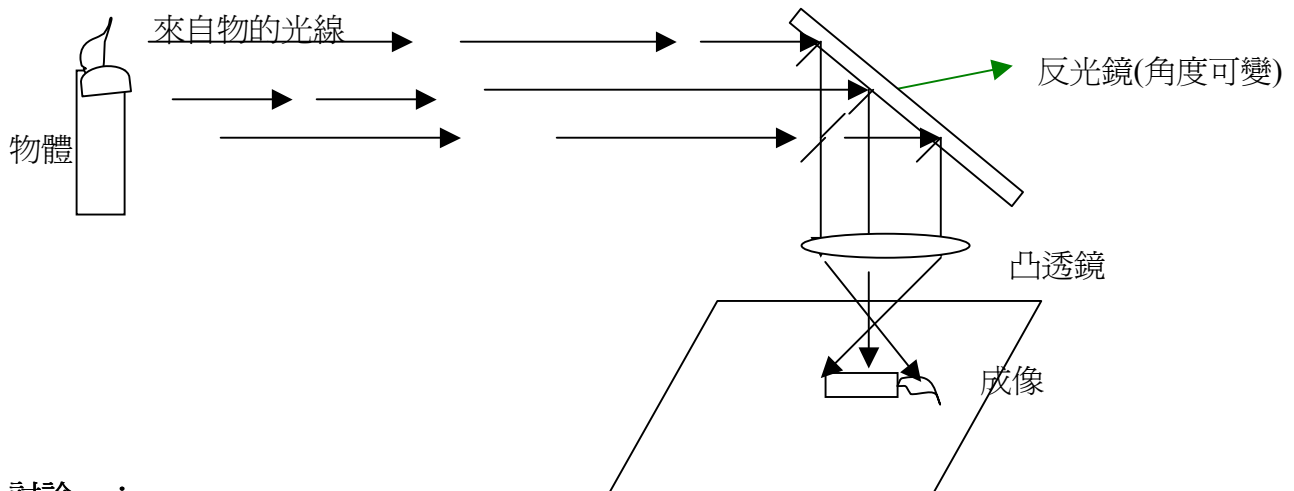
$$A/B = F/(F-B) \quad B/A = (F-B)/F = 1 - B/F \quad B/A + B/F = 1$$

$$1/A + 1/F = 1/B \quad \therefore \text{【} 1/B - 1/A = 1/F \text{】} \cdots \text{凹透鏡的鏡像公式}$$

