

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國小-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 小 組

作品名稱：三言兩語玄機多

關 鍵 詞：2 乘方、3 乘方、減 2、減 3、除以 2、除以 3

編 號：080409

學校名稱：

高雄縣鳳山市中正國民小學

作者姓名：

杜信璋

指導老師：

陳秀娥、杜鴻祥



三言兩語玄機多

摘要

本作品原來要討論數學遊戲：“自 1 開始交替做加法和乘法，若做加法則祇能加 2 或加 3；若做乘法則祇能乘以 2 或乘以 3，看看能不能算出任何數？”的計算方法。因為計算的規則很雜亂，所以改為研究“由任意數經過交替做減 2、減 3 或除以 2、除以 3 最後得到 1 的方法；因為 7 不能算到 1 所以 7 除外”。

最後得到的方法是：若目標數是偶數，則先化為 $2^n \times 3^m \times k$ (k 為奇數，且 k 不為 3 的倍數)，若目標數是奇數，則先化為 $2^n \times 3^m \times k - 1$ (k 為奇數，且 k 不為 3 的倍數)。計算過程中必須先去掉 3 的乘方，再去掉 2 的乘方，而得到 $k - 2$ 。然後由 $k - 2$ 再用同樣的方法依次變小，最後得到 1；因為 7 不能算到 1，所以在討論過程中必須想辦法避免出現 7。也做成了結論。

壹、研究動機：

六上的數學課本一開始的“整數”講到整數的加減乘除及數的交換位置相加，其中提到一些和數學有關的成語，“三五成群”、“朝三暮四”。我原先祇是好玩，想要利用加法或乘法玩玩這些成語的數字，看看能不能得到所有夠大的數。但是發現：若祇用加法計算時，則和第 40 屆作品“小倆口的不能”很類似；若祇用乘法計算時則祇能得到 3 乘方、4 乘方、5 乘方的數，而且計算過程中所空下的數會相當的多，為了要補足所空缺的數，所以想到改變計算方法為交替做加法計算和乘法計算。不過若用加 3、加 5、乘 3、乘 5 或加 3、加 4、乘 3、乘 4，則中間所空的數還是很多。試著試著，若改為“三言兩語”則祇少了一個 7，其他的數好像都可以算出來。

因此就嘗試著做下列的數學遊戲：“自 1 開始交替做加法和乘法，若做加法則祇能加 2 或加 3；若做乘法則祇能乘以 2 或乘以 3，看看能不能算出任何數？”

做著做著，發現這個問題很值得討論，就在老師和爸媽的鼓勵與支持之下做了這個研究。

貳、研究目的：

利用此遊戲規則，若想要由 1 計算到任何想要得到的數（稱為目標數）；經過多次的嘗試之後發現，如果目標數是一位數或二位數，則除了 7 無法得到之外，其他的數都可以慢慢算出來；但是目標數若在三為數以上，則慢慢的算就很不方便。而且由 1 計算到目標數時，當把計算過程中的某一個數乘以 2 或乘以 3 之後會馬上變得很大，很不容易直接得到目標數。若是想把 1 到目標數之間的所有數利用此遊戲規則都補滿，總是會空下不少的數，而且計算的過程又很雜亂。

做了多次嘗試之後，我想到用反方向的算法，由目標數倒推至 1。也就是說，改為把目標數利用減法與除法的交替計算方式“減 2 或減 3”、“除以 2 或除以 3”看看能不能求出 1。當然“除以 2 或除以 3”的計算必須是整除才可以。

因為加法和減法是一種相對的反方向算法，同樣的，乘法和除法也是一種相對的反方向算法。若是經由減 2、減 3 及除以 2、除以 3 可以把目標數計算至 1，相對的必定也可以有一種從 1 經由加 2、加 3 及乘以 2、乘以 3 的計算而得到目標數的原來計算方法，而且這兩種計

算過程是相對的。

所以我把原來“加 2 或加 3、乘以 2 或乘以 3”的問題，改為利用“減 2 或減 3、除以 2 或除以 3”的計算方式，研究由任意目標數倒推至 1 的計算過程。

