

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國小-數學科

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：立體”錐”緝令

關 鍵 詞：圓錐台、伸縮杯、旋轉體

編號：080405

學校名稱：

臺南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者姓名：

翁貴貞、顏慕忻、李旭雅、陳冠宜、李宗樺

指導老師：

何鳳珠、蔡焜明



立體“錐”緝令

壹、摘要

我們一直認為生活中到處充滿著數學的知識，在課堂上我們探討過人體的黃金比例、地圖上的座標與比例尺、校園面積的估測、大自然中的圓、市場上斤兩的換算、環島旅行的時間路程計畫．．．等等，在圓柱圓錐單元，珍珠奶茶的杯子被提及，引發大家熱烈的討論，因此計畫研究，希望延續課內教材，對圓錐台做進一步的探究。

在整個實驗研究過程中，我們發現杯子（圓錐台狀）的側面展開圖是由同心圓過圓心截取的環狀片所組成的，且隨著截取同心圓角度的不同，杯子的斜度也會有所不同。在探索圓錐台的體積時，我們也能利用到六下課程中的【比例概念】將圓錐台的體積給推算出來，且與實測的值相去無幾，是令我們感到興奮的。當我們再深入應用在伸縮杯上時，更發現了層與層之間的交接處也是一門學問，當同心圓越大，截取的同心圓角度要愈小，所形成的伸縮杯就會越完美，同時我們也運用了一點技巧讓我們所製作的伸縮更具有藝術美觀的價值哦

貳、研究動機

我們一直認為生活中到處充滿著數學的知識，在課堂上我們探討過人體的黃金比例、地圖上的座標與比例尺、校園面積的估測、大自然中的圓、市場上斤兩的換算、環島旅行的時間路程計畫．．．等等，我們發現數學真的是無奇不有，由討論中也感受到數學的樂趣。在【圓柱與圓錐】單元裡，我們這一組努力上網找尋許多相關資料以做上臺報告的依據，課堂上正當大家即將秀完自己準備的資料時，老師順手拿起一杯珍珠奶茶，問我們 這個杯子的側面展開圖會是什麼形狀呢？全班開始又陷入一片爭辯，你一言我一句的猜測著，哪一組的答案對呢？老師要我們馬上動手剪出我們認為的形狀並組合起來，結果 全部擯龜 沒有一組做出一個較完整的杯子狀，大家栽了個跟斗後，決定好好去探索到底怎麼一回事！！

參、研究目的

- (一)探討各種立體圖形的側面展開圖。
- (二)探討倒圓錐台的製作方式，以及各種裁截面組成形體的差異。
- (三)如何運用倒圓錐台的組合方式製作一個伸縮杯。

肆、研究設備及器材

圓規、長尺、有孔的長尺、電動機、珍珠板數塊、量角器、紙杯、珍珠奶茶的杯子(大、中、小各 2 個)、伸縮杯、A4 粉彩紙數張、A3 粉彩紙數張、全開粉彩紙數張、剪刀、膠帶、數位相機、白紙、繩子、

伍、研究過程方法及結果

在數學課室中探索圓柱圓錐的同時，一個珍奶的杯子引起大家很大的討論，因此在大家的共識下，提出一些想要深入探索的問題，包括：杯子的側面展開圖為何種形體？如何裁剪紙張去圍成一個杯子狀的形體？裁切的角度及大小會影響杯子的外形嗎？更進一步的是，我們發現市面上的伸縮杯及雨傘折疊套每一層都與杯子形體相似，它是如何截切組成的呢？這些都是我們所欲探究的部分。

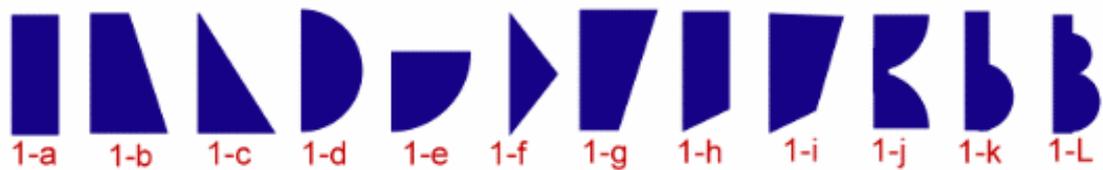
研究一：探討各種立體圖形的側面展開圖。

探索 1-1：立體圖形的產生（本研究探討以圓錐及圓柱為主軸）

要捏一個長方體的杯子並不難，但是要捏好一個圓柱形的杯子就不是很容易了，以捏陶為例，必須要利用旋轉台才能捏出一個平滑的圓甕或瓷盤，因此我們想到設計許多平面圖形，觀察它經過旋轉後會產生什麼樣的形體。

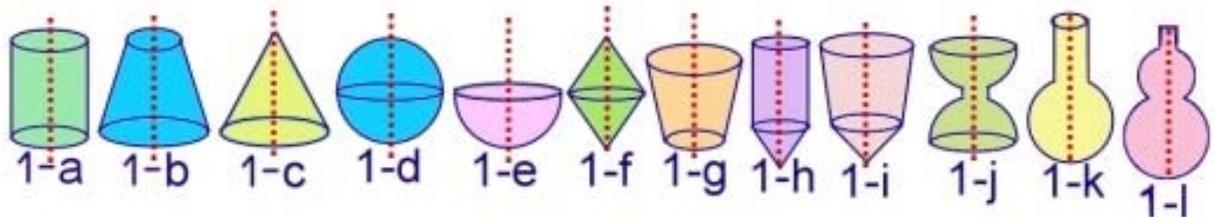
方 法：

- 1.製作一個電動旋轉器。
- 2.利用珍珠板裁出各種平面圖形，扣在馬達器的軸心上旋轉，觀察其產生的形體。



實驗結果與發現：

我們觀察各平面圖形經過快速旋轉後，產生了視覺上的立體圖形，這些立體圖形叫做旋轉體，如圓柱、圓錐或球．．．等，它們有一個共同的特性，即是垂直旋轉軸橫切此旋轉體，其橫截面都是圓形。

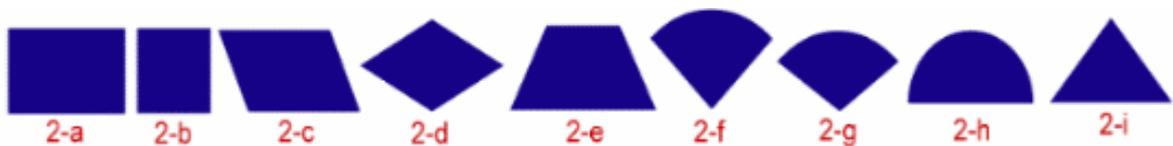


探索 1-2：各種平面圖形圍成的形體與圓柱圓錐有何差異？

在課本中探討圓柱的側面展開圖是長方形，而圓錐的側面展開圖是扇形，那麼其他的平面圖形圍起來又是怎樣的形體呢？

方 法：

1. 設計各種常見的平面圖形(以一組對邊等長為條件，以便可以接合)。



2. 先猜測其圍起來可能形成何種立體圖形。
3. 實際進行黏合並觀察記錄。

實驗結果與發現：

1. 分別將上面八個圖形等長的邊黏接起來，所形成的圖形如下：



2. 我們發現不只是長方形 2-a 可以圍成圓柱體，其他如正方形 2-b、平行四邊形 2-c、菱形 2-d、也都可以圍成圓柱體。
3. 等腰梯形 2-e 圍起來像杯子的樣子，可是又不太像。
4. 2-f、2-g、2-h 三者猜測可以圍成圓錐形，但實際上只有 2-f 和 2-h 可以圍成圓錐形，而 2-g 只是有點像圓錐形，但不完全是。
5. 2-f、2-g、2-h 三者看起來都像扇形，但為什麼只有 2-g 卻組不出完整的圓錐體呢？我們仔細推敲且查證，扇形的定義是以圓心為頂點，兩條半徑為

邊，將圓形特殊分割成如扇子形狀的區域就稱為扇形，而圖 2-g 的交接點並非是圓心所在，所以無法圍出一般所見的圓錐體。

探索 1-3：圓錐台(如珍珠奶茶的杯子)的側面展開圖又是什麼形狀？

當我們被珍珠奶茶的杯子形體栽了個大跟鬥時，努力地去查證資料，原來它是倒立的【圓錐台】。所謂的【圓錐台】就是與圓錐的底面平行切斷時，剖口到底面的部分，叫做圓錐台，其兩個底面都是圓形。至於它的側面展開圖是什麼圖形呢，書上倒是沒提到，於是我們來揭開它的謎底。

