

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國小-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 小 組

作品名稱：究極瘋 — — —立即立即瘋

關 鍵 詞：立即瘋、分組分析、顏色表格化分析

編 號：080407

學校名稱：

臺北市松山區民權國民小學

作者姓名：

翁 凡

指導老師：

林志忠、王寶勛



壹、摘要：

本作品主要是從「立即瘋」遊戲的解題過程，突發奇想，試著設計全新的「立即瘋」遊戲，甚至更「瘋」的益智玩具，並確認這全新設計和「立即瘋」一樣，只有唯一解。

「立即瘋」原設計的木頭材料不容易處理和發展，所以改用智慧片取代。透過對原設計的解題瞭解後，我們自行用正八面體設計不同顏色變化和位置，並進行比對、分析和檢驗。

本作品主要結果如下：

- 一、有條理且有效率的解決原設計的「立即瘋」遊戲。
- 二、重新試著設計不同顏色的新「立即瘋」遊戲，並確認只有唯一解。
- 三、設計創造正八面體的「究極瘋」遊戲，並確認只有唯一解。

綜合言之，我應用了「顏色表格化分析」和「分組分析」，能有效和有效率的解決「立即瘋」問題，並設計創造全新的「究極瘋」遊戲。

最後，我希望設計完整的一套有趣的「究極瘋」系列學習活動。

貳、研究動機：

第一次接觸智慧片，在上資優課時，老師讓我們玩「立即瘋」遊戲，我急著湊出答案，那次真的玩到快瘋掉了。回家細心思考知道解答之後，指導老師希望我以智慧片做一個類似的遊戲，提供給其他同學一起學習，所以我就開始著手研究。

為創造出一個有趣、好玩又容易讓人瘋掉的遊戲，媽媽專程帶我到永和販賣智慧片公司，買了一大箱。老闆知道我要以此為素材做科展，除了親自展示指導智慧片的裝卸，臨走還多送我一大包智慧片，做了半年終於有一點小小成果，希望能與大家一起分享！

「究極瘋」是我自己取的名字，謹把它獻給母校，當小學畢業的謝禮，獻給在校的學弟妹，獻給想玩瘋的每個人！

參、研究目的：

一、以正六面體為題，自己發展另一種類似「立即瘋」遊戲

(一)以不同方法分析「立即瘋」遊戲的原設計

(二)重新打造一個全新的「立即瘋」

1、四種顏色四方塊成柱。

2、五種顏色五方塊成柱。

3、六種顏色六方塊成柱。

二、如何自己創造一種全新的「立即瘋」遊戲

(一)用五個正八面體

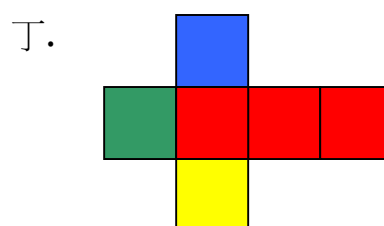
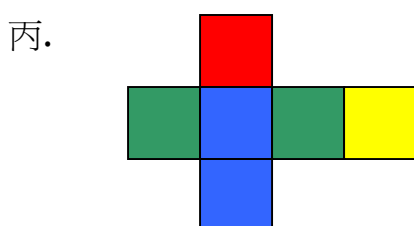
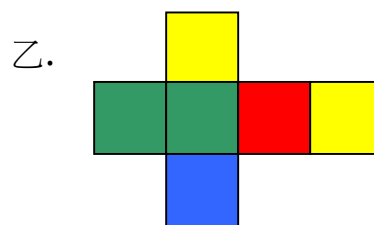
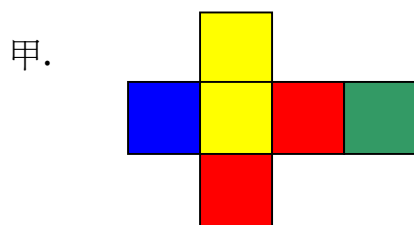
(二)用六個正八面體

肆、文獻探討：

「立即瘋」是一種在北美洲相當受歡迎的益智遊戲。這遊戲的器材是由四塊立方體（正六面體）組成。每塊立方體分別有紅、黃、藍、綠 4 種顏色，但每塊立方體顏色的分佈並不相同。

而玩這種遊戲的目標是把四塊立方體疊成柱形，一個疊在一個上面，使柱子的四面，都有紅、黃、藍、綠 4 種顏色，這是個很具挑戰性的問題！

四塊立方體展開圖如下：



伍、研究器材設備：

我使用的器材有電腦、計算紙、計算機、鉛筆以及正方形、正三角形、正五邊形及正六邊形工程智慧片（長久公司製，有紅 Red、黃 Yellow、藍 Blue、綠 Green 及中空 No color 等 5 種顏色，外加自製橙色 Orange 共六種）。

陸、研究過程：

一、 選擇基本多面體

我開始思考我所要製作成題目的形體，應該以正多面體比較適合，我用正三角形、正方形、正五邊形及正六邊形智慧片僅能拼出以下正多面體：

(一)正四面體

選擇性太少，不管相對位置每面同不同色，

別人亂拼也拼的出來，而且不好堆疊。

(二)正六面體

「立即瘋」也是用正六面體。很適合作為題材。

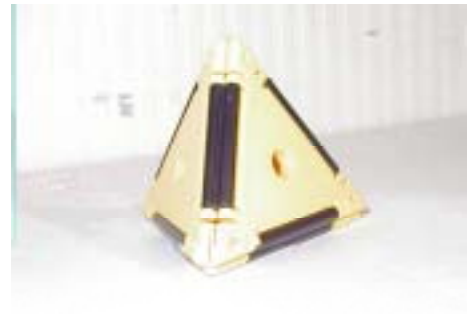
1、設計題目側面相對位置是同樣顏色:

(1)從兩個正六面體開始

因為相對位置是同樣顏色，不管怎麼設計，

側面 4 種顏色會成固定順序(不管順時鍾或逆時鍾

方向)，放第一個只有 3 種選擇，擺第 2 個只要



選中側面任何一種顏色，並調整相對位置顏色與第一個相同，連我 5 歲的妹妹很快就可以湊出來。

(2)改成三個正六面體

因為相對位置是同樣顏色，不管怎麼設計，側面 4 種顏色還是會成固定順序，考慮任何一個正六面體中，如果有和其他正六面體不同的顏色，一定只能放在底面，第一個擺法甚至只剩一種，擺第 2、3



個只要選中任何一種顏色，並調整相對位置顏色與第一個相同，發現還是考不倒我妹妹。

(3)再增加為四個或以上的正 6 面體

發現設計越多個正六面體，越容易發生和其他正六面體不同的顏色，擺法就受到越多限制，擺後面幾個也越簡單，因此不會瘋掉。(決定放棄)

2、設計題目側面相對位置不同顏色:

(1)還是從兩個正六面體開始

因為相對位置是不同顏色，不管怎麼設計，側面 4 種顏色成任何順序，雖然放第一個有 6 種選擇，擺第 2 個只要避開，並調整相對位置顏色與第一個不同，就完成了！很快就可以拼出來，因為可以被拼出來的答案太多種了。

(2)改成三個正六面體

因為相對位置是不同顏色，不管怎麼設計，側面 4 種顏色成任何順序，雖然放第一

個有 6 種選擇，擺第 2、3 個只要避開，並調整相對位置顏色與第一個不同，因解答還是很多，不需分析就可以拼出答案。

(3)四個正六面體

「立即瘋」就是用四個正六面體來設計。

先分析原設計，統計多餘底面顏色各有幾個，依序配對之後，找出唯一解。再重新打造一個全新的「立即瘋」！



(4)五個、甚至六個以上的正六面體

希望能設計一套完整的、有趣的新「立即瘋」系列學習活動！

(三)正八面體 （還可以試試看）

1、設計題目側面(同等相對位置)是同樣顏色:

(1)從兩個正八面體開始

因為相對位置是同樣顏色，不管怎麼設計，側面 6 種顏色會成固定順序(不管順時鐘或逆時鐘方向)，放第一個只有 4 種選擇，擺



第 2 個只要選中側面任何一種顏色，並調整相對位置顏色與第一個相同，太簡單了！

(2)改成三個正八面體

因為相對位置是同樣顏色，不管怎麼設計，側面 4 種顏色還是會成固定順序，考慮

任何一個正八面體中，如果有和其他正八面體不同的顏色，一定只能放在底面，第一個擺法甚至只剩一種，擺第 2、3 個一樣只要選中任何一種顏色，並調整相對位置顏色與第一個相同，發現還是不難！

(3)再增加為四個或以上的正八面體

發現設計越多個正八面體，越容易發生和其他正八面體不同的顏色，擺法就受到越多限制，擺後面幾個也越簡單。(決定放棄)

2、設計題目側面(同等相對位置)不同顏色:

沒有人做過，應該能做為題材。



(四)正十二面體 (太複雜、材料不夠，而且不容易觀察)(如下左圖)



(五)正二十面體（太複雜、材料不夠，而且不容易觀察）(如右上圖)

最後，我決定研究的方向：

1、正六面體

(1)先以不同的方法分析原設計

(2)重新打造一個全新的「立即瘋」。

（正六面體配每個側面同等相對位置都不同，4 種顏色來製作題目。）

A.四種顏色四方塊成柱。

B.五種顏色五方塊成柱。

C.六種顏色六方塊成柱。

2、正八面體--發展一套全新的「究極瘋」。

(1)5 個正八面體配每個側面（共計有六個側面）相對位置都不同 5 種顏色來製作題目。

(2)6 個正八面體配每個側面（共計有六個側面）相對位置都不同 6 種顏色來製作題目。

二、開始進行顏色配置

1、正六面體

(1) 四塊正六面體組成的「立即瘋」。每塊正六面體由紅、黃、藍、綠 4 種顏色組成。

(2) 五塊正六面體，加上一種「空白色」。

(3) 六塊正六面體，加上自製的「橙色」。

2、正八面體

(1)5 個正八面體配每個側面相對位置都不同 5 種顏色來製作題目。

由紅、黃、藍、綠及「空白色」5種顏色組成。

(2)6個正八面體配每個側面相對位置都不同6種顏色來製作題目

由紅、黃、藍、綠、橙及中空6種顏色組成。

三、開始設計題目

(一) 分析原設計--以正六面體為題，分析「立即瘋」遊戲。

玩這種遊戲的目標是把四塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一行，使相對位置的四個側面，都有不同顏色！

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正六面體有六個面，每個面都為正方形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正八面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^4 = 331776$ 種排法。

2.推理分析法

(1) 分析:

①每塊正六面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對，我們稱它為底。

②根據以上分析,每塊正六面體可以分成3組。(上下平行兩面為一組)

6面體	第1組對面		第2組對面		第3組對面	
甲	Y	R	B	R	Y	G
乙	Y	B	G	R	G	Y
丙	R	B	G	G	B	Y
丁	B	Y	G	R	R	R

(2) 統計：

6 面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	合計
甲	2	2	1	1	6
乙	1	2	1	2	6
丙	1	1	2	2	6
丁	3	1	1	1	6
顏色總數	7	6	5	6	24
需要顏色	4	4	4	4	16
多餘顏色	3	2	1	2	8