因為減法和除法必須交替計算。為了討論的方便，以下的計算

以 $(-2 \div 3)$ 表示先減 2 之後再除以 3，而不考慮一般規則的先乘除後加減。

以 $(-2 \div 3)^n$ 表示連續做先減 2 之後再除以 3 的計算步驟。

參、研究內容：

- 一、 2^n 如何化為 1？
- 二、 3^m 如何化為 1？
- 三、 $2^n \times 3^m$ 如何化為 1？
- 四、 $2^n \times 3^m \times k$ 如何化為 1？ k 為奇數且不為 3 的倍數
- 五、 k 如何化為 1？ k 為奇數且不為 3 的倍數
- 六、如何很快的把任意目標數化為 1？

肆、研究過程：

因為在計算過程中，祇能除以 2、除以 3 或減 2、減 3，所以我最先想到把目標數分成奇數、偶數兩類來討論。但是 3 的倍數不一定是奇數，因此改為以 2 或 3 的倍數分類，卻又很複雜。後來發現也祇有 2、3 這兩個數的計算而已，而且計算過程中要常常除以 2、除以 3，所以想到用乘方來討論，因此就直接以 2 的乘方和 3 的乘方及這兩種乘方的組合形式分別研究各種整數如何化為 1。

一、 2^n 如何化為 1？

先由 2、4、8、 2^4 、 2^5 、 2^6 、計算之後發現，當目標數擴大了之後，計算的方法會很雜亂而且很不容易整理，所以一定要找到一個對任何 2^n 都可以適用的方法。

經過比較整理，先簡化成 $(\div 2 - 2)$ 和 $(-2 \div 2)$ 兩種方法。但是，

對於 $(\div 2 - 2)$ ，在 $2^5=32$ 時卻不行。 $32(\div 2 - 2 \div 2) = 7$

若是 $(-2 \div 2)$ ，在 $2^4=16$ 時也不行。 $16(-2 \div 2) = 7$

多次嘗試之後發現，若想要找到一個對任何 2^n 都可以適用的方法，則先 $\div 2$ 對計算過程比較沒有幫助，所以先用 -2 開始計算。

但是 $2^n(-2 \div 2)$ 之後一定變成奇數 $2^{n-1} - 1$ 。為了把 $2^{n-1} - 1$ 的 n 變小就必須繼續 $\div 2$ ，所以祇能 -3 變成偶數 $2^{n-1} - 4$ 。

然後再 $\div 2$ 變成 $2^{n-2} - 2$ 還是偶數，就可以連續做 $(-2 \div 2)$ 的計算；經過 $(-2 \div 2)^n$ 之後，就可以很順利的把 2^n 的 n 漸漸減小。但是若一直做到最後 $2^3 - 2$ 再 $(-2 \div 2)$ 變成 $2^2 - 2$ 時，接著若是 -2 卻變成 0，也不能再除以 2。所以做到 $2^3 - 2=6$ 之後必須改為 $(-3 \div 3)$ 得到 1。

所以目標數 2^n 若想要用一種簡單的規則化為 1 時，就必須先 $(-2 \div 2 - 3 \div 2)$ 之後，再 $(-2 \div 2)^n$ 的計算。但是為了避免最後出現 $2^2 - 2$ ，因此在出現 $2^3 - 2=6$ 之後，就要改為 $(-3 \div 3) = 1$ 。所以 n 必須 5。

若 $n = 4$: 則 $2^4 (\div 2 - 2 \div 2 - 2) = 1$ 、 $2^3 (- 2 \div 2 - 2) = 1$ 、 $2^2 - 3 = 1$ 、 $2^1 \div 2 = 1$ 。

總算找出 2 乘方的規則了。接著找 3 乘方的規則。

二、 3^m 如何化為 1 ?

同樣的，也一定要找到一個對任何 3^m 都可以適用的方法。

比較 $2^n (- 2 \div 2)$ 一定會變成奇數 $2^{n-1} - 1$ 的經驗，想到把 3^m 先 $- 3$ 再 $\div 3 = 3^{m-1} - 1$ 。

為了能繼續除以 3，由研究過的經驗得知，先 $- 2$ 得到 $3^{m-1} - 3$ ，然後就可以 $\div 3$ 而得到同類型的數 $3^{m-2} - 1$ ，接著就可以 $(- 2 \div 3)^{\wedge}$ 的計算，繼續下去， 3^m 的 m 就可以漸漸減小。

但是若一直做到最後的 $3^1 - 1$ ；接著祇能減法，可是得到的 2 不管減 2 或減 3 都不能得到 1。因此祇能做到 $3^2 - 1$ ，而後利用 $(- 2 \div 2) - 2 = 1$ 。