方 法：

1. 依珍奶的杯子外觀先進行推測其側面展開圖可能是什麼圖形？
2. 圖形揭曉 將珍奶的杯子實際劃開驗證其形體

實驗結果與發現：

1. 珍奶的杯子其側面展開圖會是什麼的圖形呢？大夥兒依其特徵猜測可能有
下列的幾種可能：

(1)杯子的上方是圓形，下方也是圓形，與圓柱有點相類似，所以側面展開可能是一個上長下短的梯形(如右圖)，這個答案是大多數的認為。



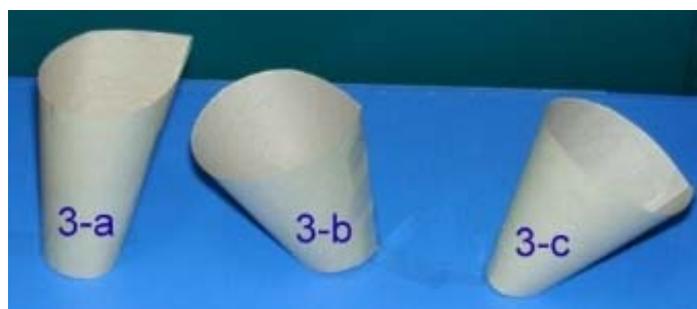
(2)杯子的兩個稜線若向底端繼續延伸，則可能會交於一點，它可能類似圓錐體，只是被截掉一部分，所以側面的展開圖可能是上下皆是雙圓弧，而稜線等長的圖形所組成的(如右圖)。



(3)側面的展開圖應該像是一面扇子被以直線橫切成兩半那塊形體(如右圖)。



- 2.我們實際製作上面三個猜測圖形，進行組成，則成為下圖。似乎都不是很像杯子的形體。



當我們將珍奶的杯子剪開時發現其側面的展開圖比較像上述第二類的形狀(也就是上下都是彎曲的弧形)，只是弧度沒有那麼大罷了。



研究二：探討倒圓錐台的製作方式，以及各種裁截面組成形體的差異。

倒圓錐台的側面展開圖是一個上下雙弧線，且稜線等長的圖形，因此我們嘗試改變圖形的彎曲弧度以及弧線的長短來製作各種形體，觀察所圍出的形體之間有何不同，並且探討如何截切出可以組成圓錐台的側面圖形。

探索 2-1：如何做出一個杯子狀的倒立圓錐台呢？

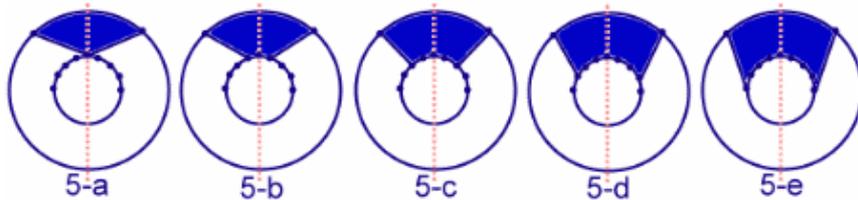
由上面實驗中我們知道要圍出一個杯子狀的立體模型必須是上下皆是圓弧的圖形，因此我們開始設計相似的圖形去嘗試製作出一個杯子的模型。

方 法：

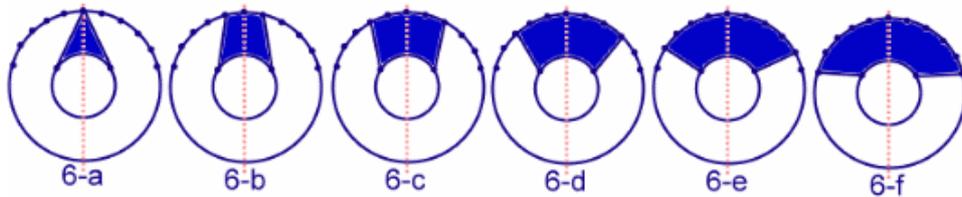
1. 以梯形為主軸，同時改上下兩底的彎曲弧度，觀察組合起來的圖形。



2. 製作二個同心圓，固定外弧的弧長，改變內弧的長度，觀察組合起來的圖形。



3. 製作二個同心圓，固定內弧的弧長，改變外弧的長度，觀察組合起來的圖形。

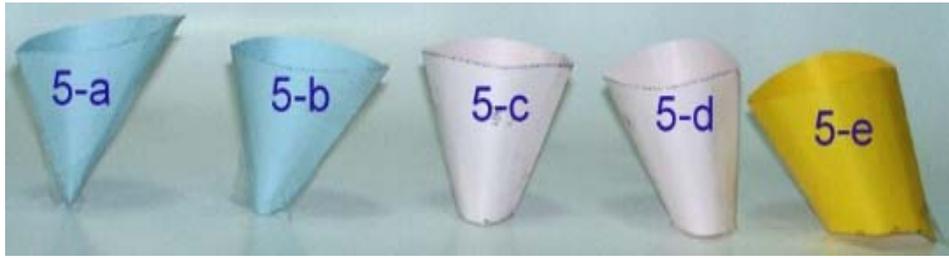


實驗結果與發現：

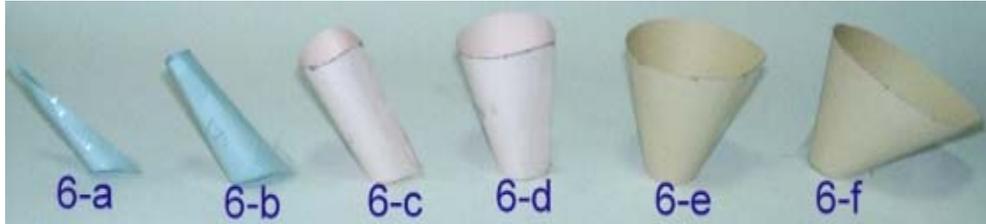
1. 在 4-a 4-e 中，以弧度較小的 4-a 最接近倒圓錐台。



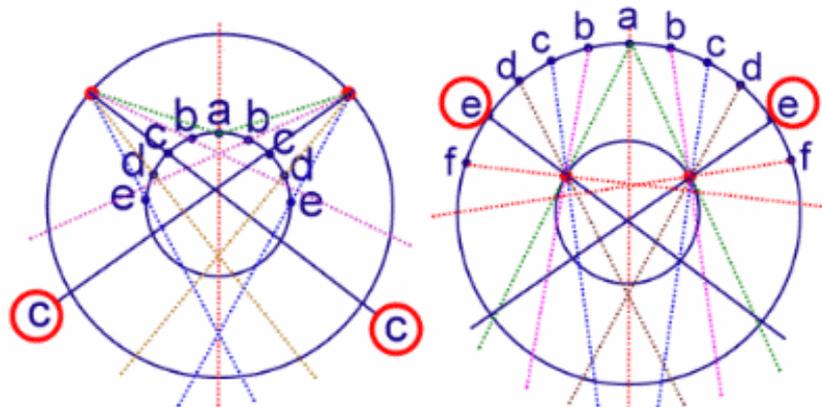
2. 弧度愈大，圍起來時且其側面交接處會往下凸出，導致底部就無法完全貼緊地面。
3. 在 5-a 5-e 中，以 5-c 圍起來最接近倒圓錐台，且內弧的弧長愈大，相對的弧度也愈大，則兩稜線交接處底端愈尖且凸出，有點像傳統鋼筆的筆頭。



3. 在 6-a 6-f 中，則以 6-e 圍起來最接近倒圓錐台。



4. 探究為何只有 5-c 和 6-e 的圖形圍起來像倒圓錐台，我們發現因為 5-c 和 6-e 的圖形其稜線的延長線交點非常接近圓心（如下圖），所以若要做成形如倒圓錐台的杯子，只要利用同心圓，過圓心去截取邊線所成的圖形即能圍成一個倒圓錐台。



