

# 中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

## 國小-數學科

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：圓圓轉轉轉

關鍵詞：面積估算、角度估算、圓心角

編 號：080408

---

學校名稱：

臺北市中正區國語實驗國民小學

作者姓名：

李歡蓉

指導老師：

江永明、黃慶豐



## 壹、摘要

我利用動圓和定圓來探討轉動所行經面積估算與指標角度的變化。採用圓形板，以相同半徑的動圓去轉動一個或多個定圓，從動圓行經的軌跡估算面積；接著將定圓排成直線形、三角形數、正方形數，利用動圓轉動上述圖形，估算動圓的指標角在轉動後的角度改變。結果發現，在面積的估算上，圖形雖複雜，但經過操作整理後，可以得到精確的估算值，並發現規律性。在估算指標角，以同樣大小的動圓去轉直線狀、三角形數、正方形數的定圓，指標角度有一定的變化，當定圓數量增加時，有規律性。動圓和定圓的半徑成比率時（如 1:2、1:3、 $\cdots$ ），指標角也具有規律性。我使用的道具雖簡單，卻可以導出有趣又有規律的推論。本研究仍有許多工作，可留待以後再來進行。

## 貳、研究動機

有一天，我正在預習數學課本的內容時，看到有關圓形的單元（面積計算、圓周長度計算和圓心角），使我想到要探討與圓形有關的數學問題，正巧學校資優班興趣中心的數學課要我們用兩個一元的硬幣，彼此連在一起，先將其中一個硬幣固定，再藉由另一個硬幣沿著這個硬幣的圓周轉動，我觀察到硬幣上人頭圖案會隨著轉動的位置而有改變方向的情形（下圖），發覺很有趣，於是我就選擇了這一個題目來做探討。





## 參、研究目的

我想探討以下和圓有關的問題：

1. 如果將同長半徑的圓，利用直尺，排成一列，將它們固定後，用另一個相同大小的圓來轉不同數量 圓所排成的直線形圓周，可不可以算出這個轉圓所經過的面積？
2. 如果轉圓上有圖案（例如錢幣上的人頭圖案），轉至一定位置時，圖案的方向會有什麼樣的變化？結果可能有規律嗎？為什麼？
3. 若是將上面的成直線形排列的圓，改排成三角形數（三個圓緊密排在一起）或正方形數（四個圓緊密排在一起），再做同樣的轉動，結果又會如何？有沒有規律？
4. 不同大小的圓排在一起，各圓的圓心連成一直線，以小圓轉大圓後的結果如何？

## 肆、研究設備及器材

1 圓硬幣、5 圓硬幣、10 圓硬幣、50 圓硬幣，以上各 10 枚

半徑 1、2、4、8 公分壓克力圓形板，各 30 個，半徑 3、5、6、7、8、9、10、11、

12 公分壓克力圓形板，各 4 個

圓規一個

量角器一個

60 公分長尺與 15 公分短尺，各一把

大型三角板 2 塊

雙面膠（用於固定實驗器材）

數位相機（用於紀錄實驗過程與結果）

電腦與軟體（用於計算與繪圖）

麥克筆

箭頭標籤紙（用於標示位置）

## 伍、研究過程

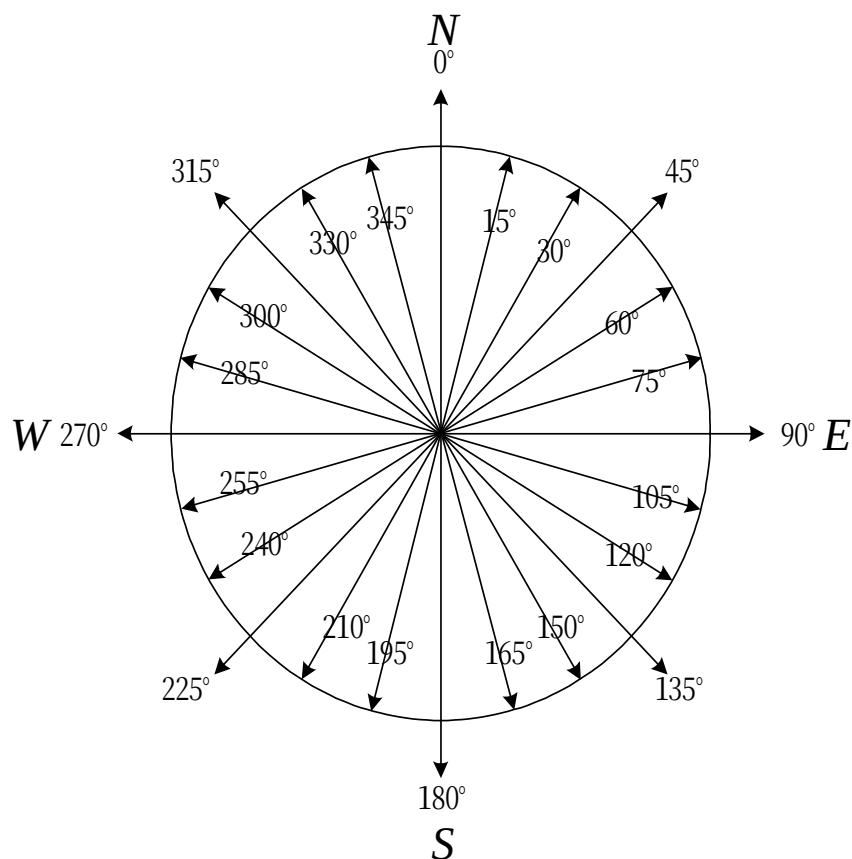
### 一、名詞界定

**定圓：**是指固定不轉動的圓。

**動圓：**是指緊貼於定圓轉動的圓，上面有用標籤紙標示的正北位置，實驗時會沿著定圓的圓周轉動。

**定量指標：**以正北為 0 度指標。為了要進行定量的記錄，利用短尺，在壓克力板

上找到每一個圓形板的圓心，用麥克筆標出，並畫出一條條通過圓心的直線，模仿羅盤儀，將正北訂為  $0^\circ$ ，正東為  $90^\circ$ ，正南為  $180^\circ$ ，正西為  $270^\circ$ （如右圖），用麥克筆標示，正北的方向位置，再用標籤紙標示於壓克力板上，作為觀察角度改變的指標角度。



## 二、硬幣實驗

首先利用硬幣做滾動的試驗，發現如果採用相同面額的硬幣滾動，從我在校內科展的經驗中，似乎可以得到一些結果。但是，因為錢幣小，上面又有花紋，不容易做記號定量觀察；又加上不同面額錢幣的半徑沒有相似性（也就是沒有比率關係），不容易得到規律性。因此，決定製作各種半徑的壓克力圓板，來進行比較有系統的試驗。

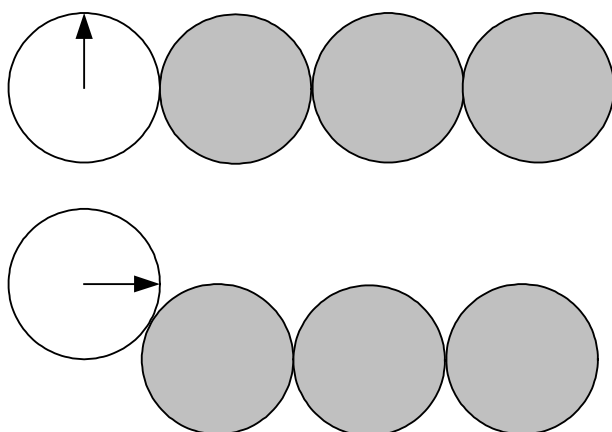
### 三、面積估算

當動圓沿著定圓轉動時，若將動圓的行經區域描繪下來，形成一片軌跡。我分別利用半徑相同的一個動圓和一個定圓，一個動圓和二個定圓，以及一個動圓和三個定圓（均排成直線），來估算這些行經區域的面積。使用的圓，半徑分別為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 公分。

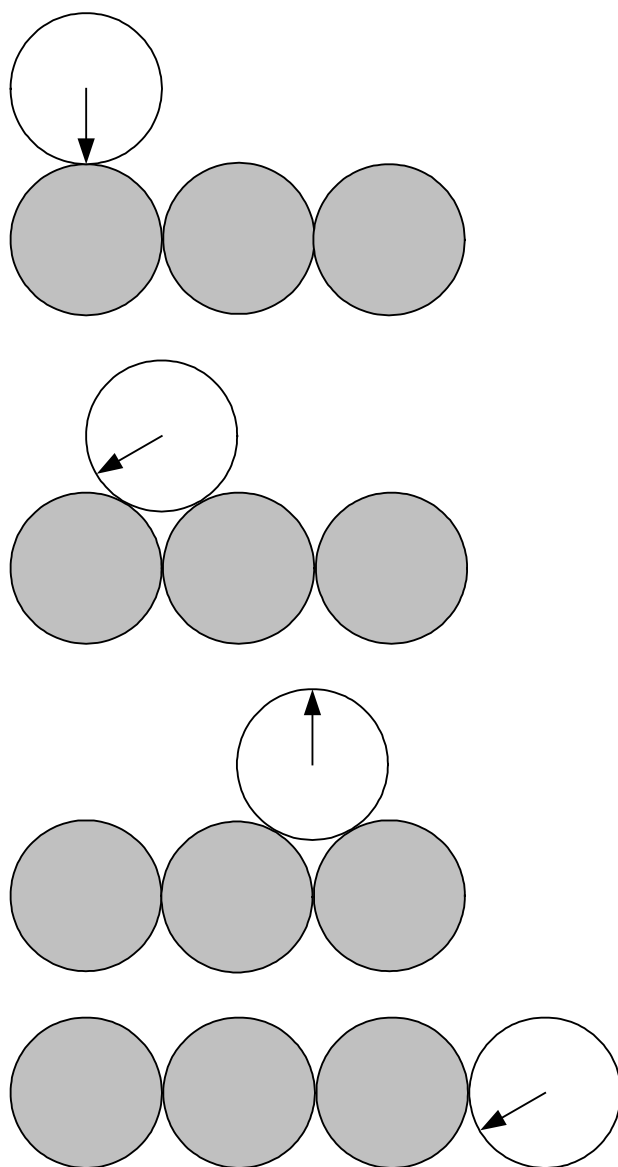
### 四、角度推估 — 動圓與定圓的半徑長度相等

#### （一）、直線形實驗

為了要瞭解不同數量的定圓排成一線後，對於動圓滾動後方向的改變情形，我分別用 1 至 10 個定圓，採用圓心連成一條直線的方式，排成一列，再用動圓置於最左方（圓心也在線上），以順時針方向，滾動至最右方，當動圓的圓心壓在線上時，即停止滾動。利用量角器，量測正北角之角度值。下面 6 個分解圖，以三個定圓連成一直線的情形，說明一系列的操作過程：







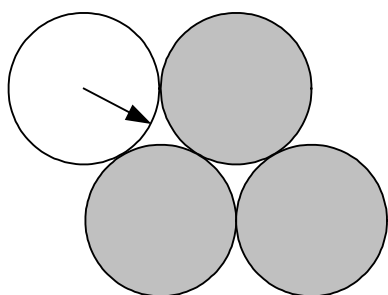
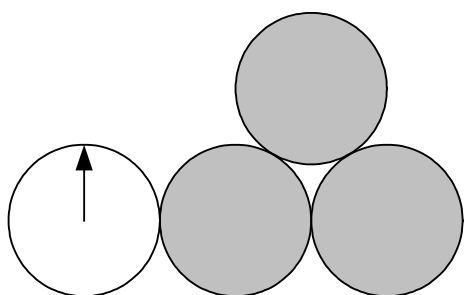
我先用半徑為 2 公分的圓，操作一次。轉動時，不定時會停下來，除了用量角器測量圓心角外，也測量指標角度值。由於測量夾角時，同樣的實驗條件下，可能會有實驗誤差，每次得到的答案均不一致，雖然得到的數值差不多，但是為了實驗的精確度，每一種實驗，都做 5 次，最後取平均值，做為代表值。

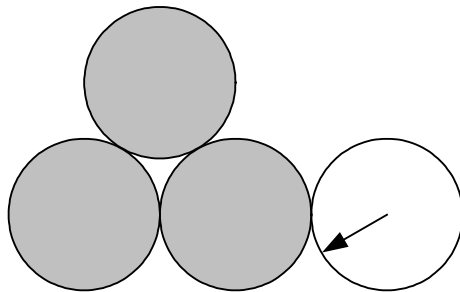
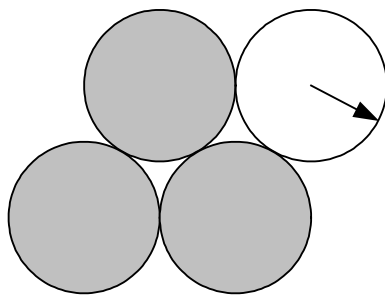
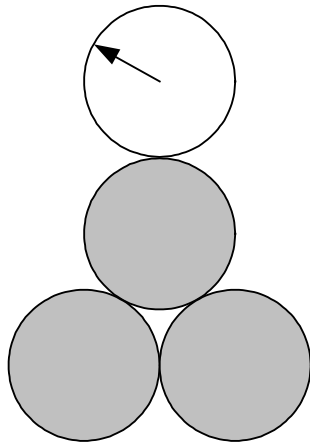
然後，又用 1 公分、4 公分、8 公分半徑的圓，重複剛才的實驗，每一種實驗，也都做 5 次。

操作的過程紀錄，請參見**拾、附錄**，為了節省紙張，附錄中僅放了一些代表性的圖片，說明操作與得到的結果。

## (二)、三角形數實驗

用三個圓板排成一個三角形狀，三圓的圓心若能彼此連線，可以成為一個正三角形。我將它們固定在桌子上，作為定圓，再將動圓置於左下角，仍以順時針方向，轉動至最右方的角落，操作方式如以下各圖的示範：