所以 3^m 若想要用一種簡單的規則化為 1 時，必須 3^m 先 $(- 3 \div 3)$ 之後，再 $(- 2 \div 3)^{\wedge}$ 直到出現 $3^2 - 1 = 8$ 之後，才能以 $(- 2 \div 2) - 2 = 1$ 。所以 m 必須 ≥ 3 。

若 $m = 2$: 則 $3^2 (\div 3 - 2) = 1$ 及 $3^1 - 2 = 1$

又找到 3^m 的規則了。接著合併 2^n 、 3^m 為 $2^n \times 3^m$ 繼續研究。

三、 $2^n \times 3^m$ 如何化為 1 ?

由前面 2^n 的研究知道， $2^n \times 3^m$ 若想要去掉 2，必須先利用 $(- 2 \div 2 - 3 \div 2)$ 得到 $2^{n-2} \times 3^m - 2$ ，再 $(- 2 \div 2)^{\wedge}$ 最後會得到 $3^m - 2$ ，但是這個數 $3^m - 2$ ，不管接著再減 2 或減 3 都不能除以 3，因此不能先去掉 2 的乘方，必須把 3 的乘方先去掉。

所以目標數 $2^n \times 3^m$ 若想要化為 1，必須先做 $(- 3 \div 3)^{\wedge}$ ，再 $(- 2 \div 3)^{\wedge} = 2^n - 1$ 之後，改為去掉 2 的乘方；為了避免最後出現 7，所以 n 必須 ≥ 4 。

由 $2^n - 1$ 做 $(- 3 \div 2)$ 得到 $2^{n-1} - 2$ 之後，再 $(- 2 \div 2)^{\wedge}$ 去掉所有的 2 乘方，

但是由前面的研究知道，不能做到 $2^2 - 2$ 。所以直到出現 $2^3 - 2 = 6$ 之後，再改為 $(- 3 \div 3) = 1$ 。

所以 $2^n \times 3^m$ 若想要用一種簡單的規則化為 1 時，則其中的 m 不必限制，但是 n 必須 ≥ 4 。

另外的，若 $n = 3$ ，則可以分成三種：

若 $2^3 \times 3^m$ ：先 $(- 3 \div 3)$ 再 $(- 2 \div 3)^{\wedge}$ ，但是不能做到 $2^3 - 1$ (7 不能再繼續) 所以直到出現 $2^3 \times 3 - 1$ 之後，再 $(- 3 \div 2)$ 得到 $2^2 \times 3 - 2$ ，然後 $(- 2 \div 2)^2 = 1$ 。所以 m 必須 ≥ 2 。

若 $m = 1$ ，則為了避免出現 7， $2^3 \times 3$ 必須先 $(- 2 \div 2)$ 再 $(- 3 \div 2)(- 2 \div 2)$
 $= 1$

若 $2^2 \times 3^m$ ：先 $(- 3 \div 3)(- 2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^2 - 1$ 再 $(- 2) = 1$

若 $2^1 \times 3^m$ ：先 $(- 3 \div 3)(- 2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2 - 1 = 1$

結論：

目標數 $2^n \times 3^m$ ， m 為任意正整數：

若 $n = 4$ ：則先去掉 3 的乘方得到 $2^n - 1$ ，改為去掉 2 的乘方，直到出現 $2^3 - 2 = 6$ 之後，再 $(- 3 \div 3) = 1$ 。

若 $2^3 \times 3^m$ ：○ $m \geq 2$ 則先去掉 3 的乘方，直到出現 $2^3 \times 3 - 1$ 之後，再去掉 2 的乘方就得到 1。

○ $m = 1$ 則 $2^3 \times 3$ 去掉 2 的乘方之後，就得到 1。

若 $2^2 \times 3^m$ ：則去掉 3 的乘方，再 $(- 2)$ 就得到 1。

若 $2^1 \times 3^m$ ：則去掉 3 的乘方之後，就得到 1。

又找到 $2^n \times 3^m$ 的規則了。原來是因為倍數不方便討論才改為用乘方討論，竟然乘方還有這麼大的作用。祇是以乘方所得到的數很明顯的比倍數少很多，所以再把目標數增加為 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式。因為所有的 2、3 都已經併在 2^n 或 3^m 之內，所以 k 一定是奇數，當然 k 也一定不是 3 的倍數。然後繼續研究，