探索 2-2：不同圓心角的環狀片所組成的倒圓錐台有何不同？

由上一個活動中我們知道，想要圍成一個倒圓錐台，我們得通過圓心的半徑來截取圖形的邊線，因此，我們接著想知道，取不同角度或不同稜線長度又有何不同？

方 法：

角度不同

以大半徑為 20 公分，小半徑為 12 公分（即稜線為 8 公分）的同心圓為主，分

別取 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{8}$ 的環狀片圍成一個倒圓錐台。

稜線長度不同

以大半徑為 20 公分，分別畫出小半徑為 15 公分、10 公分、5 公分的同心圓，

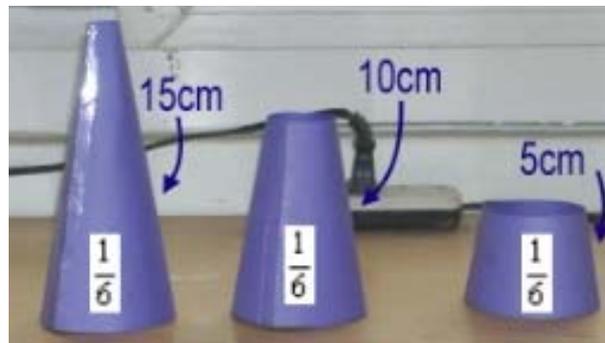
截取 $\frac{1}{6}$ 的環狀片分別圍成倒圓錐台。

實驗結果與發現：

1. 由下圖中（環狀片對應的圓心角不同時）我們可以發現，杯子的斜度會隨著截取角度的大小而改變。取的角度愈大（如 $\frac{1}{2}$ 的區塊）則杯子的斜度愈大，而在稜線長度固定下，斜度愈大，則杯子的高度愈低。



2. 由下圖中我們可以發現，取相同角度的環狀片，稜線長度愈長，則杯子愈高。至於斜度，因對角的角度相等，所以斜度是相同的，只要將所形成的杯子互相疊合即可看出。



探索 2-3：推測三種珍奶的杯子是用多大的同心圓做成的，是幾分之幾圓？

我們很好奇，這個珍奶杯子側面的展開圖究竟用多大半徑的同心圓做成的呢？環狀片取的同心圓角度又是如何呢？因此我們著手下去推估，並且實際操作測量。

方 法：

1. 先將三個大小不同的珍奶杯子疊合起來觀察其斜度是否相同。
2. 將三種珍奶的杯子剪開來，分別黏貼在白紙上，並沿著二邊的邊線畫延長線交於一點，此點即圓心。
3. 測量其同心圓的大圓半徑及小圓半徑各是多少？
4. 使用量角器分別度量其圓心角度。
5. 重複上述的步驟，測量紙杯。

實驗結果與發現：

1. 當三個珍奶的杯子疊合在一起時，可以發現杯子之間的斜度並不相同（如下圖），我們可以猜測其截取同心圓的角度可能不同。

2. 將杯子一一展開後，測量後的數據如下：

《下表的半徑指同心圓的大半徑及小半徑，非杯子的口徑。》

杯子	大半徑	小半徑	度數	全圓的多少
大杯	51.5 cm	34.5 cm	30°	全圓的 $\frac{1}{12}$
中杯	35 cm	22.5 cm	45°	全圓的 $\frac{1}{8}$
小杯	29.2 cm	18.8 cm	55°	全圓的 $\frac{1}{6}$
衛生杯	21.7 cm	14.5 cm	54°	全圓的 $\frac{1}{7}$



我們可以發現，四種杯子的口徑大小都不相同，取的角度也不一樣。同時也可以印證問題五所產生的結論：截取的角度愈大，則其杯子的斜度會愈斜，所以小杯或衛生杯的斜度都較中杯大杯的斜度大（由上圖的三個杯子的疊合狀況也可以看出）。



3. 由於大杯的材質無法展開，一展開攤平即裂成塊，因此我們利用重製的方法將粉彩紙繞在杯的外圍，剛好把杯子都圍住，然後再攤開來測量，而這些測量的數據都只是個大約的數值。



探索 2-4：我們如何求得倒圓錐台的體積呢？

以珍奶的杯子為例，除了使用量筒或量杯外，我們如何用數學的方式來算出它們的體積呢？也希望藉此對市面上的茶坊所推出容量的賣價進行比對，是否符合實際的杯量。

方 法：

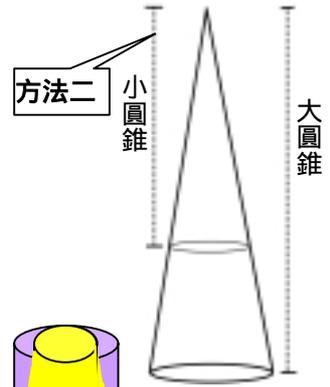
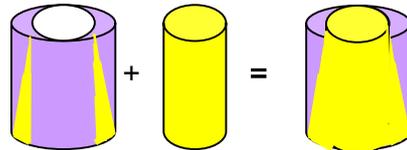
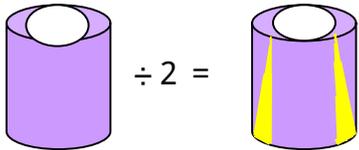
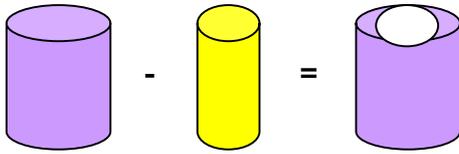
方法一：小圓圓柱體積 + (大圓圓柱體積 - 小圓圓柱體積) ÷ 2

方法二：大圓錐 - 小圓錐

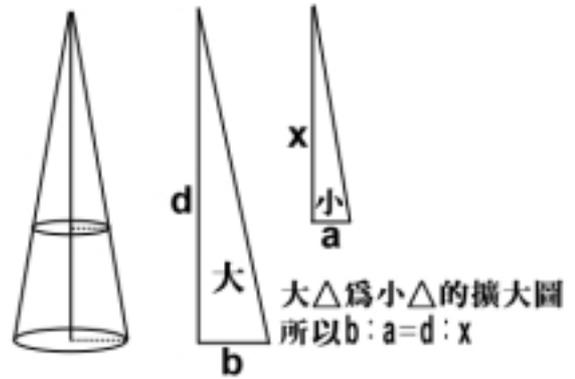


方法三：以量杯進行實測

說明 1：由下列的圖中，我們認為方法一是可以求出圓錐台的體積的。



說明 2：利用延伸圓錐台的稜線交接於一點，可以形成一個圓錐，利用相似圖形的比例關係，找到小圓錐的高度（圓錐台的高度即為杯子的高度），即能利用方法二求出圓錐台的體積。



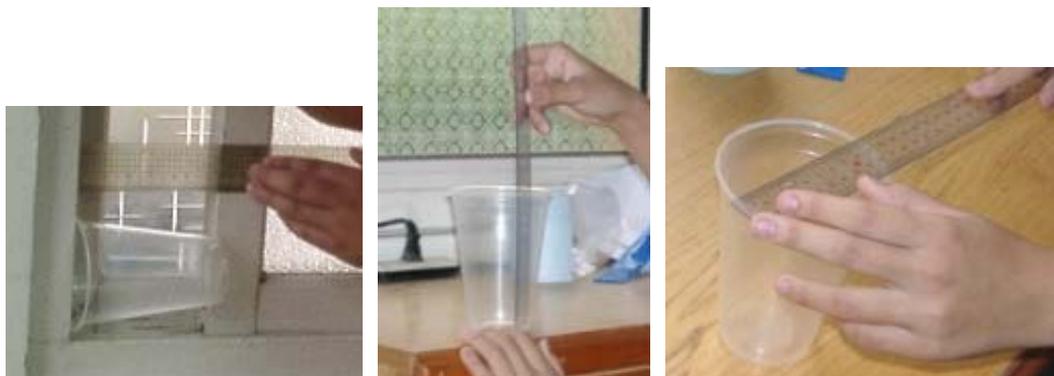
實驗結果與發現：

1. 實際測量結果如下表：

種類	半徑 cm		高(即圓錐高)	小圓錐高	方法一 (cm ³)	方法二 (cm ³)	方法三實測 (cm ³)
大杯	大(即杯口)	4.35	16.5	35.56	大約 723.3324	大約 707.6296	700
	小(即杯底)	3					
中杯	大(即杯口)	4.35	12.5	20.49	大約 514.4203	大約 497.0423	500
	小(即杯底)	2.7					
小杯	大(即杯口)	4.35	9.7	19.57	大約 411.8683	大約 398.977	395
	小(即杯底)	2.85					
紙杯	大(即杯口)	3.25	7.5	13.64	大約 176.3012	大約 170.752	170
	小(即杯底)	2.1					