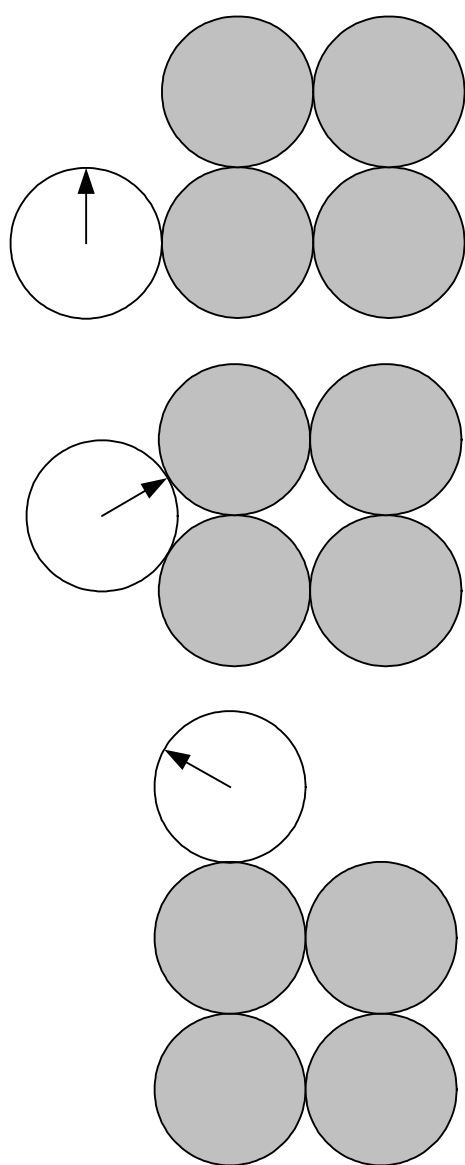


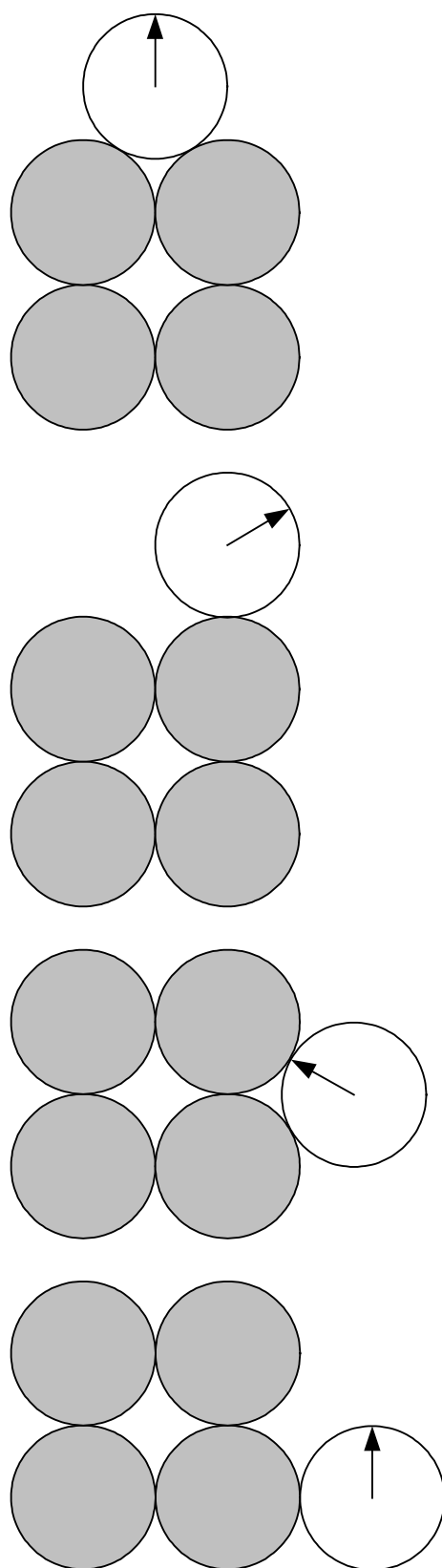
為了尋找規律性，隨後以三角形數的方式，增加定圓的數量，製作了更大的正三角形，我的實驗中，共有 6 種大小的三角形數（每個三角形數的圓的數量，分別為 3、6、10、15、21、28）。再以同樣的方法，滾動動圓，記錄動圓停止後的指標角度。

我做了四種不同半徑的圓，每個實驗也都進行 5 次。

### (三)、正方形數實驗

將四個圓形排成一個緊密的四角形，若相鄰兩圓的圓心連成一線，且相交的兩圓心連線互相垂直，則可以成為一個正方形數。同樣的，將動圓置於左下角，仍以順時針方向，轉動至右下角，操作方式如下圖的示範：





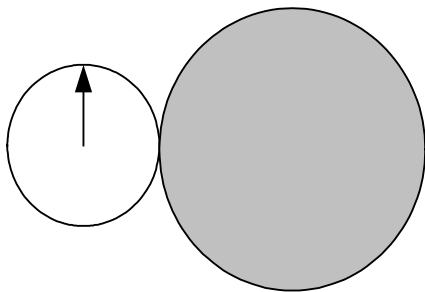
動圓停止後，測量並記錄指標的角度。

同樣的，我做了四種不同半徑（1、2、4、8 公分）的圓，每個實驗也都進行 5 次。

## 五、角度推估 — 動圓與定圓的半徑長度不相等

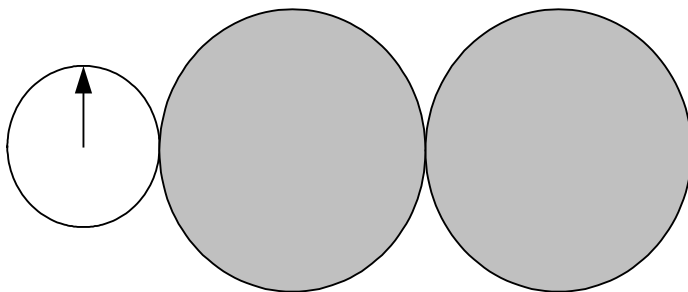
### (一)、一個定圓

這個實驗是取半徑為 1 或 2 公分的圓（稱為小圓）和半徑為 2、3、4、5、6、7、8、9、10、12 公分的圓（稱為大圓），以小圓為動圓，大圓為定圓（下圖），以相同的方法，讓兩圓的圓心同在一直線上，轉動小圓至大圓的右方，記錄指標角度值。每一個操作，均做五次。



### (二)、兩個定圓

這個實驗是取半徑為 2 公分的圓（稱為小圓）和半徑為 3、4、5、6、8、9、10、12 公分的圓（稱為大圓），以小圓為動圓，大圓為定圓（下圖），再以類似的方法，轉動小圓至大圓的右方，記錄指標角度值。也做五次。

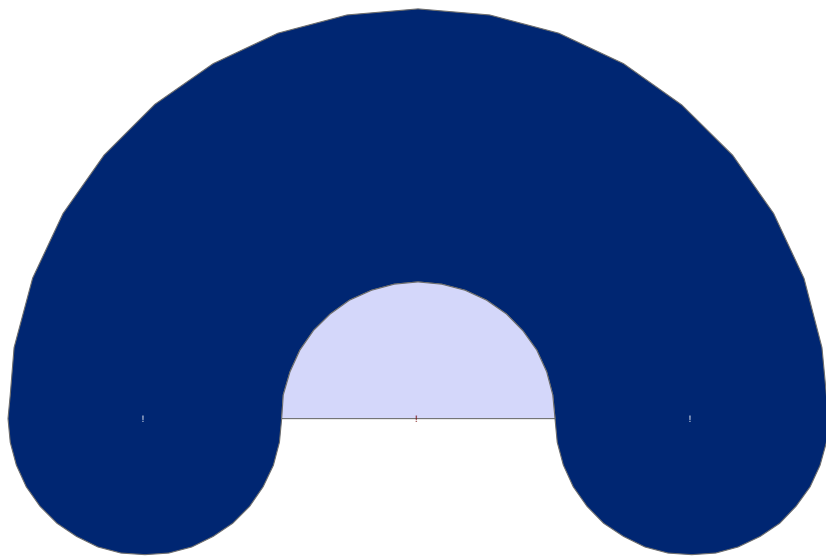


## 陸、研究結果

### 一、面積估算

#### (一)、一個定圓

下圖為一個動圓轉一個定圓的軌跡紀錄圖：



藍色區域是我要計算的面積。計算時，可以先算半個大圓的面積，加上左右各有半個小圓的面積，再扣除中間的半個小圓面積，也就是：

假設定圓的半徑為  $r$ ，則大圓的直徑為  $2r + r = 3r$ 。

$$\text{半個大圓的面積} = \frac{\pi(3r)^2}{2}$$

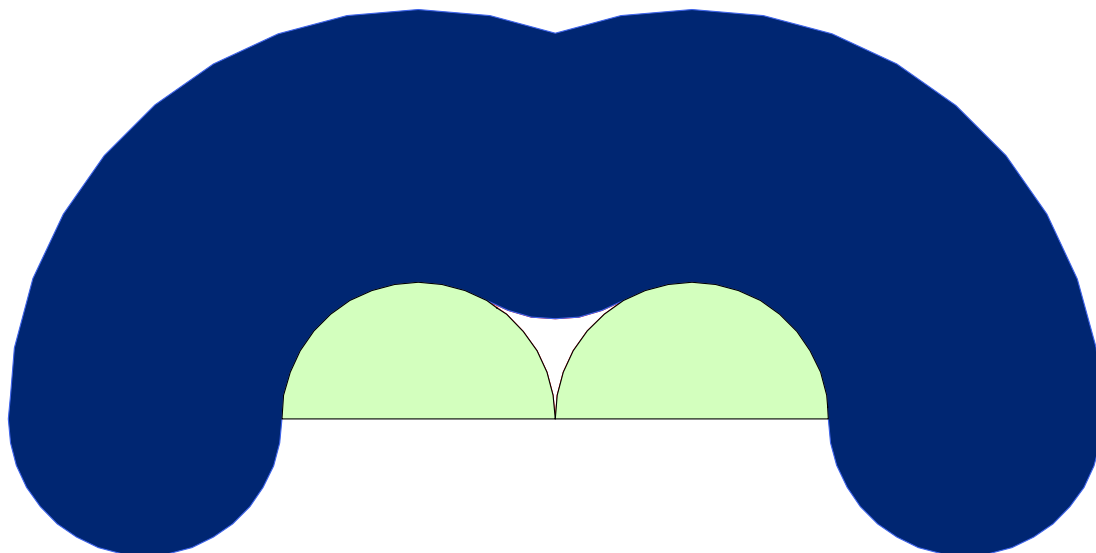
$$\text{左邊半個小圓的面積} = \frac{\pi r^2}{2}, \text{ 右邊半個小圓的面積} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\text{中間的半個小圓面積} = \frac{\pi r^2}{2}$$

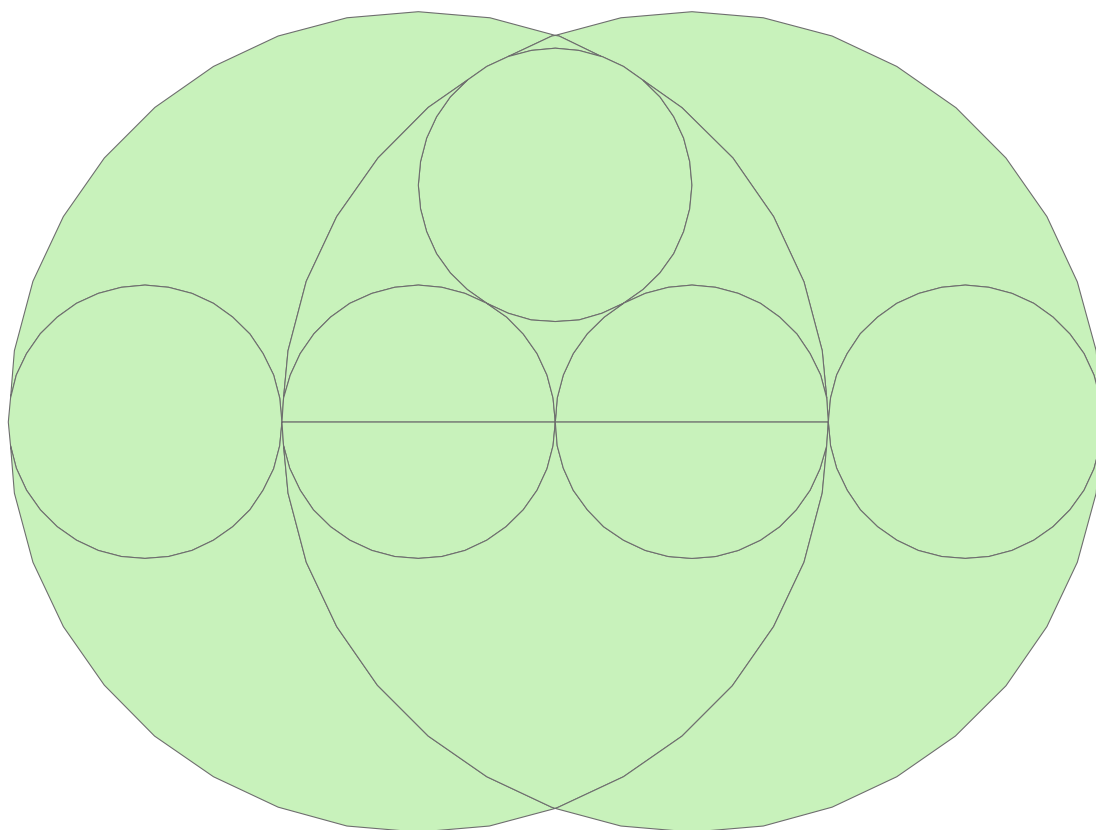
$$\text{所以，藍色區域的面積} = \frac{\pi(3r)^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = 5\pi r^2$$