四、 $2^n \times 3^m \times k$ 如何化為 1？ k 為奇數且不為 3 的倍數

若 $k=1$ ，則就是 $2^n \times 3^m$ 的算法。

若 $k \neq 1$ ，由前面的研究知道，必須先去掉 3 的乘方才可以繼續。所以分成三種：

1、 $n \neq 0$ 、 $m \neq 0$ ：

利用 $(-3 \div 3)$ 再 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 先去掉 3 的乘方，而得到 $2^n \times k - 1$ ，分成二種：

若 $m=1$ ，則 $2^n \times 3^1 \times k$ 利用 $(-3 \div 3)$ 得到 $2^n \times k - 1$

若 $m \geq 2$ ，則 $2^n \times 3^m \times k$ 利用 $(-3 \div 3)(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^n \times k - 1$

因為 $2^n \times k - 1$ 是奇數，所以先 -3 再 $\div 2$ 得到 $2^{n-1} \times k - 2$ ，然後做 $(-2 \div 2)^{\wedge}$ 直到最後一定出現 $k - 2$ ，而且 $k - 2 \neq 7$ 。分成二種：

○ $n=1$ ：則 $2^1 \times k - 1$ 利用 $(-3 \div 2)$ 得到 $k - 2$

○ $n \geq 2$ ：則 $2^n \times k - 1$ 利用 $(-3 \div 2)(-2 \div 2)^{\wedge}$ 得到 $k - 2$

2、 $m=0$ ：則目標數 $2^n \times k$

○ $n=1$ ：則 $2^1 \times k$ 先 $(-2 \div 2) = k - 1$ 必為偶數，再化為 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式，然後依照“先去掉 3 的乘方，再去掉 2 的乘方”的計算步驟繼續做下去，最後一定會出現奇數 $k - 2$ 的形式。

○ $n \geq 2$ ：先 $(-2 \div 2)$ 得到 $2^{n-1} \times k - 1$ ，再 $(-3 \div 2)$ 得到 $2^{n-2} \times k - 2$ ，然後就 $(-2 \div 2)^{\wedge}$ ，直到最後一定出現奇數 $k - 2$ 。

3、 $n=0$ ：則目標數 $3^m \times k$

○ $m=1$ ： $3^1 \times k$ 先 $(-3 \div 3) = k - 1$ 必為偶數，接著與上述方法相同。

○ $m \geq 2$ ：先 $(-3 \div 3)$ 得到 $3^{m-1} \times k - 1$ ，再 $(-2 \div 3)$ 得到 $3^{m-2} \times k - 2$ ，然後就 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 直到最後一定出現奇數 $k - 2$ 。

結論：

目標數 $2^n \times 3^m \times k$ ， k 為奇數且不為 3 的倍數：

若 $k=1$ ：則就是 $2^n \times 3^m$ 的算法。

若 $k \neq 1$ ，且 $n \neq 0$ 、 $m \neq 0$ 時，則先去掉 3 的乘方，得到 $2^n \times k - 1$ ，再去掉 2 的乘方，最後一定化為奇數 $k - 2$ ，而且 $k - 2 \neq 7$ 。

若 $2^1 \times k$ ：則先 $(-2 \div 2) = k - 1$ 必為偶數，再化為 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式，以下的方法和 $n \neq 0$ 、 $m \neq 0$ 相同。

若 $3^1 \times k$ ：則先 $(-3 \div 3) = k - 1$ 必為偶數，再來的方法和上述的 $2^1 \times k$ 相同。

因為 k 為奇數，所以 $k - 2$ 還是奇數。可是奇數 $k - 2$ 並不是 1，怎麼辦？

由前面的經驗知道，研究過程都是利用 2^n 、 3^m 、 $2^n \times 3^m$ 、 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式做計算的。又因為 $k - 2$ 是奇數，所以先想到把奇數 $k - 2$ 化為 $2^n \times 3^m \times k_1 + 1$ 的形式，然後利用研究過的方法，先去掉 3 的乘方。

但是發現 $2^n \times 3^m \times k_1 + 1$ 這個數，不管是 $(-2 \div 3)$ 或 $(-3 \div 3)$ 都不能除以 3。雖然 $2^n \times 3^m \times k_1 + 1$