研究三：利用凸透鏡焦距與物距、像距間的關係，試設計並製作一簡易的素描機

【想法一】

- 1 先以一面反光鏡(角度可以變化)，使光轉成 90° 投射於凸透鏡中。
- 2 再利用凸透鏡使成像顯於圖畫紙上。

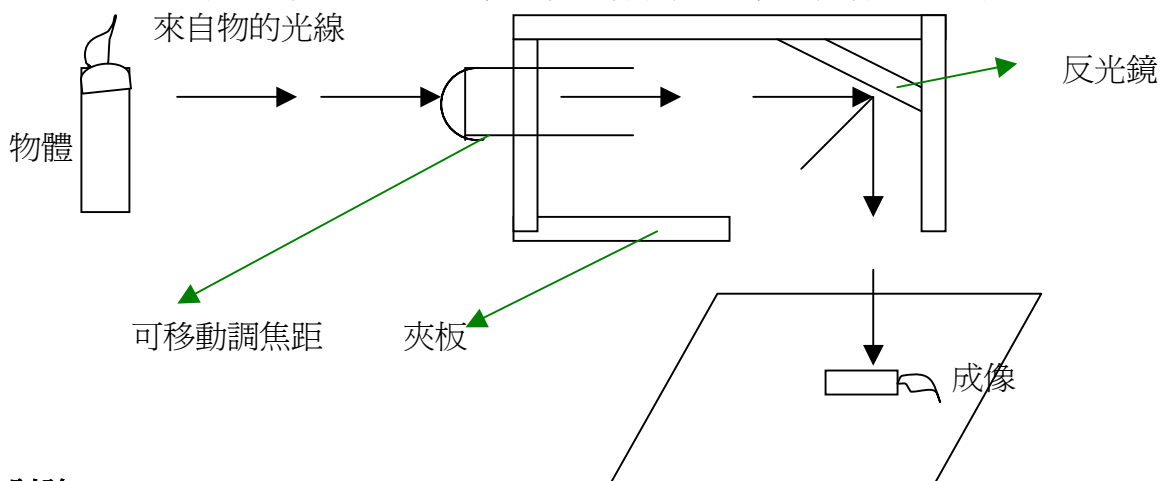


討論一：

- 1 雖然可以產生正立的正常左右像但描繪者必須背向欲觀賞的景物。
- 2 成像在下方，其成像會被描繪者的頭或手所遮擋，故描繪時相當困難。

【想法二】

- 1 將平凸透鏡裝於可移動調焦的鏡筒內，並固定於夾板的箱子上。
- 2 再以一反光平面鏡置於凸透鏡之後，使景像轉成 90° 後，成像於圖畫紙上。

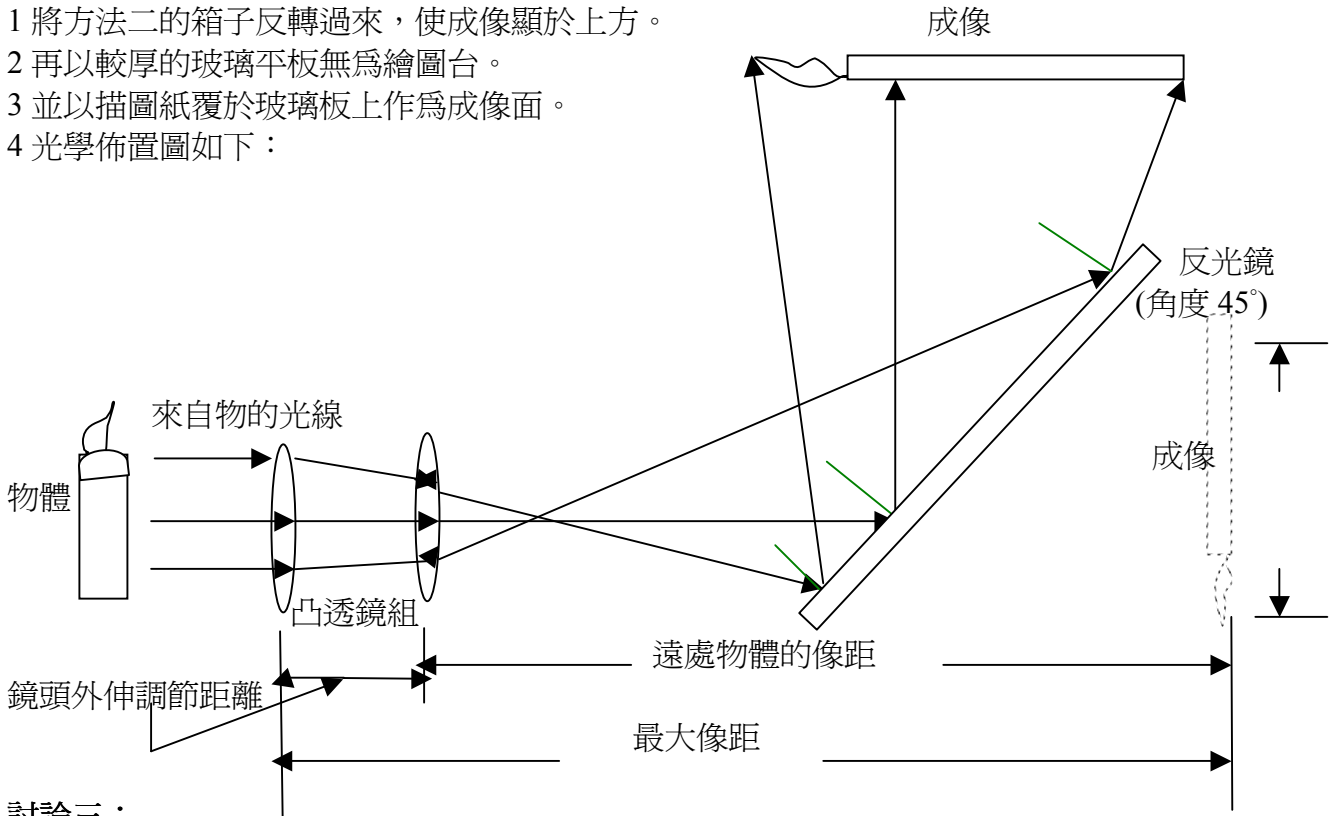


討論二：

- 1 也可成像於圖畫紙上。
- 2 但會產生左右相反的正立成像。
- 3 因其成像仍在下方，會被頭或手遮蔽，繪圖時相當不便，故捨棄此方法。

【想法三】

- 1 將方法二的箱子反轉過來，使成像顯於上方。
- 2 再以較厚的玻璃平板無為繪圖台。
- 3 並以描圖紙覆於玻璃板上作為成像面。
- 4 光學佈置圖如下：



討論三：

- 1 能成像於玻璃板的描圖紙上，但成像是正立且左右相反的。
- 2 若將描圖紙反過來複描於正式的圖畫身上，即可變為正立的正常左右像。
- 3 素描機箱子的大小是依使用透鏡的焦距而設計的。

(1)若要描繪遠景時，鏡頭至圖面的距離應為一倍焦距或略大些。以公式及成像推例如下：

素描機設計所用的公式為：A 表物距；B 表像距；F 表焦距；M 表線性放大率

(已知 F 與 M)，則 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}$ ， $M = B/A$ 或 $B = (M + 1) \times F$ ， $\frac{B}{F - 1} = M$

例如：焦距 20cm 的凸透鏡，物距為 500cm，則像距應在？放大率為？

將已知條件代入 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}$ ， $\frac{1}{B} = \frac{1}{F} - \frac{1}{A}$ ，

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{20} - \frac{1}{500} = 0.048, B = 20.83 \text{ cm}$$

$$M = B/A = 0.042 \quad \text{或} \quad M = B/F - 1 = 0.042,$$

亦即物高若為 100cm 高，則像高為 $100 \times 0.042 = 4.2(\text{cm})$ 高了。

(2)若要描繪全尺寸圖，則透鏡至圖面距離將增至兩倍焦距，此時物距也應為兩倍焦距。

例如：焦距 20cm 的凸透鏡，物距為 40cm，則像距應在？放大率為？

將已知條件代入 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}$ ， $\frac{1}{B} = \frac{1}{F} - \frac{1}{A}$ ，

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{20} - \frac{1}{40} = 0.025, B = 40 \text{ cm}$$

$$M = B/A = 40/40 = 1 \quad \text{或} \quad M = B/F - 1 = 40/20 - 1 = 1,$$

亦即物高若為 10cm 高，則像高為 $10 \times 1 = 10(\text{cm})$ 高了。

(3)若要描繪近景時，鏡頭至圖面的距離應為二倍焦距以上，所以選擇的透鏡焦距應該較小些。

例如：焦距 10cm 的凸透鏡，物距為 15cm，則像距應在？放大率為？

將已知條件代入 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}$ ， $\frac{1}{B} = \frac{1}{F} - \frac{1}{A}$ ，

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = 0.0333, B = 30.03 \text{ cm}$$

$$M = B/A \div 2 \quad \text{或} \quad M = B/F - 1 \div 3 - 1 = 2,$$

亦即物高若為 8cm 高，則像高為 $8 \times 2 = 16(\text{cm})$ 高了

4 若於戶外描繪時，必須要有完整的遮光設備，方能使成像保持清晰。

研究四：以設計的第一代素描機工具做定點觀測及實際比較

第一代素描機的製造過程



1 已經如火如荼展開的道具實驗桌



2 凸透鏡頭的固定



3 光由左側進入凸透鏡頭，而在右側平面鏡中呈像



4 小型素描機凸透鏡頭的正面圖



5 加蓋型的小型素描機由室內向室外觀測景物的情形



6 可看見影像，但以數位相機拍攝室內小型素描機的影像時，因相機的自動閃光，故沒拍到影像，我們決定將實測地點改為地下室。

實測步驟：

- 1 我們拿多個不同長方形面積大小的實物實測其物高及物寬。
- 2 將物置於固定的 200cm 物距的桌面上。
- 3 調整素描機內的平面鏡仰角呈 45° ，暫時量好位置稍微固定一下，再量出箱內的最大像距。
- 4 以大手電筒對物打光，當由素描機上呈最清晰的像時，移開箱內的平面鏡，將測試板伸入箱內，找出真正箱內的像距，再量出鏡頭與箱子的筒距，即為成像的像距。
- 5 將平面鏡回復如步驟 3 的位置，從素描機上的呈像，量出像的影高及影寬。

【實測與理論計算上的比較】

平面鏡仰角呈 45° ，固定物距，調整鏡頭長短至呈清晰的像，此即為像距，實測如下表所示：
第一次測量：

物高 cm	物寬 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	影寬 cm	計算物距		物放大率計算的大小	
							cm	誤差%	M 高	M 寬
9	12.5	200	31	27	1.4	2.1	209.25	4.6	0.156	0.168
23	9	200	31	27	3.6	1.5	209.25	4.6	0.157	0.167
25	17.8	200	31	27	3.7	2.8	209.25	4.6	0.148	0.157
28	24.5	200	31	27	4.0	3.5	209.25	4.6	0.143	0.143
28	28	200	31	27	4.8	4.8	209.25	4.6	0.143	0.143
物放大率的平均誤差%									3.61	0.39

