

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國中組

物理科

科別：物理科

組別：國中組

作品名稱：YO 上 YO 下

關鍵詞：摩擦力、槓桿原理、加速度

編號：030105

學校名稱：

高雄市立正興國民中學

作者姓名：

陳郁庭、蕭郁昕

指導老師：

高光宇



摘要

溜溜球是一種流行久遠的兒童玩具，很多人童年都有玩過。它上下運動過程中，所呈現的物理現象看似簡單，其實隱含了很多高深的物理原理。經由我們詳細觀察、研究、實驗、分析後發現，溜溜球是物理學上力學篇的綜合表現。

1. yoyo 上下運動遵守能量互換原則。
2. 摩擦力大小與纏繞圈數有關，摩擦係數（ μ ）與纏繞圈數無關但與材質有關。
3. 摩擦力大小、摩擦係數（ μ ）與接觸面積無關。
4. yoyo 是否反轉向上決定於摩擦力大小是否能夠阻止軸心滑動而定。若摩擦力足夠大，必會產生一反作用力出現，因此會有反轉向上的扭力。
5. yoyo 上下運動的高低與摩擦力大小無關，與 yoyo 到達底部的動能大小及 yoyo 圓周轉動的條件（輪、軸半徑，加速度 a 、角加速度 α 、角速度 ω 、轉動慣量 I ）有密切關係。
6. yoyo 圓形輪直徑大小影響其轉動慣量（ I ）的大小，因此影響反彈高低。直徑大，轉動慣量（ I ）大，反彈上昇不易停止，反彈高；反之，直徑小，轉動慣量（ I ）小，反彈上昇容易停止，反彈低。
7. yoyo 若改變質量分佈會影響其質心位置變化，因此等效半徑（ r ）改變，轉動慣量（ I ）也會隨同改變。其反轉爬昇的反彈高低與前述 yoyo 圓形輪直徑大小變化所呈現物理現象相同。
8. yoyo 由上往下降類似第三型槓桿（費力），反轉上升類似第二型槓桿（省力）。我們發現用槓桿原理分析 yoyo，比用轉動慣量分析更能清楚了解轉動力學原理。yoyo 上下運動完全附和牛頓直線三大運動定律、也可附和牛頓第一、第二轉動定律。
9. 若 yoyo 輪固定，yoyo 下降時，輪（圓形直徑大小）的半徑相當於槓桿的抗力臂（阻力）；軸的半徑相當於槓桿的施力臂（作用力）。軸心直徑大小不同，其下降的作用力也不同，軸心越大作用力越大，下降加速度 a 越大，附和 a 與軸半徑（ r_0 ）的平方成正比；反之，軸心越小作用力越小其下降加速度 a 越小。但反轉上升時，輪、軸角色扮演、功能互換。軸心直徑轉軸不同，反抗爬昇的阻力能量大小也不同，所以 YOYO 反彈高低不同，原理其實完全附和槓桿原理。

壹、研究動機：

今天早上，我看到弟弟與隔壁鄰居在玩溜溜球，我覺得非常好玩，我要求弟弟讓我試試。拿到溜溜球後我努力試著玩，卻一直沒成功，但是我並不氣餒。我一面玩一面想著如何玩它，終於發現溜溜球有很多地方很奇怪也很好玩，它隱藏很多的物理現象都包含在理化課本中，老師所教過的摩擦力，還有牛頓三大運動定律、力矩、槓桿原理、能量轉換等。哇！它們之間竟然有那麼多關聯，非常值得我們好好去探討、研究它。於是我和我的好朋友一起來做這個研究，希望能解開它神秘的動作原理，並且能加以應用及改良，使其更有創意。

貳、研究目的：

- （一）探討 YOYO 能量變化
- （二）探討摩擦力對 YOYO 的影響
- （三）探討圓周運動對 YOYO 的影響

參、研究器材：

鋁質溜溜球不同直徑大小、溜溜球不同軸心粗細大小、一般溜溜球、棉繩一捲、鋼絲拉繩、尼龍拉繩、捲尺、轉速計、碼表、剪刀、螺絲起子、游標尺、大小圓球鋼珠、鋼鋸、彈簧秤、工程用計算機、瞬間接著劑、光電計時器及凹型光電感測器。



各種測量、計算用輔助工具



各種不同形式、尺寸的 yoyo



不同直徑大小的 yoyo (重量、軸心固定)



自行設計、改良 yoyo 可自由調整質量位置變化，提供另一種花式 yoyo 運轉。如左圖



光電計時器及凹型光電感測器，可記錄自由落體下降每間隔距離所需時間。如左圖

肆、研究過程及方法：

研究(一)：探討 YOYO 能量變化

問題：YOYO 上下運動是否為位能/動能之間互換變化。

實驗 1：YOYO 的旋轉動能是由位能下降轉換來的嗎？

方法：將一重 55g、軸心 0.6cm 的 yoyo 以棉繩纏繞 1/2 圈（如圖一所示）。再由不同高度，50cm、100cm、150cm、200cm 自由落下，到達底部時會空轉，測試其到達底部的旋轉角速度 ω 變化（如圖二）。結果如下表所示：

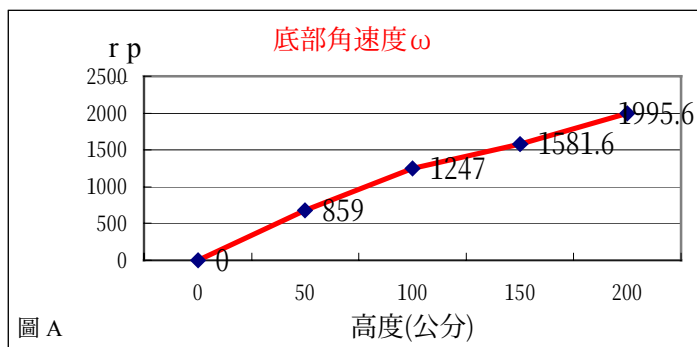


圖一 棉繩纏繞 1/2 圈

(yoyo 重) $w=55g$ 、鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質、纏繞 1/2 圈

底部轉速 次數	200cm	150cm	100cm	50cm
第 1 次	1967rpm	1527 rpm	1286 rpm	848 rpm
第 2 次	1999 rpm	1484 rpm	1191 rpm	904 rpm
第 3 次	2177 rpm	1734 rpm	1139 rpm	812 rpm
第 4 次	1964 rpm	1631 rpm	1398 rpm	820 rpm
第 5 次	1871 rpm	1532 rpm	1221 rpm	912 rpm

平均	1995.6rpm	1581.6 rpm	1247 rpm	859.2 rpm
----	-----------	------------	----------	-----------



圖二：轉速計測試到達底部的旋轉角速度 (ω)

發現：隨著不同高度落下，yoyo 到達底部的旋轉角速

度 (ω) 也有不同轉動速度，高度越高，到達底部的旋轉角速度 (ω) 也越快；反之，高度越低，到達底部的旋轉角速度 (ω) 也越慢（如圖 A）。

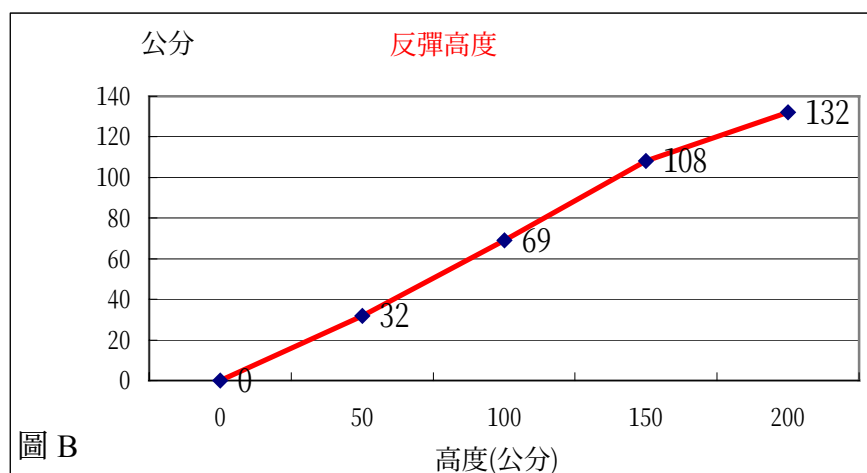
實驗 2：YOYO 的位能(反彈高度)是由底部轉動動能轉換得來的嗎？

方法：同實驗 1 方法相同。將鋼質軸心與棉線拉繩固定（產生極大摩擦力可以反彈）。從不同高度自由落下測試其反彈高度（如圖三），結果如下表所示：

結果：

（yoyo 重） $w=55g$ 鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質、軸心與棉線固定

反彈高度 次數	落下高度	200cm	150cm	100cm	50cm
第 1 次		132cm	115 cm	65 cm	33 cm
第 2 次		130 cm	106 cm	70 cm	30 cm
第 3 次		135 cm	108 cm	72 cm	32 cm
第 4 次		130 cm	110 cm	65 cm	33 cm
第 5 次		133 cm	102 cm	72 cm	34 cm
平均		132 cm	108 cm	69 cm	32 cm



圖三：用捲尺量測 yoyo

反彈高度

發現：從不同高度落下，yoyo 反彈高度明顯不同。自越高處落下，yoyo 反彈高度也越高；反之，自越低處落下，yoyo 反彈高度也越低（如圖 B）。

結論：繩子越長，位能越高。YOYO 到達底部的旋轉角速度 ω 越快(動能越大)，其反彈高度（位能）也越高；反之，繩子越短，位能越低。YOYO 到達底部的旋轉角速度 ω 越慢(動能越小)，其反彈高度（位能）也越低。因此明顯可知，**位能/動能互換明確。**

想法：YOYO 上下運動是什麼原因造成反轉向上？是摩擦力造成作用力、反作用力的嗎？

研究(二)：探討摩擦力對 YOYO 的影響

問題：YOYO 的摩擦力大小與纏繞圈數有關嗎？

實驗 1：在鋼質圓軸心上，拉繩纏繞圈數不同，摩擦力大小會不同嗎？

方法：將 460g 重的 YOYO 球，用棉線綁著下垂。同時將直徑為 0.6cm 的不鏽鋼圓柱軸（用直徑為 0.6cm 的鋼質螺絲起子代替）一端固定，而在直徑 0.6cm 的軸心上，以棉線拉繩纏繞不同圈數（如圖五）。此時以彈簧秤測量 YOYO 棉線支撐拉力大小（如圖四），**當 yoyo 開始往下緩慢滑動時，觀查彈簧秤支撐拉力是否變輕。**結果如下表所示：



圖四：以彈簧秤測量 yoyo 支撐拉力

結果：

(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、鋼質、圓軸心直徑 0.6cm、棉線材質拉繩

纏繞鋼軸不同圈數	一圈 ($\theta=2\pi$)	二圈 ($\theta=4\pi$)	三圈 ($\theta=6\pi$)	四圈 ($\theta=8\pi$)	五圈 ($\theta=10\pi$)
彈簧拉力	260g	150g	90g	45g	30g
摩擦係數 (μ)	0.0908	0.089	0.087	0.088	0.0869
鋼軸線摩擦力大小	200g	310g	370g	420g	430g



纏繞一圈 $\theta = 2\pi$



纏繞二圈 $\theta = 4\pi$



纏繞三圈 $\theta = 6\pi$



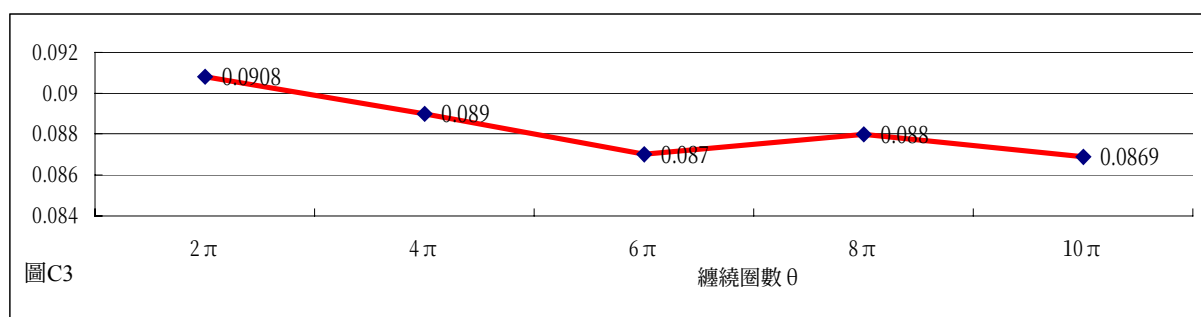
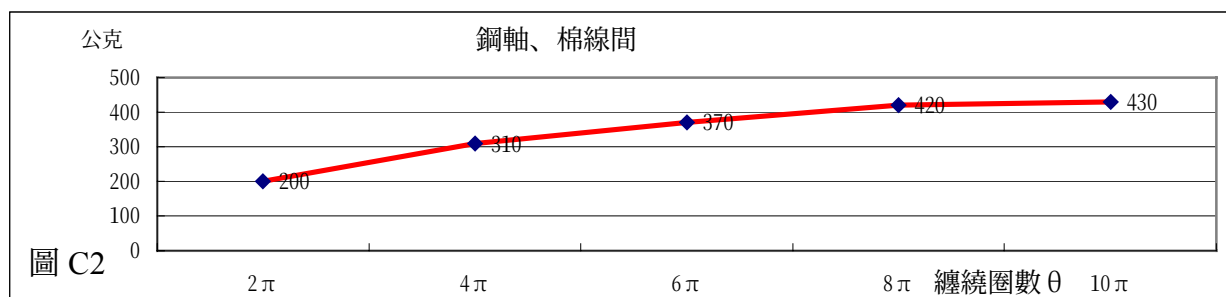
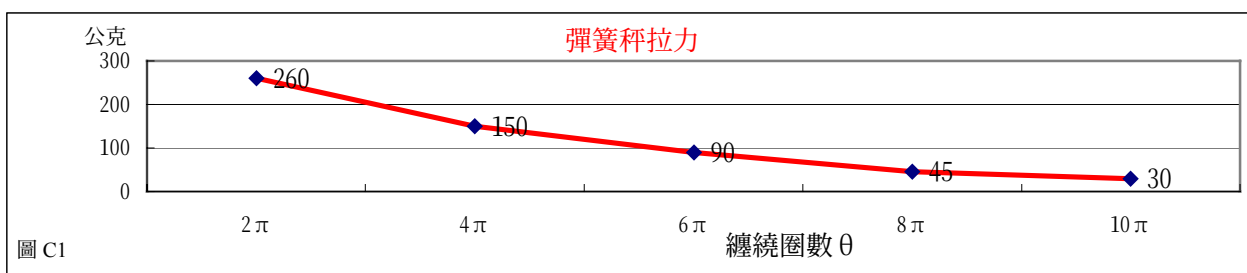
纏繞四圈 $\theta = 8\pi$