這個數可以利用 $(-3 \div 2)(-3 \div 2)$ 再 $(-2 \div 2)^{\wedge}$ 先去掉 2 的乘方，但是一定會出現 $3^m \times k_1 - 2$ 的形式，這個數卻不能去掉 3 的乘方。

所以最後想到把奇數 $k - 2$ 變成 $2^n \times 3^m \times k_1 - 1$ 的形式，當然此時的 n 、 m 和原來目標數 $= 2^n \times 3^m \times k$ 的 n 、 m 不一定相同。

然後再把 $2^n \times 3^m \times k_1 - 1$ 利用 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^n \times k_1 - 1$ ；再利用 $(-3 \div 2)(-2 \div 2)^{\wedge}$ ，最後一定會得到 $k_1 - 2$ 。

依照此種步驟一直做下去。由最開始的 $2^n \times 3^m \times k \rightarrow k - 2 \rightarrow k_1 - 2 \rightarrow k_2 - 2 \rightarrow \dots$ ，這些接著出現的奇數 k 、 k_1 、 k_2 一定愈來愈小，而且在把奇數 $k - 2$ 化成另一種形式的奇數 $2^n \times 3^m \times k_1 - 1$ 時，緊接著出現的 k_1 一定也是奇數且不為 3 的倍數。所以奇數 $k - 2$ 、奇數 $k_1 - 2$ 、奇數 $k_2 - 2$ 、 $\dots$ 都不可能是 7（因為 $k - 2 = 7$ ，則 $k = 9 = 3^2$ 就應該併入 3 的乘方之內）。

如此繼續做下去， $k > k_1 > k_2 > \dots$ ，最後總會有一個最小的奇數出現，使得這個奇數可以化為 $2^n \times 3^m \times 1 - 1$ 的形式。假設是 k_t ，使得 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ 。

結論：

任意奇數 $k - 2$ 可再變成 $2^n \times 3^m \times k_1 - 1$ 的形式（ k 為奇數且不為 3 的倍數）。

然後，先去掉 3 的乘方，再去掉 2 的乘方，最後一定又得到 $k_1 - 2$ 。一直做下去，這些接著出現的奇數 k 、 k_1 、 k_2 一定愈來愈小，而且一定也都是奇數且不為 3 的倍數。最後總會有一個最小的奇數 k_t 出現，使得這個奇數 k_t 可以化為 $2^n \times 3^m \times 1 - 1$ 的形式。當然此時的 n 、 m 和原來目標數 $2^n \times 3^m \times k$ 的 n 、 m 不一定相同。

終於可以把任意大的數依照 2^n 、 3^m 及 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式（ k 為奇數且不為 3 的倍數）分類，然後化成最簡單的形式 $2^n \times 3^m \times 1 - 1$ ，雖然還不是 1，但是已簡單多了。再繼續

五、 k 如何化為 1？ k 為奇數且不為 3 的倍數

因為任意目標數 k （ k 為奇數且不為 3 的倍數），一定可以計算到最後出現一個最小的奇數 k_t ，使得 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ 。

所以就由最後所得到的奇數 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ ，再繼續做 $(-2 \div 3)$ 、 $(-3 \div 2)$ 、 $(-2 \div 2)$ 的計算步驟。因為 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ 一定要先去掉 3 的乘方才可以繼續做下去；而且，由 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^n - 1$ 時，必須避免出現 7，所以 n 必須 $\neq 4$ 。 m 可以不必限制。所以分成四種：

1、 $n \neq 4$

$k_t = 2^n \times 3^m - 1$ 先 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^n - 1$ ，然後再 $(-3 \div 2)(-2 \div 2)^{\wedge}$ ，直到出現 $2^3 - 2$ ，然後再 $(-3 \div 3) = 1$ 。

2、 $n = 3$ ，則目標數 $2^3 \times 3^m - 1$ ，分成二種：

○ $m = 1$ ， $2^3 \times 3^1 - 1$ 先 $(-3 \div 2)$ 得到 $2^2 \times 3^1 - 2$ 再 $(-2 \div 2)^2 = 1$

○ $m \geq 2$ ， $2^3 \times 3^m - 1$ 利用 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^3 \times 3^1 - 1$ 再 $(-3 \div 2)(-2 \div 2)^2 = 1$

3、 $n = 2$ ，則 $2^2 \times 3^m - 1$ 利用 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^2 - 1$ 再 $(-2) = 1$