第二次測量：

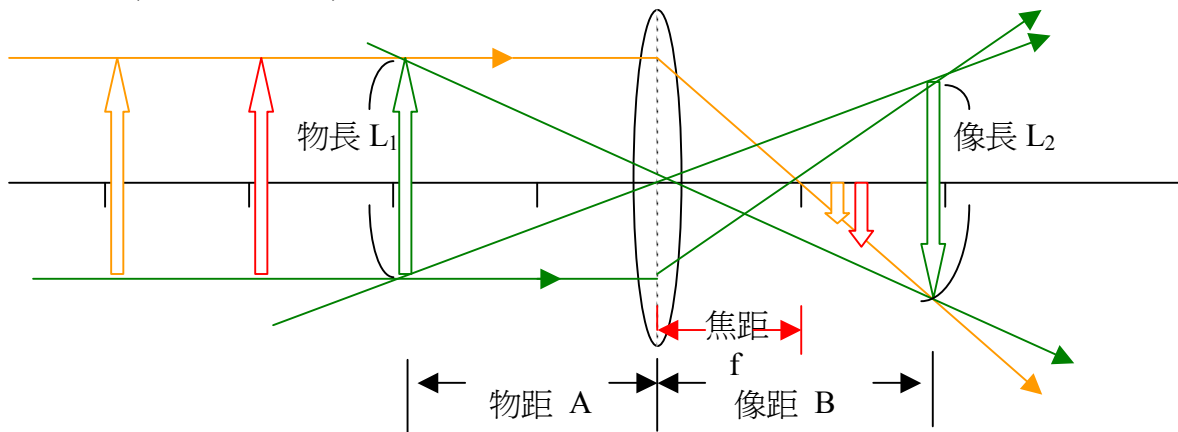
物高 cm	物寬 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	影寬 cm	計算物距		計算物放大率的大小	
							cm	誤差%	M 高	M 寬
30.4	9	200	31	27	5.2	1.4	209.25	4.6	0.156	0.168
36	12.5	200	31	27	5.8	2.2	209.25	4.6	0.157	0.167
35	16	200	31	27	5.8	2.5	209.25	4.6	0.148	0.157
41.5	13	200	31	27	6.3	2.3	209.25	4.6	0.143	0.143
46.5	13	200	31	27	7.5	2.1	209.25	4.6	0.143	0.143
物放大率的平均誤差%									4.90	6.70

第三次測量：

物高 cm	物寬 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	影寬 cm	計算物距		計算物放大率的大小	
							cm	誤差%	M 高	M 寬
15	26	200	31	27	2.5	4.5	209.25	4.6	0.167	0.173
16	22	200	31	27	2.5	3.5	209.25	4.6	0.156	0.159
25.5	17.7	200	31	27	4.0	3.0	209.25	4.6	0.157	0.169
25	47	200	31	27	4.0	7.0	209.25	4.6	0.160	0.149
28	22	200	31	27	4.7	3.8	209.25	4.6	0.168	0.173
47	25	200	31	27	7.0	3.6	209.25	4.6	0.149	0.144
物放大率的平均誤差%									2.58	3.98

討論：

1 以實物(已知高度大小)及物距來對照及修正第一代顯影機的測量誤差，圖示及計算如下：



以理論公式作實測上的計算如下：

代號	A	B	H ₁	H ₂	L ₁	L ₂	M
意義	物距	像距	物高	像高	物寬	像寬	放大率

凸透鏡成像公式 $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{f}$ ， $\frac{1}{A} = \frac{1}{f} - \frac{1}{B} = \frac{(B-f)}{fB}$ $\therefore A = fB / (B-f)$

物距計算法： $A = 27 \times 31 / (31 - 27) = 209.25$

物距誤差% = 【實測物距－實際物距】/實際物距 $\times 100\%$ = 【209.25－200】/200 $\times 100\%$ = 4.6%

放大率公式 $M = B/A = H_2/H_1 = L_2/L_1$ ， $\therefore$ 放大率計算法： $B/A = 31/200 = 0.155$

放大率 M 高 = $H_2/H_1 = 1.4/9.0 = 0.156$ ， $3.6/23.0 = 0.157\cdots$ 以此類推。

放大率 M 寬 = $L_2/L_1 = 2.1/12.5 = 0.168$ ， $1.5/9.0 = 0.167\cdots$ 以此類推。

放大率 M 高誤差% = 【實測放大率－實際放大率】/實際放大率 $\times 100\%$

= 【 $H_2/H_1 - B/A$ 】/ (B/A) $\times 100\%$ = $(0.156 - 0.155) / 0.155 = 0.65\%$ 以此類推。

放大率 M 寬誤差% = 【實測放大率－實際放大率】/實際放大率 $\times 100\%$

= 【 $L_2/L_1 - B/A$ 】/ (B/A) $\times 100\%$ = $(0.168 - 0.155) / 0.155 = 8.40\%$ 以此類推。