## (二)、兩個定圓

接下來，在嘗試兩個定圓的情形，下圖為軌跡的紀錄：

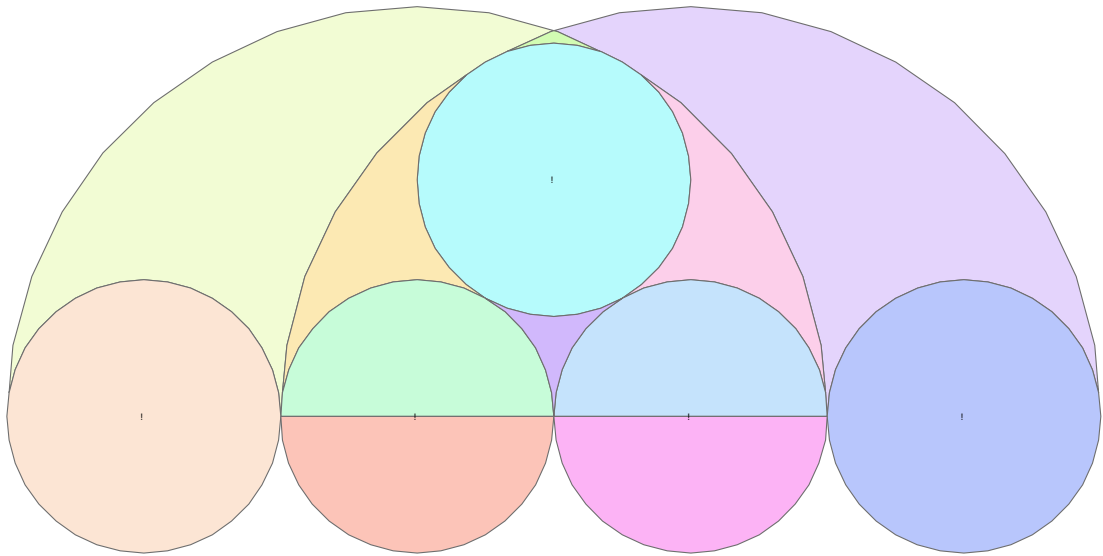


這個圖比較複雜，所以採用分區塊方式，分別處理。下圖是我用圓規逐一畫圖所分出來的情形：

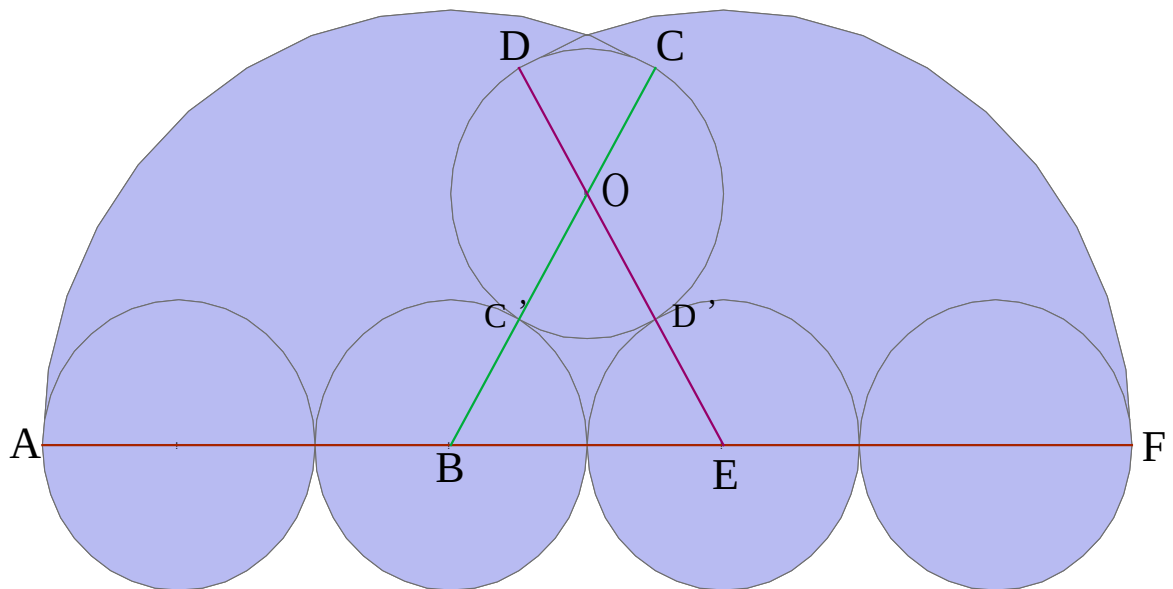




刪除不必要的圖形後，精簡如下：

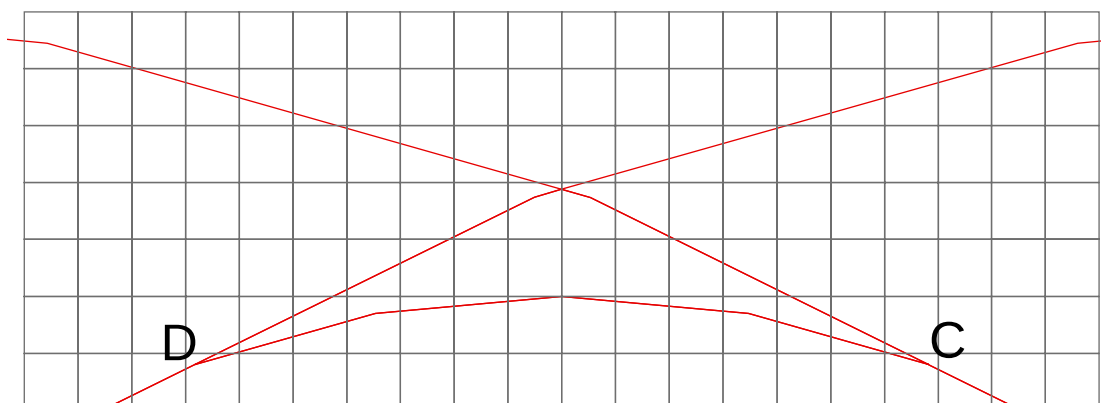


加入三條直線分別連接兩兩的圓心後，可以簡化如下圖：



$\overline{AF}$  上方的面積比較不容易計算，先加以處理。我們可以將這個動圓的軌跡，先分成兩個簡化的扇形面積（ $\nabla ABC$  與  $\nabla DEF$ ），因為  $\triangle OBE$  是一個正三角形，邊長

為  $2r$ ，內角均為  $60^\circ$ 。因此，圓心角  $\angle ABC$  與  $\angle DEF$  都是  $120^\circ$ ，所以，扇形面積各為  $\frac{\pi(3r)^2}{3}$ 。不過，這兩個扇形有一小部分重疊，即 O、D、C 三點所圍的區域，但這三點所對應的區域(O、D'、C')卻沒有被計算到，因此兩者抵銷。最後剩下中間偏上方的不規則區域（上圖中，DC 弧上方的區域，此區被重複計算，必須減去一份），將此圖放大：



採用網格的方法估計，如上圖，每一個網格面積為 0.01 平方公分，本例子採用動圓半徑為 2 公分，區域內共有 4 個完整網格和 26 個不完整網格，所以面積為  $0.01 \times (2 + 26/2) = 0.15$  平方公分。附錄二中，詳列半徑為 1 至 10 公分的放大圖和估算面積。由於這個區域的面積小，僅約佔總面積的 0.001，以後的計算與公式中，忽略不計。

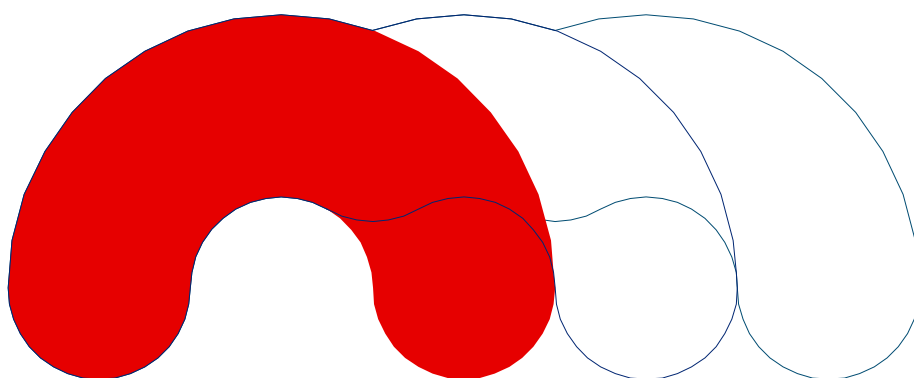
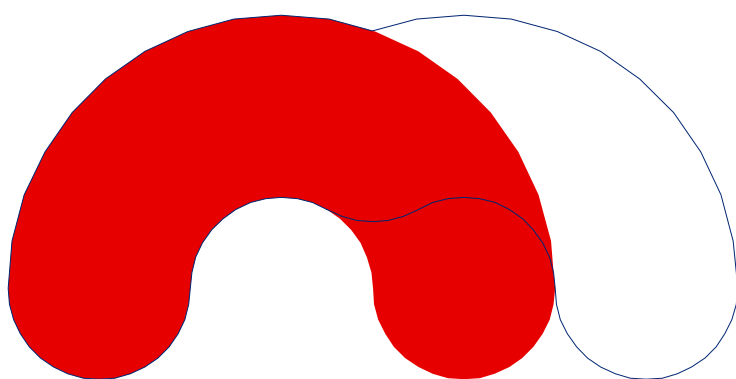
將這些資料全部合併後，扣去一些不要的區域（亦即以 B 和 E 為圓心的小圓，其上的扇形面積必須扣除，各為  $\frac{\pi r^2}{3}$ ）。由於 DC 弧上方區域的面積相對較小，如果不計算其面積，則估算動圓行經路線的區域面積約為

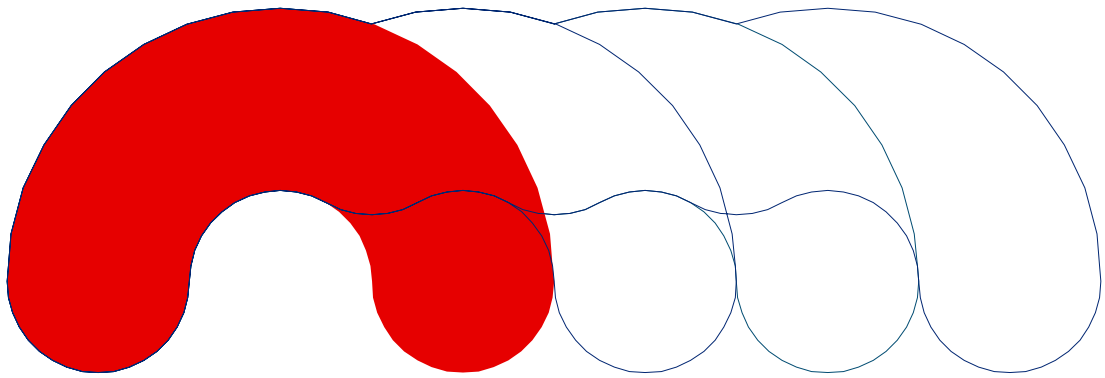
$$\frac{\pi(3r)^2}{3} * 2 + \frac{\pi r^2}{2} * 2 - \frac{\pi r^2}{3} * 2 = \frac{19\pi r^2}{3}。$$

### (三)、三個定圓及三個定圓以上

當定圓數量增加時，也會遇到類似的計算，雖然計算上會更麻煩，但是每增加一個定圓，對軌跡的面積而言，均只是增加一個固定的面積，而這個面積其實就是前面兩個定圓軌跡的面積減去一個定圓軌跡的面積（如下頁的三個圖，這個固定

的面積 =  $\frac{19\pi r^2}{3} - 5\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^2$  )。





因此，當定圓有三個時，軌跡的面積就是兩個定圓軌跡的面積，加上這個固定面積，同理，定圓數量增加時，也可以同理類推：

設定圓數量為  $n$

$$\text{則動圓所經過的面積為 } 5\pi r^2 + (n-1) * \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{4n+11}{3}\pi r^2$$

所以，在這個課題上，其實只要掌握前面所計算的結果，就可以推算出  $n$  個定圓軌跡的面積。從這裡也可以看出，看起來是不容易估算的問題，經過簡化後，可以得到快速的簡易推論公式。

## 二、角度變化 — 動圓與定圓的半徑長度相等

### （一）、直線形實驗

不管半徑的大小，以同樣大小的動圓去轉呈直線狀的定圓，其指標角會有一定的變化（如表 1），每增加一個定圓，指標角會增加  $120^\circ$ 。而且，每 3 個定圓後，又循環一次。

表 1

| 定圓<br>數量 | 預測<br>角度值* | 指標角度值   |         |         |            |
|----------|------------|---------|---------|---------|------------|
|          |            | 半徑 1 公分 | 半徑 2 公分 | 半徑 4 公分 | 半徑 8 公分    |
| 1        | 0          | 4       | 2       | 1       | <b>4</b>   |
| 2        | 120        | 119     | 119     | 121     | <b>120</b> |
| 3        | 240        | 242     | 240     | 239     | <b>241</b> |
| 4        | 0          | 5       | 1       | 3       | <b>1</b>   |
| 5        | 120        | 120     | 119     | 121     | <b>119</b> |
| 6        | 240        | 241     | 239     | 240     | <b>239</b> |
| 7        | 0          | 1       | 3       | 5       | <b>4</b>   |
| 8        | 120        | 122     | 119     | 119     | <b>120</b> |
| 9        | 240        | 241     | 239     | 241     | <b>242</b> |
| 10       | 0          | 1       | 5       | 4       | <b>5</b>   |

\* 預測角度值是估計值，請參見討論

## (二)、三角形數實驗

相同尺寸的定圓組成三角形數後，以動圓去滾定圓，指標角的改變也有規律性（表 2），三角形數每增大一級，指標角大約會減少 120°。而且，這些數值也是每 3 種定圓後，開始循環。

表 2

| 定圓<br>數量 | 預測<br>角度值* | 指標角度值   |         |         |            |
|----------|------------|---------|---------|---------|------------|
|          |            | 半徑 1 公分 | 半徑 2 公分 | 半徑 4 公分 | 半徑 8 公分    |
| 3        | 240        | 239     | 238     | 245     | <b>241</b> |
| 6        | 120        | 116     | 120     | 119     | <b>118</b> |
| 10       | 0          | 3       | 1       | 2       | <b>5</b>   |
| 15       | 240        | 243     | 240     | 241     | <b>239</b> |
| 21       | 120        | 116     | 119     | 118     | <b>119</b> |
| 28       | 0          | 5       | 2       | 1       | <b>4</b>   |

\* 預測角度值是估計值，請參見討論

### (三)、正方形數實驗

若以動圓轉呈正方形數的定圓，所得到的指標角值接近  $0^\circ$ （表 3）。和前二項的結果一樣，半徑值不同的圓，所得到的結果類似。

表 3

| 定圓<br>數量 | 預測<br>角度值* | 指標角度值  |        |        |        |
|----------|------------|--------|--------|--------|--------|
|          |            | 1 公分半徑 | 2 公分半徑 | 4 公分半徑 | 8 公分半徑 |
| 4        | 0          | 0      | 2      | 5      | 1      |
| 9        | 0          | 3      | 5      | 1      | 0      |
| 16       | 0          | 5      | 1      | 4      | 3      |
| 25       | 0          | 1      | 1      | 2      | 1      |

\* 預測角度值是估計值，請參見討論

### (四)、圓心角與指標角之關係

利用同為 2 公分半徑的圓，以動圓轉動一個定圓方式，測量指標角與圓心角的關係。轉動中偶而停下來，紀錄圓心角和動圓的指標角，得表 4 如下：

表 4

| 圓心角 ( $^\circ$ ) | 指標角 ( $^\circ$ ) | 比率 (指標角/圓心角) |
|------------------|------------------|--------------|
| 0                | 0                |              |
| 30               | 60               | 2            |
| 70               | 142              | 2.029        |
| 90               | 181              | 2.011        |
| 110              | 219              | 1.991        |
| 120              | 240              | 2            |
| 140              | 281              | 2.001        |
| 152              | 300              | 1.974        |
| 180              | 0                |              |

考慮實驗上的誤差值，由上表我歸納出指標角與圓心角之間有一個固定的比率，這個比率為 2，而且，圓心角為  $180^\circ$  時，指標角就會再從  $0^\circ$  開始變化。