(3) 分組分析：

講解 1111 是什麼意思：第一個 1 是正六面體甲的第一組；第二個 1 是正六面體乙的第一組；

第三個 1 是正六面體丙的第一組；最後的 1 就是正六面體丁的第一組。

六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
1111	Y	R	Y	B	R	B	B	Y	X
1112	Y	R	Y	B	R	B	G	R	X
1113	Y	R	Y	B	R	B	R	R	X
1121	Y	R	Y	B	G	G	B	Y	X
1122	Y	R	Y	B	G	G	G	R	X
1123	Y	R	Y	B	G	G	R	R	O
1131	Y	R	Y	B	B	Y	B	Y	X
1132	Y	R	Y	B	B	Y	G	R	X
1133	Y	R	Y	B	B	Y	R	R	X
1211	Y	R	G	R	R	B	B	Y	X
1212	Y	R	G	R	R	B	G	R	X
1213	Y	R	G	R	R	B	R	R	X
1221	Y	R	G	R	G	G	B	Y	X
1222	Y	R	G	R	G	G	G	R	X
1223	Y	R	G	R	G	G	R	R	X
1231	Y	R	G	R	B	Y	B	Y	X
1232	Y	R	G	R	B	Y	G	R	O
1233	Y	R	G	R	B	Y	R	R	X
1311	Y	R	G	Y	R	B	B	Y	X
1312	Y	R	G	Y	R	B	G	R	O
1313	Y	R	G	Y	R	B	R	R	X
1321	Y	R	G	Y	G	G	B	Y	X

1322	Y	R	G	Y	G	G	G	R	X
1323	Y	R	G	Y	G	G	R	R	X
1331	Y	R	G	Y	B	Y	B	Y	X
1332	Y	R	G	Y	B	Y	G	R	X
1333	Y	R	G	Y	B	Y	R	R	X
2111	B	R	Y	B	R	B	B	Y	X
2112	B	R	Y	B	R	B	G	R	X
2113	B	R	Y	B	R	B	R	R	X
2121	B	R	Y	B	G	G	B	Y	X
2122	B	R	Y	B	G	G	G	R	X
2123	B	R	Y	B	G	G	R	R	X
2131	B	R	Y	B	B	Y	B	Y	X
2132	B	R	Y	B	B	Y	G	R	X
2133	B	R	Y	B	B	Y	R	R	X
2211	B	R	G	R	R	B	B	Y	X
2212	B	R	G	R	R	B	G	R	X
2213	B	R	G	R	R	B	R	R	X
2221	B	R	G	R	G	G	B	Y	X
2222	B	R	G	R	G	G	G	R	X
2223	B	R	G	R	G	G	R	R	X
2231	B	R	G	R	B	Y	B	Y	X
2232	B	R	G	R	B	Y	G	R	X
2233	B	R	G	R	B	Y	R	R	X
2311	B	R	G	Y	R	B	B	Y	X
2312	B	R	G	Y	R	B	G	R	X
2313	B	R	G	Y	R	B	R	R	X
2321	B	R	G	Y	G	G	B	Y	X
2322	B	R	G	Y	G	G	G	R	X
2323	B	R	G	Y	G	G	R	R	X
2331	B	R	G	Y	B	Y	B	Y	X
2332	B	R	G	Y	B	Y	G	R	X
2333	B	R	G	Y	B	Y	R	R	X
3111	Y	G	Y	B	R	B	B	Y	X
3112	Y	G	Y	B	R	B	G	R	X
3113	Y	G	Y	B	R	B	R	R	X
3121	Y	G	Y	B	G	G	B	Y	X
3122	Y	G	Y	B	G	G	G	R	X
3123	Y	G	Y	B	G	G	R	R	X
3131	Y	G	Y	B	B	Y	B	Y	X
3132	Y	G	Y	B	B	Y	G	R	X
3133	Y	G	Y	B	B	Y	R	R	X
3211	Y	G	G	R	R	B	B	Y	X

3212	Y	G	G	R	R	B	G	R	X
3213	Y	G	G	R	R	B	R	R	X
3221	Y	G	G	R	G	G	B	Y	X
3222	Y	G	G	R	G	G	G	R	X
3223	Y	G	G	R	G	G	R	R	X
3231	Y	G	G	R	B	Y	B	Y	X
3232	Y	G	G	R	B	Y	G	R	X
3233	Y	G	G	R	B	Y	R	R	O
3311	Y	G	G	Y	R	B	B	Y	X
3312	Y	G	G	Y	R	B	G	R	X
3313	Y	G	G	Y	R	B	R	R	O
3321	Y	G	G	Y	G	G	B	Y	X
3322	Y	G	G	Y	G	G	G	R	X
3323	Y	G	G	Y	G	G	R	R	X
3331	Y	G	G	Y	B	Y	B	Y	X
3332	Y	G	G	Y	B	Y	G	R	X
3333	Y	G	G	Y	B	Y	R	R	X

(4) 驗證可能為底的 5 組解：

六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
1123	Y	R	Y	B	G	G	R	R	O
1232	Y	R	G	R	B	Y	G	R	O
1312	Y	R	G	Y	R	B	G	R	O
3233	Y	G	G	R	B	Y	R	R	O
3313	Y	G	G	Y	R	B	R	R	O

(5) 檢驗是不是答案：

A	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1123	Y	R	Y	B	G	G	R	R	O
	1123	6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面			
		甲	Y	R	B	R	Y	G		
		乙	Y	B	G	R	G	Y		
		丙	G	G	R	B	B	Y		
丁	R	R	B	Y	G	R				