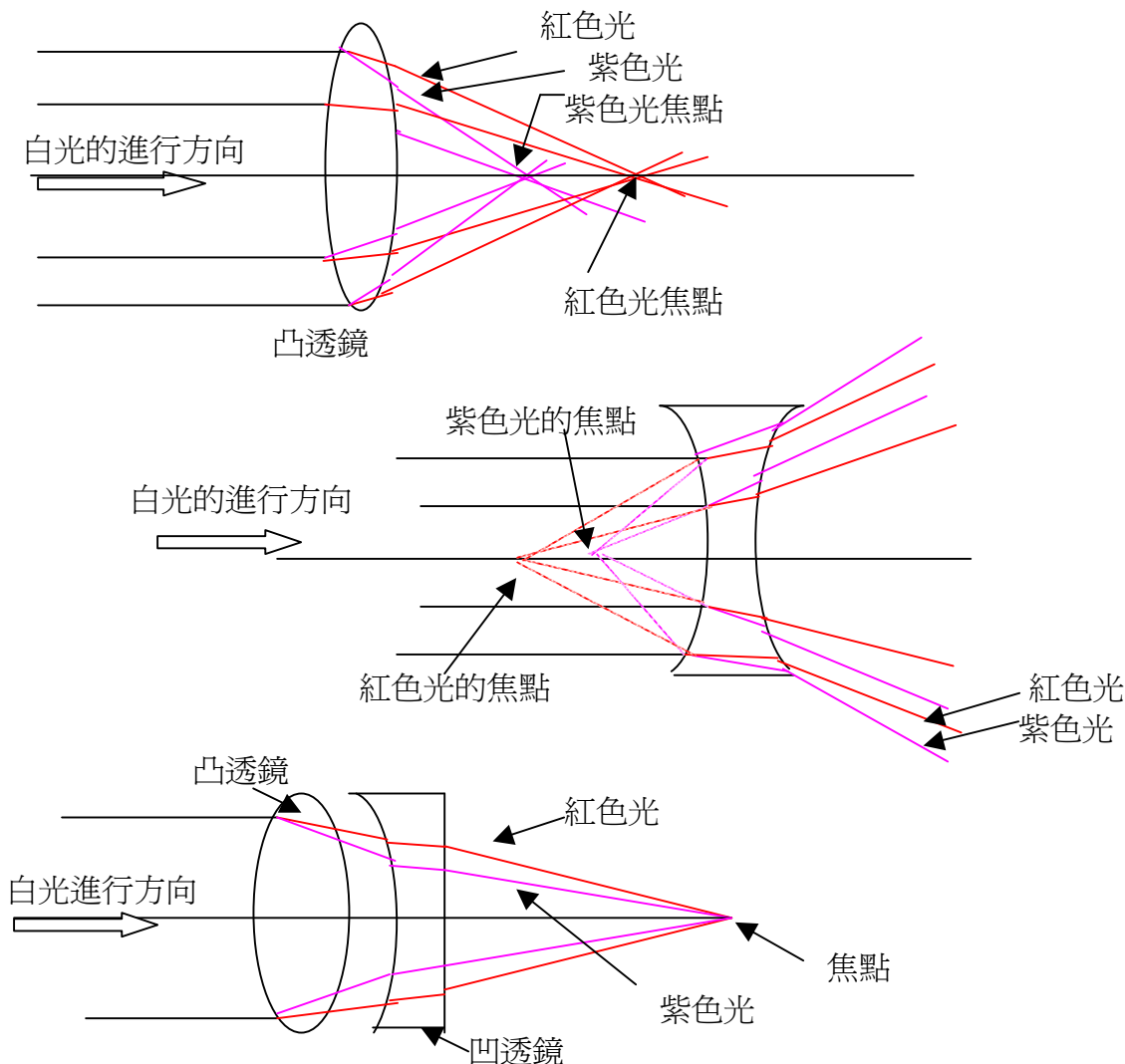
2 雖然實測成像的長及寬的誤差還算可以接受，但是，物高及物寬沒有呈規律性的倍數關係，不能一覽觀測對照表，就直接讀出實際物高大小，而只能由放大率的計算中得知：【呈像的放大率約為 0.155 倍，即物在 200cm 處，若呈像高 5 cm，則物高應為 $5/0.155 \approx 32$ cm】

，此為實測上的缺點，我們想應考慮(1)讓物體規格化，以高度間距為 20、25 或 30 為一單位差，度量上才更容易比較出其差距。(2)物距應有變化，物不可能永遠固定在 200 cm 處，但若物距再大一些，像會更小，測量上都在小數點第一位上游走，實在已失去測量上的意義及可信度了，所以，經過多日的討論及腦力激盪，我們決定向透鏡組挑戰！