### 三、角度推估 — 動圓與定圓的半徑長度不相等

#### (一)、一個定圓

一個動圓轉一個定圓時，當定圓與動圓的半徑比值為整數時，其指標角度的變化

如表 5：

表 5

| 動圓半徑<br>(公分) | 定圓半徑<br>(公分) | 定圓與動圓<br>半徑比率 | 指標角 (°) |
|--------------|--------------|---------------|---------|
| 1            | 2            | 2             | 179.6   |
| 1            | 3            | 3             | 359.2   |
| 1            | 4            | 4             | 179.8   |
| 1            | 5            | 5             | 359.8   |
| 1            | 6            | 6             | 180.8   |
| 1            | 7            | 7             | 359.6   |
| 1            | 8            | 8             | 179.4   |
| 1            | 9            | 9             | 358.6   |
| 1            | 10           | 10            | 181.4   |
| 1            | 12           | 12            | 178.6   |
| 2            | 4            | 2             | 180.0   |
| 2            | 6            | 3             | 359.8   |
| 2            | 8            | 4             | 182.2   |
| 2            | 10           | 5             | 359.6   |

當定圓與動圓的半徑比值不為整數時，其指標角度的變化如表 6：

表 6

| 動圓半徑<br>(公分) | 定圓半徑<br>(公分) | 定圓與動圓<br>半徑比率 | 指標角 (°) |
|--------------|--------------|---------------|---------|
| 2            | 3            | 1.5           | 95.6    |
| 2            | 5            | 2.5           | 265.8   |
| 2            | 7            | 3.5           | 91.8    |
| 2            | 9            | 4.5           | 273     |

歸納表 5 與 6 的結果顯示，一個動圓轉一個定圓，但半徑不同時，若動圓與定圓的半徑有一定之比例：

- 定圓與動圓的半徑比為偶數倍（如 2、4、6、8、10），指標角趨近於 180 度
- 定圓與動圓的半徑比為奇數倍（如 3、5、7、9），指標角趨近於 0 度
- 定圓與動圓的半徑比為偶數+0.5 倍（如 2.5、4.5），指標角趨近於 270 度
- 定圓與動圓的半徑比為奇數+0.5 倍（如 1.5、3.5），指標角接近 90 度

## （二）、兩個定圓

用 2 公分半徑的動圓和 3、4、5、6、8、9、10、12 公分的各二個定圓，嘗試做了不等半徑的實驗。結果如表 7：

表 7

| 定圓數目 | 實驗方式      |           | 指標角 (°) |
|------|-----------|-----------|---------|
|      | 動圓半徑 (公分) | 定圓半徑 (公分) |         |
| 2    | 2         | 3         | 270.6   |
| 2    | 2         | 4         | 61      |
| 2    | 2         | 5         | 179.4   |
| 2    | 2         | 6         | 359.8   |
| 2    | 2         | 8         | 307.8   |
| 2    | 2         | 9         | 151.6   |
| 2    | 2         | 10        | 300.2   |
| 2    | 2         | 12        | 180.8   |

當定圓增加與半徑改變時，指標角度值也會改變，但似乎沒有類似相同半徑之動圓與定圓的結果（如表 1）來得有規律性。



## 柒、討論

一、從面積的估算中，我發現圓心角的變化，可以被利用來計算動圓行經路線的面積，雖然一開始看起來頗複雜，但是，仍可以小心推估，得到精確的面積估計。

二、在指標角度的實驗中，壓克力板的材質比較光滑，缺乏摩擦力，在實驗過程中，即使是非常小心，也會有一些滑動的情形，因此實驗數據無法非常精準，與預測值間會有些差距，但是，利用多次操作資料的平均值，可以得到較精確的結果。不過，以後有機會從事類似的研究時，應該選擇比較好的材料，以得到更佳的结果。

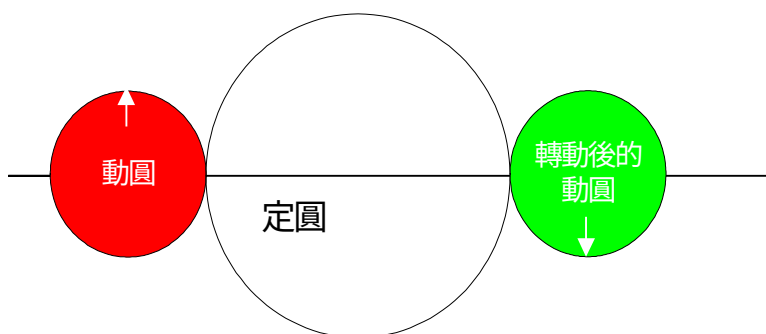
三、在相同半徑的動圓轉動定圓實驗中，可以利用圓心角的變化，來估計動圓的最後指向角度。從實驗中，我得到一個簡單的預測公式：

以圓心角的總和 $\times 2$ 後，轉換為 $360^\circ$ 內之值（例如減去360或720），即為動圓的最後指向角度

這也就是，前面結果表1-3的預測值。而倍數2這個數值，就是由表4所得。

四、在不同半徑的動圓轉動定圓實驗中，卻無法利用上述的公式推導出預測值。

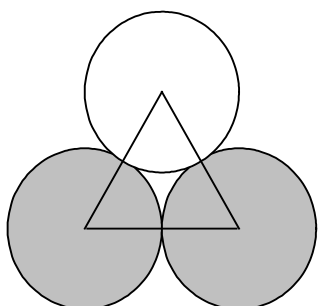
如果考量動圓的自轉和動圓繞定圓的公轉兩種效應，則可以解釋所得到的結果。例如，當動圓與定圓半徑比為1:2時：



動圓自轉後的指標角是 $360^\circ$ ，動圓繞定圓轉動的公轉的指標角是 $180^\circ$ ，因此，

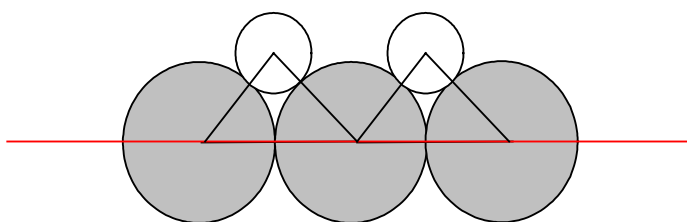
動圓在經過自轉與公轉後，最後的指標角為  $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ ，也就是  $180^\circ$ （即  $540^\circ - 360^\circ$ ）（參見表 5）。這種解釋不僅可以說明不同半徑之結果，也可以解釋相同半徑的結果，而且，當定圓數目增加時，也可以說明。

五、使用相同半徑的動圓與定圓做實驗，有一個好處，因為半徑相同，當動圓與兩個定圓相接時，圓心的連線可以形成一個正三角形（如下圖）。三角形的內角是  $60^\circ$ ，圓心角則為  $120^\circ$ ，具有很好的規則性。用來推導公式也比較容易。



六、從預測值的觀點來看，不管是哪一種半徑的圓，以同樣尺寸的動圓去轉直線狀、三角形數、正方形數所構成的定圓，指標角度會有一定的變化，當定圓數量增加時，會出現規律性。

七、當動圓和定圓的半徑不同、卻有一定的比率時，例如 1:2、1:3 或 1:4 時，指標角度也具有規律性。本研究限於時間與能力，沒有深入探討不同半徑的動圓轉直線形、三角形數、正方形數等定圓後的角度改變情形。從三角形的關係來看，下圖中動圓與定圓的半徑為 1:2，當動圓與兩個定圓相接時，圓心的連線形成等腰三角形：



這時，指導老師告訴我，要算出三角形的內角與圓心角，必需使用三角函數

才可以推算，以我現在所學無法做到，這正是我沒有繼續做下去的主要原因。雖然我使用的道具簡單，卻可以導出有規律的推論，從數學的操弄中玩出智慧，學到能力。不僅如此，我又察覺到這些工作仍有許多可以延伸發展，只是以我小學生的能耐，所學有限，不過，我對延伸內容的部分深感興趣，今後我要繼續勤奮地研究，以旺盛的企圖心來滿足我的求知慾。

## 捌、結論

- 一、動圓行經路線的面積，雖然看起來頗複雜，但是，只要利用圓心角的方式，分割區塊，可以推估精確的面積值。
- 二、以同樣半徑的動圓去轉呈直線狀的定圓，每增加一個定圓，指標角會增加  $120^\circ$ 。而且，每 3 個定圓後，開始循環。在定圓為三角形數時，三角形數每增大一級，指標角會減少  $120^\circ$ 。而且，這些數值也是每 3 級定圓後，出現循環。不同於前兩種型態，在定圓為正方形數時，所得到的指標角度均為  $0^\circ$ 。只要動圓與定圓的半徑相同，半徑改變時，這種規律性仍然存在。
- 三、雖然道具很簡單，但是卻可以導出有趣又有規律的推論。這些工作仍有許多可以進行的實驗，也可以利用幾何和三角函數的方法，進行理論值的估計。不過因為目前所學有限，很多內容可以留到以後再來研究。