B	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1232	Y	R	G	R	B	Y	G	R	X
	1232	6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面			
		甲	Y	R	B	R	Y	G		
乙		G	R	Y	B	G	Y			

丙	B	Y	G	G	R	B
丁	G	R	R	R	B	Y

C	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	1312	Y	R	G	Y	R	B	G	R	X
		6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面			
		甲	Y	R	B	R	Y	G		
		乙	G	Y	Y	B	G	R		
		丙	R	B	G	G	B	Y		
		丁	G	R	R	R	B	Y		

D	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	3233	Y	G	G	R	B	Y	R	R	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	G	Y	R	B	R
乙	G	R	Y	B	G	Y
丙	B	Y	G	G	R	B
丁	R	R	B	Y	G	R

E	六面體	甲		乙		丙		丁		是否正解
	3313	Y	G	G	Y	R	B	R	R	X

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	Y	G	Y	R	B	R
乙	G	Y	Y	B	G	R
丙	R	B	G	G	B	Y
丁	R	R	B	Y	G	R

(二) 自己創造發展一種全新的「究極瘋」遊戲。

1.用五個正八面體

(1) 第一次配置：

玩這種遊戲的目標是把五塊正八面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個側面，都有不同五種顏色！

正八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	B	Y	R	N	R	B	N	B
乙	N	Y	Y	B	B	R	G	N
丙	G	B	G	G	Y	N	Y	R
丁	R	B	B	Y	N	G	B	G
戊	Y	Y	N	R	G	Y	R	Y

(一組側面是指兩個平行相對的面)

經過研究後發現太複雜了，分析完 1024 種配對後，共找到 12 組可能的解，而且必須以亂槍打鳥驗證是否是真正解，不容易找出確實解答。(容易瘋掉，但不好玩，會讓人覺得太難)

(2) 第二次顏色配置(已簡化)

正八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	B	N	N	G	G
乙	R	R	Y	Y	B	B	B	B
丙	Y	Y	N	N	Y	Y	R	R
丁	N	N	R	R	G	G	Y	Y
戊	N	N	G	G	R	R	N	N

再次調整後，外表和難易度都有改變，但無法確定解答只一種。(過度簡單，答案太多)

(3) 第三次顏色配置(有點變難)

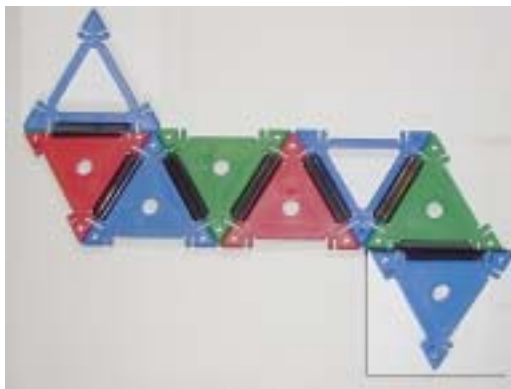
正八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

研究後發現這次應該沒有問題了（不但好玩、看起來又不難，也容易讓人瘋掉!!）

最後我選擇了第三次顏色調整後的 4 組側面。

結果--以五個正八面體為題目設計如下：

5-甲



5-丁



5-乙



5-戊



5-丙



討論--五個正八面體設計

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正八面體有八個面，每個面都為正三角形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有三種不同的排法，所以就僅僅這一個正八面體就有 $3 \times 8 = 24$ 種不同的放置方法，五個疊在一起，不計算這些正八面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^5 = 7962624$ 種排法。

2.推理分析法

（1）分析：

①每塊正八面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對，我們稱它為底。

②根據以上分析,每塊正八面體可以分成 4 組。(上下平行兩面為一組)

八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

（2）統計：

八面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無色 N	合計
甲	2	0	2	2	2	8
乙	2	2	4	0	0	8
丙	2	4	0	0	2	8
丁	2	2	0	2	2	8
戊	2	0	0	2	4	8
顏色總數	10	8	6	6	10	40
需要顏色	6	6	6	6	6	30
多餘顏色	4	2	0	0	4	10

(3) 分組分析:

講解 11111 是什麼意思：第一個 1 是正八面體甲的第一組；第二個 1 是正八面體乙的第二組；

第三個 1 是正八面體丙的第一組；第四個 1 是正八面體丁的第二組；最後的 1 就是正八面體戊的

第一組。

八面體	甲		乙		丙		丁		戊		是否正解
11111	R	R	R	R	Y	Y	N	N	N	N	o
11112	R	R	R	R	Y	Y	N	N	G	R	x
11113	R	R	R	R	Y	Y	N	N	G	R	x
11114	R	R	R	R	Y	Y	N	N	N	Y	x
11121	R	R	R	R	Y	Y	R	G	N	N	x
11122	R	R	R	R	Y	Y	R	G	G	R	x
11123	R	R	R	R	Y	Y	R	G	G	R	x
11124	R	R	R	R	Y	Y	R	G	N	Y	x
11131	R	R	R	R	Y	Y	R	G	N	N	x
11132	R	R	R	R	Y	Y	R	G	G	R	x
11133	R	R	R	R	Y	Y	R	G	G	R	x
11134	R	R	R	R	Y	Y	R	G	N	Y	x
11141	R	R	R	R	Y	Y	Y	N	N	N	x
11142	R	R	R	R	Y	Y	Y	N	G	R	x
11143	R	R	R	R	Y	Y	Y	N	G	R	x
11144	R	R	R	R	Y	Y	Y	N	N	Y	x
11211	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	N	x
11212	R	R	R	R	N	Y	N	N	G	R	x
11213	R	R	R	R	N	Y	N	N	G	R	x
11214	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	Y	o
11221	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	N	x
11222	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11223	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11224	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	Y	x
11231	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	N	x
11232	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11233	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11234	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	Y	x
11241	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	N	o
11242	R	R	R	R	N	Y	Y	N	G	R	x
11243	R	R	R	R	N	Y	Y	N	G	R	x