纏繞五圈 $\theta = 10\pi$

向上彈簧秤拉力 f
向下 yoyo 460g 的重量 F

圖五：棉線拉繩以不同圈數($\theta = 2n\pi$)，纏繞在 0.6cm 鋼質圓軸心上



發現：棉線拉繩纏繞鋼軸的圈數越多（ θ 值越大），此時所量測棉線的彈簧秤支撐拉力反而減少（如圖 C1），感覺 YOYO 變輕。因此發現棉線拉繩與纏繞鋼軸的圈數越多， θ 值越大，量測彈簧秤支撐拉力會減少，鋼軸與棉線拉繩間的摩擦力越大（如圖 C2）；反之，棉線拉繩與纏繞鋼軸的圈數越少， θ 值越小，量測彈簧秤支撐拉力會增大，鋼軸與棉線拉繩間的摩擦力越小，但是換算出的摩擦係數 μ 值變化非常小（如圖 C3）。

結論：拉繩與圓柱軸心纏繞所捲的次數與摩擦力大小有很大關係。根據瑞士數學家，雷歐納得·歐伊拉（1707—1783）研究**摩擦公式**： $F = f e^{\mu\theta}$

F ：代表用繩索綁住支撐物體的重量（如 yoyo 重 460g）

f ：為了支撐 yoyo 重量不往下滑的拉力，也即是我們所量測出的支撐力量（如彈簧秤拉力）

e ：自然對數的基數（ $e = 2.71828 \dots$ ）

μ ：摩擦係數

θ ：纏繞軸心圈數（ $2n\pi$ ； n 代表纏繞圈數）

當 F (yoyo) 重量固定，若拉繩與軸心纏繞所捲的次數圈數越多， θ 值越大，且軸心與拉繩材質相同不變（ μ 值固定），則所量測 yoyo 的拉繩支撐拉力 f 會變小（如圖五），因此軸心與拉繩間的摩擦力會變大；反之，軸心纏繞所捲的次數圈數越少， θ 值越小，則拉繩支撐拉力 f 會變大，因此軸心與拉繩間的摩擦力會變小。

綜合上述可結論出：

軸心與棉線拉繩間的摩擦力大小與兩者間彼此纏繞圈數 θ 值有極大關係， θ 值越大，摩擦力會越大；反之， θ 值越小，摩擦力會越小。

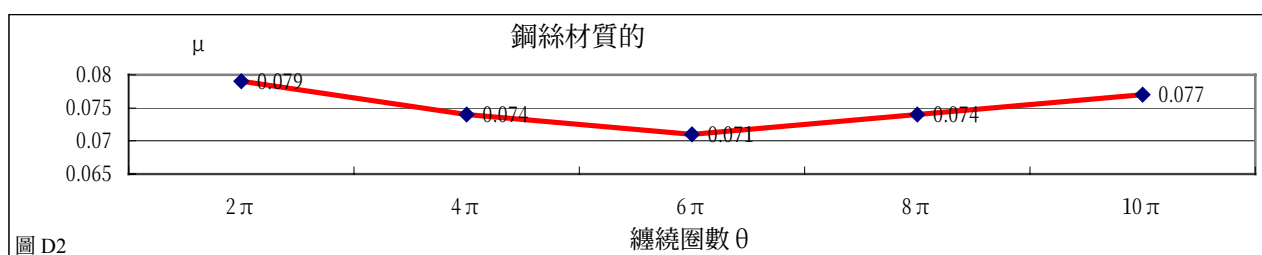
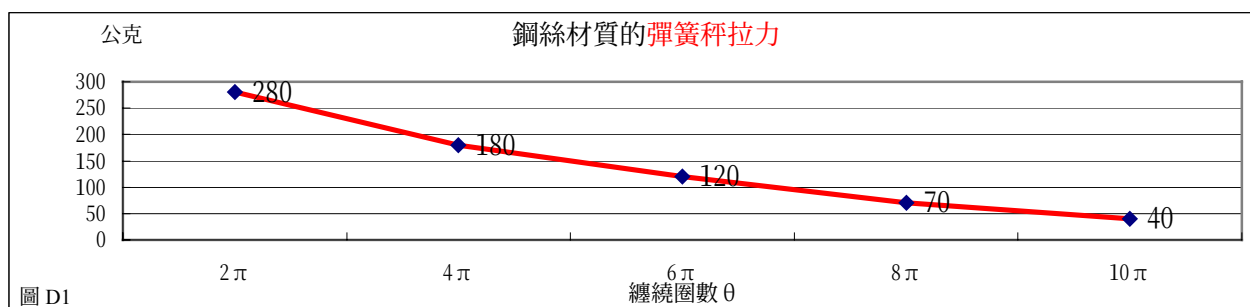
問題：YOYO 鋼質軸心與拉繩材質不同，摩擦係數 (μ) 大小是否不同？

實驗 2：YOYO 鋼質軸心與不同材質拉繩間的摩擦係數多少？

方法：與上面實驗 1 測量方法相同。將重 460g 的 YOYO，用不同材質拉繩綁著，拉繩纏繞數圈在直徑 0.6cm 的不鏽鋼圓柱軸心上（如圖五）。當 YOYO 開始緩慢往下滑時所量測的彈簧秤拉力（如圖四），因鋼軸與不同材質拉繩間所形成的摩擦力大小不同，而所量測的彈簧秤拉力大小也不同。因此可換算其摩擦係數 (μ) 值大小，結果如下表所示：

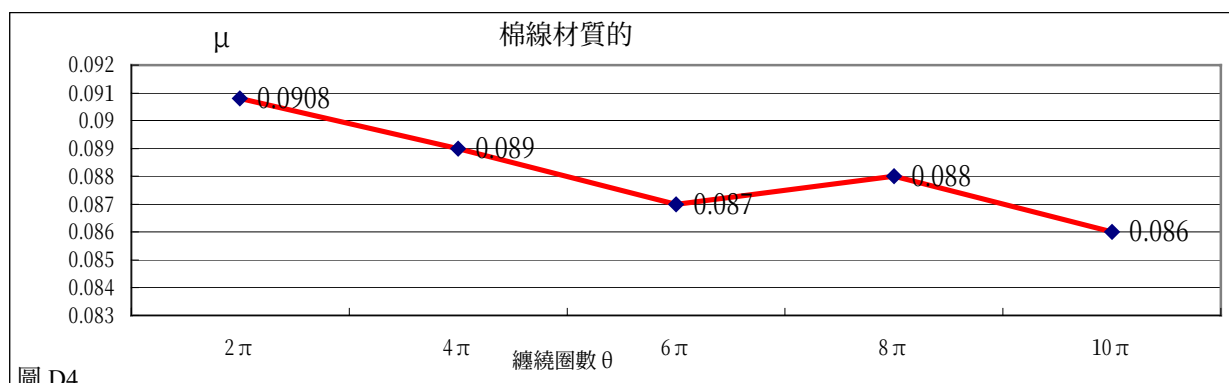
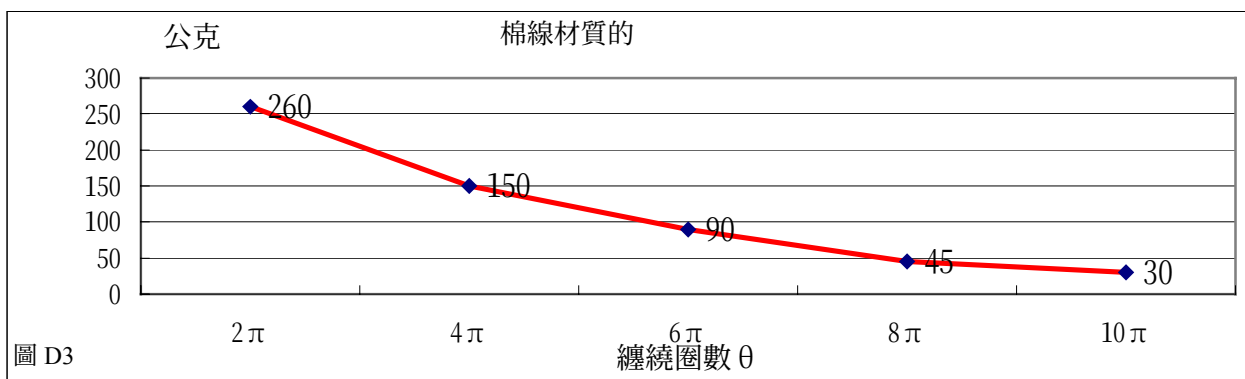
(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、鋼質軸心直徑 0.6cm、鋼絲拉繩材質

鋼絲纏繞鋼軸 圈數	一圈 ($\theta=2\pi$)	二圈 ($\theta=4\pi$)	三圈 ($\theta=6\pi$)	四圈 ($\theta=8\pi$)	五圈 ($\theta=10\pi$)
彈簧拉力	280g	180g	120g	70g	40g
摩擦係數 (μ)	0.079	0.074	0.071	0.074	0.077
摩擦係數平均值：0.075					



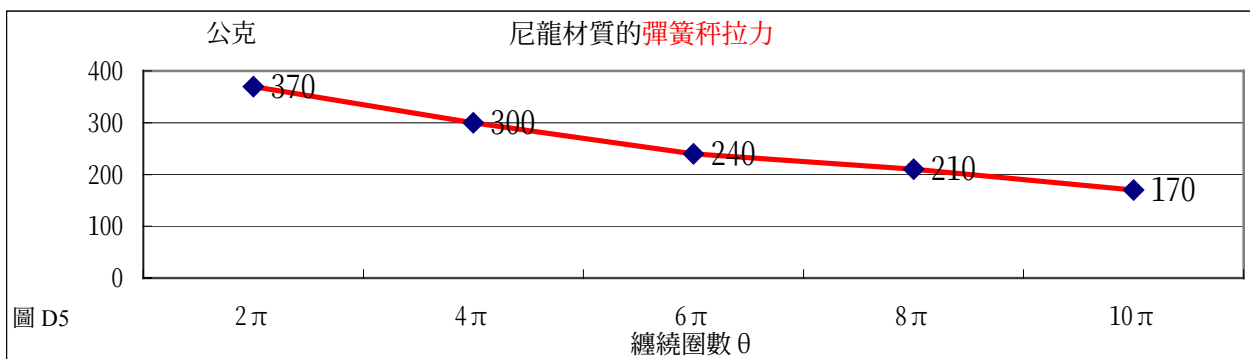
(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質拉繩

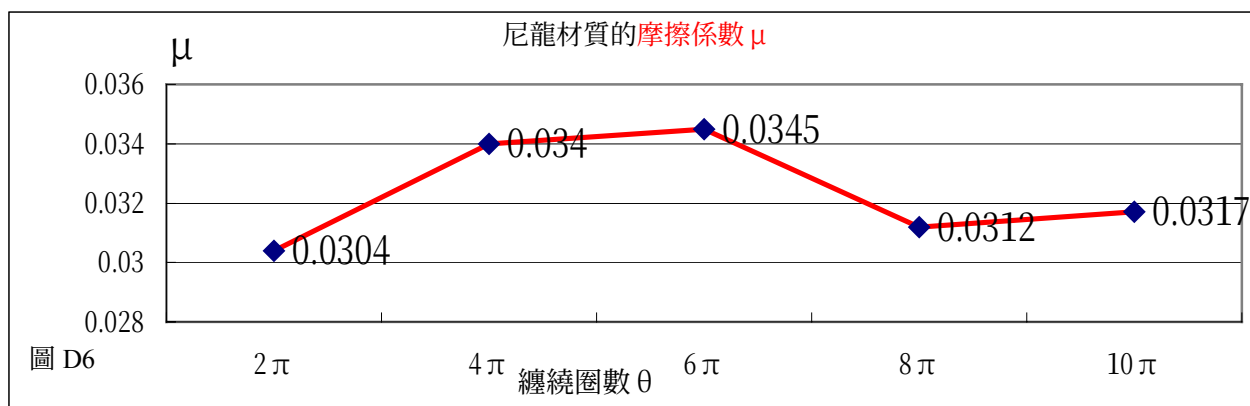
棉線纏繞鋼軸 圈數	一圈 ($\theta=2\pi$)	二圈 ($\theta=4\pi$)	三圈 ($\theta=6\pi$)	四圈 ($\theta=8\pi$)	五圈 ($\theta=10\pi$)
彈簧拉力	260g	150g	90g	45g	30g
摩擦係數 (μ)	0.0908	0.089	0.087	0.088	0.086
摩擦係數平均值：0.088					



(yoyo 重) $w=460g$ 、鋼質軸心直徑 $0.6cm$ 、**尼龍材質**拉繩

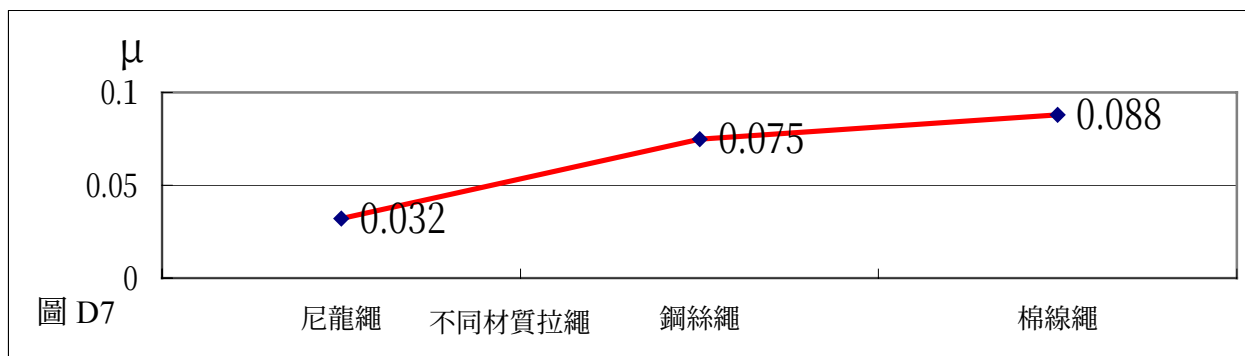
尼龍纏繞鋼軸 圈數	一圈 ($\theta=2\pi$)	二圈 ($\theta=4\pi$)	三圈 ($\theta=6\pi$)	四圈 ($\theta=8\pi$)	五圈 ($\theta=10\pi$)
彈簧拉力	370g	300g	240g	210g	170g
摩擦係數 (μ)	0.0304	0.0340	0.0345	0.0312	0.0317
摩擦係數平均值：0.032					





各種不同材質拉繩與摩擦係數 (μ) 平均值比較

拉繩材質 μ 平均值	尼龍繩	鋼絲繩	棉線繩
摩擦係數平均值	0.032	0.075	0.088



發現：摩擦係數 (μ) 大小與不同材質拉繩有很大關係，不同材質有不同摩擦係數 μ 值（如圖 D7），棉線的摩擦係數 (μ 值) 平均為 0.088 最大，尼龍繩摩擦係數 (μ 值) 平均為 0.032 最小。