## 玖、參考資料

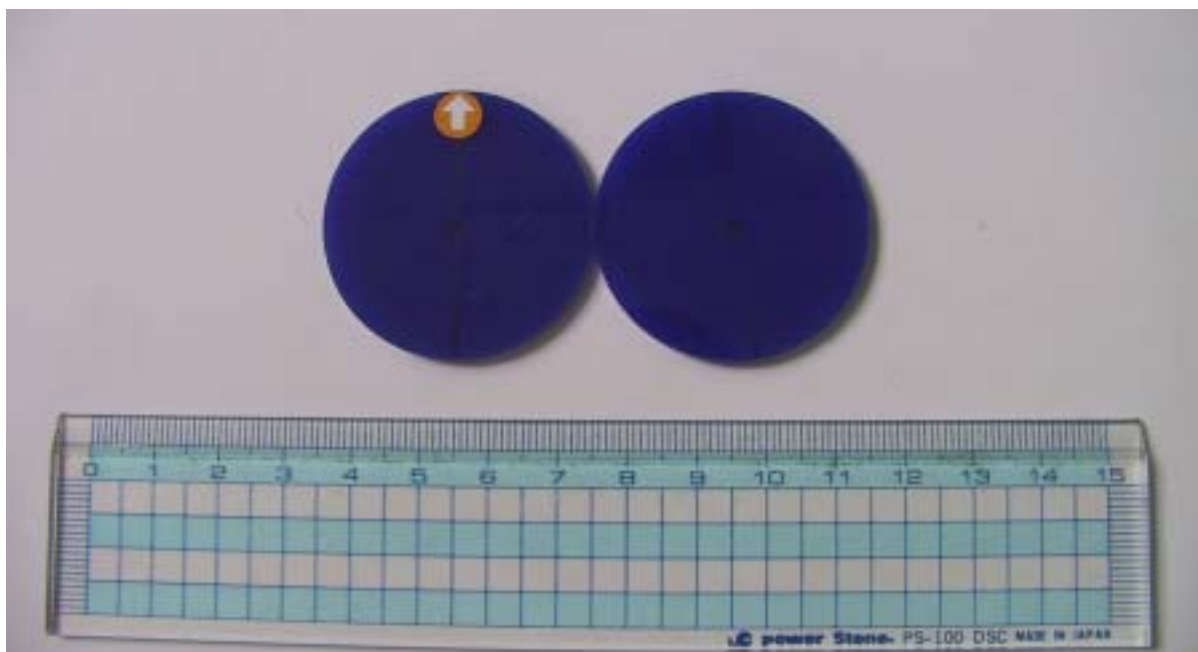
劉君祖（總編輯），1987，小牛頓數學百科，牛頓出版社，台北市。

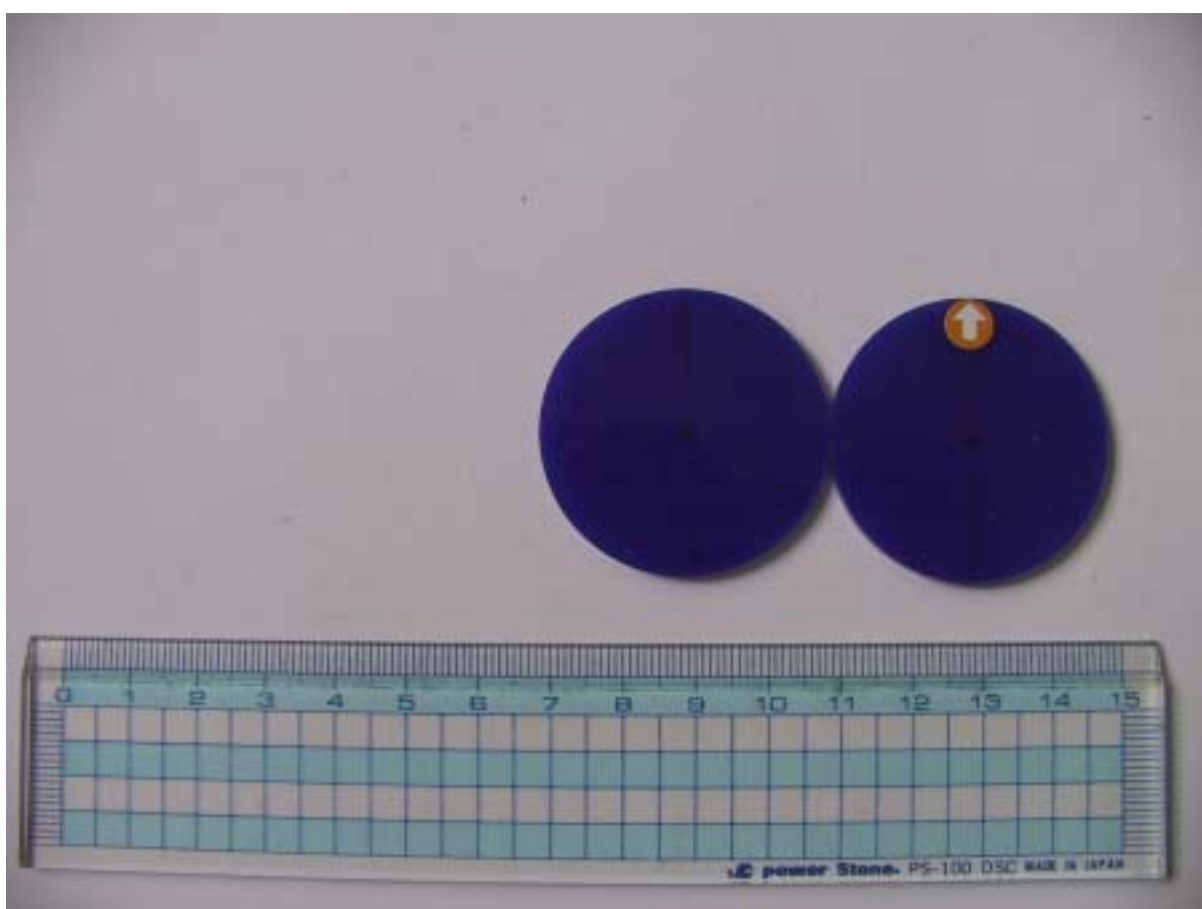
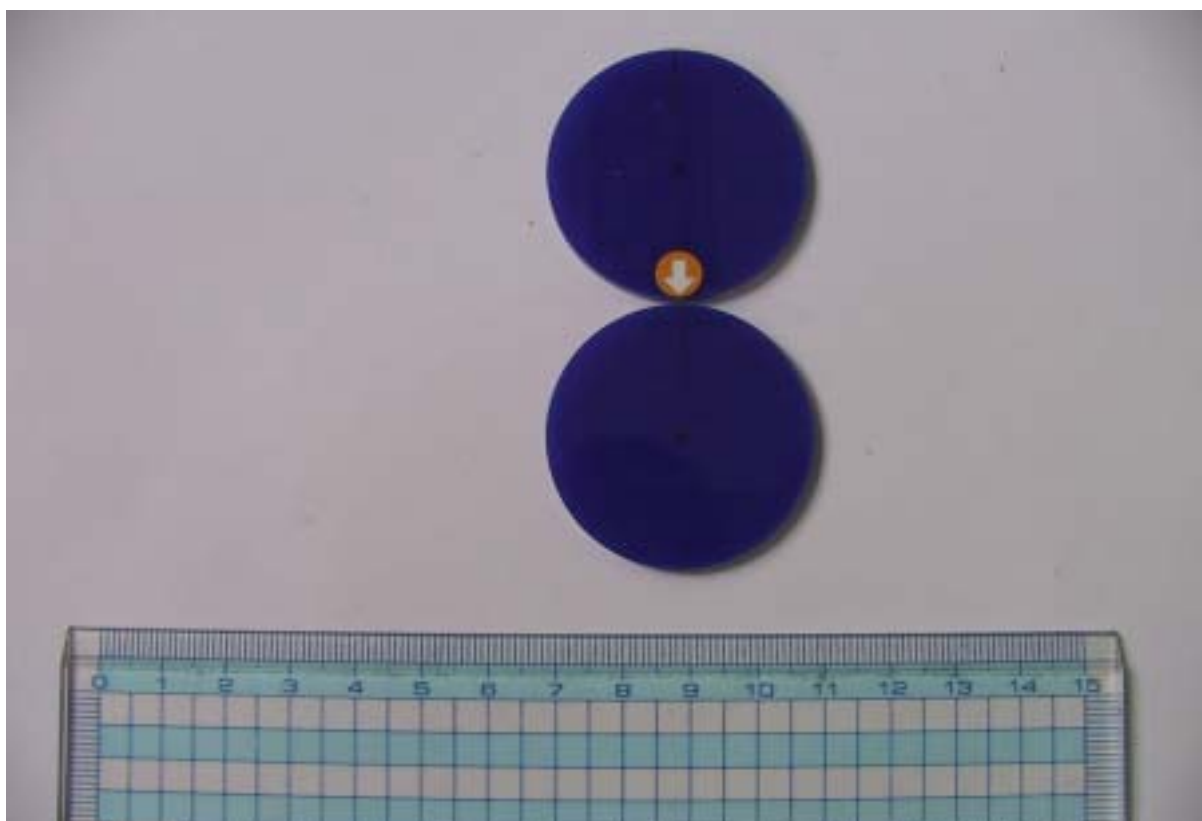
## 拾、附錄

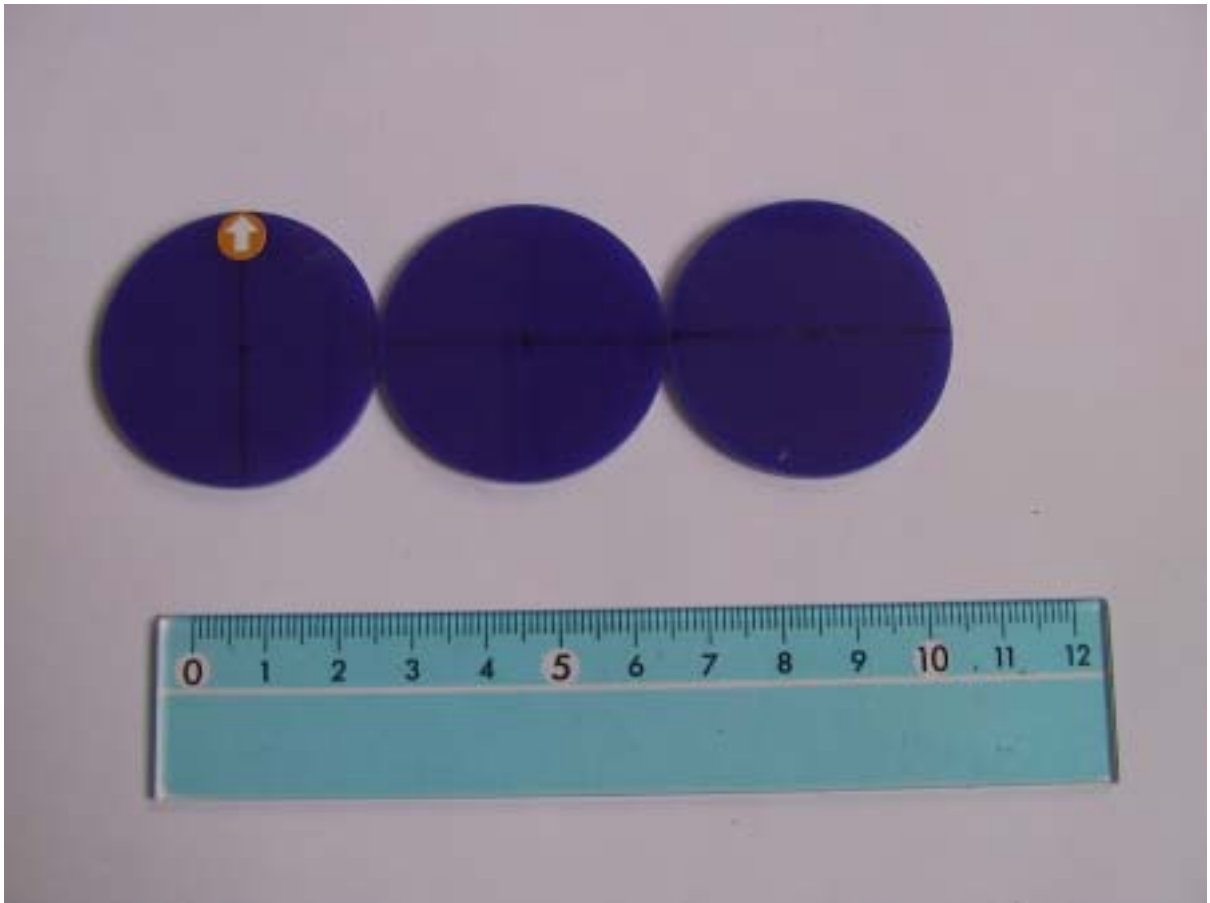
### 一、實驗過程紀錄

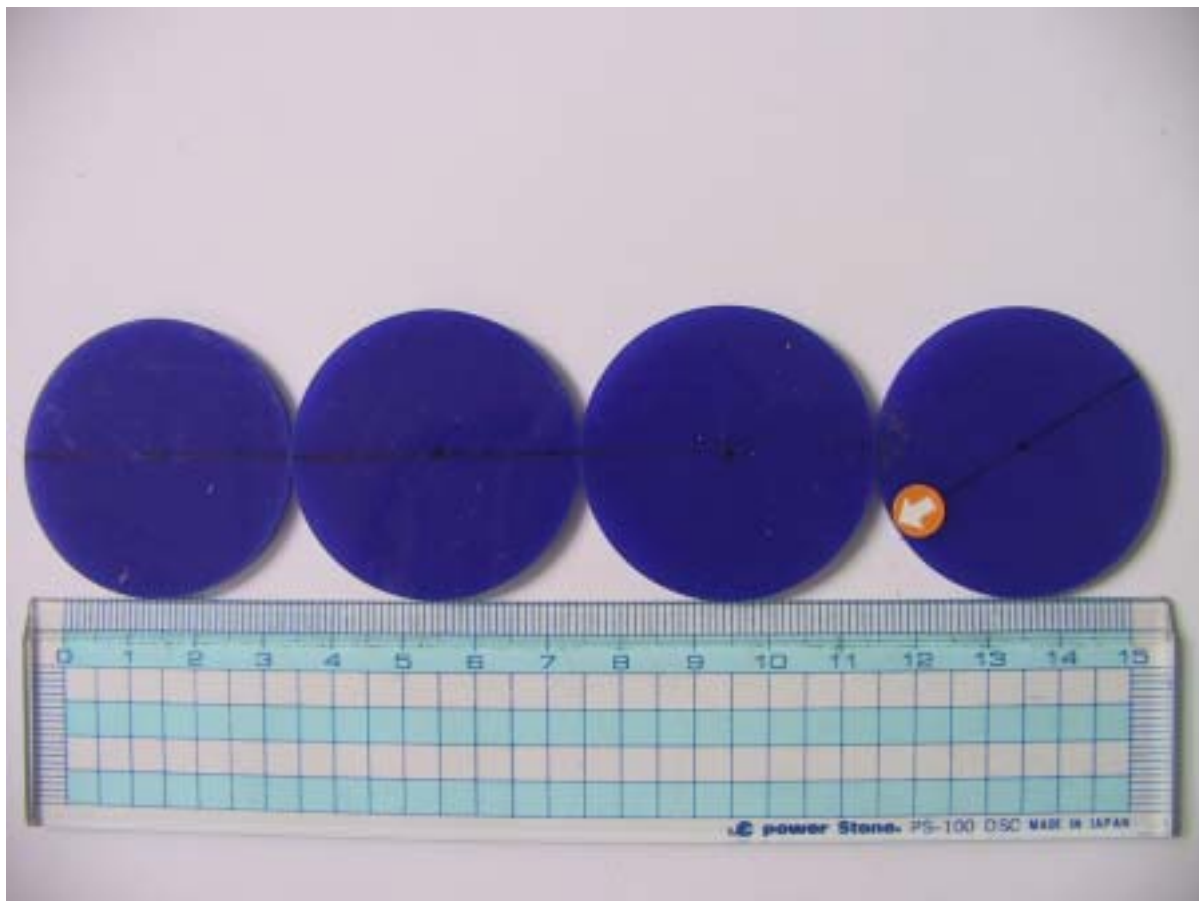
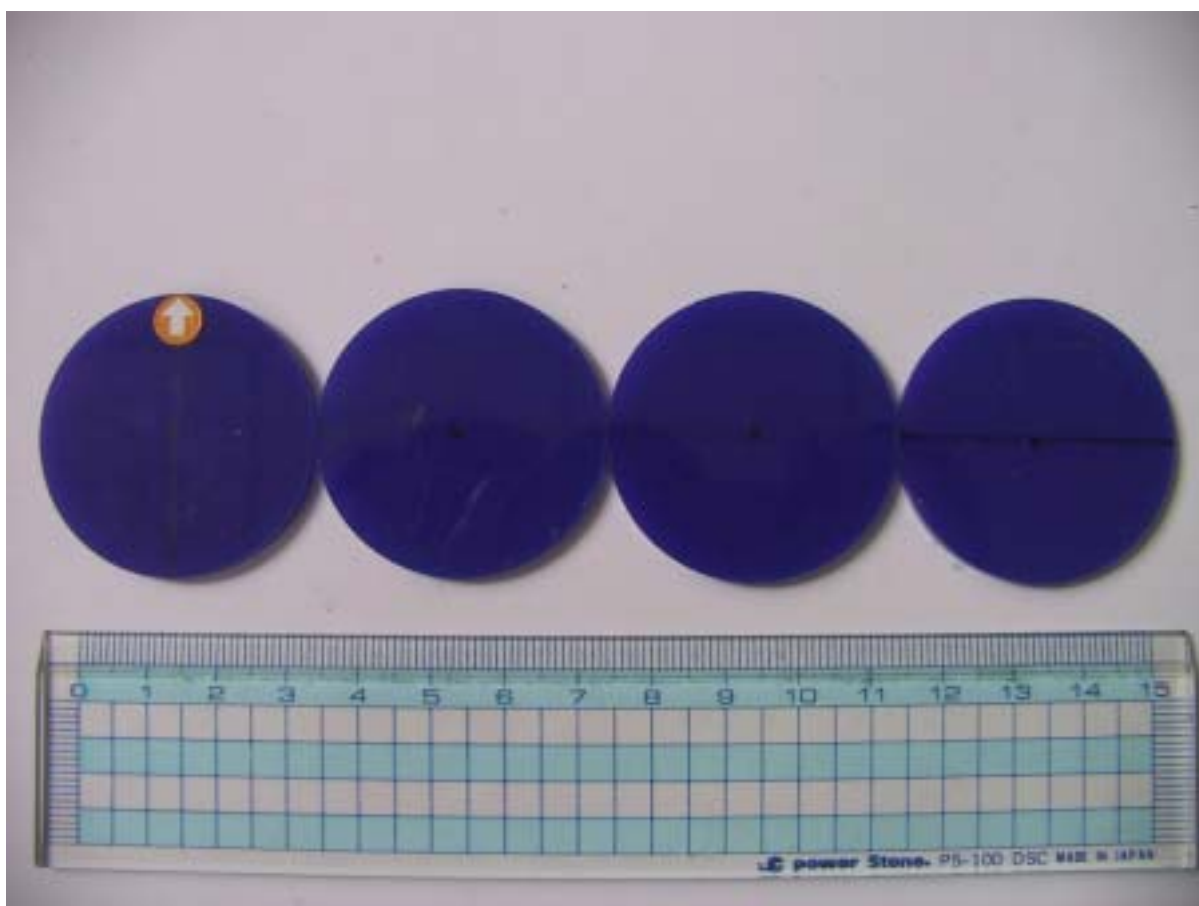
以下為數位相機所拍攝的部分實驗過程與結果。