11244	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	Y	x
11311	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	N	x
11312	R	R	R	R	N	Y	N	N	G	R	x
11313	R	R	R	R	N	Y	N	N	G	R	x
11314	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	Y	o
11321	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	N	x
11322	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11323	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11324	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	Y	x
11331	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	N	x
11332	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11333	R	R	R	R	N	Y	R	G	G	R	x
11334	R	R	R	R	N	Y	R	G	N	Y	x
11341	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	N	o
11342	R	R	R	R	N	Y	Y	N	G	R	x
11343	R	R	R	R	N	Y	Y	N	G	R	x
11344	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	Y	x
11411	R	R	R	R	R	R	N	N	N	N	x
11412	R	R	R	R	R	R	N	N	G	R	x
11413	R	R	R	R	R	R	N	N	G	R	x
11414	R	R	R	R	R	R	N	N	N	Y	x
11421	R	R	R	R	R	R	R	G	N	N	x
11422	R	R	R	R	R	R	R	G	G	R	x
11423	R	R	R	R	R	R	R	G	G	R	x
11424	R	R	R	R	R	R	R	G	N	Y	x
11431	R	R	R	R	R	R	R	G	N	N	x
11432	R	R	R	R	R	R	R	G	G	R	x
11433	R	R	R	R	R	R	R	G	G	R	x
11434	R	R	R	R	R	R	R	G	N	Y	x
11441	R	R	R	R	R	R	Y	N	N	N	x
11442	R	R	R	R	R	R	Y	N	G	R	x
11443	R	R	R	R	R	R	Y	N	G	R	x
11444	R	R	R	R	R	R	Y	N	N	Y	x

(4) 驗證可能為底的 5 組解：

甲	11111	R	R	R	R	Y	Y	N	N	N	N
乙	11214	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	Y
丙	11241	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	N
丁	11314	R	R	R	R	N	Y	N	N	N	Y
戊	11341	R	R	R	R	N	Y	Y	N	N	N

(5) 檢驗是不是答案：

O 1.

八面體 代 號	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
	底		側面		側面		側面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

X 2.

八面體 代 號	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
	底		側面		側面		側面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	N	Y	R	R	N	Y	Y	Y
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	Y	G	R	G	R	N	N

X 3.

八面體 代 號	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
	底		側面		側面		側面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	N	Y	Y	Y	N	Y	R	R
丁	Y	N	R	G	R	G	N	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

X

4.

八面體 代 號	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
	底		側面		側面		側面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	N	Y	Y	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	Y	G	R	G	R	N	N

X

5.

八面體 代 號	第 1 組		第 2 組		第 3 組		第 4 組	
	底		側面		側面		側面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	N	Y	Y	Y	N	Y	R	R
丁	Y	N	R	G	R	G	N	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

2.用六個正八面體

玩這種遊戲的目標是把六塊正八面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個

側面，都有不同六種顏色！

八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	O	B	B
丙	O	O	R	G	R	G	Y	N
丁	O	O	G	O	G	Y	N	Y
戊	N	N	N	Y	O	B	R	R
己	N	N	O	R	N	R	O	O

累積上次失敗的經驗，一試便 OK

結果--以六個正八面體為題目設計如下：

6-甲



6-丁



6-乙



6-戊



6-丙



6-己



討論--六個正八面體設計

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正八面體有八個面，每個面都為正三角形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有三種不同的排法，所以就僅僅這一個正八面體就有 $3 \times 8 = 24$ 種不同的放置方法，六個疊在一起，則有 $24^6 = 191101976$ 種排法，你覺得你猜對的機會很多嗎？

2.推理分析法

（1）分析：

①每塊正八面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對，我們稱它為底。

②根據以上分析,每塊正八面體可以分成 4 組。(上下平行兩面為一組)

八面體	第 1 組	對 面	第 2 組	對 面	第 3 組	對 面	第 4 組	對 面
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	O	B	B
丙	O	O	R	G	R	G	Y	N
丁	O	O	G	O	G	Y	N	Y
戊	N	N	N	Y	O	B	R	R
己	N	N	O	R	N	R	O	O

(2) 統計：

八面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無色 N	橙 O	合計
甲	2	0	2	2	2	0	8
乙	2	2	3	0	0	1	8
丙	2	1	0	2	1	2	8
丁	0	2	0	2	1	3	8
戊	2	1	1	0	3	1	8
己	2	0	0	0	3	3	8
顏色總數	10	6	6	6	10	10	48
需要顏色	6	6	6	6	6	6	36
多餘顏色	4	0	0	0	4	4	12

(3) 分組分析：

講解 111111 是什麼意思：第一個 1 是正八面體甲的第一組；第二個 1 是正八面體乙的第一組；第三個 1 是正八面體丙的第一組；第四個 1 是正八面體丁的第一組；第五個 1 是正八面體戊的第二組；最後的 1 就是正八面體己的第一組。