結論：將相同重量 460g 的 YOYO，使用不同材質拉繩，經由纏繞鋼軸圈數不同， θ 值不同，此時所量測的彈簧秤支撐拉力會出現不同數值。根據瑞士數學家，雷歐納得·歐伊拉 (1707-1783) 研究 **摩擦公式：** $F = f e^{\mu \theta}$

在同一材質下，由於拉繩纏繞圈數 θ 值不同，計算出的摩擦係數 μ 值變化很小幾乎固定，與所纏繞的圈數無關。但隨著不同材質拉繩纏繞鋼軸，所計算出的摩擦係數 μ 平均值也不同（如圖 D7），**因此摩擦係數與材質有非常大的關係。**

問題：YOYO 拉繩表面積與軸心間接觸的摩擦力大小有關嗎？

實驗 3：相同材質拉繩，但是以不同表面積與軸心間接觸的摩擦力大小測量。

方法：與研究（二）實驗 1 同。當 yoyo 重 460g 時，採用與測量軸心摩擦力方法相同步驟。但是每次以增加一條棉線拉繩纏繞 0.6cm 鋼質軸心方式，以代表增加棉線的接觸表面積與 0.6cm 鋼質軸心纏繞接觸（如圖六所示）。而且同時經由纏繞鋼軸圈數不同， θ 值也不同。此時**觀察在棉線不同表面積下、纏繞圈數不同， θ 值不同的彈簧秤所量測支撐拉力 f 是否有變化**，即可知棉線拉繩以不同表面積與軸心間接觸的摩擦力大小是否有變化。結果如下表所示：

結果：

(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 軸心直徑 0.6cm 鋼軸、棉線材質拉繩

彈簧 拉繩 數表面積	纏繞 圈數	纏繞一圈 $\theta=2\pi$	纏繞二圈 $\theta=4\pi$	纏繞三圈 $\theta=6\pi$	纏繞四圈 $\theta=8\pi$	纏繞五圈 $\theta=10\pi$
一條拉繩 數表面積		260g	150g	90g	45g	30g
二條拉繩 數表面積		260g	150g	90g	45g	30g
三條拉繩 數表面積		260g	150g	90g	45g	30g
四條拉繩 數表面積		260g	150g	90g	45g	30g



一條拉繩與 yoyo 軸心接觸一圈 $\theta = 2\pi$



二條拉繩與 yoyo 軸心接觸一圈 $\theta = 2\pi$



三條拉繩與 yoyo 軸心接觸一圈 $\theta = 2\pi$



一條拉繩纏繞軸心一圈 $\theta = 2\pi$
的彈簧秤拉力測試



二條拉繩纏繞軸心一圈 $\theta = 2\pi$
的彈簧秤拉力測試



三條拉繩纏繞軸心一圈 $\theta = 2\pi$
的彈簧秤拉力測試



四條拉繩與 yoyo 軸心接觸一圈 $\theta = 2\pi$



四條拉繩纏繞一軸心圈
 $\theta = 2\pi$ 的彈簧秤拉力
測試

如圖六：每次以增加一條棉線拉繩，纏繞軸心一圈（ $\theta = 2\pi$ ），以代表增加棉線接觸表面積與軸心纏繞接觸面變化，此時所量測的 yoyo 彈簧秤支撐拉力 f 不變，都是 260g 。因此不管用多少的拉繩表面積接觸軸心都與摩擦力大小無關。

發現：當 YOYO 每次增加棉線拉繩數目、代表加寬拉繩表面積與軸心接觸，且同時經由不同圈數纏繞軸心，以形成不同 θ 值時。發現所有測量的彈簧秤支撐拉力均不變，並不影響摩擦力大小與摩擦係數。因此可知摩擦力大小、摩擦係數與拉繩、軸心間接觸的表面積大小無關。

結論：yoyo 軸心與拉繩間的摩擦力大小、摩擦係數與軸心、拉繩間的接觸面積大小無關。

問題：摩擦力大小在 YOYO 上下運動中扮演什麼角色？

- 1、YOYO 反彈高度是由摩擦力大小不同造成的嗎？
- 2、當摩擦力太小時是否可提供一向上拉力影響 yoyo 反彈高度。

實驗 4：YOYO 反彈高度是否與向上拉力或摩擦力大小有關？。

方法：將重 55g 的 yoyo，以不同圈數纏繞軸心（如圖七所示 1/2 圈、一圈、二圈、三圈、四圈），會形成不同摩擦力且取不同高度(20cm、50cm、100cm)距離，以自由落下方式或自由落下到底部時，再提供一向上拉力方式，測量其反彈高度。結果如下表所示：

結果：高度 20cm (位能低) (yoyo 重) w=55g、鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質

反彈高度 纏繞方式 落下方式	1/2 圈 $\theta = \pi$	一圈 $\theta = 2\pi$	二圈 $\theta = 4\pi$	三圈 $\theta = 6\pi$	四圈 $\theta = 8\pi$
自由落下 無正向力	無反彈	無反彈	12.4cm	12.4cm	12cm
自由落下 有正向力	無反彈	9cm	18cm	18cm	19cm

高度 50cm (位能中等) (yoyo 重) w=55g、鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質

反彈高度 纏繞方式 落下方式	1/2 圈 $\theta = \pi$	一圈 $\theta = 2\pi$	二圈 $\theta = 4\pi$	三圈 $\theta = 6\pi$	四圈 $\theta = 8\pi$
自由落下 無正向力	無反彈	無反彈	31.9cm	31.5cm	31.2cm
自由落下 有正向力	無反彈	45cm	48cm	48cm	50cm

高度 100cm (位能高) (yoyo 重) w=55g、鋼質軸心直徑 0.6cm、棉線材質

反彈高度 纏繞方式 落下方式	1/2 圈 $\theta = \pi$	一圈 $\theta = 2\pi$	二圈 $\theta = 4\pi$	三圈 $\theta = 6\pi$	四圈 $\theta = 8\pi$
自由落下 無正向力	無反彈	無反彈	60cm	59.2cm	60.1cm
自由落下 有正向力	無反彈	88cm	95cm	97cm	97cm



繞軸心 1/2 圈
 $\theta = \pi$



繞軸心一圈
 $\theta = 2\pi$



繞軸心二圈
 $\theta = 4\pi$



$\theta = 6\pi$

繞軸心三圈



$\theta = 8\pi$

繞軸心四圈

圖七：棉線以不同圈數纏繞軸心， θ 值會不同

發現：拉繩以不同圈數纏繞軸心，因此摩擦力大小必定不同，會出現不同反彈現象，將上表資料加以分析、比較。

- 1、纏繞軸心二圈以上（含二圈），採自由落方式測出反彈高度都相同。若採自由落到底部時，再提供一向上拉力方式其反彈高度會更高，幾乎反彈回原來位置。
- 2、纏繞軸心一圈時 $\theta = 2\pi$ ，採用自由落方式幾乎無反彈，若採自由落到底部時，再提供一向上拉力會有一反彈較高的高度出現。
- 3、纏繞軸心 1/2 圈時 $\theta = \pi$ ，不論採自由落或採自由落到底部時，再提供向上拉力方式，都不會有反彈出現。
- 4、只要纏繞 2 圈以上即會出現反彈但反彈高度相等、不變。因此反彈高度與軸心纏繞不同圈數的摩擦力大小無關。
- 5、2 圈以上會反彈但反彈高度隨著位能(繩長)高低而定，拉繩越長，代表位能越高(如高度 100cm)、動能越大，反彈高度越高；反之，拉繩越短，代表位能越低(如高度 20cm)，動能越小，反彈高度越低。

結論：

- 1、使用完全相同的 yoyo 且軸心與拉繩材質不變的情況下，若纏繞 2 圈以上(含 2 圈)其摩擦力會變大，很容易造成鋼質軸心不會滑動，形成一極大阻力，因此 yoyo 會有反作用力出現而產生反轉向上爬昇的條件。
- 2、由上表數據分析、比較。發現纏繞 2 圈、3 圈、4 圈以上圈數越多摩擦力會越大，因此越容易產生一極大阻力使軸心不滑動。所以會有一反作用力出現，此時必定會產生反轉向上爬昇的條件。若在相同高度時自由落下，必有相同位能，其底部旋轉動能必相同[如研究(一)實驗 1]，因此反彈高度也相同。摩擦力大小只要纏繞 2 圈以上圈數即可具有足夠阻力，使軸心部不會滑動。由此可知反彈高度與摩擦力大小無關，但與位能高低有關。（摩擦力大小僅只提供足夠阻力功能，使軸心不滑動而產生反轉向上爬昇的條件，軸心雖然停止，但是 yoyo 輪反轉動能越強，反彈越高）
- 3、若摩擦力大到能提供足夠阻力，使軸心不滑動而反轉向上時，其反彈高低要視其底部旋轉動能大小而定，與纏繞圈數不同，所形成的的摩擦力大小無關。從高度越高處自由落下，底部旋轉動能越大，反彈越高；反之，從高度越低處自由落下，底部旋轉動能越小，反彈高度越低。
- 4、纏繞軸心一圈時，其軸心與拉繩間材質的摩擦力大小若無法提供足夠阻力，使軸心不滑動而產生反轉向上條件，此時提供一向上拉力以增加其摩擦阻力即可反轉上昇。
- 5、纏繞軸心 1/2 圈時，其摩擦力太小，軸心與拉繩間材質的摩擦力大小永遠無

法提供足夠阻力，以使軸心不滑動而產生反轉向上條件。此時若再提供一向上拉力，仍然無法增加其摩擦阻力，軸心仍然會滑動，因此無法反轉上昇，也就永遠不會反彈。

想法：YOYO 要反轉向上除了需要大的摩擦力及高位能外，其反彈高度是否與圓周運動各種不同條件變化有關？

研究(三)：探討圓周運動對 YOYO 的影響

問題：圓形直徑大小不同對 YOYO 上下運動高度、旋轉速度及直線運動速度、加速度是否有影響？

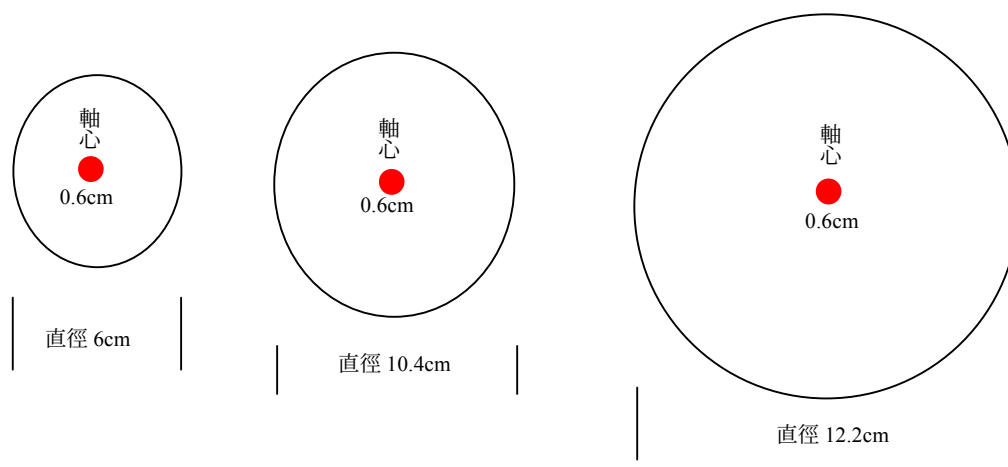
實驗 1：改變 YOYO 圓形輪直徑大小會影響上下運動高度、旋轉速度及直線運動速度嗎？

方法：將棉線纏繞繞在鋼質軸心 0.6cm 上 ($\mu = 0.088$)，而每個 yoyo 重量都固定為 460g，但是 yoyo 圓形直徑分別為 6cm、10.4cm 及 12.2cm。(如圖八所示)統一從高度 150cm 處自由落下，此時測量 yoyo 反彈高度、到達底部的旋轉角速度(ω) (如圖九所示)及到達底部所需時間 t、平均下降直線速度 v。結果如下表所示：

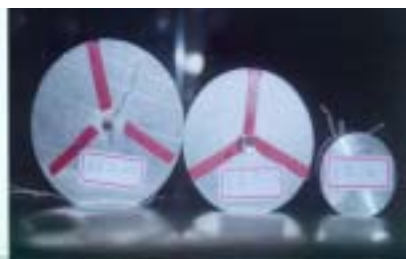
結果：

(yoyo 重) $w=460g$ S = 高度 150cm、鋼質軸心 0.6cm、 $\mu=0.088$ 、直徑 6cm

次 數	量測 項目	反彈高度	到達底部所需時間 t	底部旋轉角速度 [ω]	平均速度 $V=\Delta s/\Delta t$
第 1 次		100cm	1 秒 904	1623rpm	78.782cm/s
第 2 次		120cm	1 秒 721	1712 rpm	87.159cm/s
第 3 次		115cm	1 秒 799	1690 rpm	83.380cm/s
第 4 次		120cm	1 秒 876	1673 rpm	79.957cm/s
第 5 次		121cm	1 秒 715	1752 rpm	87.453cm/s
平均		115.2cm	1 秒 803	1690 rpm	83.346cm/s



圖八：每個 yoyo 重量都固定為 460g，軸心 0.6cm，但是 yoyo 圓形直徑分別為 6cm、10.4cm 及 12.2cm。



每個 yoyo 重量都固定為 460g 軸心 0.6cm，但是 yoyo 直徑分別為 6cm、10.4cm 及 12.2cm。



圖九：yoyo 在不同直徑下，以轉速計測試到達底部的旋轉角速度

結果：

(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、 $S = \text{高度 } 150\text{cm}$ 、鋼質軸心 0.6cm、 $\mu=0.088$ 、直徑 10.4cm