4、 $n = 1$ ，則 $2^1 \times 3^m - 1$ 利用 $(-2 \div 3)^{\wedge}$ 得到 $2^1 - 1 = 1$

這裡 $n \neq 0$ 。若 $n = 0$ 則 $3^m - 1$ 為偶數，就不是奇數 k 的計算方式。

結論：

奇數 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ ，為了避免出現 7， m 可以不必限制。 n 分成四種，方法如下：

1、 $n \neq 4$ ：先去掉 3 乘方得到 $2^n - 1$ ，再去掉 2 乘方，直到出現 $2^3 - 2$ ，再 $(-3 \div 3) = 1$

2、 $n = 3$ ，則 $2^3 \times 3^m - 1$

◊ $m=1$: $2^3 \times 3^1 - 1$ 去掉 2 的乘方，就得到 1。

◊ $m=2$: $2^3 \times 3^m - 1$ 去掉 3 的乘方直到出現 $2^3 \times 3^1 - 1$ ，再去掉 2 的乘方，就得到 1。

3、 $n=2$: 則 $2^2 \times 3^m - 1$ 去掉 3 的乘方，得到 $2^2 - 1$ 再 (-2) 就得到 1。

4、 $n=1$: 則 $2^1 \times 3^m - 1$ 去掉 3 的乘方，就得到 1。

六、如何很快的把任意目標數化為 1？

因為任意正整數祇可以分為奇數、偶數兩類。由標準分解式的計算之中知道，若以 2、3 分類，則偶數可以化為 2^n 、 $2^n \times k$ 、 $2^n \times 3^m$ 、 $2^n \times 3^m \times k$ ，奇數可以化為 3^m 、 $3^m \times k$ 、 $2^n \times 3^m \times k - 1$ ，其中 k 為奇數且不為 3 的倍數。又 $2^n \times k$ 及 $3^m \times k$ 都可以併入 $2^n \times 3^m \times k$ 之中一起討論。所以任意正整數可以化為 2^n 、 3^m 、 $2^n \times 3^m$ 、 $2^n \times 3^m \times k$ 或 $2^n \times 3^m \times k - 1$ 的五種形式，其中 k 為奇數且不為 3 的倍數。

因此若想要很快的把任意目標數化為 1，則祇要先化為 2^n 、 3^m 、 $2^n \times 3^m$ 、 $2^n \times 3^m \times k$ 或 $2^n \times 3^m \times k - 1$ 的五種形式，其中 k 為奇數且不為 3 的倍數。然後利用所研究過的方法，先去掉 3 的乘方，再去掉 2 的乘方就可以化為 1 了。不過為了避免出現 7，還要注意計算過程中 n 、 m 的限制。當然目標數很大時，計算過程會比較麻煩，但是由研究過的方法知道一定可以化為 1。

所以，**任意正整數（除了 7 以外）一定可以很快地化為 1。**

伍：結論：

一、目標數 2^n ，方法如下：

若 $n=5$: 則先去掉 2 的乘方，直到出現 $2^3 - 2 = 6$ 之後，再 $(-3 \div 3) = 1$ 。

若 $n=4$: 則 $2^4 (\div 2 - 2 \div 2 - 2) = 1$ 、 $2^3 (-2 \div 2 - 2) = 1$ 、 $2^2 - 3 = 1$ 、 $2^1 \div 2 = 1$ 。

二、目標數 3^m ，方法如下：

若 $m=3$: 則先去掉 3 的乘方，直到出現 $3^2 - 1 = 8$ 之後，再 $(-2 \div 2 - 2) = 1$ 。

若 $m=2$: 則 $3^2 (\div 3 - 2) = 1$ 及 $3^1 - 2 = 1$

三、目標數 $2^n \times 3^m$ ， m 為任意正整數，方法如下：

若 $n=4$: 則先去掉 3 的乘方得到 $2^n - 1$ ，改為去掉 2 的乘方，直到出現 $2^3 - 2 = 6$ 之後，再 $(-3 \div 3) = 1$ 。

若 $2^3 \times 3^m$: ◊ 若 $m=2$ 則先去掉 3 的乘方直到出現 $2^3 \times 3 - 1$ ，再去掉 2 的乘方，就得到 1。