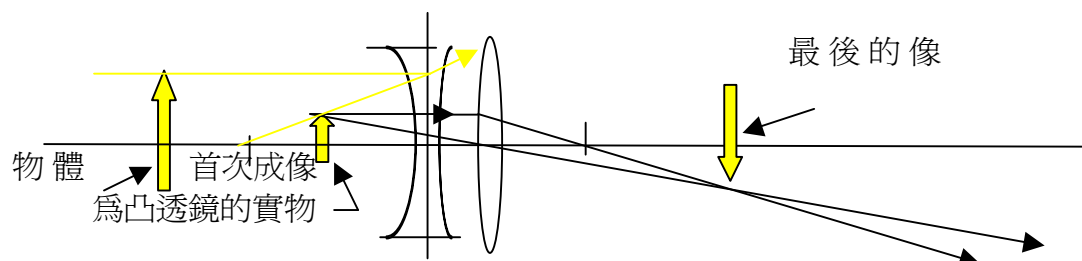
研究五：改進呈像大小成為物距遠近自如的第二代素描機

【想法一：凹凸透鏡組】

1 第一代素描機的物光(通常是白光為複合光)經由凸透鏡聚光呈像後邊緣會有色像差的情形出現，若加上凹透鏡的發散光線呈像後，恰可補此色像差的缺點，如下作圖所示：



2 所以，我們決定以一片凹透鏡及一片凸透鏡作為我們的透鏡組鏡片，若物光先由凹透鏡發散成鏡前的正立縮小虛像，再經由凸透鏡聚光成鏡後的倒立實像，如下圖所示。



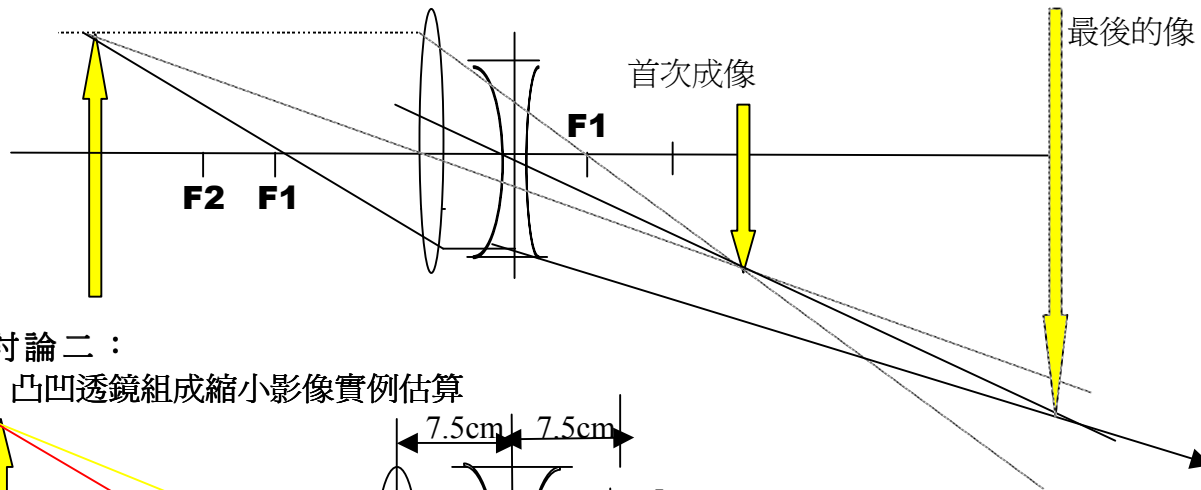
3 使此實像經由 45° 的平面鏡反射於描圖紙上。

討論一：

首次成像為虛像，可否有效的成為凸透鏡的實物？而最後成像的效果會好嗎？很值得我們懷疑，實測時我們還是會組合看看此效果如何。

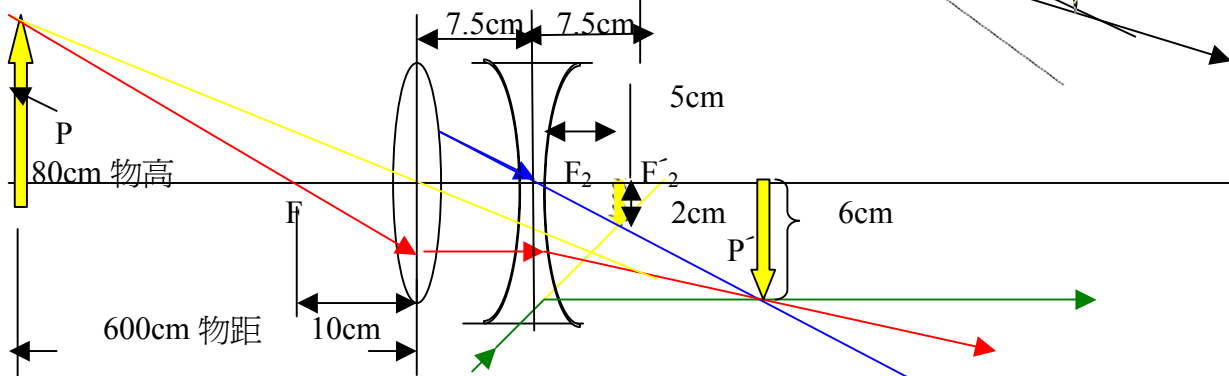
【想法二：凸凹透鏡組】

- 1 既然先經凹透鏡成像再經凸透鏡成像的疑慮這麼大，那多比較及推測物光先由凸透鏡聚光成鏡後的倒立實像，再經由凹透鏡發散後，應仍在鏡後呈像才是。
- 2 我們依據折射定律，畫出凸透鏡及凹透鏡的光線走向，居然可將遠物的物光先由凸透鏡呈首次成縮小實像後，再經由凹透鏡發散光線呈再放大的最後成像，如下圖所示。
- 3 實測時我們應使此實像經由 45° 的平面鏡反射於描圖紙上，希望此組合的效果能和想法相去不遠。



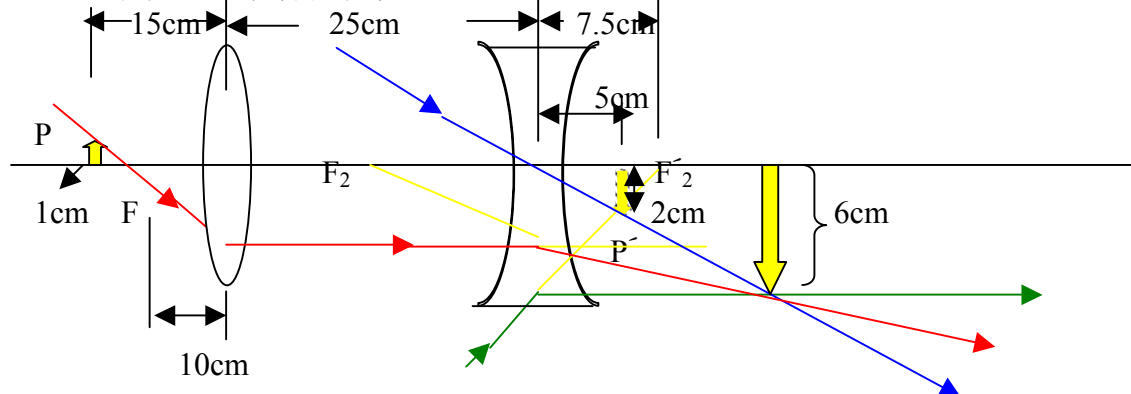
討論二：

1 凸凹透鏡組成縮小影像實例估算



- (1)第一次成實像之物距 A 為 600cm ，像距 B 為 $7.5 + 7.5 = 15\text{cm}$ ，
第一次成像的放大率 $M = B/A = 15/600 = 1/40$ ，即物為 80cm 高，第一次成像為 2cm 高。
- (2)凸透鏡產生之實像可視為凹透鏡的虛物，第二次成像之物距為 -5cm ，
根據凹透鏡成像公式： $1/B = 1/F + 1/A$ $1/B = 1/7.5 + 1/(-5) = -2.5/(7.5 \times 5)$ $\therefore B = -15\text{cm}$ ，
像的位置距凹透鏡 -15cm ，與虛物同向，放大率 $M = B/A = -15\text{cm}/-5\text{cm} = 3$ 倍。
- (3)放大率為 3 倍，即物為(第一次成像) 2cm 高，則像應為(第二次成像) 6cm 高。
全部的成像放大率為 $M = 6/80 = 1/40 \times 3 = 3/40$ 倍，即物 80cm 高，終像為 6cm 高。

2 凸凹透鏡組成放大影像實例估算



- (1)第一次成實像之物距為 15cm，像距為 $25 + 5 = 30\text{cm}$ ，第一次成像的放大率為 $30/15 = 2$ 倍，即物為 1cm 高，第一次成像為 2cm 高。
- (2)凸透鏡產生之實像可視為凹透鏡的虛物，第二次成像之物距為 -5cm ，
根據凹透鏡成像公式： $1/B = 1/F + 1/A$ $1/B = 1/7.5 + 1/(-5) = -2.5/(7.5 \times 5) \therefore B = -15\text{cm}$ ，
像的位置距凹透鏡 -15cm ，與虛物同向，放大率 $M = B/A = -15\text{cm}/-5\text{cm} = 3$ 倍。
- (3)物 1cm 高，第一次成像 2cm 高，放大 2 倍；第二次成像 6cm 高，為第一次成像 2cm 高的 3 倍。所以，全部的成像放大率為 $M = 6/1 = 2 \times 3 = 6$ 倍，即物 1cm 高，終像為 6cm 高；物 2cm 高，終像為 12cm 高。

研究六：以設計的第二代素描機工具做定點觀測及實際比較

第二代素描機的實測情形

(因透鏡直徑大小的關係，原 27cm 焦距的凸透鏡直徑大小與學校已有的凹透鏡片直徑大小不合，而 20 cm 焦距的凸透鏡則較合適，故所有的透鏡組的凸透鏡部份均改為 20 cm 焦距來作實驗)