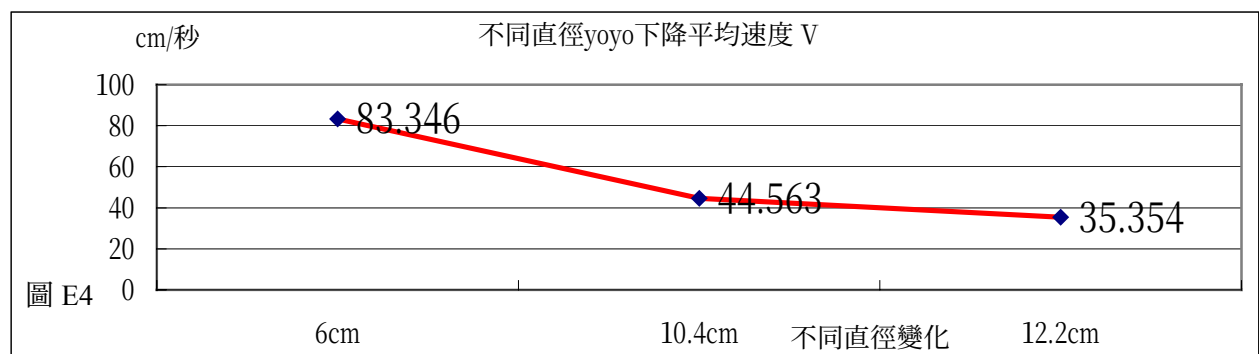
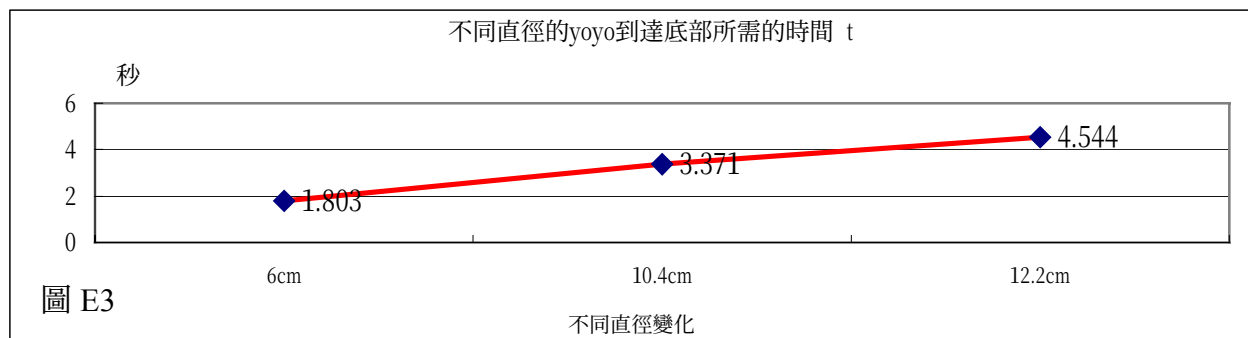
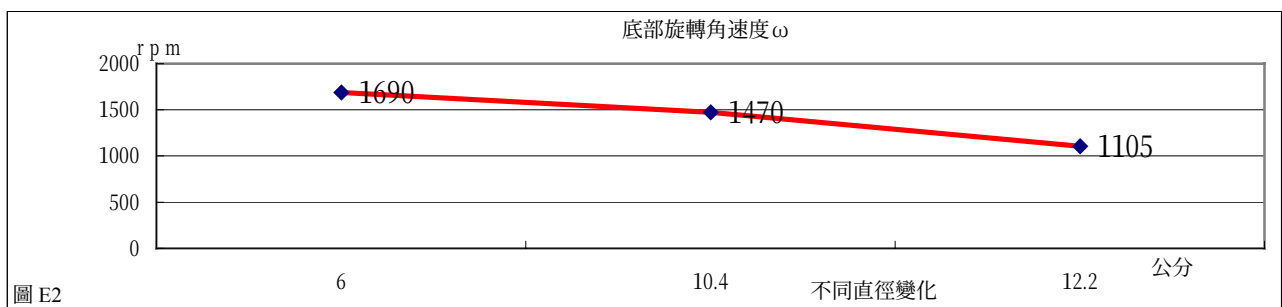
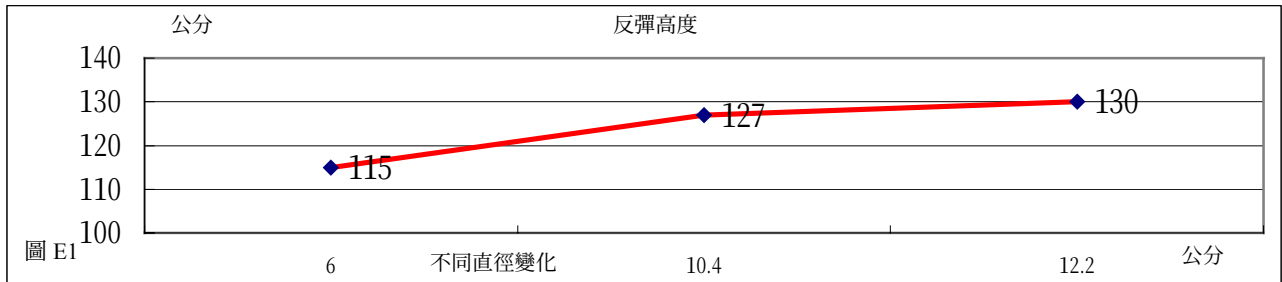
次 數	量測 項目	反彈高度	到達底部所需時間 t	底部旋轉角速度 [ω]	平均速度 $V=\Delta s/\Delta t$
第 1 次		130cm	3 秒 484	1320 rpm	43.054cm/s
第 2 次		125cm	3 秒 263	1531 rpm	45.970cm/s
第 3 次		125cm	3 秒 469	1402 rpm	43.240cm/s
第 4 次		125cm	3 秒 477	1357 rpm	43.141cm/s
第 5 次		130cm	3 秒 164	1740 rpm	47.408cm/s
平均		127cm	3 秒 371	1470 rpm	44.563cm/s

(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、 $S = \text{高度 } 150\text{cm}$ 、鋼質軸心 0.6cm、 $\mu=0.088$ 、直徑 12.2cm

次 數	量測 項目	反彈高度	到達底部所需時間 t	底部旋轉角速度 [ω]	平均速度 $V=\Delta s/\Delta t$
第 1 次		130cm	4 秒 196	1108 rpm	35.748cm/s
第 2 次		130cm	4 秒 498	1039 rpm	33.348cm/s
第 3 次		130cm	4 秒 096	1130 rpm	36.621cm/s
第 4 次		130cm	4 秒 423	1084 rpm	33.914cm/s
第 5 次		130cm	4 秒 039	1166 rpm	37.138cm/s
平均		130cm	4 秒 544	1105.5 rpm	35.354cm/s

(yoyo 重) $w=460\text{g}$ 、高度 150cm、鋼質軸心 0.6cm、 $\mu=0.088$ 不同直徑變化

量測項目 直徑大小	反彈高度	到達底部所需時間 t	底部旋轉角速度 ω	平均速度 $V=\Delta s/\Delta t$
直徑 6cm	115.2cm	1 秒 803	1690rpm	83.346cm/s
直徑 10.4cm	127cm	3 秒 371	1470rpm	44.563cm/s
直徑 12.2cm	130cm	4 秒 544	1105.5rpm	35.354cm/s



發現：當鋼質軸心直徑 0.6cm 固定軸半徑(r_0)不變，在相同高度下，若 yoyo 圓形輪直徑越大，

半徑 r 越大，直線上下平均速度 V 越慢（如圖 E4），到達底部的旋轉角速度 ω 越慢（如圖 E2），到達底部所需時間 t 越長（如圖 E3），反彈高度越高（如圖 E1）；反之，在相同高度下，圓形直徑越小，半徑 r 越小，所有情況完全相反，直線上下平均速度 V 越快，到達底部所需時間 t 越短，到達底部的旋轉角速度 ω 越快，反彈高度越低。

結論：當鋼質軸心直徑 0.6cm 固定軸半徑(r_0)不變

- 1、當圓盤輪半徑 r 越大，圓盤型 yoyo 轉動慣量 I (註解 1 第 30 頁) 越大，因此 yoyo 圓盤旋轉到達底部的角速度 ω 越小(慢)（如圖 E2）， V (直線下降平均速度)越小(慢)（如圖 E4），其到達底部所需時間 t 越久（如圖 E3），明顯可知 yoyo 轉動慣量 I 越大。越不容易改變轉動物體運動狀態，越不容易往下旋轉運動(yoyo 越不容易停止或轉動)，到達底部時，因此反彈高度越高(不容易停止)（如圖 E1）。
- 2、反之，yoyo 圓形輪直徑越小，半徑 r 越小，所有動作均相反。到達底部的角速度 ω 越大(快)、 V (直線下降平均速度)越大(快)，其到達底部所需時間 t 越短，明顯可知 yoyo 轉動慣量 I 越小。因此越容易改變轉動物體運動狀態，越容易往下旋轉運動(yoyo 越容易停止或轉動)，到達底部時，因此反彈高度越低(容易停止)。

實驗 2：yoyo 圓形輪直徑大小變化，會影響 yoyo 上下運動速度及加速度嗎？

方法：如同實驗 1 的方法，從 150cm 處自由落下，每間隔 10 公分處設置凹型光電感測器，經

由光電計時器紀錄 yoyo 的下降每間隔 10 公分所需時間(如圖十所示)，經由距離 $s = v_0 t +$

$\frac{1}{2} a t^2$ 公式(yoyo 初速 $v_0 = 0$)，計算出加速度 a ，結果如下(表格 A)記錄所示：

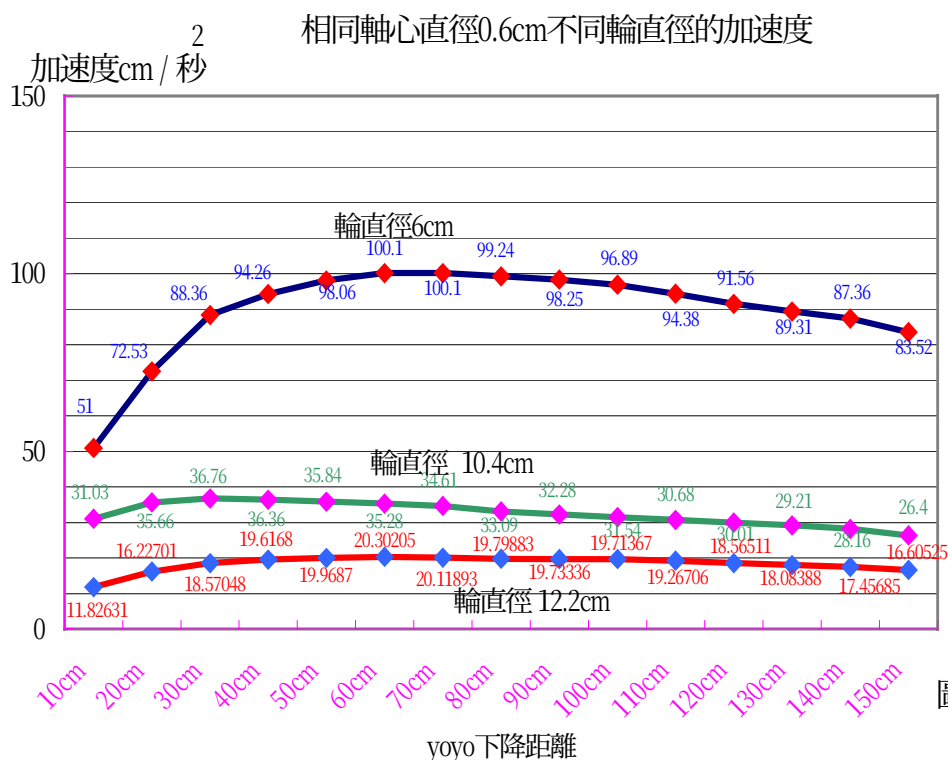


圖 E5

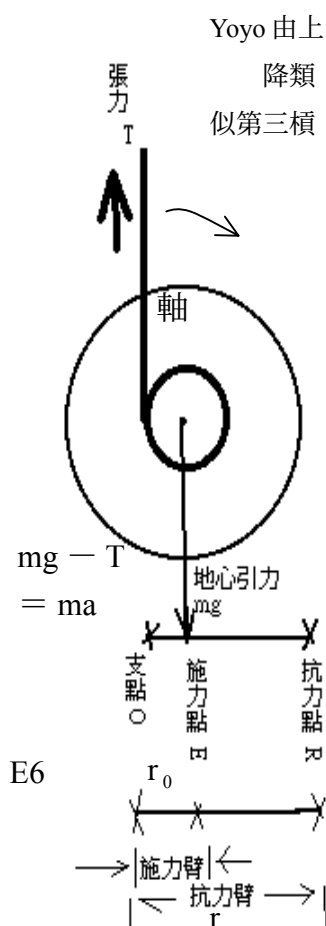


圖 E6

加 速 度 距 離 S	Yoyo 輪 直徑 大小	輪直徑 6cm	輪直徑 10.4cm	輪直徑 12.2cm
10cm		51cm/秒 ²	31.03 cm/秒 ²	11.82631 cm/秒 ²
20cm		72.53 cm/秒 ²	35.66 cm/秒 ²	16.22701 cm/秒 ²
30cm		88.36 cm/秒 ²	36.76 cm/秒 ²	18.57048 cm/秒 ²
40cm		94.26 cm/秒 ²	36.36 cm/秒 ²	19.6168 cm/秒 ²
50cm		98.06 cm/秒 ²	35.84 cm/秒 ²	19.9687 cm/秒 ²
60cm		100.1 cm/秒 ²	35.28 cm/秒 ²	20.30205 cm/秒 ²
70cm		100.1 cm/秒 ²	34.61 cm/秒 ²	20.11893 cm/秒 ²
80cm		99.24 cm/秒 ²	33.09 cm/秒 ²	19.79883 cm/秒 ²
90cm		98.25 cm/秒 ²	32.28 cm/秒 ²	19.73336 cm/秒 ²
100cm		96.89 cm/秒 ²	31.54 cm/秒 ²	19.71367 cm/秒 ²
110cm		94.38 cm/秒 ²	30.68 cm/秒 ²	19.26706 cm/秒 ²
120cm		91.56 cm/秒 ²	30.01 cm/秒 ²	18.56511 cm/秒 ²
130cm		89.31 cm/秒 ²	29.21 cm/秒 ²	18.08388 cm/秒 ²
140cm		87.36 cm/秒 ²	28.16 cm/秒 ²	17.45685 cm/秒 ²
底部 150cm		83.52 cm/秒 ²	26.4 cm/秒 ²	16.60525 cm/秒 ²
平均加速度		89.66133 cm/秒 ²	32.46067 cm/秒 ²	18.93029 cm/秒 ²