- 由於較缺乏精準的儀器來測量，所以多少產生了一些誤差。
- 由上表我們發現方法一測出來的數值幾乎都比方法二的數值大，而方法二的數值比較接近方法三的實測，我們覺得很納悶，難到我們想出來的“利用圓柱體積求圓錐台的體積”的方法有誤呢？於是我們去請教老師們，到底問題出在哪裡？老師提到與積分有關，但是積分這個概念並不是我們所能懂的，所以老師就利用電動旋轉器及畫圖的方式讓我們理解，原來我們的想法並非是正確的(討論過程如附件十一)
- 我們可以發現與市面上實際標示的容量有出入，一般標示大杯是 750c.c，但實際上只有 700c.c，更何況通常他們也不會裝滿滿的，而一般標示小杯是

350c.c，但實際上測量起來已到達將近 400c.c。所以大杯的量並未是小杯的 2 倍，但賣價確是小杯的 2 倍，所以買小杯的會比較划算囉



研究三：如何運用倒圓錐台的組合方式製作一個伸縮杯。

我們可以發現伸縮杯的每一個環套皆是一個個的倒圓錐台形體，層與層之間又能剛好扣緊，到底每一個倒圓錐台之間的口徑差距多大，用多大的圓、取多大的圓心角所製作出來的伸縮杯最符合我們的需求是我們探討的重點。

探索 3-1：伸縮杯或伸縮雨傘套其構造與圓錐台有些相似，我們如何製作一個相類似且實用的伸縮杯？

在探索這些圓錐台時，我們突然想到伸縮杯及伸縮雨傘套，仔細觀看它的每一層似乎都是圓錐台，於是我們開始討論怎樣才能製作出個一個伸縮杯。我們思考了各種模式，形成共識，決定採用下列三種方法來製作。

方 法：

方法一：

等同心圓分別取不同角度($\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{9}$ 、 $\frac{1}{10}$)作組合

A、以大半徑 20 公分，小半徑 15 公分畫一同心圓，分別取其 $\frac{1}{2}$ 圓、 $\frac{1}{3}$ 圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、

$\frac{1}{5}$ 圓、 $\frac{1}{6}$ 圓、 $\frac{1}{7}$ 圓、 $\frac{1}{8}$ 圓、 $\frac{1}{9}$ 圓、 $\frac{1}{10}$ 圓，組成一個伸縮杯。

B、以大半徑 10 公分，小半徑 5 公分畫一同心圓，分別取其 $\frac{1}{2}$ 圓、 $\frac{1}{3}$ 圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、

$\frac{1}{5}$ 圓、 $\frac{1}{6}$ 圓、 $\frac{1}{7}$ 圓、 $\frac{1}{8}$ 圓、 $\frac{1}{9}$ 圓、 $\frac{1}{10}$ 圓，組成一個伸縮杯。

方法二：

等同心圓且成等差的角度($\frac{8}{16}$ 、 $\frac{7}{16}$ 、 $\frac{6}{16}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{4}{16}$ 、 $\frac{3}{16}$ 、 $\frac{2}{16}$ 、 $\frac{1}{16}$)作組合

C、以大半徑 20 公分，小半徑 15 公分畫一同心圓，分別取其 $\frac{8}{16}$ 圓、 $\frac{7}{16}$ 圓、 $\frac{6}{16}$

圓、 $\frac{5}{16}$ 圓、 $\frac{4}{16}$ 圓、 $\frac{3}{16}$ 圓、 $\frac{2}{16}$ 圓、 $\frac{1}{16}$ 圓，組成一個伸縮杯。

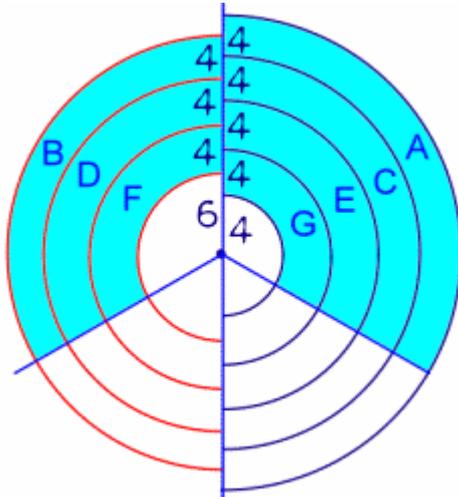
D、以大半徑 10 公分，小半徑 5 公分畫一同心圓，分別取其 $\frac{8}{16}$ 圓、 $\frac{7}{16}$ 圓、 $\frac{6}{16}$ 圓、 $\frac{5}{16}$ 圓、 $\frac{4}{16}$ 圓、 $\frac{3}{16}$ 圓、 $\frac{2}{16}$ 圓、 $\frac{1}{16}$ 圓，組成一個伸縮杯。

方法三：

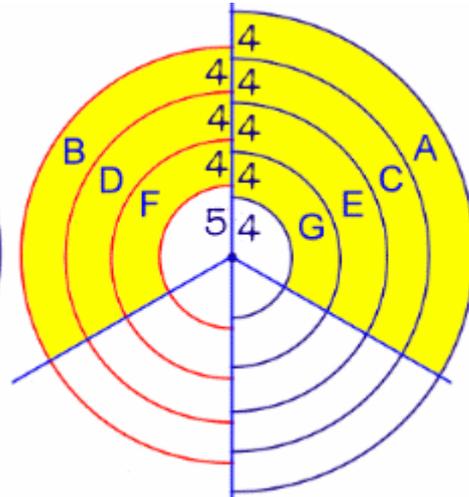
以相同角度但不同半徑長作組合

E、以 $\frac{1}{3}$ 圓為主，同心圓最外圍半徑 20 公分，固定邊線長為 4 公分，大半徑逐一遞減邊線的一半，如圖 E

F、以 $\frac{1}{3}$ 圓為主，同心圓最外圍半徑 20 公分，固定邊線長為 4 公分，大半徑逐一遞減邊線的 $\frac{3}{4}$ ，如圖 F



【圖 E】



【圖 F】

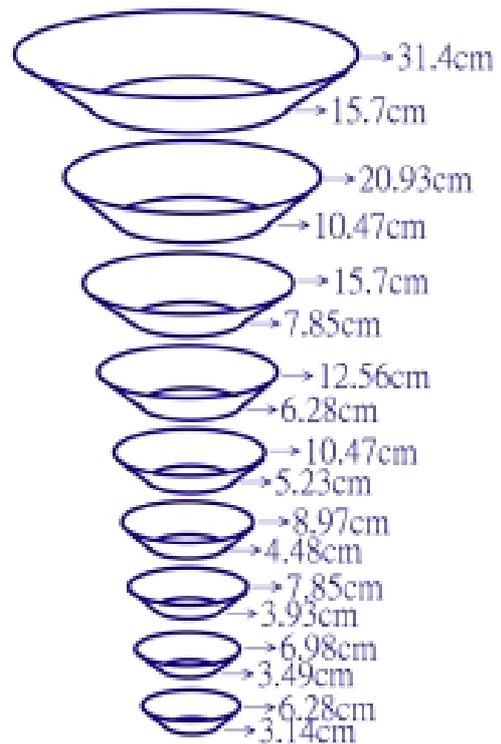
實驗結果與發現：

1. 由方法一作出來的【成品 A】中，我們發現 $\frac{1}{2}$ 環和 $\frac{1}{3}$ 環的接合處相差太大， $\frac{1}{3}$ 環和 $\frac{1}{4}$ 環的接合處相差也太大了，所以無法順利扣住，因此我們一一分解其每一個環節來探究其可能的原因。