1 凸、凹透鏡的鏡頭



2 凸、凹透鏡的筒長等長



3 試比凸、凹透鏡筒的筒距



4 凸、凹透鏡筒重疊下的筒距



5 以多個紙箱重疊黏成可達 200cm 高的三條物標，由左到右分別為 20、25、30cm 的間距



6 以第二代素描機作第一次的實測情形



7 第二代素描機以半透明塑膠片為顯影板



8 一手遮光，一手控制顯影板，已經手忙腳亂了，還要度量像長等數據，實在不方便，準備設計透明刻度片再來測量



9 利用假日擺好由左到右間距為 20、25、30cm 的 200cm 高物標



10 投影螢幕加已設計印刷上刻度的投影片 (可直接度量像的長度)



11 再度重新出發的第二代素描機螢幕顯影箱



12 頭須探入箱中，才能清楚觀測像的長度，思考下，可能要改呈像螢幕的角度，所以平面鏡仰角可能也得改

實測步驟：

- 1 我們以同規格的白色西卡紙各將凸凹透鏡捲成筒距一樣，但凸透鏡筒直徑需稍大的鏡筒，目的在使兩透鏡筒重疊時能恰好套接密合。
- 2 以膠帶將多個紙箱重疊成 200 公分以上的標的箱，再以三張不同顏色的壁報紙黏成 200cm 長的寬色帶，並以彩色皺紋紙黏出 20、25、30cm 的間距。
- 3 將中型紙箱以膠帶黏好備用。
- 4 保麗龍斜切出約 45° 角，使得架上平面鏡時仰角恰呈 45° 。
- 5 以紙板作描圖紙的邊框，四個角連上固定線及固定桿，使顯影板為可上下調高度的平板，並切割紙箱作遮光板，使素描機能呈較清晰的像。
- 6 移開箱內的平面鏡，將測試板伸入箱內，找出真正箱內的像距，再量出鏡頭與箱子的筒距，即為成像的像距，然後將平面鏡回復如步驟 4 的位置。
- 7 Microsoft Word 製作密且等距的表格，列印後，再印成有透明刻度的投影片，將此投影片以膠帶貼在顯影板上再來測量像高，從素描機上的呈像，量出像的影高及影寬。

【實測與理論計算上的比較】

平面鏡仰角呈 45° ，固定物距，調整鏡頭至呈最清晰的像，此即為像距，實測如下表所示：
第一次測量：

物高 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	計算物距		物放大率計算的大小	
					cm	誤差%	M	誤差%
200	1200	54.5	52	9.8	1133.6	5.5	0.049	8
180	1200	54.5	52	8.8	1133.6	5.5	0.049	8
160	1200	54.5	52	7.8	1133.6	5.5	0.049	8
140	1200	54.5	52	6.8	1133.6	5.5	0.049	8
120	1200	54.5	52	5.8	1133.6	5.5	0.048	6
100	1200	54.5	52	4.9	1133.6	5.5	0.049	8
80	1200	54.5	52	3.9	1133.6	5.5	0.049	8
60	1200	54.5	52	2.9	1133.6	5.5	0.048	6
40	1200	54.5	52	1.9	1133.6	5.5	0.048	6
20	1200	54.5	52	0.9	1133.6	5.5	0.045	0
平均							0.048	6.6

第二次測量：

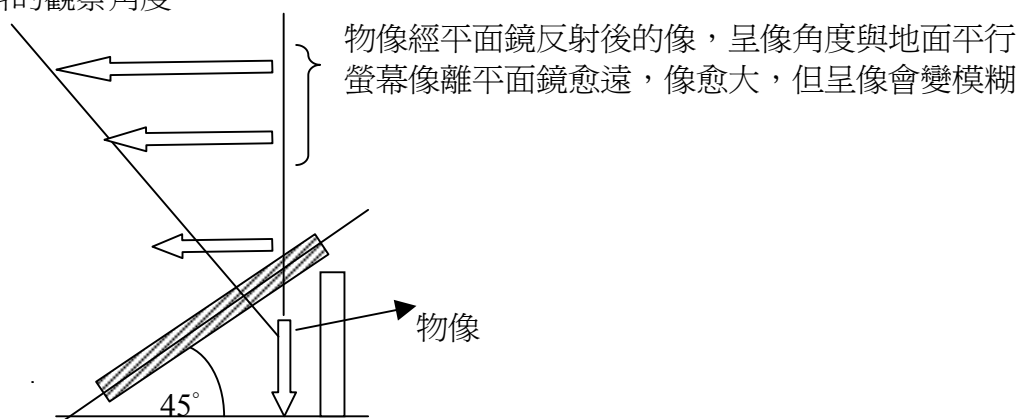
物高 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	計算物距		物放大率計算的大小	
					cm	誤差%	M	誤差%
200	1200	54.5	52	9.8	1133.6	5.5	0.049	8
175	1200	54.5	52	8.6	1133.6	5.5	0.049	8
150	1200	54.5	52	7.3	1133.6	5.5	0.049	8
125	1200	54.5	52	6.1	1133.6	5.5	0.049	8
100	1200	54.5	52	4.9	1133.6	5.5	0.049	8
75	1200	54.5	52	3.7	1133.6	5.5	0.049	8
50	1200	54.5	52	2.5	1133.6	5.5	0.050	11
25	1200	54.5	52	1.2	1133.6	5.5	0.048	6
平均							0.049	8

第三次測量：

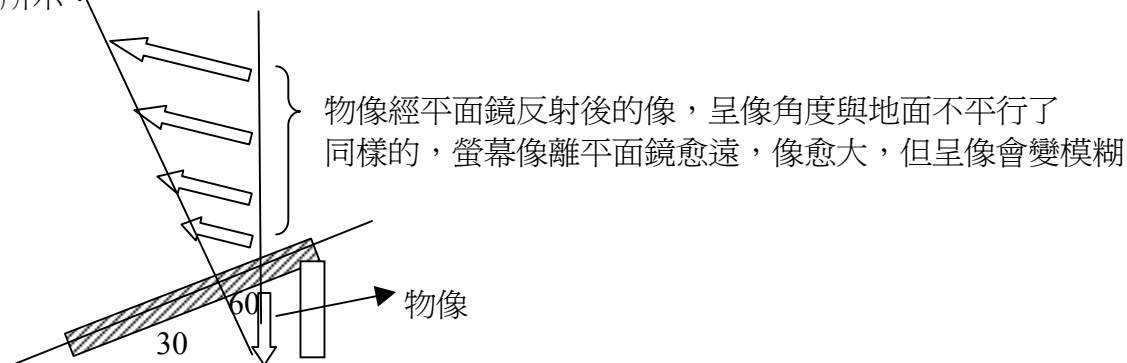
物高 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	計算物距		物放大率計算的大小	
					cm	誤差%	M	誤差%
200	1200	54.5	52	9.8	1133.6	5.5	0.049	8
170	1200	54.5	52	8.3	1133.6	5.5	0.049	8
140	1200	54.5	52	6.8	1133.6	5.5	0.049	8
110	1200	54.5	52	5.4	1133.6	5.5	0.049	8
80	1200	54.5	52	3.9	1133.6	5.5	0.049	8
50	1200	54.5	52	2.5	1133.6	5.5	0.049	8
25	600		22	1.2	1133.6	5.5	0.048	6
平均							0.049	8