表格 A

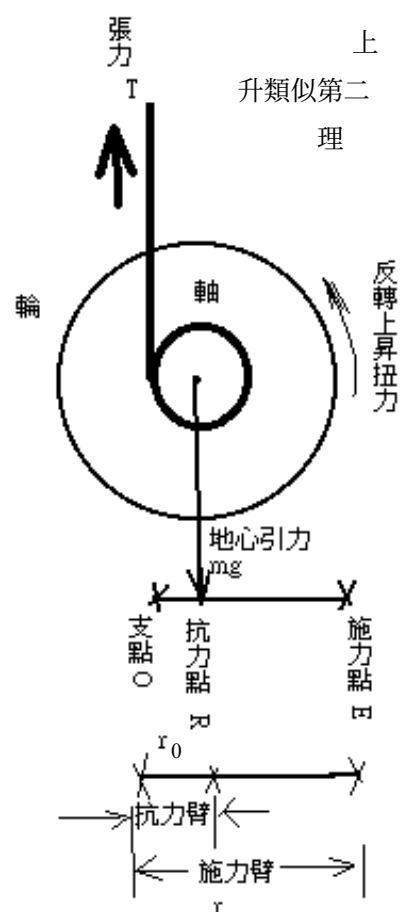
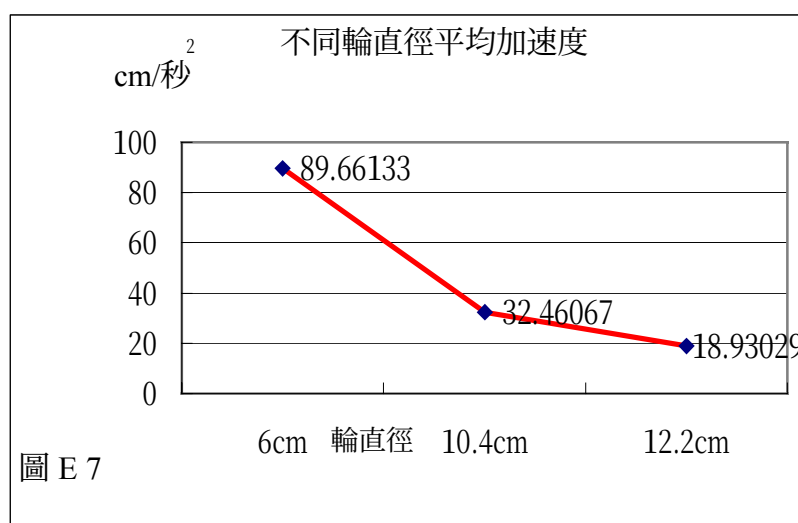


圖 E 8
yoyo 反轉扭力爬升的
原理 $T - mg = ma$

圖十
Yoyo 經過凹型光電
感測器記錄每下降十公分所
需時間



發現：yoyo 自由落下會產生加速度，不同輪直徑 yoyo 下降所產生加速度大小不同：如圖 E5、E7

1. 軸心都是 0.6cm 且質量、重量都相同 460g 的 yoyo。但是輪直徑不同，輪直徑為 6cm 的 yoyo 到達底部 150cm 處加速度最快為 $83.52\text{cm}/\text{秒}^2$ 平均加速度為 $89.66133\text{cm}/\text{秒}^2$ ，輪直徑為 10.4cm 的 yoyo 到達底部 150cm 處，加速度最快為 $26.4\text{cm}/\text{秒}^2$ ，平均加速度為 $32.46067\text{cm}/\text{秒}^2$ ，而輪直徑為 12.2cm 的 yoyo 到達底部 150cm 處，加速度最快為 $16.605\text{cm}/\text{秒}^2$ ，平均加速度為 $18.93029\text{cm}/\text{秒}^2$ (如圖 E5、圖 E7、表格 A 記錄)。
2. 由圖中 E7 所示輪直徑越大(12.2cm)，其到達底部 150cm 處的平均加速度越小 ($18.93029\text{cm}/\text{秒}^2$)，輪直徑越小(6cm)平均加速度反而越大($89.66133\text{cm}/\text{秒}^2$)。
3. 由圖中 E5 也可看出 yoyo 自由落下的加速度變化是一種變加速度運動，輪直徑越小加速度越大，變加速度運動越明顯(如輪直徑 6cm 的加速度曲線變化)。

結論：

- 1 yoyo 軸心直徑 0.6cm，其軸心半徑承受一個向上張力 T 及一向下地心引力 mg 兩個方向相反的平行力，因此產生一力矩對軸心施一作用力，此力矩使 yoyo 開始產生轉動作用，帶動 yoyo 輪向下運動，輪與軸互動關係可以槓桿原理(註解 2 第 30 頁)分析。
2. 從 yoyo 輪軸與槓桿關係(註解 3 第 30 頁)觀點，yoyo 由上往下降時 yoyo 軸心的半徑相當於槓桿的施力臂(作用力、如圖 E6 所示)，而 yoyo 輪(圓形直徑大小)的半徑相當於槓桿的抗力臂(阻力)。yoyo 軸心半徑較小為 0.3cm(直徑 0.6cm)，而 yoyo 輪半徑比較大，因此 yoyo 下降是一種費力的槓桿動作(第三類槓桿)。下降時 yoyo 輪半徑越大其槓桿力矩越費力，因此下降速度越慢，當然加速度也越小(如圖 E5)。若 yoyo 輪直徑為 12.2cm，輪的阻力較大，到達底部 150cm 處的加速度為 $16.605\text{cm}/\text{秒}^2$ 。若 yoyo 輪直徑為 6cm 其輪的阻力較小，因此比較不費力，其到達底部 150cm 處下降加速度即可加快為 $83.52\text{cm}/\text{秒}^2$ (如表格 A 記錄)。
3. 反之，如果 yoyo 到達底部產生足夠摩擦力，使軸心停止滑動。但 yoyo 輪因轉動慣性無法停止，會有一反作用扭力矩出現。此時的 yoyo 輪轉動扭力帶動已停止的 yoyo 軸，反轉向上爬昇，因此 yoyo 的輪、軸在槓桿原理中所扮演的角色互換。yoyo 輪的半徑相當於槓桿的施力臂(作用力)，而 yoyo 軸的半徑(軸直徑 0.6cm)相當於槓桿的抗力臂(阻力)如圖 E8 所示。此時候 yoyo 輪半徑較大，而 yoyo 軸半徑比較小，因此 yoyo 反轉向上爬昇反而是一種省力的槓桿動作(第二類槓桿)。因為軸心直徑固定為 0.6cm，其抗力臂(阻力)固定，輪半徑越大(輪直徑 12.2cm)，其施力臂也越大，形成扭轉力矩越強因此越省力，反彈越高。相反的輪半徑越小，其施力臂越小，反轉扭矩較小，省力上比較差一點(弱)，所以輪半徑越小(輪直徑 6cm)反彈越低。
5. 由公式加速度 $a=g/(1+I/mr_0^2)$ (註解四第 31 頁分析證明)，當地心引力 g 質量 m (軸心半徑 r_0) 都固定。由公式可知，a 與 I 成反比關係(註解四)，yoyo 鋼體的(轉動慣量) I 越大，其加速度 a 即會減少。因此 yoyo 的軸心都固定 0.6cm，控制所有質量，重量都相等均為 460g，但輪直徑分別為 6cm、10.4cm、12.2cm，其半徑 r 即不同(因為 $I=mr^2$) 其鋼體的 I (轉動慣量) 即有不同大小，因此三者的 a (加速度) 即有明顯不同。輪直徑 12.2cm 的 yoyo I (轉動慣量) 最大，其線加速度 a 即為最小，到達底部 150cm 處約為 $16.60525\text{cm}/\text{秒}^2$ ，全程平均加速度為 $18.93029\text{cm}/\text{秒}^2$ 。反之，輪直徑為 6cm 的 yoyo，I (轉動慣量) 最小，其直線加速度 a 即為最大，到達底部 150cm 處約為 $83.52\text{cm}/\text{秒}^2$ 全程平均加速度為 $89.66133\text{cm}/\text{秒}^2$ ，如表格 A 記錄所示。

- 6.再由加速度 a 的公式分析，若鋼體轉動慣量 I 、 g 、 m 三者固定， a 與軸半徑 r_0^2 成正比關係(註解四)。因此若 yoyo 的輪固定，轉動慣量 I 既固定且重量都是 460g，若纏繞的線繩越多等效軸半徑(r_0)越大，剛開始落下時線繩纏繞軸心越多，相對產生旋轉力矩作用力越大，再加上地心引力 g 作用，因此其加速度 a 變大(快)；當自由落下越多，軸心繞繩越少，等效軸半徑(r_0)越小，產生旋轉力矩減少，其加速度 a 也會變小。最後我們發現， r_0 在 yoyo 下降運動過程中一直在變化所以加速度 a 隨之而起變化，因此 a 既成為變加速度運動，若其 yoyo 的加速度 a 值很大會更明顯呈現變加速度運動，如圖 E5 所示輪直徑為 6cm 的變加速度即可看出非常明顯。
- 7.由公式 $a = r_0 \alpha$ 可知，若軸心 r_0 固定則直線加速度 a 與角加速度 α 成正比，因此角速度 ω 也成正比。軸心 $r_0 = 0.6\text{cm}$ 固定，輪直徑為 6cm 的 yoyo 到達底部 150cm 處 a 為 83.52cm/s^2 (如表格 A 記錄所示)越快，其角速度 ω 為 1690 rpm(如圖 E2)旋轉越快。反之，輪直徑 12.2cm 的 yoyo 到達底部 150cm 處 a 為 16.60525cm/s^2 越慢，其角速度 ω 為 1690 rpm 旋轉越慢(如圖 E2)。

問題：質量不同位置放置對 YOYO 上下運動高度 旋轉角速度直線加速度是否有影響？

實驗 3：質量分佈不同對 YOYO 上下運動高度是否有影響？

方法 1：將 YOYO 球兩邊各放入 8 個大鋼珠，共有 16 顆大鋼珠，每個鋼珠直徑 0.8cm 重量 2g yoyo 總重量 87g。平均分配集中在軸心上(如圖 11 所示)，由 150cm 自由落下、測量反彈高度、到達底部所需時間 t 、到達底部的旋轉角速度 ω 、平均上下直線速度 v 。結果如下表所示：

結果：16 顆大鋼珠集中在軸心上、高度 150cm、軸心 0.6cm、 $\mu = 0.088$

次 數	量測 項目	反彈高度	到達底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 $V = \Delta S / \Delta t$
1		90cm	1 秒 479	1049rpm	101.420cm/s
2		90cm	1 秒 467	1052rpm	102.250cm/s
3		85cm	1 秒 431	1066rpm	104.822cm/s
4		85cm	1 秒 397	1127rpm	107.373cm/s
5		80cm	1 秒 397	1155rpm	107.373cm/s
平均		86cm	1 秒 434	1089rpm	104.648cm/s

方法 2：與前述方法 1 的條件相同方式，但大鋼珠平均分散遠離軸心，分佈在圓形輪外邊邊緣(如圖 11 所示)，由 150cm 自由落下，測量反彈高度、到達底部所需時間 t 、到達底部旋轉角速度 ω 、上下平均直線速度 v 。結果如下表所示：

結果：16 顆大鋼珠平均分散在 yoyo 邊緣上、高度 150cm、軸心 0.6cm、 $\mu = 0.088$

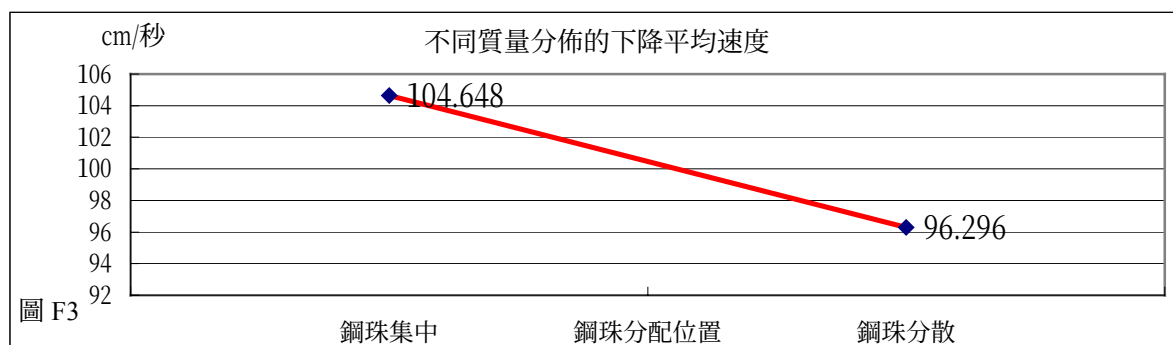
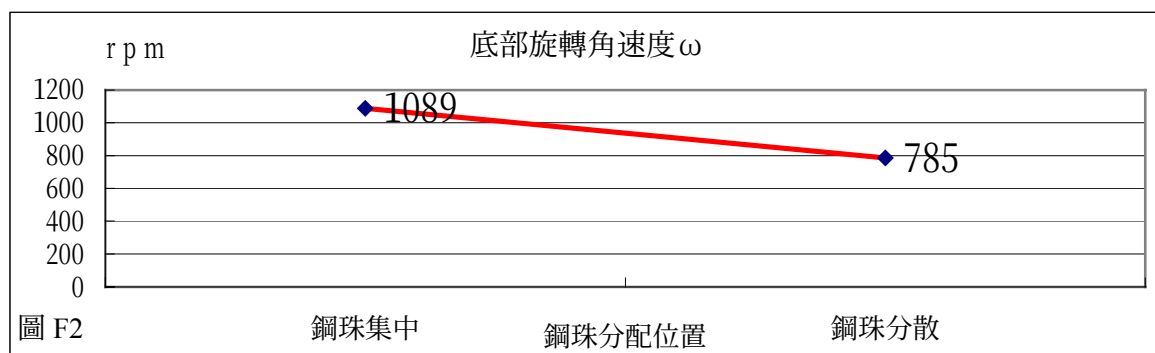
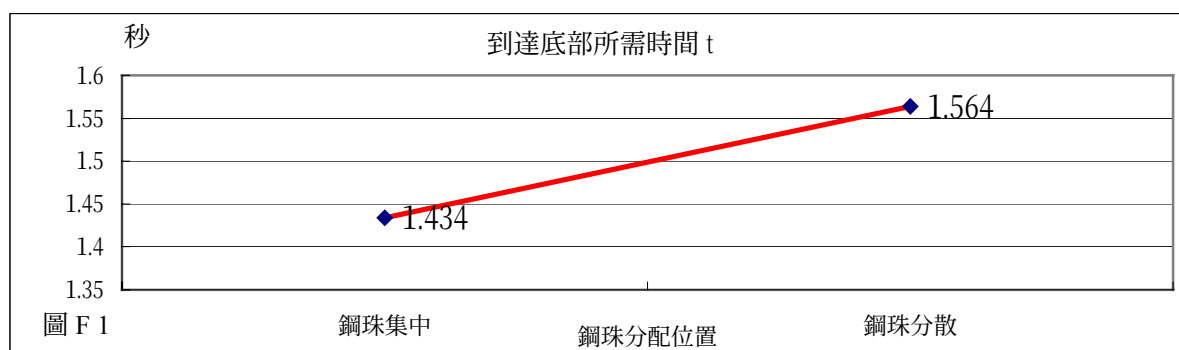
次 數	量測 項目	反彈高度	到達底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 $V = \Delta S / \Delta t$
1		115cm	1 秒 689	702rpm	88.810cm/s
2		110cm	1 秒 531	764 rpm	97.975cm/s
3		110cm	1 秒 473	861 rpm	101.833cm/s
4		110cm	1 秒 446	871 rpm	103.734cm/s
5		115cm	1 秒 683	727 rpm	89.127cm/s
平均		112cm	1 秒 564	785rpm	96.296cm/s