【A 圖】



【B 圖】

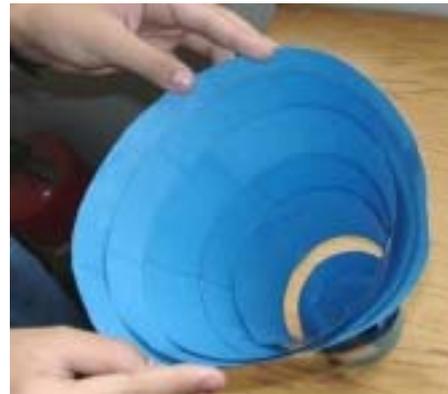
- 由【A 圖】中我們可以看到 $\frac{1}{2}$ 圓環的下環是 47.1cm 而 $\frac{1}{3}$ 圓環的上環約是 41.9cm，我們都知道摺疊杯的下層圓環的上環要和上層圓環的下環扣緊，所以 $\frac{1}{3}$ 圓環的上環是必須大於 $\frac{1}{2}$ 圓環的下環的。
- 由【B 圖】可以看出，環環都可以相扣，但是愈到下層有拖不出來的感覺，探究其原因是，從但是 $\frac{1}{6}$ 圓環開始以下的圓環其上環皆很接近上一個圓環的上環，例如 $\frac{1}{7}$ 圓環的上環和 $\frac{1}{6}$ 圓環的上環只差距約 1.5cm，而與 $\frac{1}{6}$ 圓環的下環差距約 3.6cm，要能扣在一起且重疊部分愈少的話，需要下面圓環的上環與上面圓環的下環愈接近愈好，所以【A 圖】和【B 圖】組起來的效果都不是很好。
- 方法二組出的【成品 C】和【成品 D】似乎也都有些問題，我們將每一個環節的大小列表出來，再探究其原因



【成品 C】大半徑 20cm 小半徑 15cm

	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$
上環	3.75 cm	7.5 cm	11.25 cm	15 cm	18.75 cm	22.5 cm	26.25 cm	30 cm
下環	2.81 cm	5.63 cm	8.44 cm	11.25 cm	14.06 cm	16.88 cm	19.69 cm	22.5 cm

$\frac{1}{16}$ 與 $\frac{2}{16}$ 、 $\frac{2}{16}$ 與 $\frac{3}{16}$ 、 $\frac{3}{16}$ 與 $\frac{4}{16}$ 都無法交接，因為前一個圓環的上環都比後一圓環的下環小，所以無法扣住，直到 $\frac{4}{16}$ 與 $\frac{5}{16}$ 兩環才能扣住。



【成品 D】大半 10cm 小半 5cm

	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$
上環	1.88 cm	3.75 cm	5.63 cm	7.5 cm	9.38 cm	11.25 cm	13.13 cm	15 cm
下環	0.94 cm	1.88 cm	2.81 cm	3.75 cm	4.69 cm	5.63 cm	6.56 cm	7.5 cm

由上表中我們可以看到 $\frac{1}{16}$ 和 $\frac{2}{16}$ 兩環交接處一樣大，所以並無法扣住。同時

我們可以發現，杯子愈上方愈難拉出（即紋路的距離愈來愈近），這是因為較

恰當的是下圓環的上環與上圓環的下環大且差距愈小愈好，但

從上表中 $\frac{5}{16}$ 圓環開

始到 $\frac{8}{16}$ 圓環其上環

與上環的差距都不大，所以組合起來就有環與環之間很密集的現象。



5. 方法三組出來的【成品 E】和【成品 F】比較接近我們要的伸縮杯，但是這兩種還是有一點小瑕疵，我們一樣將其各圓環之上下環大小列表來探究：

【成品 E】逐一在 $\frac{1}{2}$ 處交錯

	G	F	E	D	C	B	A
上環	16.75cm	20.93cm	25.12cm	29.31cm	33.49cm	37.68cm	41.87cm
下環	8.373cm	12.56cm	16.75cm	20.93cm	25.12cm	29.31cm	33.49cm



我們發現所作出來的伸縮杯已經成形了，唯一美中不足的是斜度過斜，與一般的杯子差距較大，而且層層之間疊合部分占了一半，另一點是比較不易拉緊，這可能與斜度有些關係。

【成品 F】逐一在 $\frac{1}{4}$ 處交錯

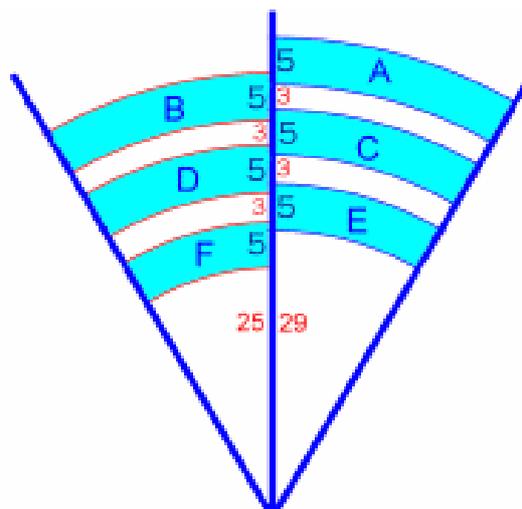
	G	F	E	D	C	B	A
上環	16.75cm	18.84cm	25.12cm	27.21cm	33.49cm	35.59cm	41.86cm
下環	8.373cm	10.46cm	16.75cm	18.84cm	25.12cm	27.21cm	33.49cm



由成品 F 中我們可以發現整個疊疊杯的架構比較紮實，要拉緊不成問題，但很奇特的是重疊部位的大小時大時小，由上表中可以看到 G 與 F 重疊部分是約 6cm, F 與 E 重疊部分約 2cm, E 與 D 重疊部分約 6cm, D 與 C 重疊部分約 2cm... 以此類推(由圖 F 中也可以看出來，最底層 G 的下弧與 F 的下弧差距不大)，所以出現有兩環兩環緊密的現象，不過樣子倒也是挺好看的，只是有大半部分的紙張浪費了。

探索 3-2：如何將伸縮杯改良變得更完美，更像一般的杯子？

之前所做的伸縮杯，杯口稍嫌過大，杯底過窄，疊合時杯與杯之間的空隙過大，容易掉落，針對這些缺點，檢討其原因可能上弧與下弧的差距過大的緣故，因此我們做了以下的改良：



方 法：

1. 加大同心圓，最外圈半徑為 50 公分，取 $\frac{1}{12}$ 圓的大小，目的是使杯子的斜度小一點。
2. 邊線以 5 公分為主，每一環與每一環交接處為 1 公分（如右圖）。

實驗結果與發現：

1. 我們將每一環節的上環與下環列表如下：

	F	E	D	C	B	A
上環	15.7cm	17.79cm	19.89cm	21.98cm	24.07cm	26.17cm
下環	13.08cm	15.18cm	17.27cm	19.36cm	21.46cm	23.55cm

這次組出來的形體最棒，也最符合我們的需求，層層相扣處都約 0.5 - 1cm 左右，在斜度造形上也相當符合目前所使用的杯子，由於每層高度是 5 公分，六層組起來相當高，所以我們可以依我們的需求作組合，例如：若需要喝少量的水，則用 DEF 組起來即可，若要喝大量的水，則可選用 ABC 組起來，若要適中，則可以說用 CDE 或 BCD 等，可說是相當方便，若再加上底部的設計，也許可以成為一個專利品哦。





分成兩個更棒，比較不會太高，太完美了！！

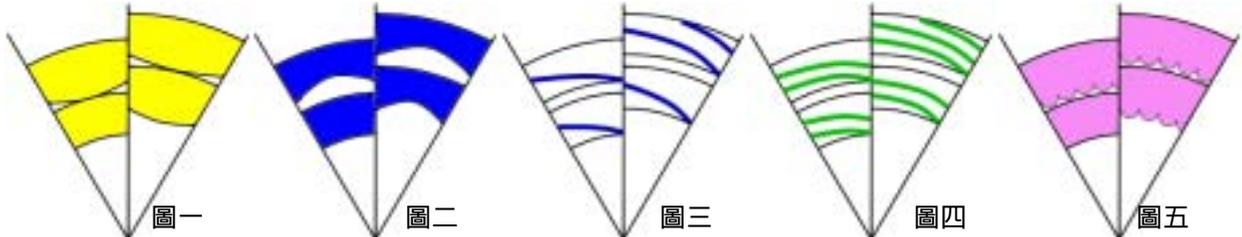


探索 3-3：變化紋路，美化伸縮杯。

探索 3-2 所做出來的伸縮杯已符合我們的需求，現在進一步探索如何才能改變伸縮杯的造型呢？使它變得更具美感！

方 法：

1. 以探索 3-2 的製作圖為架構，在每層的下弧作內凹造型及外凸造型。如圖一、圖二。
2. 不改變外型，只在側面上設計螺旋造型，改變視覺效果。如圖三、圖四。
3. 利用花邊剪刀沿著每層的下弧剪出造型。如圖五。