自 111111 至 444444 共有 $4^6=4096$ 種配對，如果真要分析全部 4096 種配對,恐怕自己先瘋了

第一步刻意設計多餘顏色為紅、橙、無色各四個；換句話說,藍、黃、綠三色不可能出現在底面
所以將第一個正八面體設計如下：

甲	R	R	B	N	B	N	G	G
			⊗		⊗		⊗	⊗

自 211111 至 444444 共有 $3*(4^5)=3072$ 種配對不可能為解。

$$4096-3072=1024$$

將第二正八面體設計個如下：

乙	R	R	Y	B	Y	O	B	B
			⊗	⊗	⊗		⊗	⊗

自 121111 至 144444 共有 $3*(4^4)=768$ 種配對不可能為解，

$$1024-768=256$$

將第三個正八面體設計如下：

丙	O	O	R	G	R	G	Y	N
				⊗		⊗	⊗	

自 112111 至 114444 共有 $3*(4^3)=192$ 種配對不可能為解，

將第四個正八面體設計如下：

丁	O	O	G	O	G	Y	N	Y
			⊗		⊗	⊗		⊗

自 111211 至 111444 共有 $3 \times (4^2) = 48$ 種配對不可能為解，

$64 - 48 = 16$

最後只剩 16 種配對做分析,很快就可以找出唯一答案

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面		第 5 組對面		第 6 組對面		
111111	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	N	o
111112	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	O	R	x
111113	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	R	x
111114	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	O	O	x
111121	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	N	N	x
111122	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	O	R	x
111123	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	N	R	x
111124	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	O	O	x
111131	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	N	N	x
111132	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	O	R	x
111133	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	N	R	x
111134	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	O	O	x
111141	R	R	R	R	O	O	O	O	R	R	N	N	x
111142	R	R	R	R	O	O	O	O	R	R	O	R	x
111143	R	R	R	R	O	O	O	O	R	R	N	R	x
111144	R	R	R	R	O	O	O	O	R	R	O	O	x

(三) 以正六面體為題，自己發展另一系列「立即瘋」遊戲。

1、四種顏色四方塊成柱

玩這種遊戲的目標是把四塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的四個側面，都有不同顏色！

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	G	B	Y	B
乙	R	Y	B	G	B	Y
丙	Y	Y	Y	R	G	G
丁	G	G	R	Y	R	R

結果--以四個正六面體為題目設計如下：

4-甲



4-丙



4-乙



4-丁



討論--四種顏色四方塊成柱

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正六面體有六個面，每個面都為正方形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正六面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^4 = 331776$ 種排法。

2.推理分析法

(1) 分析:

①每塊正六面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對,我們稱它為底。

②根據以上分析,每塊正六面體可以分成 3 組。(上下平行兩面為一組)

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	G	B	Y	B
乙	R	Y	B	G	B	Y
丙	Y	Y	Y	R	G	G
丁	G	G	R	Y	R	R

(2) 統計：

6 面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	合計
甲	2	1	2	1	6
乙	1	2	2	1	6
丙	1	3	0	2	6
丁	3	1	0	2	6
顏色總數	7	7	4	6	24
需要顏色	4	4	4	4	16
多餘顏色	3	3	0	2	8

(3) 分組分析:

講解 1111 是什麼意思：第一個 1 是正六面體甲的第一組；第二個 1 是正六面體乙的第一組；

第三個 1 是正六面體丙的第一組；最後的 1 就是正六面體丁的第一組。

自 1111 至 3333 共有 $3^4=81$ 種配對，將第一個正六面體設計如下：

甲	R	R	G	B	Y	B
---	---	---	---	---	---	---

自 2111 至 3333 共有 $2*(3^3)=54$ 種配對不可能為解。

$$81-54=27$$

將第二個正六面體設計如下：

乙	R	Y	B	G	B	Y
---	---	---	---	---	---	---

自 1211 至 1333 共有 $2 \times (3^3) = 18$ 種配對不可能為解，

$$27 - 18 = 9$$

只需分析 9 種情形,就比原設計輕鬆多了

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面		
1111	R	R	R	Y	Y	Y	G	G	O
1112	R	R	R	Y	Y	Y	R	Y	X
1113	R	R	R	Y	Y	Y	R	R	X
1121	R	R	R	Y	Y	R	G	G	X
1122	R	R	R	Y	Y	R	R	Y	X
1123	R	R	R	Y	Y	R	R	R	X
1131	R	R	R	Y	G	G	G	G	X
1132	R	R	R	Y	G	G	R	Y	X
1133	R	R	R	Y	G	G	R	R	X

2、五種顏色五方塊成柱

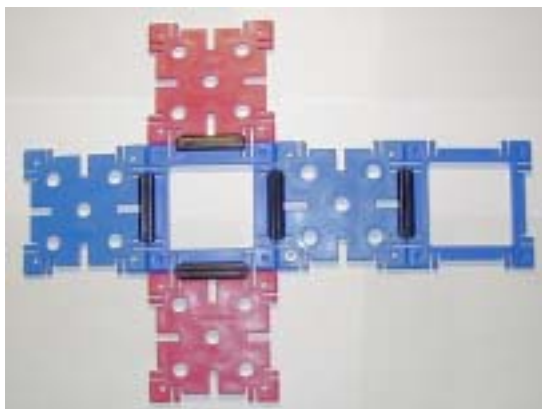
玩這種遊戲的目標是把五塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的五個

側面，都有不同顏色！

正六面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N
乙	R	R	Y	B	Y	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y
丁	N	N	R	G	R	G
戊	N	N	G	R	G	R