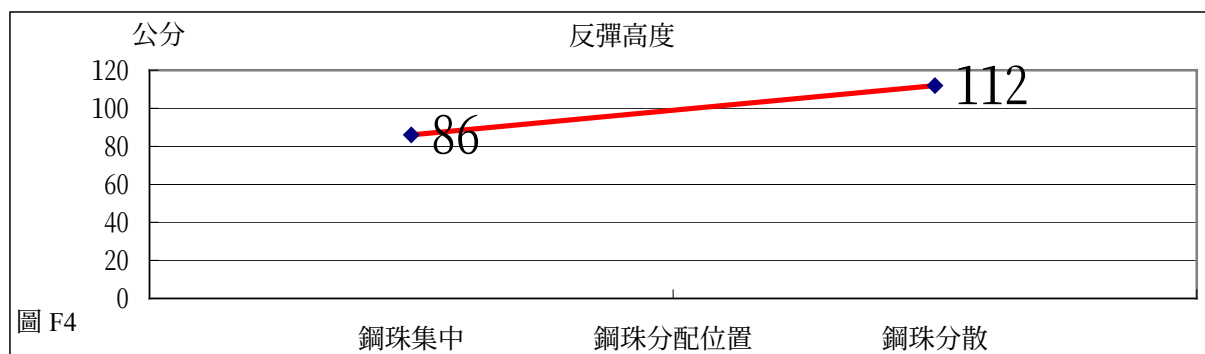


圖 11: 軸心為 0.6 公分, 以 16 顆大鋼珠集中/分散分佈, 以改變質心點位置變化。

16 顆大鋼珠 集中/分散 高度 150cm、軸心 0.6cm、 $\mu=0.088$

鋼珠分佈	反彈高度	到達底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 $V=\Delta S/\Delta t$
鋼珠集中	86cm	1 秒 434	1089rpm	104.648cm/s
鋼珠分散	112cm	1 秒 564	785rpm	96.296cm/s



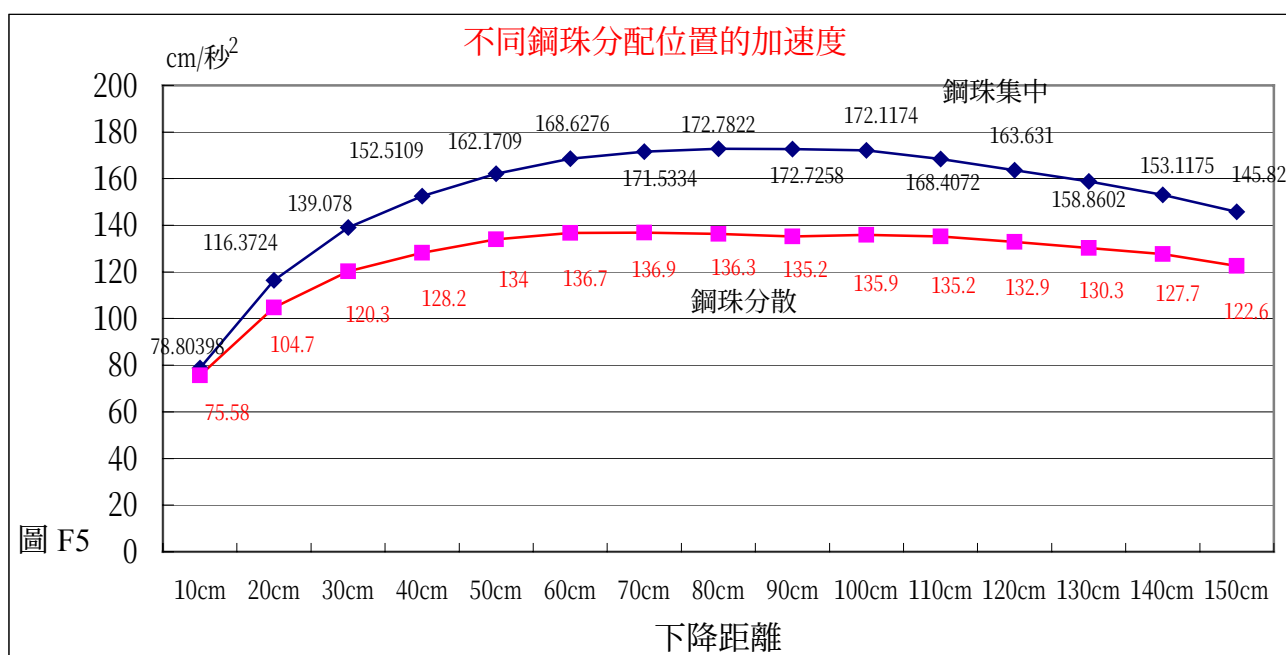


發現：1、鋼珠質量集中軸心，到達底部轉動角速度 ω 越快（如圖 F2），YOYO 直線下降平均速度 v 變快（如圖 F3），因此在很短時間即可到達底部（如圖 F1），反彈高度低（如圖 F4）。

2、反之，鋼珠質量分佈遠離軸心在圓形輪外邊分佈，其轉動角速度 ω 變慢，YOYO 直線下降平均速度 V 變慢，因此需很長時間到達底部，反彈高度也越高。

結論：總質量 m 並沒有改變，只是將大鋼珠質量集中或分散，目的是為了改變總質心點與軸心支點間等效 r （半徑）的變化，希望改變等效轉動慣量（ I ）及旋轉力矩大小。

- 1、若將大鋼珠質量移近軸心支點，使等效 r （半徑）縮小。因為 $I=mr^2$ 而 m （總質量）不變。所以 r （等效半徑）減小， I （轉動慣量）必相對應減小。因此到達底部旋轉角速度 ω 越大(快)， V (直線下降平均速度)越大(快)，其到達底部所需時間 t 越短。結果越容易改變轉動物體運動狀態(yoyo 越容易停止或轉動)，所以反彈高度越低(容易停止)。
- 2、反之；若將大鋼珠質量分佈遠離軸心支點，使得等效 r （半徑）加大。因為 $I=mr^2$ 而 m （總質量）不變。所以 r （等效半徑）增加， I （轉動慣量）必相對應增大。因此到達底部旋轉角速度 ω 越小(慢)， V (直線下降平均速度)越小(慢)，其到達底部所需時間 t 越長。結果越不容易改變轉動物體運動狀態(yoyo 越不容易停止或轉動)，所以反彈高度越高(不容易停止)。
- 3、其所呈現的物理現象與實驗 1 同。鋼珠集中/分散不同，yoyo 上下運動反彈高度與實際改變 yoyo 圓形輪直徑 r 大小的上下運動反彈高度完全相的物理現象一致



實驗 4：yoyo 質量分佈不同對 yoyo 上下運動直線**加速度 a** 是否有影響。

方法：如同實驗 3 的方法，從 150cm 處自由落下，每間隔 10cm 處設置凹型光電感測器，經由光電計時器，記錄 yoyo 下降每間隔 10cm 所需時間 t(如圖十)，經由公式 $S = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$ 計算出加速度 a 值($V_0 = 0$)，結果如下(表格 B)記錄所示：

結果：

表格 B

加 距 離 S	質量分佈 速 度	鋼珠集中軸心	鋼珠分散邊緣
10cm		78.80398 cm/秒 ²	75.58 cm/秒 ²
20cm		116.3724 cm/秒 ²	104.7 cm/秒 ²
30cm		139.078 cm/秒 ²	120.3 cm/秒 ²
40cm		152.5109 cm/秒 ²	128.2 cm/秒 ²
50cm		162.1709 cm/秒 ²	134 cm/秒 ²
60cm		168.6276 cm/秒 ²	136.7 cm/秒 ²
70cm		171.5334 cm/秒 ²	136.9 cm/秒 ²
80cm		172.7822 cm/秒 ²	136.3 cm/秒 ²
90cm		172.7258 cm/秒 ²	135.2 cm/秒 ²
100cm		172.1174 cm/秒 ²	135.9 cm/秒 ²
110cm		168.4072 cm/秒 ²	135.2 cm/秒 ²
120cm		163.631 cm/秒 ²	132.9 cm/秒 ²
130cm		158.8602 cm/秒 ²	130.3 cm/秒 ²
140cm		153.1175 cm/秒 ²	127.7 cm/秒 ²
底部 150cm		145.82 cm/秒 ²	122.6 cm/秒 ²
平均加速度		153.1039 cm/秒 ²	126.1653 cm/秒 ²

發現：1 .yoyo 自由落下會產生加速度，重量相同但質量位置分佈不同的 yoyo 下降所產生的加速度大小也會不同，如圖：F5

2 .yoyo 質量分佈不同總重量都是 87 公克(g)，鋼珠質量集中軸心到達底部 150cm 處其加速度非常快為 145.82 cm/秒²，其全程平均加速度為 153.1039 cm/秒² 如表格 B。

3. 反之，鋼珠質量分佈遠離軸心在圓形輪外邊分佈其到達底部 150cm 處其加速度稍為小一些為 122.6 cm/秒²，其全程平均加速度為 126.1653 cm/秒²。

結論：yoyo 總值量並沒有改變只是質量分佈變化不同，目的是改變總質心點與軸心點間**等效 r(半徑)**變化，其直線下降加速度的變化與實驗 2 所呈現現象相同。

1. 鋼珠質量分佈遠離軸心，其所代表質心點位置外移與軸心點間的**等效 r (半徑)**增加，其有效**I (轉動慣量)**增大，由公式 $a = \frac{g}{(1 + \frac{I}{m \cdot r_o^2})}$ 可知，當總質量 m，地心引力 g 及

yoyo 軸心 $r_o = 0.6\text{cm}$ 固定不變，**I 越大 a 越小**，如圖 F5 所示。因此 yoyo 到達底部的加速度為 122.6 cm/秒²，全程平均加速度為 126.1653 cm/秒² (表格 B)。yoyo **由上往下**降是費力型槓桿，到底部反彈上昇時是省力型槓桿，因輪的等效半徑(r)大，反轉扭

力(作用力)大, 因此反彈越高, 所呈現物理現象與實驗 2 所呈現現象相同(如輪直徑 12.2cm 的yoyo, 實際半徑 r 大)。

- 反之, 若鋼珠質量集中軸心, 其所代表質心點位置往內移, 靠近軸心點間的等效 r (半徑) 減少, 其有效 I (轉動慣量) 減小, 由公式得知 I 越小 a 越大, 如圖 F5 所示, yoyo 到達底的部加速度為 145.82 cm/秒², 全程平均加速度為 153.1039 cm/秒² (表格 B), 其往下降的輪軸互動關係符合第三類槓桿原理費力型, 其中軸直徑(r₀)仍然是 0.6cm 而輪的有效半徑 r 減少。因此 yoyo 下降中所需槓桿費力狀況沒有鋼珠質量分佈遠離軸心的大, 比較不費力, 因此加速度 a 會變大, 當到達底部反彈時 yoyo 輪變成扭轉力矩帶動軸往上爬昇, 此時輪為作用力, 軸為阻力, 呈現(第二類)省力型槓桿, 但是因為輪的有效半徑減小, 輪作用力減弱, 省力功能降低(小), 比較不省力, 因此 yoyo 反彈也低。

所呈現物理現象與實驗 2 所呈現現象相同(如輪直徑為 6cm 的 yoyo 實際半徑 r 小)。

問題：1. 軸心直徑大小不同對 YOYO 上下運動及旋轉角速度是否也會有影響且與前面研究 (三) 的實驗 1、實驗 2、3、4 所呈現的物理現象是否也相通。

2. 既然軸心與加速度有關, 改變軸心大小是否能影響 yoyo 的加速度變化

實驗 5：不同軸心大小對 YOYO 上下運動高度的及旋轉角速度影響。

方法：將 yoyo 圓形輪直徑大小固定為 6cm, 而其軸心直徑分別以 0.6cm、1.3cm、1.9cm 的不鏽鋼軸心材質變化 (如圖 12、13 所示)。統一由 150cm 高度自由落下 (如圖 14 所示), 測量其反彈高度、到達底部所需時間 t、及底部旋轉角速度 ω 的值。結果如下表所示：

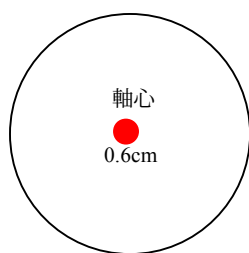
結果：

(yoyo 重) w=55g、鋼質軸心直徑 0.6cm、yoyo 圓形輪直徑 6cm S=150cm

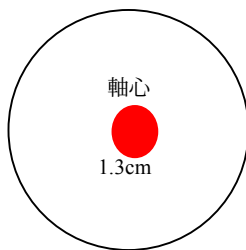
量測項目 次 數	反彈高度	到底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 V=ΔS/Δt
1	65cm	1 秒 657	1400rpm	90.525cm/s
2	66cm	1 秒 670	1420 rpm	89.820cm/s
3	62cm	1 秒 544	1353 rpm	97.150cm/s
4	61cm	1 秒 492	1319 rpm	100.536cm/s
5	60cm	1 秒 483	1272 rpm	101.146cm/s
平均	62.8cm	1 秒 569	1352.8 rpm	95.835cm/s

(yoyo 重) w=55g、鋼質軸心直徑 1.3cm、yoyo 圓形輪直徑 6cm S=150cm

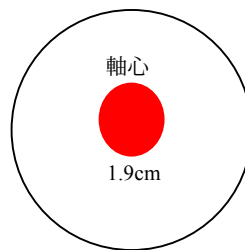
量測項目 次 數	反彈高度	到底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 V=ΔS/Δt
1	43cm	1 秒 429	1063 rpm	104.976cm/s
2	41cm	1 秒 424	1059 rpm	105.337cm/s
3	44cm	1 秒 546	1088 rpm	97.025cm/s
4	45cm	1 秒 562	1096 rpm	96.031cm/s
5	40cm	1 秒 367	1044 rpm	109.737cm/s
平均	42cm	1 秒 465	1070 rpm	102.621cm/s