討論：

- 1 第二代素描機的鏡頭一開始以凹透鏡在前、凸透鏡在後，不管怎麼調整鏡筒及箱內平面鏡的位置，都無法顯像，所以我們就改以凸透鏡在前、凹透鏡在後，當調整到兩筒間距為 7cm 時，可在顯影板上看到明顯的物像。
- 2 爲了能準確的測量出像的長度，遮光效果須擋住由上到下的外界漫射的光，頭須探入箱中才能清楚觀測像的長度，思考下，可能要改呈像螢幕的角度，因爲仰角爲 45° 的平面鏡，呈像角度恰與地面平行，所以可能先得改平面鏡的仰角，才能使螢幕不與地面平行而呈理想傾斜的觀察角度。



- 3 我們推想若將平面鏡仰角變小後，物像經平面鏡反射後的像，呈像角度應可抬高，推想如下圖所示：



第二代素描機改進及實測的情形



設計 30°仰角的平面反射鏡



實際顯影呈像時，像的長度上段長而下段短



以外控制桿拉動控制線，使內部影像板仰角抬高 15°



再次實際顯影呈像時，像的長度仍是上段比下段稍長，但已有差距變小



繼續以外控制桿拉動控制線，使內部影像板仰角抬高至 30°



再次實際顯影呈像時，像的長度上段與下段已經變等長了，且測量時不用擔心遮光不夠而頭須伸進去看，現只要從外面測量便可以了

實測步驟：

1. 與前面的步驟大致相同，唯有兩個步驟須注意的是【平面鏡仰角要變】【顯影板仰角也要變】
2. 保麗龍斜切出約 30°角，使得架上平面鏡時仰角恰呈 30°。
3. 顯影箱的外面兩側控制桿拉動控制線，使顯影板為可上下調角度的平板，使內部影像板仰角抬高 15°及 30°時，測量顯像的影高，結果如下表。

【實測與理論計算上的比較】

結果：平面鏡仰角呈 15° ，固定物距，調整鏡頭至呈最清晰的像，此即為像距，實測時【因畫面太淡，無法清晰看出像長，故不能記錄出成像大小】。

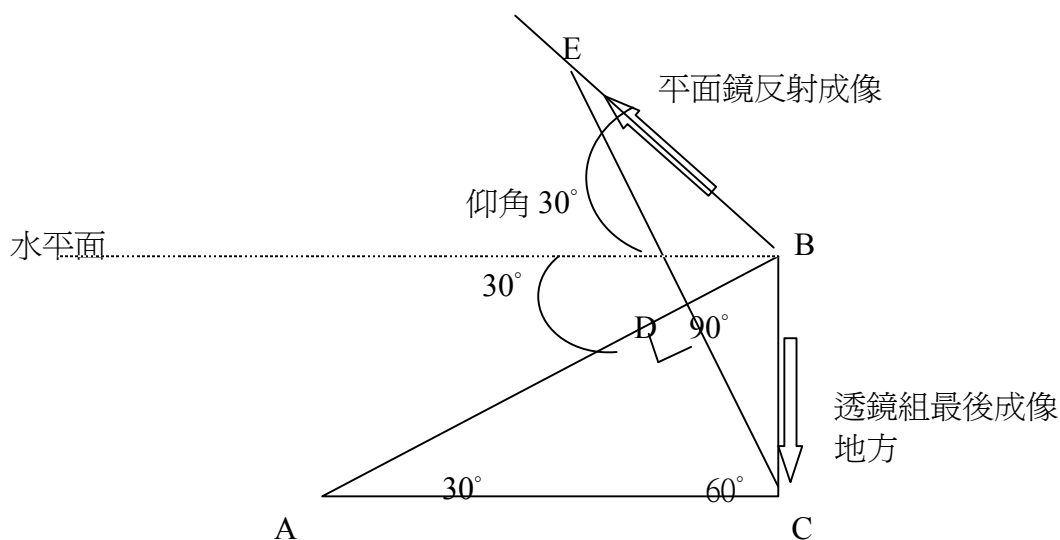
平面鏡仰角呈 30° ，固定物距，調整鏡頭至呈最清晰的像，此即為像距，實測如下表所示：第一次測量：

物高 cm	物距 A(cm)	像距 B(cm)	焦距 F(cm)	影高 cm	計算物距		物放大率計算的大小	
					cm	誤差%	M	誤差%
200	1200	54.5	52	9.8	1133.6	5.5	0.049	8
180	1200	54.5	52	8.8	1133.6	5.5	0.049	8
160	1200	54.5	52	7.8	1133.6	5.5	0.049	8
140	1200	54.5	52	6.8	1133.6	5.5	0.049	8
120	1200	54.5	52	5.8	1133.6	5.5	0.048	6
100	1200	54.5	52	4.9	1133.6	5.5	0.049	8
80	1200	54.5	52	3.9	1133.6	5.5	0.049	8
60	1200	54.5	52	2.9	1133.6	5.5	0.048	6
40	1200	54.5	52	1.9	1133.6	5.5	0.048	6
20	1200	54.5	52	0.9	1133.6	5.5	0.045	0
平均							0.048	6.6

結果：平面鏡仰角呈 30° ，第一次實測時的結果與平面鏡仰角呈 45° 的數據幾乎完全一樣，所以就不再進行第二次或第三次的測量了。

討論：

- 1 我們嘗試以傾斜 15° 的平面鏡測量像的影高，但因畫面太淡，無法清晰看像，故不能順利測量成像大小。所以，由此可知，我們已發現平面鏡仰角的角度愈小，成像愈淡，而且的確是 15° 角的畫面比 30° 角的淡， 30° 角的比 45° 角的淡。
- 2 第二代改良後的顯影機主要重點在平面鏡的仰角由原來的 45° 改為 30° ，以及外面兩枝控制桿可同時拉動四條控制線，使內部影像板的仰角可抬高角度成傾斜狀的平面，雖然畫面淡了一些些，但量取讀數時，頭不必再伸進去測量，方便性不少。
- 2 而已將平面鏡仰角改為 30° 以後，顯影板若擺放為水平面的方式，則會發生 10 段每 20 公分等距的物體成像時，後段成像高度差有愈來愈小的情形出現。所以，我們將成像平面開始提昇一仰角時，發現有前後段高度差愈來愈接近一樣，當逐漸提昇至仰角為 30° 時，發現前後段的成像高度差已呈等距的結果。
- 3 經下圖的作圖結果所示，當平面鏡呈 30° 角與水平面的仰角亦呈 30° 角時， $\triangle BCD$ 與 $\triangle BED$ 為兩全等的三角形。 $\therefore BC = BE$ ，在此兩線段的物或像全等。