結果--以五種顏色五方塊成柱為題目設計如下：

5-甲



5-丁



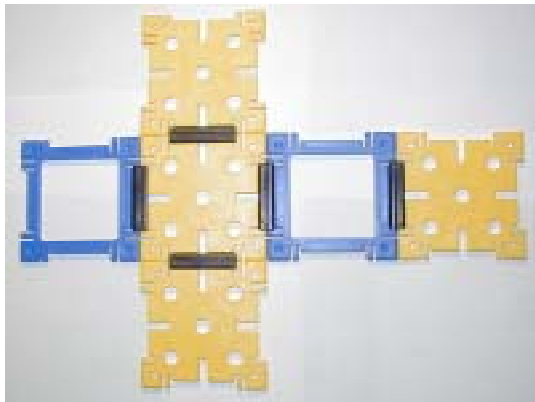
5-乙



5-戊



5-丙



討論--五種顏色五方塊成柱

(略)

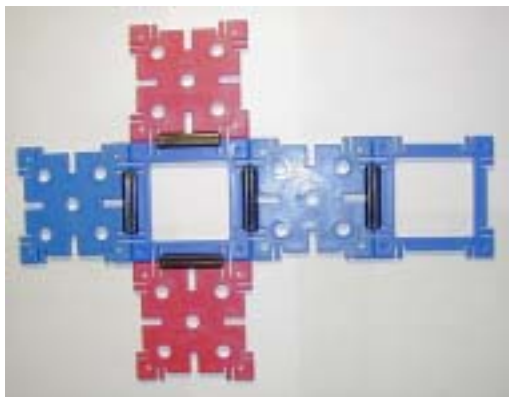
3、 六種顏色六方塊成柱

玩這種遊戲的目標是把六塊正六面體依相對位置相疊或在平面排成一列，使相對位置的六個側面，都有不同顏色！

六面體	第 1 組	對 面	第 2 組	對 面	第 3 組	對 面
甲	R	R	B	N	B	N
乙	R	R	Y	B	Y	O
丙	O	O	R	G	R	G
丁	O	O	G	O	G	Y
戊	N	N	N	Y	O	B
己	N	N	O	R	N	R

結果--以六種顏色六方塊成柱為題目設計如下：

6-甲



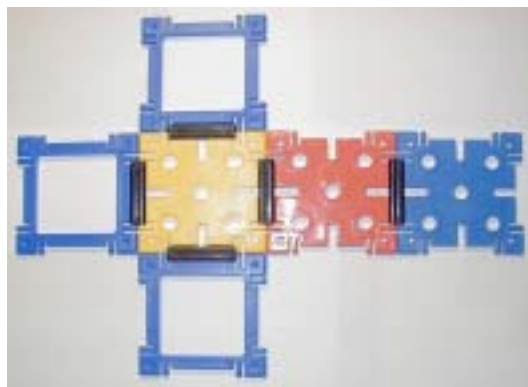
6-丁



6-乙



6-戊



6-丙



6-己



討論--六種顏色六方塊成柱

1.亂槍打鳥法（嘗試錯誤法）：

一個正六面體有六個面，每個面都為正方形，當我們將它旋轉，每個面朝上考慮相對位置都有四種不同的排法，所以就僅僅這一個正六面體就有 $4 \times 6 = 24$ 種不同的放置方法，四個疊在一起，不計算這些正六面體彼此之間的排列關係，也要有 $24^6 = 191102976$ 種排法。

2.推理分析法

(1) 分析:

①每塊正六面體不會出現的兩面,是上下分別平行的一對,我們稱它為底。

②根據以上分析,每塊正六面體可以分成 3 組。(上下平行兩面為一組)

八面體	第 1 組	對 面	第 2 組	對 面	第 3 組	對 面
甲	R	R	B	N	B	N
乙	R	R	Y	B	Y	O
丙	O	O	R	G	R	G
丁	O	O	G	O	G	Y
戊	N	N	N	Y	O	B
己	N	N	O	R	N	R

(2) 統計：

八面體編號	紅 R	黃 Y	藍 B	綠 G	無色 N	橙 O	合計
甲	2	0	2	0	2	0	8
乙	2	2	1	0	0	1	8
丙	2	0	0	2	0	2	8
丁	0	1	0	2	0	3	8
戊	0	1	1	0	3	1	8
己	2	0	0	0	3	1	8
顏色總數	8	4	4	4	8	8	48
需要顏色	4	4	4	4	4	4	24
多餘顏色	4	0	0	0	4	4	12

(3) 分組分析:

講解 111111 是什麼意思:第一個 1 是正六面體甲的第一組;第二個 1 是正六面體乙的第一組;第三個 1 是正六面體丙的第一組;第四個 1 是正六面體丁的第一組;第五個 1 是正六面體戊的第二組;最後的 1 就是正六面體己的第一組。

自 111111 至 333333 共有 $3^6=729$ 種配對,如果真要分析全部 729 種配對,恐怕自己先瘋了
第一步刻意設計多餘顏色為紅、橙、無色各四個;換句話說,藍、黃、綠三色不可能出現在底面
所以將第一個正六面體設計如下:

甲	R	R	B	N	B	N
---	---	---	---	---	---	---




自 211111 至 333333 共有 $2 \times (3^5) = 486$ 種配對不可能為解。

$$729 - 486 = 243$$

將第二個正八面體設計如下：

乙	R	R	Y	B	Y	O
			⊗	⊗	⊗	

自 121111 至 133333 共有 $2 \times (3^4) = 162$ 種配對不可能為解，

$$243 - 162 = 81$$

將第三個正八面體設計如下：

丙	O	O	R	G	R	G
			⊗		⊗	

自 112111 至 113333 共有 $2 \times (3^3) = 54$ 種配對不可能為解，

$$81 - 54 = 27$$

將第四個正八面體設計如下：

丁	O	O	G	O	G	Y
			⊗	⊗	⊗	

自 111211 至 111333 共有 $2 \times (3^2) = 18$ 種配對不可能為解，

$$27 - 18 = 9$$

最後只剩 9 種配對做分析,很快就可以找出唯一答案

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面		第 5 組對面		第 6 組對面		
111111	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	N	o
111112	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	O	R	x
111113	R	R	R	R	O	O	O	O	N	N	N	R	x
111121	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	N	N	x
111122	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	O	R	x
111123	R	R	R	R	O	O	O	O	N	Y	N	R	x
111131	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	N	N	x
111132	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	O	R	x
111133	R	R	R	R	O	O	O	O	O	B	N	R	x