圓形輪直徑 6 公分



圓形輪直徑 6 公分



圓形輪直徑 6 公分



圖 12：圓形輪直徑大小為 6cm 的 yoyo 固定不變，其軸心直徑分別以 0.6cm、1.3cm、1.9cm 的不鏽鋼軸心材質變化



圖 13：用游標尺測量 yoyo 直徑大小



圖 14：用捲尺量測 yoyo 長度及反彈高度

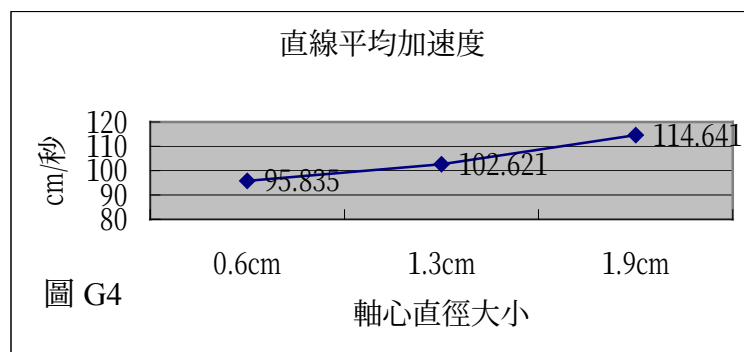
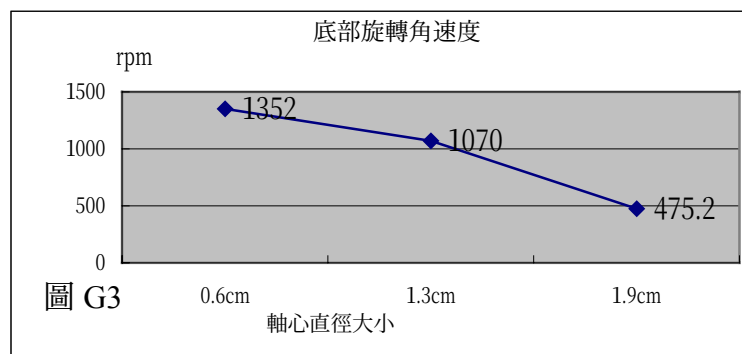
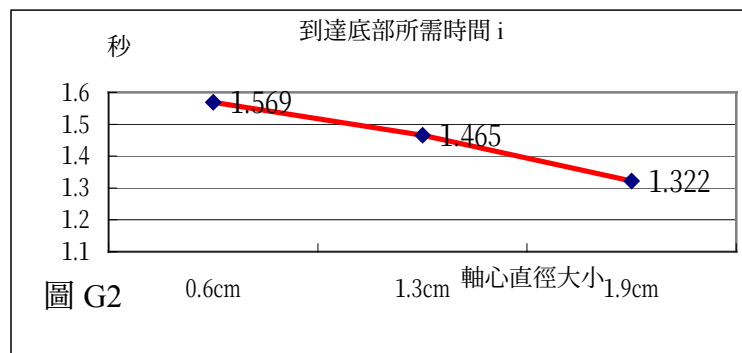
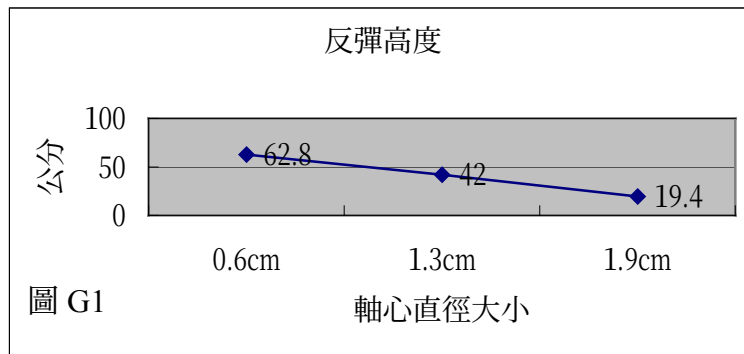
(yoyo 重) $w=55g$ 、鋼質軸心直徑 1.9cm、yoyo 圓形輪直徑 6cm $S=150cm$

量測項目 次 數	反彈高度	到底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 $V=\Delta S/\Delta t$
1	18cm	1 秒 324	441 rpm	113.293cm/s
2	17cm	1 秒 09	425 rpm	137.640cm/s
3	21cm	1 秒 392	527 rpm	107.774cm/s
4	20cm	1 秒 33	464 rpm	112.782cm/s
5	21cm	1 秒 475	519 rpm	101.716cm/s
平均	19.4cm	1 秒 322	475.2 rpm	114.641cm/s

(yoyo 重) $w=55g$ 、 $S=150cm$

yoyo 圓形輪直徑 6cm、鋼質不同軸心大小 $S=150cm$

量測項目 軸 心 大 小	反彈高度	到底部所需時間 (t)	底部旋轉角速度 (ω)	平均速度 $V=\Delta S/\Delta t$
軸心 0.6cm	62.8cm	1 秒 569	1352.8rpm	95.835cm/s
軸心 1.3cm	42cm	1 秒 465	1070rpm	102.621cm/s
軸心 1.9cm	19.4cm	1 秒 322	475.2rpm	114.641cm/s



發現：1、從高度 150cm 處落下，軸心直徑越小，到達底部的旋轉角速度 (ω) 越快（如圖 G3），直線下降平均速度 (V) 越慢（如圖 G4），下降到達底部所需時間 (t) 越長（如圖 G2）。由研究(一)得知，旋轉角速度 (ω) 越快，其轉動動能越大。因此 YOYO 會有很大的動能反彈上去，反彈高度越高（如圖 G1）。

2、反之，相同從高度 150cm 處落下，但是軸心直徑越大，到達底部的旋轉角速度 (ω) 越慢，直線下降平均速度 (V) 越快，下降到底部所需時間 (t) 越短。由研究(一)得知，旋轉角速度 (ω) 越慢，其轉動動能越小。因此 YOYO 只有很小能量反彈上去，因此反彈高度越低。

結論：1、YOYO 圓形輪直徑大小不變，輪半徑 r 固定（因此 yoyo 本身轉動慣量 I 不變）。從 150cm 高度落下，yoyo 動作類似第三類槓桿。若軸心半徑(r_0)越小(施力臂短作用力小)如圖 E6 所示。yoyo 下降越費力(輪直徑大阻力大)，直線下降平均速度 V 越慢（如圖 G4），到達底部所需時間 t 越久（如圖 G2）；因此到達底部的旋轉角速度 (ω) 越大（如圖 G3）(被地心引力作用時間越久)，動能越大。當到達底部的摩擦力足夠大到能阻止軸心滑動時，YOYO 會產生反作用力，向上爬昇。此時 Yoyo 輪、軸角色互換，yoyo 動作類似第二類槓桿(省力)，輪變為作用力、軸為反抗阻力。輪直徑大小不變(反作用扭轉的作用力不變)，又因為軸心直徑越小，軸心直徑的反抗阻力越小，反抗爬昇的阻力能量減少，因此 YOYO 的軸心直徑反轉上昇的阻力減少。再加以底部動能大，所以 YOYO 反彈越高（如圖 G1）。

2、反之，相同 150cm 高度落下，但軸心直徑(r_0)越大(施力臂長作用力大)，yoyo 輪直徑大小仍然不變(阻力不變)，此時軸心作用力大，比較不費力，因此 yoyo 直線下降平均速度 V 越快，到達底部所需時間越短，到達底部的旋轉角速度 (ω) 越小(yoyo 被地心引力作用時間越短)，動能越小。當到達底部的摩擦力足夠大到能阻止軸心滑動時，YOYO 會產生反作用力，向上爬昇。雖然輪直徑大小不變(反作用扭轉的作用力不變)，但是因為軸心直徑越大，其直徑轉軸的反抗力量越大，反抗上昇的阻力能量增大，因此 YOYO 的軸心直徑反轉上昇的阻力增大，再加以底部動能小，所以 YOYO 反彈也越低。

3、由以上二點分析，軸心越大反而下降速度越快，時間越短，轉動角速度 ω 越慢(小)，動能越低，反彈越低。反之，軸心越小反而下降速度越慢，時間越長，轉動角速度 ω 越快(大)，動能越強，反彈越高。與實驗 1、3 物理現象相反。所有原因及答案都包含在槓桿原理中真是神奇的物理世界。

實驗 6：不同軸心大小的 yoyo 對直線加速度 a 是否有影響。

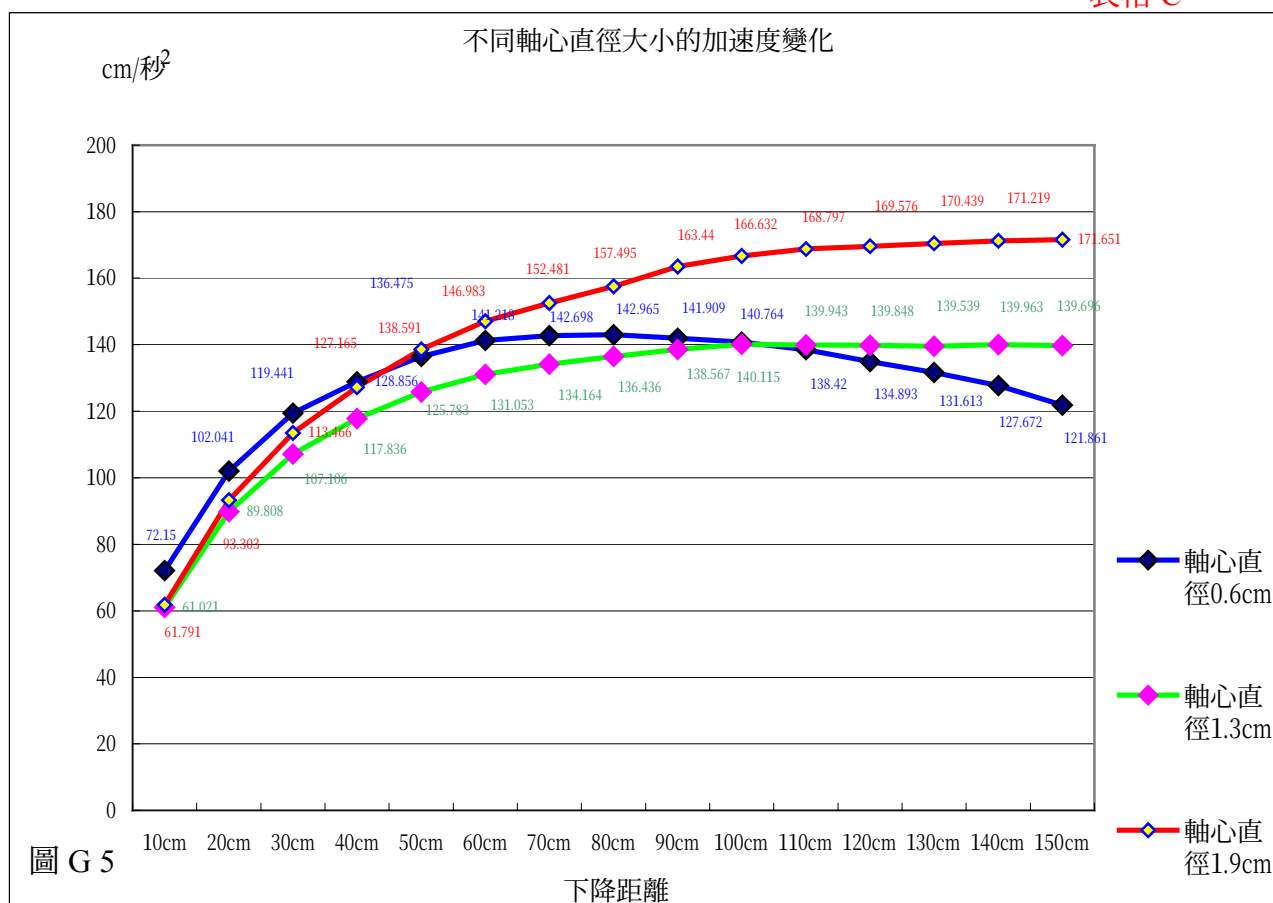
方法：與實驗 5 相同統一由 150cm 高度自由落下，每間隔 10cm 處設置凹型電光感測器，經由光電計時器，記錄 yoyo 每間隔 10cm 下降所需時間 t，經由公式 $S = V_0 t$

$+ \frac{1}{2} a t^2$ 計算出加速度 a 值($V_0 = 0$)，結果如下(表格 C)記錄所示：

輪直徑大小固定為 6cm 且使用相同重量 55g 的 yoyo 軸心直徑分別為 0.6cm、1.3cm、1.9cm

加 速 度 直 徑 大 小 距 離 S	yoyo 軸心 0.6cm	yoyo 軸心 1.3cm	yoyo 軸心 1.9cm
10cm	72.150 cm/秒 ²	61.021 cm/秒 ²	61.791 cm/秒 ²
20cm	102.041 cm/秒 ²	89.808 cm/秒 ²	93.303 cm/秒 ²
30cm	119.441 cm/秒 ²	107.106 cm/秒 ²	113.466 cm/秒 ²
40cm	128.856 cm/秒 ²	117.836 cm/秒 ²	127.165 cm/秒 ²
50cm	136.475 cm/秒 ²	125.783 cm/秒 ²	138.591 cm/秒 ²
60cm	141.218 cm/秒 ²	131.053 cm/秒 ²	146.983 cm/秒 ²
70cm	142.698 cm/秒 ²	134.164 cm/秒 ²	152.481 cm/秒 ²
80cm	142.965 cm/秒 ²	136.436 cm/秒 ²	157.495 cm/秒 ²
90cm	141.909 cm/秒 ²	138.567 cm/秒 ²	163.440 cm/秒 ²
100cm	140.764 cm/秒 ²	140.115 cm/秒 ²	166.632 cm/秒 ²
110cm	138.420 cm/秒 ²	139.943 cm/秒 ²	168.797 cm/秒 ²
120cm	134.893 cm/秒 ²	139.848 cm/秒 ²	169.576 cm/秒 ²
130cm	131.613 cm/秒 ²	139.539 cm/秒 ²	170.439 cm/秒 ²
140cm	127.672 cm/秒 ²	139.963 cm/秒 ²	171.219 cm/秒 ²
底部 150cm	121.861 cm/秒 ²	139.696 cm/秒 ²	171.651 cm/秒 ²
平均加速度	123.193 cm/秒 ²	125.392 cm/秒 ²	144.869 cm/秒 ²

表格 C



發現：當輪直徑大小固定為 6cm 且相同重量 55g 的 yoyo，改變不同軸心直徑大小，使直徑為 0.6cm、1.3cm、1.9cm 三者自由落下所產生的加速度大小也不同(如表格 C)。

1. 軸心直徑 0.6cm 其到達底部 150cm 的加速度為 121.861cm/秒^2 平均加速度為 123.193cm/秒^2
2. 軸心直徑 1.3cm 其到達底部 150cm 的加速度為 139.696cm/秒^2 平均加速度為 125.392cm/秒^2
3. 軸心直徑 1.9cm 其到達底部 150cm 的加速度為 171.651cm/秒^2 平均加速度為 144.869cm/秒^2
4. 軸心越大加速度越快，軸心越小加速度越小。(如圖 G5、表格 C)
5. yoyo 開始下降是變加速度運動，但到達底部後若軸心直徑仍然很大，因此軸心直徑不再變小，加速度即不再改變且是等加速度運動。(如圖 G5 所示軸心直徑 1.9cm、1.3cm 到達 150cm 附近，a 值即保持固定不變，幾乎成等加速度運動。)
6. 若 yoyo 的軸心縮小為 0.6cm，yoyo 下降過程中會有明顯的變加速度變化，尤其到達底部的時候卻呈現變減加速度運動。