伍、結論與心得

1 目的—【運用鏡面反射原理找出置於桌面而呈不同仰角的平面鏡成像圖】

- (1)由上面平面鏡與桌面呈不同的仰角作圖分析，已經很明顯的可知呈 45° 仰角的平面鏡成像會與水平面平行，所以顯影素描板可以平放，而眼睛只要從鏡面上方向素描板觀看即可。
- (2)若選擇呈 30° 仰角的平面鏡，則顯影素描板須呈右下傾，即眼睛應從與物異側的斜上方向素描板方向看才可以，這樣的效果有沒有比 45° 的要好，可以在實測時再予以驗證。
- (3)若選擇呈 60° 仰角的平面鏡，則顯影素描板須呈左下傾，即眼睛應從與物同側的斜上方向素描板方向看才行，這樣看，一則背對物體，二則有可能會因站在與物同側而遮住物光，那就太不方便了，所以這個角度就毋須再考慮了。

2 目的二【利用物理透鏡折射及數學相似三角形的理論推出鏡像公式並予以實測及驗證】

- (1)由光通過三稜鏡的偏向可知，光通過凸透鏡會向厚玻璃方向偏折，凹透鏡也是。所以，凸透鏡是會聚透鏡，而凹透鏡是發散透鏡。
- (2)可藉由凸、凹透鏡基本光線成像法及數學相似三角形的理論推出
凸透鏡的鏡像公式【 $1/A + 1/B = 1/F$ 】
凹透鏡的鏡像公式【 $1/B - 1/A = 1/F$ 】

3 目的三【利用凸透鏡的焦距與物距、像距間的關係，設計並製作一簡易的素描機】

- (1)經過思考比較了三種製作素描機的可能想法，最後以選擇物光經由凸透鏡進入紙箱中，再經由平面鏡反射至上方的描圖紙上顯像的方式最為可行。
- (2)描圖紙上的成像是正立且左右相反的，最後須將描圖紙背光照在正式的圖畫上複描，即可變為正立的正常左右像。
- (3)素描機箱子的大小須依使用透鏡的焦距而設計的。
 - ①若要描繪遠景時，鏡頭至圖面的距離應為一倍焦距或略大些。
 - ②若要描繪全尺寸圖，則透鏡至圖面距離將增至兩倍焦距，此時物距也應為兩倍焦距。
 - ③若要描繪近景時，鏡頭至圖面的距離應為二倍焦距以上，所以選擇的透鏡焦距應該較小些。
- (4)若於戶外描繪時，必須要有完整的遮光設備，方能使成像保持清晰。

4 目的四【以設計的第一代素描機工具做定點觀測及實際比較】

- (1)以實物(已知高度大小)及物距來對照及修正第一代顯影機的測量誤差，雖然實測成像的長及寬的誤差還算可以接受，但是，物高及物寬沒有呈規律性的倍數關係，此為實測上的缺點。
- (2)應在物體規格化上改進，例如：以高度間距為 20、25 或 30 為一單位差，度量上才更容易比較出其差距。
- (3)物距應有變化，且為防物距更大時像會更小，而造成測量上更大的誤差，所以應將焦距變更大，放大率才不會太小。

5 目的五【改進呈像大小成為物距遠近自如的第二代素描機】

- (1)第一代素描機的物光(通常是複合光)經由凸透鏡聚光呈像後邊緣會有色像差的情形出現，若加上合適的凹透鏡的發散光線呈像後，恰可補此色像差的缺點，所以本目的主要是改進透鏡的鏡頭。
- (2)複鏡的鏡頭預備選擇一凹、一凸的透鏡為透鏡組。
 - ①物光先由凹透鏡發散成鏡前的正立縮小虛像，再經由凸透鏡聚光成鏡後的倒立實像，最後使此實像經由 45° 的平面鏡反射於描圖紙上。
 - ②物光先由凸透鏡聚光成鏡後的倒立實像，再經由凹透鏡發散後，應仍在鏡後呈像才是。
- (3)我們依據折射定律，畫出凸透鏡及凹透鏡的光線走向，居然可將遠物的物光先由凸透鏡呈

首次成縮小實像後，再經由凹透鏡發散光線呈再放大的最後成像。

6 目的六【以設計的第二代素描機工具做定點觀測及實際比較】

- (1)第二代素描機的鏡頭一開始以凹透鏡在前、凸透鏡在後，不管怎麼調整鏡筒及箱內平面鏡的位置，都無法顯像，所以我們就改以凸透鏡在前、凹透鏡在後，當調整到兩筒間距為 7cm 時，可在顯影板上看到明顯的物像。
- (2)因為仰角為 45° 的平面鏡，呈像角度恰與地面平行，為了能準確的測量出像的長度，遮光效果須擋住由上到下的外界漫射的光，所以頭須探入箱中才能清楚觀測像的長度，所以得改平面鏡的仰角，才能使螢幕不與地面平行而呈理想傾斜的觀察角度。
- (3)第二代改良後的顯影機主要重點在平面鏡的仰角由原來的 45° 改為 30° ，以及外面兩隻控制桿可同時拉動四條控制線，使內部影像板的仰角可抬高角度成與水平線呈傾斜狀 30° 角的平面。如此的觀測效果較好，也能使每 20 公分 10 段等距的物體成像時，前後段的成像高度差呈等距的結果。

陸、未來展望

- 1 感謝學校能提供這麼多回收的紙箱讓我們一再的試、一再的搞破壞，也很感謝常被我們弄得頭大的指導老師辛苦的指導以及伙伴們的同心協力，皇天不負苦心人，我們終於做出了效果還算可以的顯影素描機。
- 2 有點遺憾的是顯影成像在描圖紙上的像是正立且左右相反的，必須將描圖紙反過來複描於正式的圖畫紙上或將描圖紙背光照在正式的圖畫上複描，才可變為正立的正常左右像。希望以後我們能在這方面有更好的解決辦法及設計。

柒、參考資料

- 1 國中理化第一冊第四章，國立編譯館主編。
- 2 國中理化教師手冊第 一 章，國立編譯館主編。
- 3 高中物理光學部分，國立編譯館主編。
- 4 實用光學，第六章第 185 頁至 21 頁，徐氏基金會出版，楊建人譯。

評語

以簡易的透鏡、紙箱、描圖紙，組合成「素描機」，並能符合光學原理。作品生活化，足堪為教學教材創新的典範。