#### （一）、直線形實驗

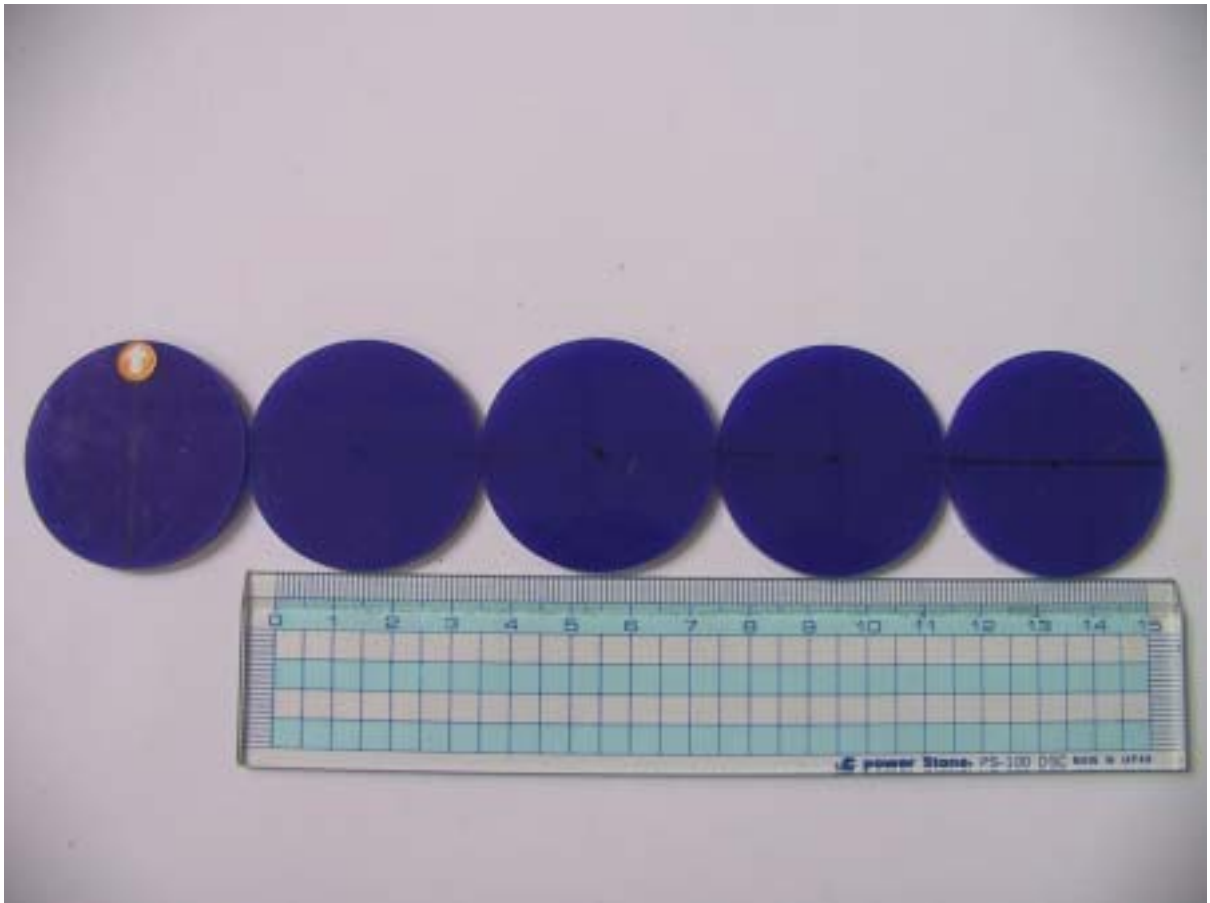






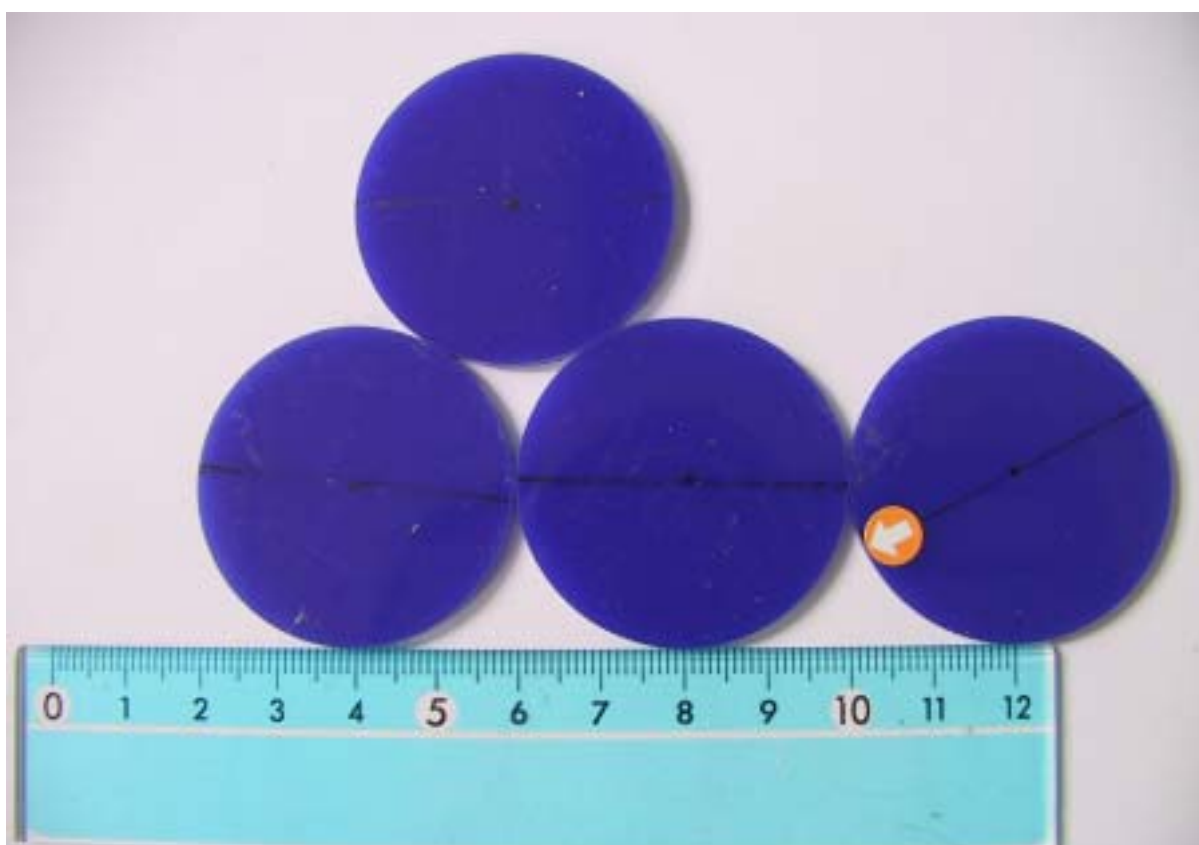


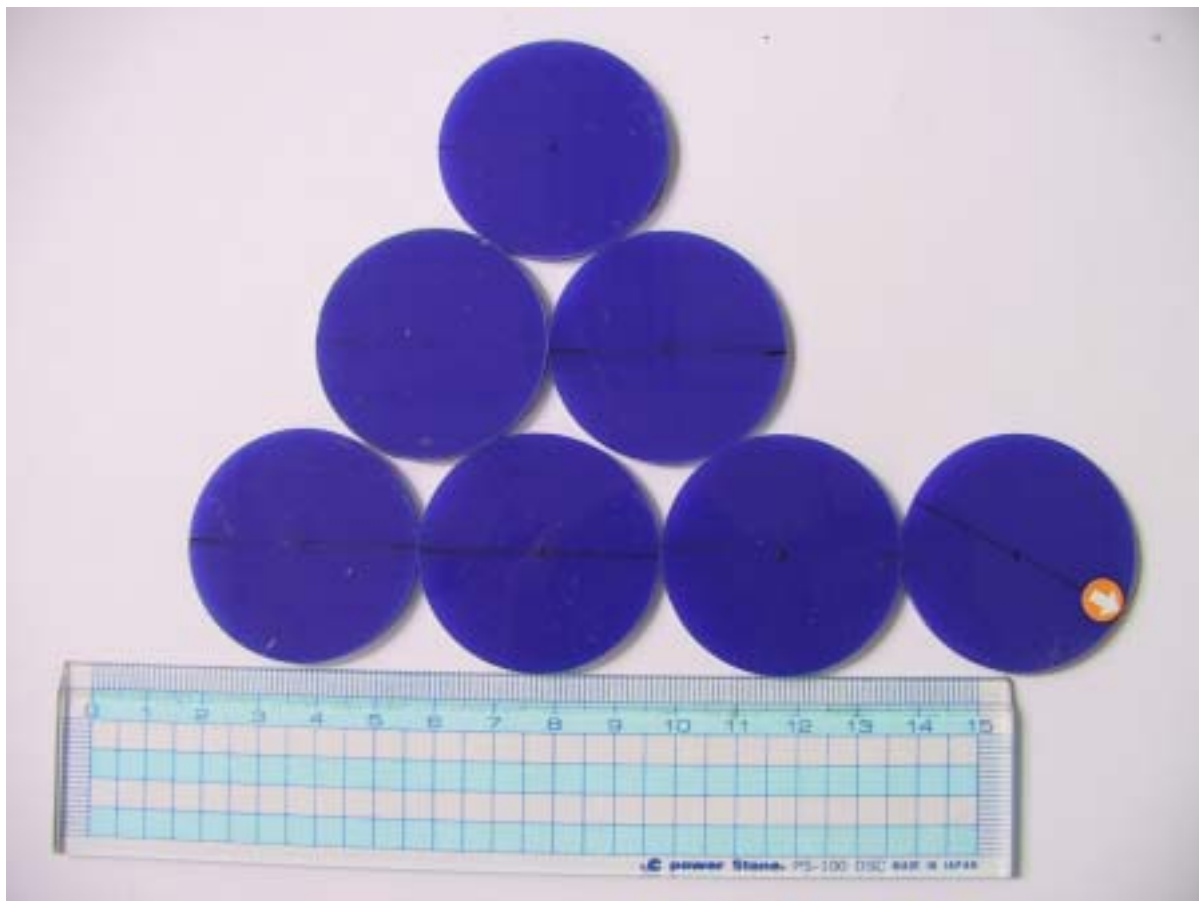
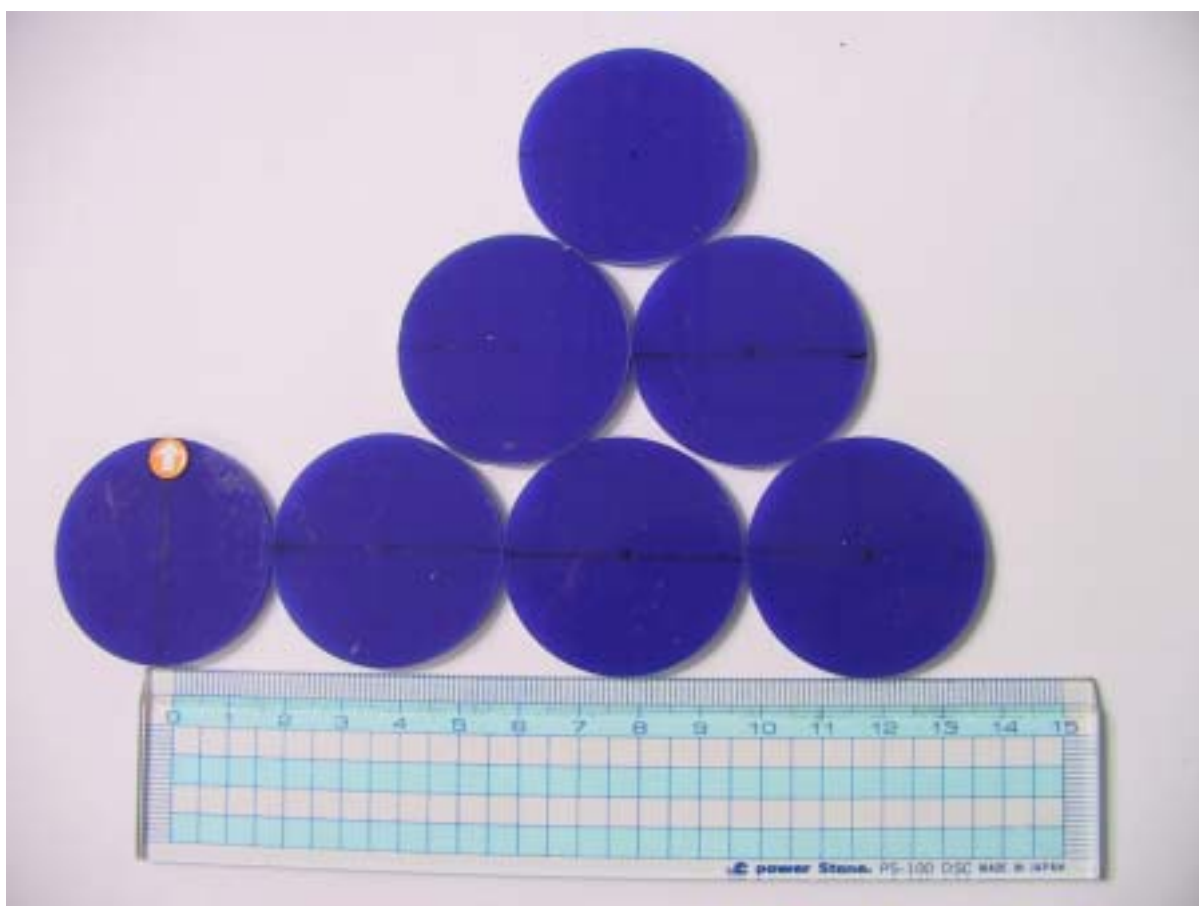