結論：1. 若 yoyo 重量 55g，輪直徑 6cm 都固定不變，由高度 150cm 處自由落下，經由公式

$$a = \frac{g}{(1 + \frac{I}{m \cdot r_o^2})}$$

得知，若地心引力 g 固定，且輪直徑固定則鋼體轉動慣量(I)也固定，

因此軸心半徑(r_o)的平方與加速度 a 成正比關係，軸心越大到達底部加速度也大，軸心越小到達底部加速度也會變小(圖 G5、表格 C 所示)。

2. yoyo 軸心半徑(r_o)會因纏繞線繩多而變大，因此開始下降時軸心半徑很大，軸心槓桿施力臂增長，所以作用力大($mg - T = ma$)，旋轉力矩大；再加上地心引力 g 關係，所以加速度 a 也會變大成變加速度。但隨著 yoyo 下降線繩纏繞很快變小，但此時 yoyo 軸心若仍很大(如圖 G5 的軸心 1.9cm、1.3cm 所示)，則其軸半徑到最末端仍保持軸心半徑固定值(如軸心最後仍保持 1.9cm、1.3cm)，則其最後加速度也會保持固定不變，成等加速度運動。
3. 反之，若軸心使用 0.6cm 的 yoyo，剛開始軸心半徑(r_o)會因纏繞線繩多而變大，因此開始下降時軸心半徑也是大，所以加速度 a 也會變大成變加速度，現象與軸心 1.9cm、1.3cm 完全相同，但隨著 yoyo 下降線繩纏繞很快變小。但此時 yoyo 軸心只有 0.6cm，軸心槓桿施力臂長度快速減少，並沒有保持固定，因此使得加速度 a 開始減少(a 與 r_o 的平方成正比)，所以 a 成變減加速度的運動。
4. yoyo 的軸心半徑(r_o)大小確實對 yoyo 直線加速度 a 具有非常大的影響，軸心半徑(r_o)的平方與 a 成正比關係完全確立。Yoyo 最後是變減加速度運動或是等加速度視 yoyo 軸心是否最後保持大軸心而定。



圖 15：用游標尺測量 yoyo 直徑大小



圖十六
Yoyo 從最高位置自由落下，初速度為零，全程 150 公分一路以變加速度運動，最後是否為變減加速度或等加速度運動視軸半徑而定

伍、設計、改良新式樣的 yo yo

根據前面的研究、分析了解 yo yo 運轉的奇妙物理特性。我們進一步發現若要改良 yo yo 必需從摩擦力、輪半徑、軸心半徑著手。經由前面對 yo yo 分析所得到的結論，我們希望能設計出一種新式樣的 yo yo，一種使用者能自由調整 yo yo 物理特性變化，而使 yo yo 運轉時可做各種不同花式變化的新產品。經過多次熱烈討論、腦力激盪後，產品改良成為如圖 17 的新式樣產品。一種藉由使用者自由調整鋼珠位置不同，經由改變質量位置變化也相對的改變 yo yo 的等效半徑 r 大小，產品結構簡單。它是運用前面研究所得的結論，只要改變輪半徑大小，改變質量位置分佈既代表其有效半徑 r 的變化。因此可改變加速度 a 、角加速度 α 、角速度 ω 、轉動慣量 I 及上下運轉的時間、反彈高度。它可做出多種花式變化的 yo yo 運轉。雖然我們也嘗試設計、改良可由使用者能自由調整摩擦力或軸半徑的產品方式但機械結構比較複雜超出我們能力範圍。然而改變輪半徑雖較容易但外觀上不佳，更不討人喜歡。因此我們得到最後結論：設計出簡易、方便、外觀又漂亮的新式樣 yo yo 新產品如圖 17 所示，希望大家喜歡它。

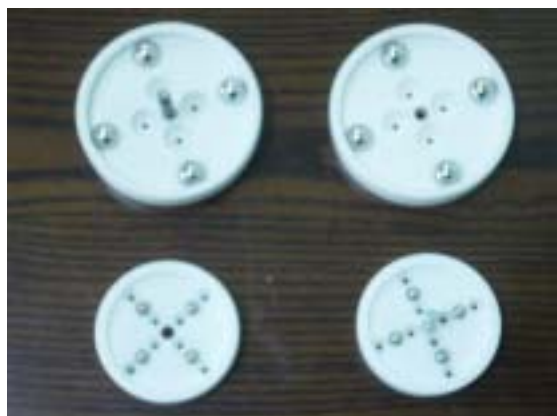


圖 17：設計、改良新式樣的 yo yo 使用者可以自由調整、任意改變鋼珠質量位置變化，提供另一種花式 yo yo 運轉。



圖 18：轉速計測試各種直徑 yo yo，到達底部的旋轉角速度 (ω)



圖 19：用捲尺量測 yo yo 拉繩高度



圖 20：用彈簧秤測量 yo yo 支撐拉力

陸、研究結果與討論

1. YOYO 上下運轉來自位能、動能互換。
2. 在 YOYO 軸心上纏繞圈數不同，會有不同摩擦力出現。但摩擦力大小需提供足夠阻力，以確保軸心不會滑動，即可使 YOYO 出現反作用力，因此 yoyo 可反轉向上爬昇。但是反彈高度與摩擦力大小無關，只視底部旋轉動能大小及 yoyo 的輪、軸半徑大小不同，其圓周運動的轉動慣量 (I) 加速度 a 、角加速度 α 、角速度 ω 大小而定。
3. 不同材質拉繩與鋼質軸心間，會有不同摩擦係數。
4. 拉繩表面積大小與鋼質軸心間接觸摩擦，所產生的摩擦力大小、摩擦係數，確定與材質間接觸表面積無關。
5. 當摩擦力不足時，由於 YOYO 無法產生足夠大的阻力，以確保軸心不會滑動，此時若提供一向上拉力，可增加摩擦阻力 YOYO 即可反轉向上爬昇。
6. 摩擦力大小只是 YOYO 反轉向上的必要條件，但影響 YOYO 上昇高低，除了底部動能大小外，尚與 YOYO 圓周轉動各項條件(輪、軸相互間的槓桿原理)變化有明顯關係。
7. 若軸心直徑大小固定，yoyo 重量也固定不變。當 YOYO 輪半徑越大(r)，其轉動慣量 I 越大($I=mr^2$)，此時越不容易改變轉動物體上或下的運動狀態。因此輪半徑越大，會很緩慢下降，若反轉向上爬昇時，因此也不容易停止，所以反彈高度越高。反之，輪半徑越小，轉動慣量 I 越小，因此容易改變轉動物體運動狀態，容易快速下降。反轉爬昇時，越容易使運動狀態停止，所以反彈高度越低。
8. yoyo 上下運動除了用轉動慣量 I 分析外，也可由槓桿原理分析。當 yoyo 輪半徑(r)越大時，yoyo 由上往下降時屬第三類槓桿，軸為施力臂、輪為抗力臂。而軸半徑(r_0)固定且短小，施加在軸半徑(r_0)的作用力所產生的旋轉力矩小；而輪的反抗阻力大，因此下降很費力，速度很慢，所需時間很長。到底部反彈時，yoyo 反轉上昇，輪、軸角色互換屬第二類型槓桿，軸為抗力臂、輪為施力臂。輪半徑大扭轉力矩強(作用力大)，軸半徑小(反抗阻力小)，因此爬昇很省力，反彈高度也高；反之，若 yoyo 輪半徑(r)越小，由上往下降時，其反抗阻力小，但軸心半徑(r_0)固定不變，施加在軸心上的旋轉作用力矩固定不變，因此下降時屬於比較不費力的第三類槓桿，因此下降速度越快，所需時間也短；但到達底部反彈時，輪半徑(r)小，扭轉力矩作用力減小，而軸半徑(r_0)固定不變，其反抗阻力也固定，因此反彈高度低。用槓桿原理分析比用轉動慣量 I 分析更能清楚了解轉動力學原理。
9. yoyo 的加速度 a 與 yoyo 剛體的轉動慣量(I)成反比，與軸半徑(r_0)的平方成正比，且與角加速度 α 成正比，因此加速度 a 與角速度 ω 成正比。
10. 如果 YOYO 軸心大小固定不變，圓形本身直徑大小也固定，且總質量也不變。但改變 YOYO 質量分佈位置，此時會改變 YOYO 質心點位置的變化，進而改變其等效半徑 r 大小的變化。因此 YOYO 上下運動反彈高度與前述實際改變 yoyo 本身圓形輪半徑 r 大小變化的情況類似，使 yoyo 上下反彈的高度完全相同，所出現的物理現象一致。
11. 若 YOYO 本身圓形輪直徑大小不變，因此 yoyo 本身轉動慣量 I 不變。但 yoyo 軸心直徑大小不同時，若軸心直徑越大，軸心的半徑(r_0)越大。經由公式 $a = \frac{g}{(1 + \frac{I}{m \cdot r_0^2})}$ 得知， a

與 r_0 的平方成正比關係，加速度 a 大，因此下降速度非常快。但是反轉上升時，軸心越大反而轉變為抵抗力越大的阻力，因此 YOYO 反彈越低；反之，軸心直徑越小，軸心的半徑(r_0)越小，加速度 a 也越小，因此下降速度非常慢。但是反轉上升時，軸心越小反而轉變為抵抗力越小的阻力，所以 YOYO 反彈越高。

12. yoyo 的加速度 a 與軸心 r_0 的平方成正比關係，因此剛開始落下時軸心纏繞線繩多軸心 r_0 大，幾乎都是以變加速度進行，隨著纏繞線繩減少，最後 yoyo 直線運動是變減加速度或成等加速度運動必須視軸心是否最後有無保持較大軸心而定。軸心最後若保持固定且半徑較大則必成等加速度運動；若軸心最後也隨之縮小則 yoyo 必成變減加速度運動。
13. 由前述觀察、研究、實驗、分析所獲得的結論，進一步加以應用改良。我們為了創造 YOYO 運轉的變化性，最後設計完成一種可以自由調整、任意改變鋼珠質量位置變化的 YOYO (如圖 17 所示)，因此可以做不同轉速的上下運轉變化，希望能提供另一種花式 YOYO 運轉。

註解 1：轉動慣量

因為轉動慣量(I)可用以表示剛體受外力力矩作用，改變剛體轉動角速度(ω)的難易程度，也就是說轉動慣量是指物體轉動時慣性的大小；轉動慣量愈大者，其轉動狀態愈不容易改變。它的大小與物體的質量有關，也與旋轉半徑的長短有關($I=mr^2$)。猶如直線運動物體的慣性質量，物體的慣性大小和它的質量成正比。

註解 2：槓桿原理

所謂槓桿，是指具有一個支點，並有二個受力點的硬桿。槓桿運作必須考慮三項因素：施力點(作用力 E)、抗力點(阻力 R)和支點(O)。施力點和抗力點到支點的距離分別稱為施力臂和抗力臂。在處於平衡狀態的槓桿，將施力乘以施力臂所得來的乘積，會等於抗力乘以抗力臂的乘積。這就是所謂的槓桿原理。

註解 3：YOYO 輪軸與槓桿關係

yoyo 輪(圓形直徑大小)、軸之外型雖然異於通常所見之槓桿，但它的原理其實和槓桿相同。YOYO 輪(圓形直徑大小)的半徑相當於槓桿的施力臂(作用力)；軸的半徑相當於槓桿的抗力臂(阻力)，因此 yoyo 的輪(圓形直徑大小)、軸可以認為是一種特殊形狀的槓桿，也可以說是槓桿的變相。yoyo 輪(圓形直徑大小)、軸的原理雖然和槓桿相同，但是槓桿的轉動角度是有限的，而輪軸的轉動角度是無限的，這是二者最大不同的地方。

註解 4：公式 $a = \frac{g}{\frac{I}{mr_0^2} + 1}$

$$\Sigma F_y : mg - T = ma$$

$$\Sigma \tau : r_0 T = I \alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{a}{r_0} \quad \therefore r_0 T = \frac{I a}{r_0}$$

$$\therefore r_0^2 T = I a \quad T = mg - ma$$

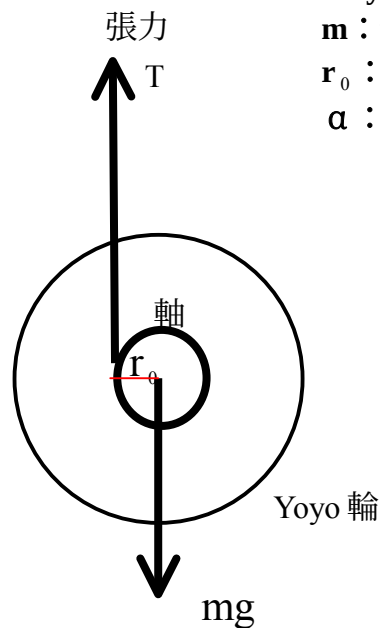
$$\therefore r_0^2 (mg - ma) = I a$$

$$r_0^2 mg - r_0^2 ma = I a$$

$$r_0^2 mg = a(I + m r_0^2)$$

$$a = \frac{mr_0^2 g}{I + mr_0^2} = \frac{g}{\frac{I}{mr_0^2} + 1}$$

a ：加速度
 g ：地心引力
 I ：yoyo 剛體轉動慣量
 m ：yoyo 質量
 r_0 ：yoyo 軸心半徑
 α ：角加速度



If g , m , r_0 固定則 a 與 I 成反比。

If g , m , I 固定則 a 與 r_0^2 成正比。

張力 T 與地心引力對軸半徑施力使得 yoyo 產生一往下運動的力矩

$$\Sigma F_y : mg - T = ma$$

$$\Sigma \tau : r_0 T = I \alpha$$

柒、參考資料：

國中理化 第一冊 第六章—— 摩擦力

國中理化 第四冊 第十六章——力矩、槓桿
牛頓三大運動定律

國中理化 第四冊 第十五章——速度、加速度

國中理化 第四冊 第十七章——動能、位能變化

物理——力學 編著者：何定梁
出版者：徐氏文教基金會

國立台灣師範大學物理系物理教學示範實驗教室網址
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/demolab/Notes/test1999/index.html>
國立臺灣大學物理系投影片第十二章 滾動 轉動與角動量
網址：<http://www.phys.ntu.edu.tw/~newton/course/c12/sld001.htm>

科學真有趣 力與運動 出版者：錦繡文化企業

物質科學(物理篇下) 編著者：管傑維 孫允武 編著
出版者：三民書局

觀念物理 I
牛頓運動定律 動量 編著者：常雲惠譯
休伊特著
出版者：天下文化科學天地

物理馬戲團 Q&A 編著者：葉偉文譯
沃克著
出版者：天下文化科學天地

物理趣談 (一) 編著者：王國銓 編者
出版者：世茂出版社

普通物理 Fundamentals of physics
作者：David halliday
出版者：Wiley

評語

本作品自製 YO-YO 球得以調整 YO-YO 球運動時用有關的物理參數，亦能以簡易實驗獲得 YO-YO 球與拉線間之摩擦係數，值得推廣。報告內容完整，以科學方式循序改變參數，觀測實驗結果，並能討論與解釋實驗結果，具完整性。