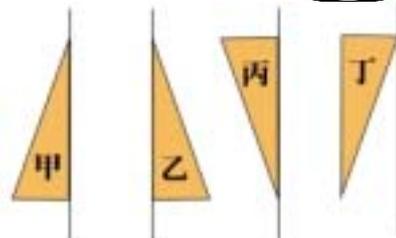
實驗結果與發現：

1. 要改變下弧做出內凹及外凸的造型，就得把重疊處加寬，以免上下層無法順利扣緊，而且內凹與外凸的造型做起來大同小異，只是內凹的造型層與層之間較容易脫落，因為內凹的下弧弧度加大，則越接近下層的上弧，所以較不易扣緊。
2. 在不改變外型而直接在側面上畫出螺旋造型，其效果不輸內凹及外凸的造型，做起來反而容易。且層與層之間還可自由旋轉，也會產生不同的美感。
3. 利用造型剪來剪出有曲線的下弧，組起來的杯子也很不錯哦

陸、討論

- 一、一般圓柱的側面展開圖是長方形，是因為我們以垂直上下底面直線切開的方式，因而形成長方形，若我們使用斜切的方式，展開來之後不會是長方形，而是平行四邊形，所以我們認為圓柱的側面展開圖是平行四邊形，這要比展開圖是長方形要來得貼切些。
- 二、有些圖形很扇形，但實際上它不是扇形，因為它的兩個側邊並非是圓形的半徑，所以組合起來的圓形，有斜一邊的現象，據我們查證，那種斜的圓錐形叫做斜圓錐，其側面的展開圖並非是扇形，所以這種斜圓錐不在我們的探討範圍內。
- 三、在探索 2-3 中，我們試著將珍奶的杯子剪開攤平，但我們發現由於是塑膠模子成型的關係，似乎無法完全攤平貼緊桌面，我們只有盡力用膠帶貼平，所以在測量上多少有一些誤差，測出來的值只能是個大約的值。
- 四、由於我們所使用的尺規工具並非很精準，所以多少有些誤差，在畫大圓時，我們克服了小圓規的限制，運用長尺打孔以及繩子綁鉛筆的方式來解決。
- 五、在測量杯子的體積時，我們曾運用利用窗櫺夾住杯子的方式來找出高度和直徑，經計算後發現與實際用量杯測量杯子容積時有些誤差，我們檢討其原因是因為杯子內側的底部與杯子外部的底還是有些微的差距，雖是一個小小的數據但幾經計算過後影響的數值可能就很大，所以我們不得不注意。另外在測量杯子的底面直徑時，我們只用直尺大約估算圓內最長的距離當成直徑，但這種方式多少也會產生一些誤差。
- 六、再無法將大杯子展開來測量的情況下，所以我們嘗試將長尺架在杯子的兩邊，使其交於一點，我們猜想這一點可能是圓心，為了求證我們的假設是對的，所以我們拿一個小杯子來測試，在不剪開的情況下用直尺架在兩邊取得一個交點，發現此交點與原先展開圖畫出的圓心是不同，所以我們推翻了先前的假設，改選一個較適當的方式，即是再製一個杯子模型，再來展開測量。

- 七、利用圓柱體體積來求得圓錐台的體積，所得的數值比實測要大，其原因是右圖圖中，圓錐台體積扣除中間小圓柱的體積並不等於內外夾層的一半，但是一般人的錯覺都認為是一半，實際上利用下圖的旋轉體就能判斷得出來，我們可以得清楚得知甲乙丙三圖旋轉出來是一個圓錐體，但丁旋轉出來外表看起來是個圓柱，實際上並非是實心圓柱，中間漏空的部分是一個圓錐，由於圓錐體積是圓柱體積的 $\frac{1}{3}$ ，所以可以知道丁圖的旋轉體體積是甲圖的



二倍，所以我們利用圓柱體體積所求出來的圓錐台體積要比實測來得大。

- 七、我們發現一般泡沫紅茶店標示的大杯(750c.c 20元)、中杯(500c.c 15元)、小杯(350c.c 10元)，事實上杯子容量有所出入，大杯容量頂多到 700c.c, 而小杯

的實際容量大約是 400c.c，可以看得出來，大杯的價錢是小杯的 2 倍，但其容量並未到達 2 倍，所以聰明會精打細算的人會選擇買 2 杯小杯的，而不買一杯大杯的，至於中杯的，比起小杯而言也是不划算了，以小杯為主，400c.c 賣 10 元，那麼 15 元可以買 600c.c，但中杯是 15 元，可是只有 500c.c.所以當然不划算囉

八、在探索 3-3 中，嘗試改變伸縮杯的造型之時，要注意上下環之間的銜接。若弧度過大時，有可能造成杯子之間無法扣緊，一方面為了讓杯子能扣緊，所以我們加大了重疊部分的長度，讓杯子更有伸縮的空間。

柒、研究結果：

- 一、平面圖形在同一平面上的一直線為軸旋轉一周所成的立體是經由旋轉之後即能形成一個旋轉體，一般我們所看到的圓柱、圓錐及球都屬於是旋轉體。
- (二)圓柱的側面展開圖不一定是長方形，得看你怎麼剪開其側面的：若是垂直上下底面剪開，則展開圖是一個長方形；若是斜向剪開，則展開圖是一個平行四邊形；但若以不規則方式剪開，則展開圖就沒有一個固定形狀了。
- (二)杯子的側面展開圖並非是長方形，也不是扇形，更不是梯形，而是由同心圓過圓心截取環形的一個區塊。
- (三)當我們取同心圓不同角度組成的杯子斜度會改變，其原因是內弧與外弧的差距會愈來愈大。
- (四)從同心圓中取環形區塊角度愈大，則組成杯狀的斜度就愈斜。
- (五)當我們取同心圓等角度但稜線不等長所組成的杯子斜度都相同，但其高度不一樣
- (六)想要測量杯子的容積，除了用量筒外，我們也可運用數學方式計算出來，只要量出上下兩底面的直徑及杯子的高度，再利用相似圖形邊長成比例的原理找出大小圓錐的高度，即可利用大圓錐體積 - 小圓錐體積找出圓錐台的體積。
- (七)當上弧與下弧的長度愈接近時（也就是截取的角度愈小，如 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{12}$ ），則組成的杯子斜度愈接近圓柱形體的杯子
- (八)利用同心圓截取各不同角度（ $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ ……）的環狀片圍成圓錐台進行組合，若同心圓半徑很大，相對的角度間弧長的差距也會愈大，那麼做出來的圓錐台有些無法扣緊，因其銜接的內外環差距過大。
- (九) 想要製作一個實用的疊疊杯，選用的同心圓盡量大，截取的角度要固定，大約在 $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{15}$ 之間較恰當（斜度才不會過斜），層與層之間的重疊部分以不超過 1 公分為原則，且採用如活動九的方式截取最方便，而且省紙。

捌、參考文獻

- 1.何武明 圖解算數第4集 75年9月初版
- 2.新編光復科學圖鑑1數.,形 光復書局出版
- 3.數學教學指引(六年級第11冊) 國立編譯館主編
- 4.數學教學指引(六年級第12冊) 南一書局主編
- 5.昌爸工作坊(<http://netcity1.web.hinet.net/UserData/lsc24285/>)

【附件一】

實驗過程觀察記錄

討論主題：要使用什麼用具才能順利產生各種旋轉體呢？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/04

老師：T1、T2

整理：B

E：可以用小電動機啊！我們自然課之前不是有上到！

B：對了！也可以用小電風扇的軸心呀！只要把前面那個拆掉就行了！

E：那可能沒辦法唷！因為那個軸心可能太短，離心力會把它轉走。

D：我有把橡皮擦插在上面過，它就一直轉，離心力好像不會把它帶走

E：有可能是橡皮擦比較重比較厚的關係呀

D：可能吧.....