柒、討論：

一、進行解題時，常常為配對方式太多而覺得好難，因此，嘗試從相對面和「底」的方式著手。應用「顏色表格化分析」和「分組分析」後，我們找到了不會發瘋的解題策略，並進而設計出全新且更多種顏色，更多數量的「立即瘋」和「究極瘋」。

二、「底」顏色更多變化的「究極瘋」，如何再減少檢驗次數，希望可以很快找到更好的方法與策略。

三、益智遊戲新變化，將「立即瘋」重新用更多顏色、更多塊數，進而發展成正八面體的「究極瘋」，難度雖然增加很多，但也更有挑戰和趣味，尤其可發展成一系列學習活動，而研究過程提供有效和有效率的解題策略。

捌、結論

本作品透過實作和有意義的分析，開發出益智遊戲的新世界，到目前為止，得到以下的結論

一、正六面體的「立即瘋」遊戲

(一) 原設計的「立即瘋」，共有 24^4 種配對，找出所有答案的檢驗次數是

$3^4 + 2^4 \times 5 = 161$ (次)，而檢驗結果恰有一組解。

(二) 用直接進入法想找到另一組唯一解的「立即瘋」遊戲很不容易；用正八面體「究極瘋」反向簡化的過程，很快可以找到另一組唯一解設計的「立即瘋」遊戲

(1) 四種顏色四方塊成柱型的「立即瘋」遊戲。示例如下：

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	G	B	Y	B
乙	R	Y	B	G	B	Y
丙	Y	Y	Y	R	G	G
丁	G	G	R	Y	R	R

(2) 五種顏色五方塊成柱的「立即瘋」遊戲。示例如下：

6 面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N
乙	R	R	Y	B	Y	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y
丁	N	N	R	G	R	G
戊	N	N	G	R	G	R

(3)六種顏色六方塊成柱的「立即瘋」遊戲。示例如下：

六面體	第 1 組	對 面	第 2 組	對 面	第 3 組	對 面
甲	R	R	B	N	B	N
乙	R	R	Y	B	Y	O
丙	O	O	R	G	R	G
丁	O	O	G	O	G	Y
戊	N	N	N	Y	O	B
己	N	N	O	R	N	R

二、自己設計正八面體「究極瘋」遊戲主要過程如下：

(一) 全新五個的正八面體「究極瘋」：

1. 五個正八面體疊成一柱，所有配對關係有 $(3 \times 8)^5 = 7962624$ 種排法。
2. 以相對面為一組，正八面體可以找到相對面的四組配對。
3. 先分析不出現在「可視區」(必須被看到的側面)，可以為「底」的上下一組。
4. 統計出哪些面必須放上下；哪些面必須放側面。
5. 分組分析，並找出可以比檢驗次數更少的設計分析次數。
6. 驗證過程確認找到的「究極瘋」是惟一解。下圖是全新「究極瘋」的一種

八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	B	B	B
丙	Y	Y	N	Y	N	Y	R	R
丁	N	N	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	G	R	G	R	N	Y

7. 用這種過程，我們可以找到另一組全新「究極瘋」是惟一解。

八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	Y	R	B	N	B	N	G	R
乙	R	N	Y	B	Y	B	R	B
丙	N	R	G	Y	G	Y	B	G
丁	R	Y	R	G	R	G	Y	N
戊	N	N	N	R	N	R	N	Y

(二) 六個的正八面體「究極瘋」：

我發現可以簡化新「究極瘋」的設計流程，直接由分組分析著手，於是我找到六顏色六正八面體的新「究極瘋」

八面體	第 1 組對面		第 2 組對面		第 3 組對面		第 4 組對面	
甲	R	R	B	N	B	N	G	G
乙	R	R	Y	B	Y	O	B	B
丙	O	O	R	G	R	G	Y	N
丁	O	O	G	O	G	Y	N	Y
戊	N	N	N	Y	O	B	R	R
己	N	N	O	R	N	R	O	O

(三)以顏色加以分組分析，可以較容易設計，再更新的「立即瘋」和「究極瘋」。

三、最後經過驗證，我可以確定題目是沒有問題，上面的研究發現解答果然只有一個，合乎標準；容易讓人瘋掉（通常都是不分析題目就開始亂湊的人），當然會懂得分析的人就會覺得既好玩又有趣，這個遊戲做的應該還算成功！希望對這種益智遊戲有興趣的人，能繼續研究、創新！

玖、展望：

本作品由分析解決四塊正六面體的「立即瘋」遊戲，延伸至創作自己的「立即瘋」和「究極瘋」，改變固定數量和型式，發現一片新園地，充分感受到過程的辛苦和喜悅！

本作品可持續發展其他不同顏色配對，然後一序列變成分析推理的學習活動。

拾、參考資料

1. 林志忠 著 (民 89): 學習策略在資優兒童過程導向教學的應用，112~122 頁。國立新竹師範學院特殊教育中心 印行。
2. Wickelgren 著(汪賢馴譯)(1984)：怎樣解難題。科學月刊社，台北。