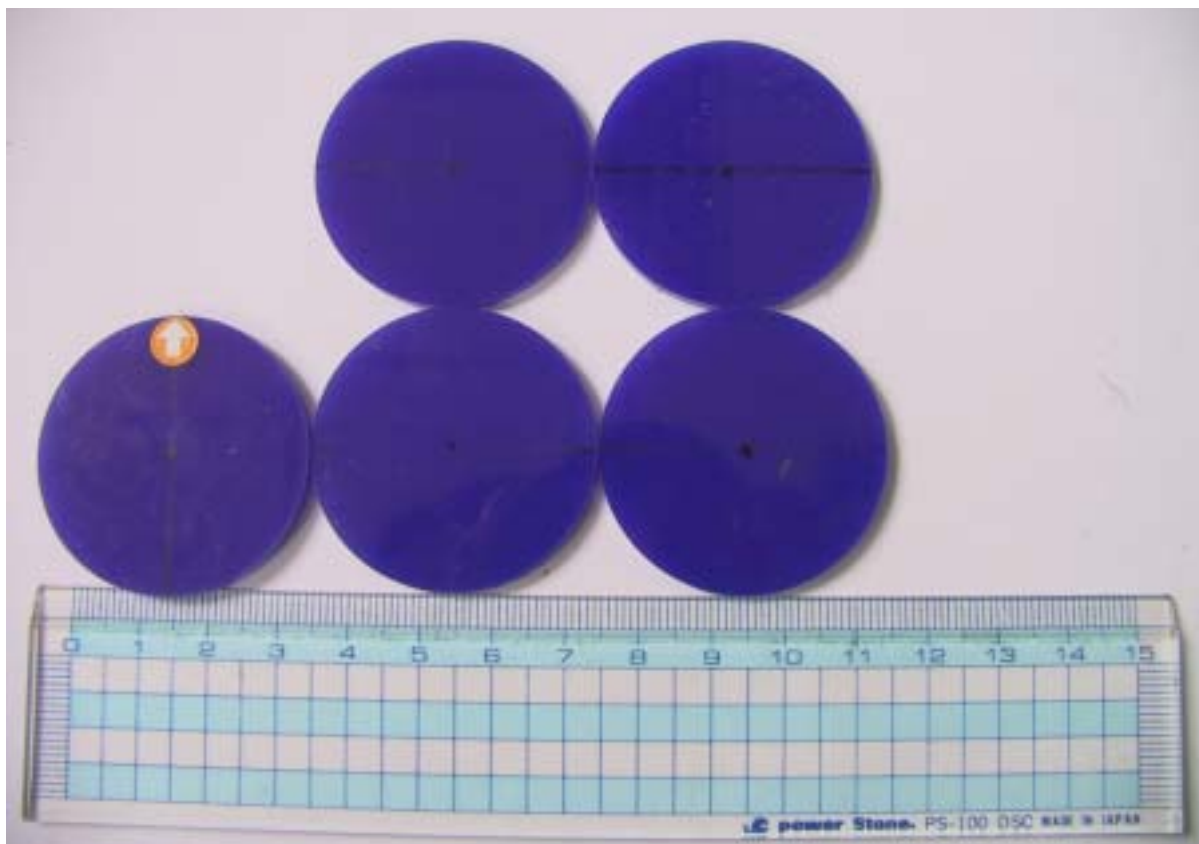
## (二)、三角形數實驗

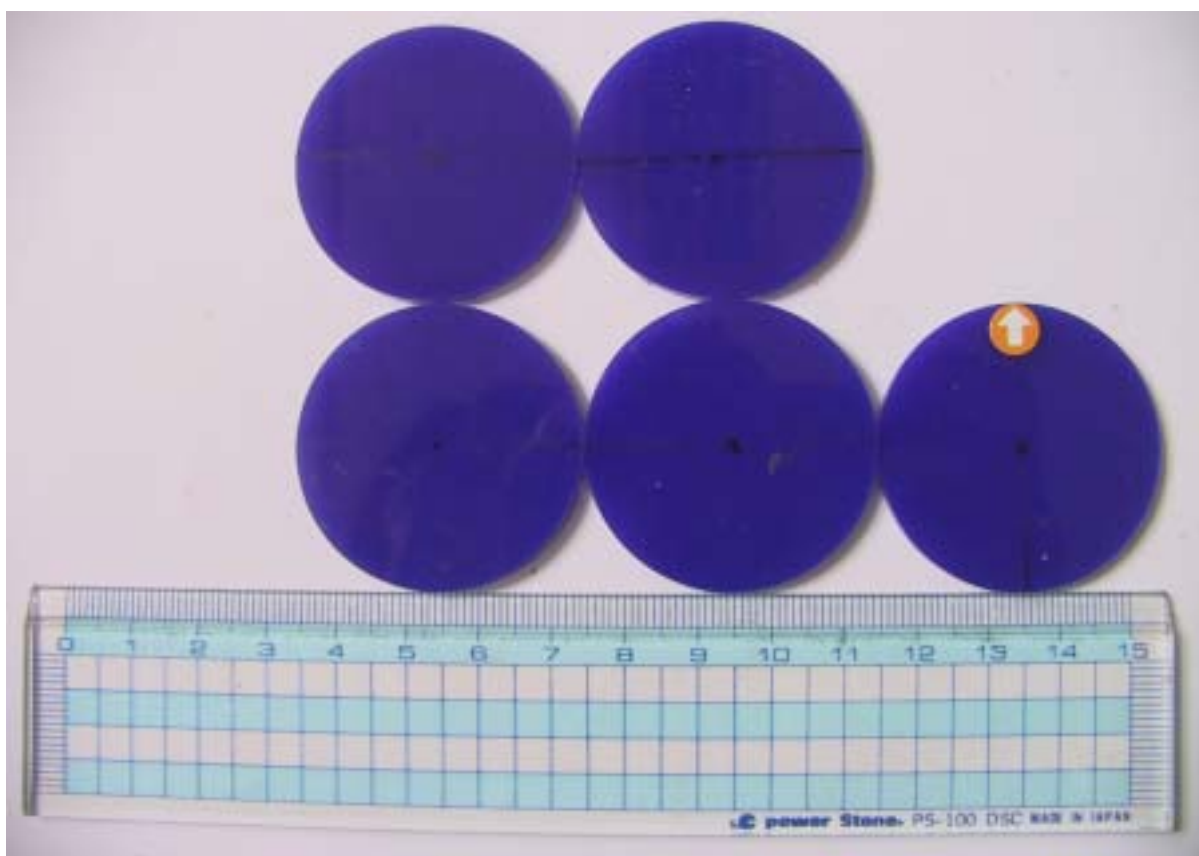






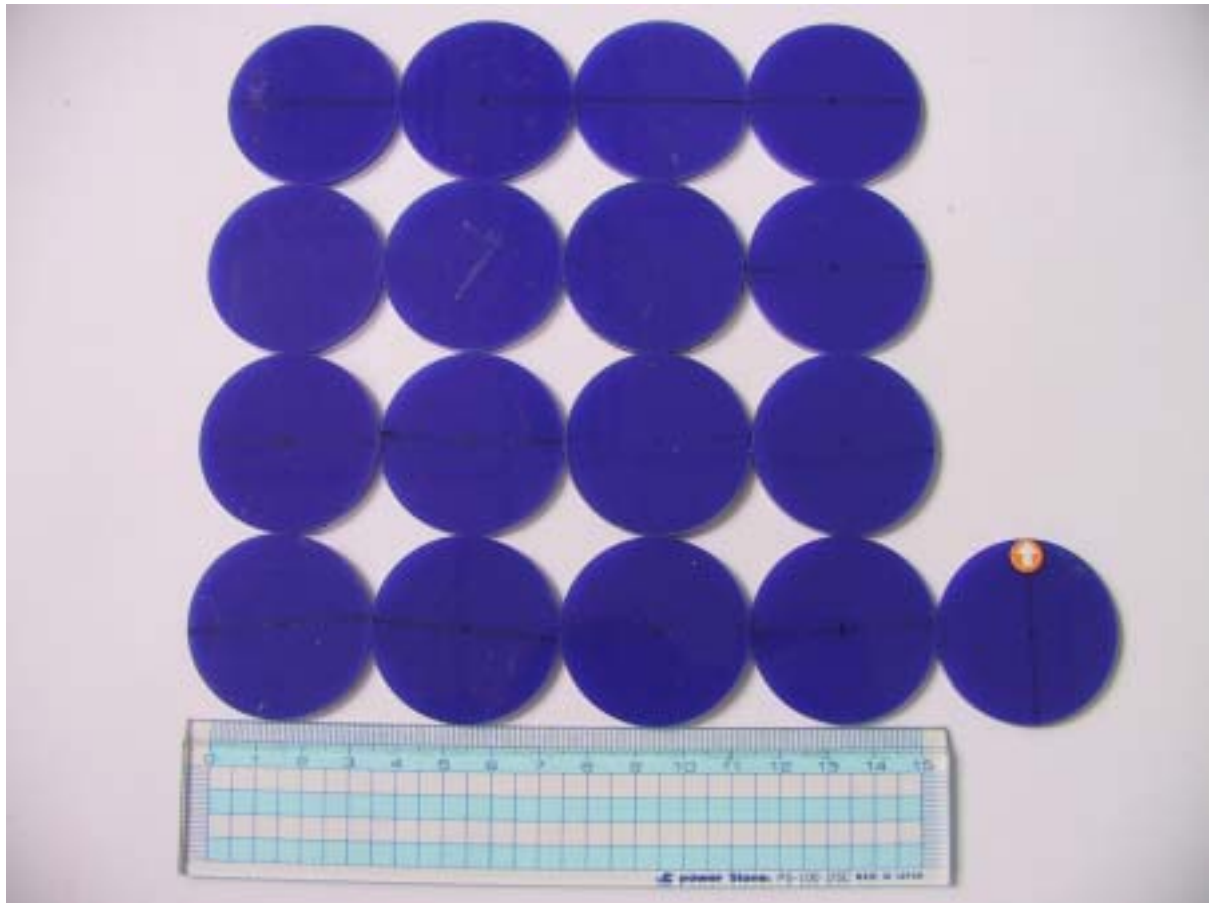
### (三)、正方形數實驗





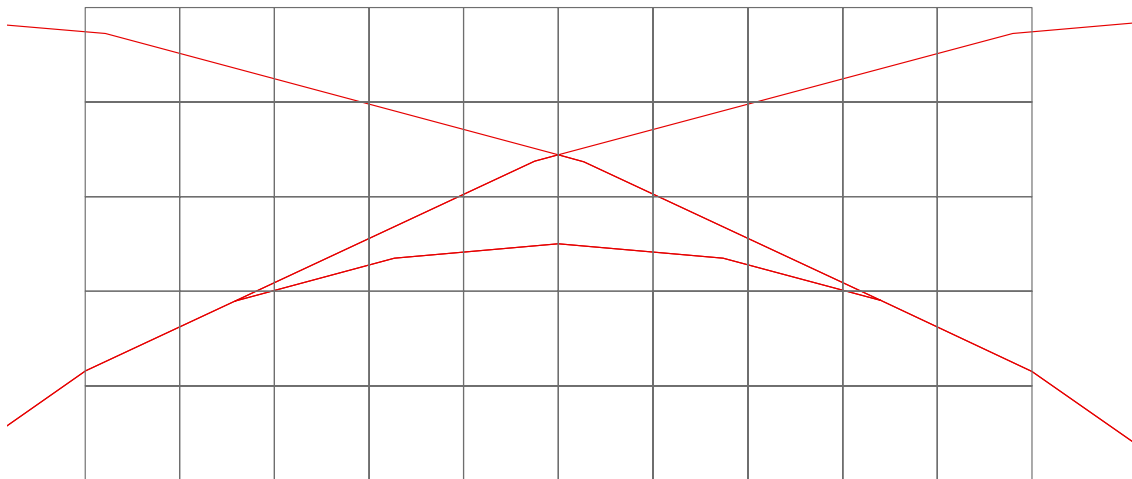






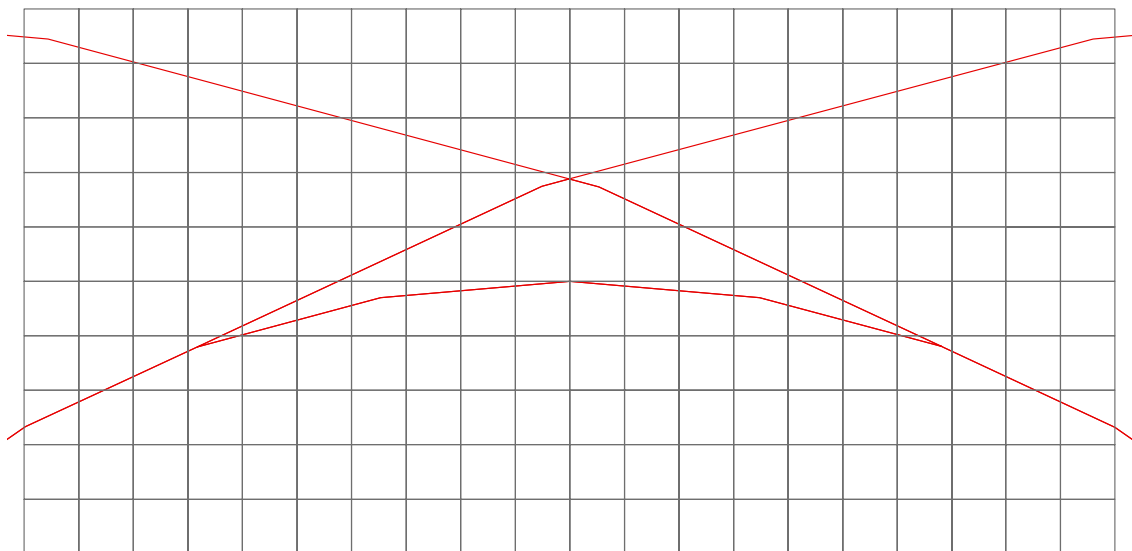
## 二、小區域面積的估算

半徑 1 公分（每一個網格均為 0.01 平方公分，以下各圖，均相同）



$$\text{估計面積} = 0.01 * (8/2) = 0.04 \text{ cm}^2$$

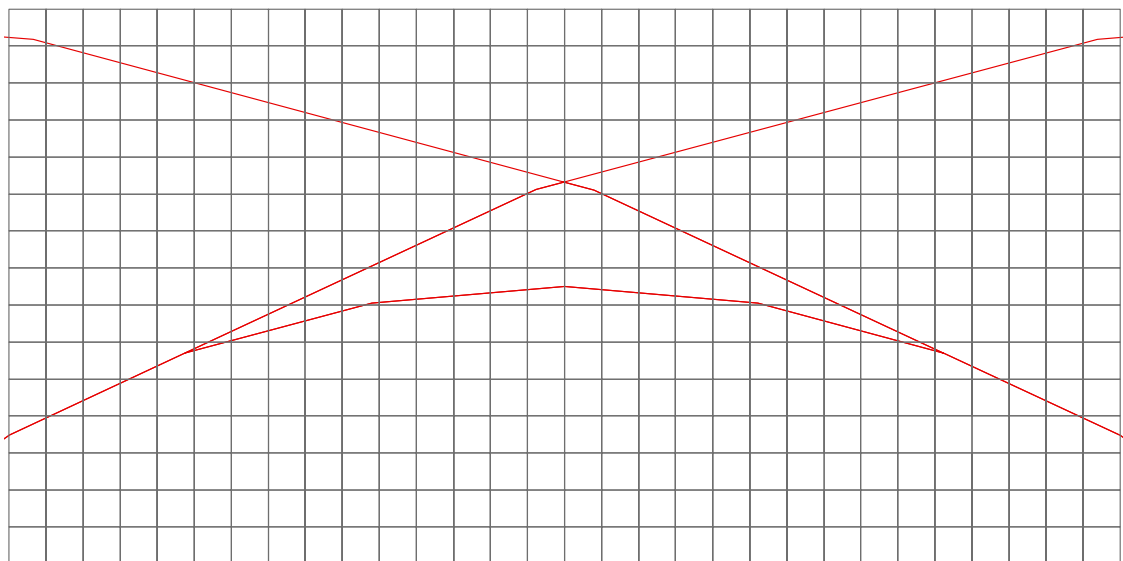
半徑 2 公分



$$\text{估計面積} = 0.01 * (2 + 26/2) = 0.15 \text{ cm}^2$$

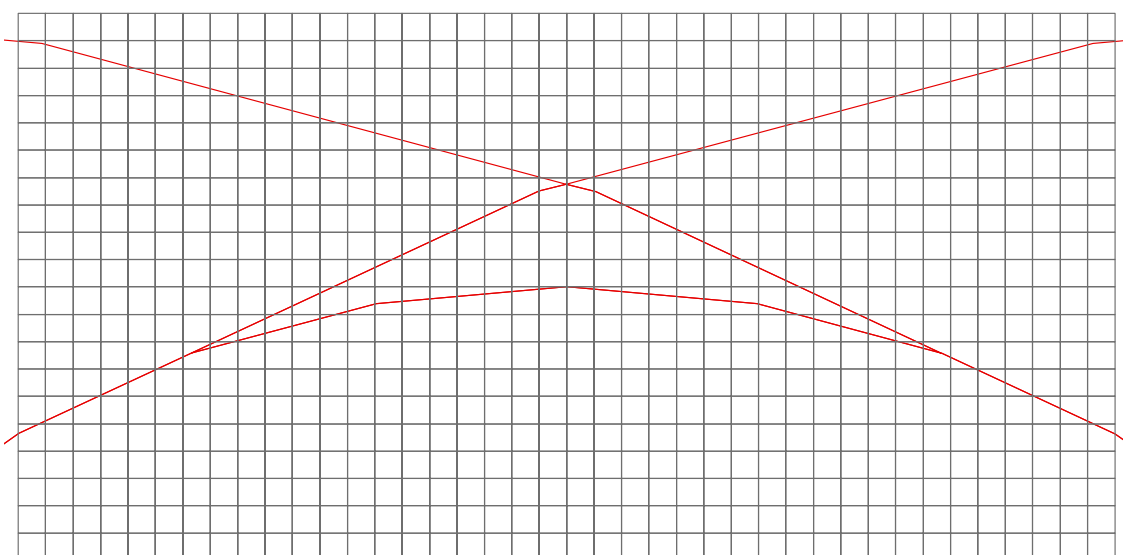


半徑 3 公分



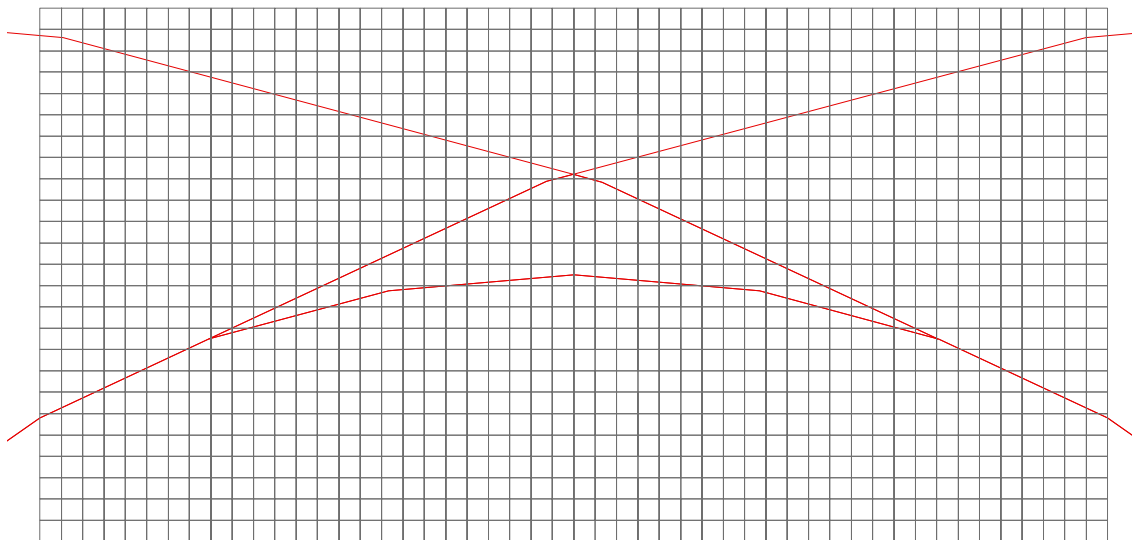