A：那可以試試麥當勞的玩具呀！十分滴安全

C：拜託 那個會不會太慢呀！

D：噢 那個自動攪拌機應該可以試試看！

C：那好像可以更換軸心。

B：那果汁機呢？

A：不過怕有刀片。

B：那「好像」可以拆下來！

A：只不過是「好像」而已啊！

C：我也記得「好像」不能拆。

B：哎呀 都可以啦

C：要不然用腳踏車好了，自己DIY！

T：天啊！！

E：拜託 那還不如用竹蜻蜓

D：有一種陀螺，它轉得很快，可以試試看

A&E：哦 違禁品厚 (A&E 乃前任與今任之班長也)

D：噓

T：好像都不錯

T：不過電動機好像比較穩定。

T：那目前就用電動機試試看吧！

T：而其他的辦法請各位同學回家想想看是不是最好的！！

【附件二】

實驗過程觀察記錄

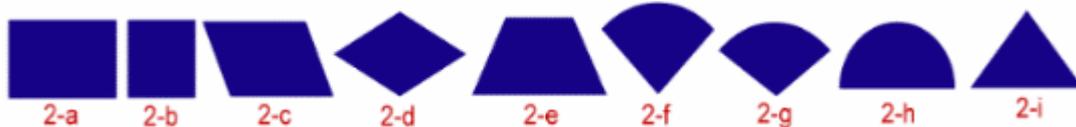
討論主題：下列圖形圍起來可能形成何種立體圖形。

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/05

老師：T1、T2

整理：C



2-a 圓柱體（大家的共識）

2-b 也是圓柱體，只是比 2-a 窄一點（大家的共識）。

2-c （C）斜的圓柱體。

（B）有可能無法接起來，因為兩邊是歪的。

2-d （C）還是很像斜的圓柱體。

（B）無法接起來，因為邊太斜了。

2-e （大部分人）像一個圓錐台（就好像倒蓋的杯子）。

（E）圍起來是一邊直立一邊斜的立體圖形。

2-f 是一個圓錐（大家的共識）

2-g 也是一個圓錐，所成的圓錐比 2-f 圍起來的圓錐還寬（大家的共識）

2-h 也是一個圓錐，比前兩個更寬（大家的共識）

2-i （D）可能像一個圓錐，一邊直立的，一邊斜的。

（E）三角形很難組合起來啦

T：分配下去，每人挑 1 2 個圖形，實際剪圖形並組合，看看誰猜得最準

實驗過程觀察記錄

討論主題：圓柱的側面是長方形嗎？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/07

老師：T1、T2

整理：C

D：廢話嘛 當然是長方形囉 課本是這麼教的，而且我們也剪過附件組合過呀。

T：有沒有側面的展開圖是別種形狀？

B：我覺得圓柱側面展開圖也可能是平行四邊形啊，因為我們上個活動不是猜猜看嗎？本來我們都猜錯的，後來平行四邊形組起來的結果真的是一個圓柱耶 所以我認為展開圖是長方形，也可能是平行四邊形。

D：平行四邊形是長方形的一種，所以展開圖用長方形來總括是對的！！

C、E：喂 什麼平行四邊形是長方形的一種啊？？你爸爸算是你兒子嗎？你弄反了，應該是長方形是平行四邊形的一種啦！！

D：哦 不小心說錯的啦，有什麼好大驚小怪的？難到你們不會說錯話嗎？

T：那圓柱的側面展開圖有沒有可能是菱形呢？

C：當然有可能呀，因為菱形也是平行四邊形的一種啊！你只要將圓柱斜切就有可能切成菱形。

T：那麼你們認為課本上說圓柱的側面展開圖是長方形有何看法？

E：我覺得經我們這樣求證後應該改成展開圖是平行四邊形才對。

A：我想課本上會那麼說，應該是指垂直剪開吧，只要垂直剪開，那麼就會形成長方形，那若要仗展開圖變成平行四邊形，那麼就不能垂直上下底面將圓柱剪開了，必須剪斜的才行。

E：剪斜的？？噢？老師，若我剪彎彎曲曲的，那麼展開是怎樣的圖形呢？

<大家愣了一下>

T：你們認為呢？

B：剪剪看就知道了。

C：若我把它依螺旋形來剪，那會怎麼樣啊？

T：你說呢？各位的看法呢？

A：好像就亂七八糟了，這樣就沒有一個固定的形體可以回答了。

D：我若剪成鋸齒狀呢？...

C：看來好像無法說出所以然來，若規定要剪直的，則展開圖是長方形；若可以剪斜的，則可以是平行四邊形；若不做限制，就沒有一個正確答案了。

T：我想課本用長方形多少有它的理由吧 當然平行四邊形也可以組成圓柱了，大家不可否認的。

【附件四】

實驗過程觀察記錄



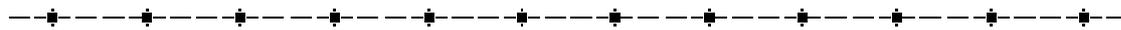
討論主題：如何知道杯子是用多大的同心圓做成的？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/11

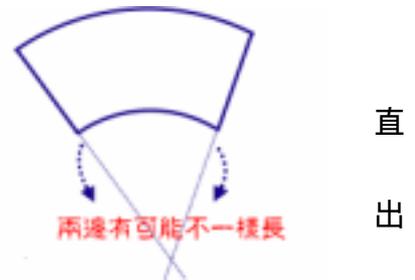
老師：T1、T2

整理：B



D：很簡單啊，只要將杯子剪開，把其側面展開來，再沿著兩稜線畫延長線，其交接點就是圓心了，有了圓心就可以測半徑了呀！

B：那不一定啊，有可能你畫出來的並不平均，如右圖：



D：那是因為你要剪開杯子的時候出了問題，你沒有垂直杯口去剪，就是要剪直線啦，不可以剪歪啦

C：對啊，最好是先拿直尺在杯口處畫垂直線，比較不會差錯！

E：知道是多大的同心圓就好辦了呀 只要知道是多大的同心圓，那麼也就知道圓心在哪裡了，知道圓心也就等於知道直、半徑，那當然就量的出角度啦！知道角度後，就大概知道是幾分之幾圓啦！

A：(說的好像很簡單，不知道『記』的人混累嗎？真是滴 ^_^).....

A：既然大概知道從何下手了，那就開始做了吧！！

【附件五】

實驗過程觀察記錄



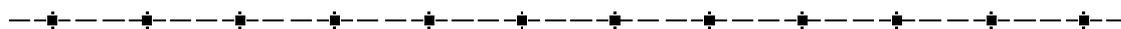
討論主題：大杯子材質展開不易，要如何求得是用多大圓作成的呢？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/12

老師：T1、T2

整理：A



E：把它展開來壓平，碎了的部分再拼組好不就得了！

B：不行，這樣一來誤差會比較大。

D：那不然用電熨斗燙平就得得了。

B：喂 你很白目哦 這是塑膠耶，一燙下去就融了。

D：不然用我的屁股坐平也可以，只要你們願意不嫌棄的話，我很樂意 哈哈

A：別傻了 老師 我們可不可以不展開杯子，直接延長杯子的斜度，然後會交於一點，那一點應該是圓心吧 那麼不就可以找出大杯的圓心圓大小半徑了！

T：好像有點道理耶 不妨做做看！

全體又出動了

一陣子後 有找到交點了

T：你如何證明這個交點和展開圖所畫出來的交點會一樣呢？

D：感覺上就是一樣的呀

T：做實驗就要講求證據的。

E：老師 現在的問題是出在大杯子無法剪開來，那麼若我們拿一個一樣大小的杯子，只是材質是可以剪的，那是不是可以呀？

C：現在上哪兒找呀？？

E：嗯 那麼我們可不可以仿做一個呢？用粉彩紙繞在外面做一個一樣的形體，然後再剪開它，不就和其他杯子一樣了嗎？

T：各位同意嗎？

B：E 不鳴則已，一鳴驚人呀 佩服了！這個重責大任就交給你了。

E：*..&\$.#...@

【附件六】

實驗過程觀察記錄



討論主題：我們如何求得倒圓錐台的體積呢？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/14

老師：T1、T2

整理：A



我們可以發現整個圓錐台的體積大約是小圓柱的體積再加上斜稜線與垂直邊多出來的那個部分，相當於是大圓柱體積與小圓柱體積的差的一半，寫成一個完整的式子就如下：

$$\text{圓錐台的體積} = \text{小圓圓柱體積} + (\text{大圓圓柱體積} - \text{小圓圓柱體積}) \div 2$$

D：用量筒直接量啊

T：若手邊沒有量筒怎麼辦？

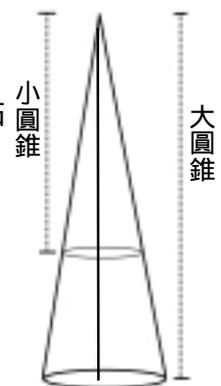
B：其實圓錐台感覺上就像一個圓錐被攔腰斬過一樣，不是嗎？那麼我們可以利用圓錐體積公式（上次宇蟬查資料查到的），先算出整個大圓錐的體積，再求出上面小圓錐的體積，然後兩個相減不就得了