◊ 若 $m=1$ 則 $2^3 \times 3$ 直接去掉 2 的乘方，就得到 1。

若 $2^2 \times 3^m$: 則先去掉 3 的乘方之後，再 (-2) 就得到 1。

若 $2^1 \times 3^m$: 則先去掉 3 的乘方之後，就得到 1。

四、目標數 $2^n \times 3^m \times k$ ， k 為奇數且不為 3 的倍數

若 $k=1$ ，就是 $2^n \times 3^m$ 的算法。

若 $k \neq 1$ ，且 $n \neq 0$ 、 $m \neq 0$ 時，則先去掉 3 的乘方，得到 $2^n \times k - 1$ ，再去掉 2 的乘方，最後一定化為奇數 $k - 2$ ，而且 $k - 2 \neq 7$ 。

若 $2^1 \times k$ ，則先 $(-2 \div 2) = k - 1$ 必為偶數，再化為 $2^n \times 3^m \times k$ 的形式，以下的方法和 $n \neq 0$ 、 $m \neq 0$ 相同。

若 $3^1 \times k$ ，則先 $(-3 \div 3) = k - 1$ 必為偶數，再來的方法和上述的 $2^1 \times k$ 相同。

五、任意奇數 $k - 2$ 可再變成 $2^n \times 3^m \times k_1 - 1$ 的形式（ k 為奇數且不為 3 的倍數）。然後，先去掉

3 的乘方，再去掉 2 的乘方，最後一定得到 $k_1 - 2$ 。一直做下去，這些接著出現的奇數 k, k_1, k_2 一定愈來愈小，而且一定也都是奇數且不為 3 的倍數。最後總會有一個最小的奇數 k_t 出現，使得這個奇數 k_t 可以化為 $2^n \times 3^m \times 1 - 1$ 的形式。當然此時的 n, m 和原來目標數 $2^n \times 3^m \times k$ 的 n, m 不一定相同。

六、奇數 $k_t = 2^n \times 3^m - 1$ ，為了避免出現 7， m 可以不必限制。但是 n 必須分為四種。方法如下：

1、 $n = 4$

$k_t = 2^n \times 3^m - 1$ 先去掉 3 的乘方，得到 $2^n - 1$ ，再去掉 2 的乘方，直到出現 $2^3 - 2$ ，再 $(-3 \div 3) = 1$ 。

2、 $n = 3$ ，則 $2^3 \times 3^m - 1$

○ $m = 1$ ：則 $2^3 \times 3^1 - 1$ 去掉 2 的乘方，就得到 1。

○ $m = 2$ ：則 $2^3 \times 3^2 - 1$ 先去掉 3 的乘方，得到 $2^3 \times 3^1 - 1$ ，再去掉 2 的乘方，就得到 1。

3、 $n = 2$ ：則 $2^2 \times 3^m - 1$ 去掉 3 的乘方，再 (-2) 就得到 1。

4、 $n = 1$ ：則 $2^1 \times 3^m - 1$ 去掉 3 的乘方，就得到 1。

陸、討論：

想不到原先的數字成語及整數的加法乘法遊戲，竟然可以玩出這麼多的學問。剛開始學了因數、倍數之後，總覺得整數就祇有奇數、偶數或是倍數和因數而已，竟然還可以利用乘方把整數分類。為了做這個研究，看了國中數學課本第一冊之後，發現乘方還有這麼大的作用。而且我還知道了可以把標準分解式改用 2^n 、 3^m 、 $2^n \times 3^m$ 、 $2^n \times 3^m \times k$ 或 $2^n \times 3^m \times k - 1$ 的五種形式來分類所有的正整數。原來研究方法也可以自己改變的，從這次的研究使我對乘方有了更深入的認識，也更瞭解了標準分解式，收穫真不少。

另外，由研究過程知道，除了 7 以外的任意正整數都可以化為 1，但是能不能有更快的方法？化為 1 的計算方法一定有很多種，不應該祇有一種而已，能不能求出有幾種方法？有沒有規則？這都是需要再努力的地方。

這些都期盼評審老師能給予指導。謝謝！！

柒、參考資料：

- | | |
|-----------------------|--------------|
| 一、國小數學課本第十一冊 | 康軒文教事業股份有限公司 |
| 二、國中數學課本第一冊 | 國立編譯館 |
| 三、第 40 屆科展優勝作品專輯（國小組） | 國立臺灣科學教育館 |