估計面積 =  $0.27 \text{ cm}^2$

半徑 4 公分



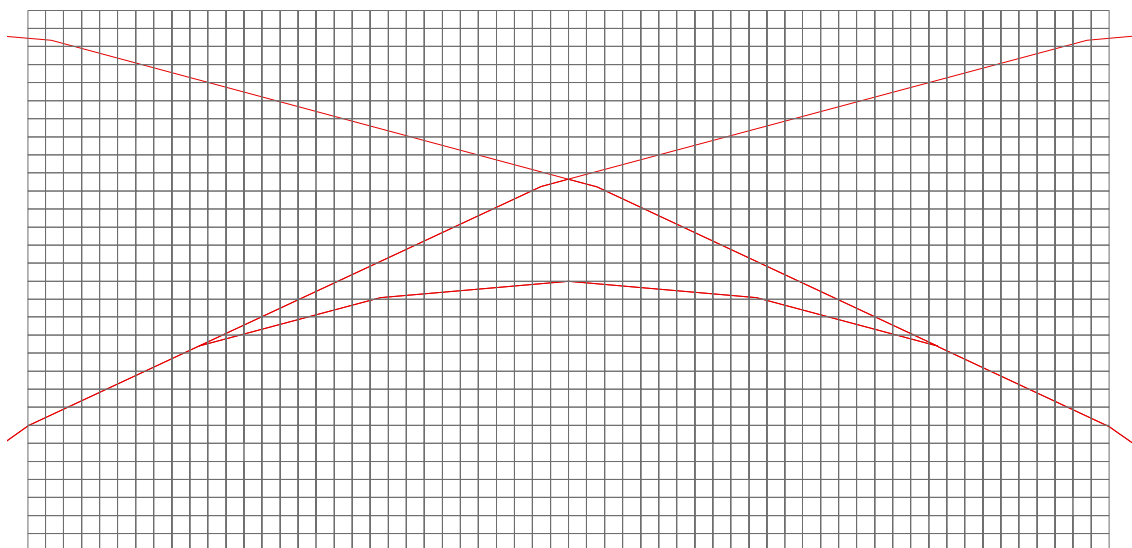
估計面積 =  $0.52 \text{ cm}^2$

半徑 5 公分



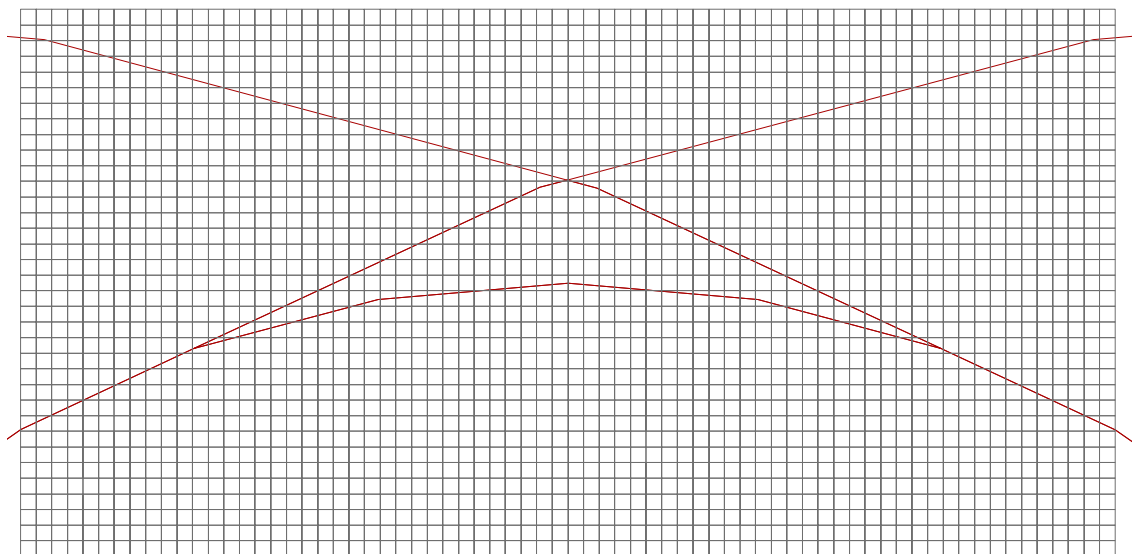
估計面積 =  $0.76 \text{ cm}^2$

半徑 6 公分



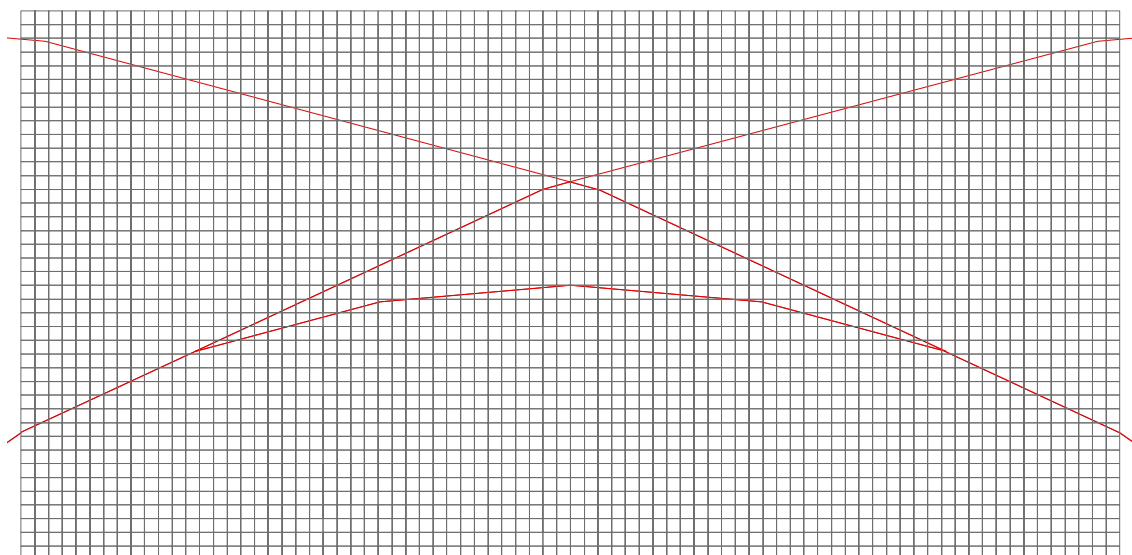
估計面積 =  $1.06 \text{ cm}^2$

半徑 7 公分



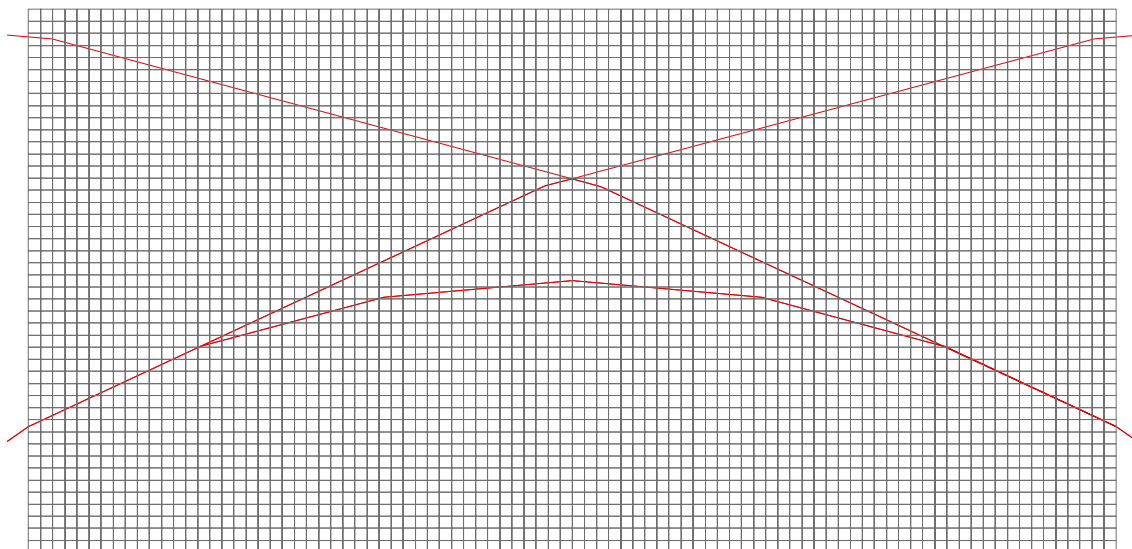
估計面積 =  $1.42 \text{ cm}^2$

半徑 8 公分



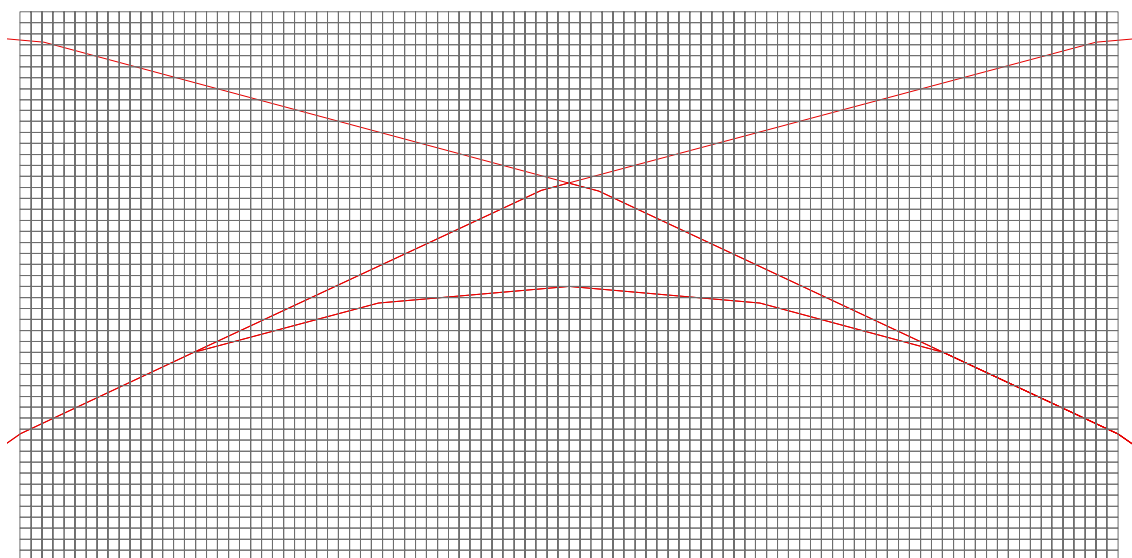
估計面積 =  $1.89 \text{ cm}^2$

半徑 9 公分



估計面積 =  $2.68 \text{ cm}^2$

半徑 10 公分



估計面積 =  $2.83 \text{ cm}^2$

**(第一名) (最佳創意獎)**

內容詳盡，條理分明，研究用心，有創意，且作者的表達能力強。