E：那你得要先找到大圓錐的頂點啊，而且我們也要想辦法知道它的高，它的高不是用尺直接靠在旁邊量出來就可以呀，它的高是在底點到底面的垂直距離，問題是你有把握測到垂直距離嗎？

D：噢？要求高這太容易了，就將它架在窗櫺上用直尺就可以量了！

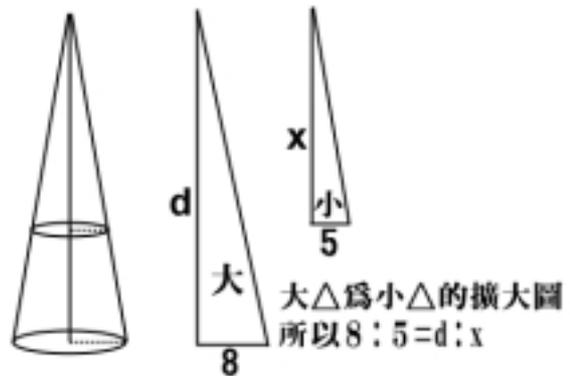
C：可是你說的大圓錐是虛擬的呀，它只有下面這個圓錐台而已！

D：也許我們可以畫將杯子畫在紙上，不就很容易可以看出來了嗎？



E：雖然我們可以知道下面圓錐台的高度，但是我們無法知道上面小圓錐的高度呀，小圓錐的高度不知道，那麼大圓錐的高度也就別知道了！

D：等一下，我們不是有教了比例概念嗎？圓錐圖右半邊的平面像個三角形，一個大三角形，一個小三角形，而且這兩個三角形相似，那麼我們就可以用邊長成比例的方式找出小圓錐的高度了呀！



冠直：那要怎麼算呀？

D：如果小半徑是 5，大半徑是 8，那麼我們就可以知道大三角形是小三角形的 1.6 倍擴大圖，那麼大圓錐的高(d)就會是小圓錐(x)的 1.6 倍，我們要求小圓錐的高，就把小圓錐的高當成是 x，那麼大圓錐的高(d)就是 1.6 個 x，那麼圓錐台的高度就是 0.6 個 x，當我們量得圓錐台的高度時，就可以知道 x 是多少了！那要算圓錐的體積只要代入圓錐體積公式就行了。

T：嗯 有道理，可以試試看。

B：老師我有一個想法，下底是大圓，上底是小圓，若下底往上就會變成一個大圓柱，上底往下就會變成一個小圓柱，我可不可以用大圓柱減小圓柱啊？

C：哇 那中間的部分是不是就是圓錐台的體積了 哦 好像不太對耶！

E：我覺得用大圓柱 - 小圓柱，還要再除以 2

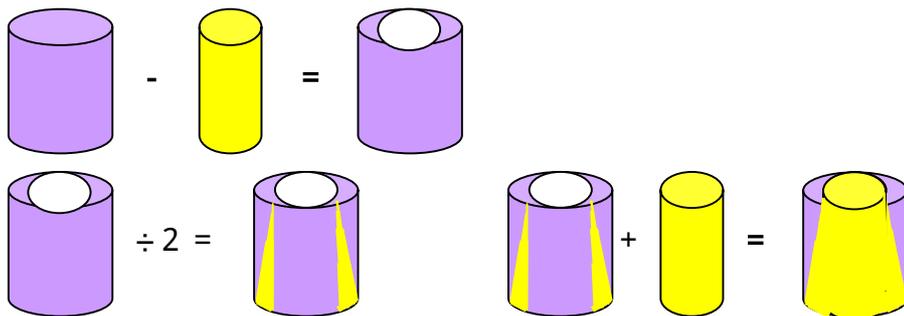
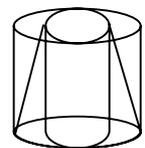
C：噢 對哦，只要除以 2 就可以得到圓錐台的體積了。

A：我覺得這樣好像不是圓錐台的體積耶，這樣好像只有外圍的體積而已。

B：啊 我知道了，只要再加上中間小圓柱的體積就是了。

C：對耶，好像很有道理

D：那整理一下就是用 (大圓柱 - 小圓柱) ÷ 2 + 小圓柱 = 圓錐台的體積



C：那就不必用到圓錐的公式了呀 我們真是太厲害了 連國高中的東西，我們用小學的方式就可以給它搞定了。

T：也許你們可以用這兩種方法去試試，找出圓錐台的體積，然後再用量杯實際測試，驗證一下，看看實測出來的體積有沒有和計算出來的體積一樣。

B：那我們就分兩組下去做好了。

T：嗯，這個建議不錯，B 跟 C 一起用你們想出來的方法來做，也就是用圓柱的方法來找體積，而 D 和 E 比例概念比較強，就用圓錐公式下去做，A 負責測量及總紀錄。

【附件七】

實驗過程觀察記錄

討論主題：如何能正確找出珍奶杯子上下底面的直徑和高呢？

成員：A、B、C、D、E

日期： 91/03/18

老師：T1、T2

整理： B

B：可以把尺架在杯口，找到最長的那條線，那條線不就是直徑了咩

A：那還不如直接畫在白紙上，對折再對折，還比較快呢

B：對厚！

E：那不也就也可以用之前老師教我們的「窗戶法」！

C：喔 對對對！就是把杯子架在窗戶上，再量窗戶的距離就行了嗎！

D：不過那會不會跑掉然後就不準了呀！

A：所以還是用「白紙」的方法比較好！嗯嗯

B：以此類推，高不就也可以用「窗戶法」量出來！而且量高還比量直徑準確ㄟ！！

C：也可以用尺啊！尺的底部不是垂直的嗎！那就『伸』進去，然後

再用一把尺平放在杯口，就可以知道高是多少了呀 如圖：

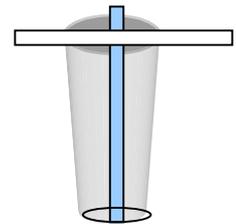
E：也可以把它剪開並展開，然後再量上弧與下弧之間的距離不就是高了嗎！

D：厚唷 這樣不行啦！這樣量起來就不是高了，而是斜邊的長度ㄟ！斜邊比高還要長一點ㄟ

E：是喔.....

C：看樣子只有我的方法行唷 厚厚厚（尖笑中！！）

B：妳就別臭屁了！！「窗戶法」也行呀



【附件八】

實驗過程觀察記錄

討論主題：如何畫出很大的圓？

成員：A、B、C、D、E

日期： 91/03/20

老師：T1、T2

整理： A

E：用老師上課在用的大圓規，只是把粉筆換成鉛筆就好了

D：好像有一點粗魯耶，大材小用

A：不是有一種尺，上面每一公分上都有一個圓洞，好像可以畫圓耶

$$980.3747 - 466.29 = 514.0847 \dots \text{大圓柱} - \text{小圓柱}$$

$$514.0847 \div 2 = 257.0424 \dots \text{外圍的一半}$$

$$257.0424 + 466.29 = \boxed{723.3324} \dots \text{大杯的體積}$$

$$\text{【中杯】: } 4.35 \times 4.35 \times 3.14 \times 12.5 = 742.708175 \dots \text{大圓柱體積}$$

$$2.7 \times 2.7 \times 3.14 \times 12.5 = 286.1325 \dots \text{小圓柱體積}$$

$$(742.708175 - 286.1325) \div 2 = 228.2878375 \dots \text{大小差的一半}$$

$$228.2878375 + 286.1325 = \boxed{514.4203375} \dots \text{中杯的體積}$$

$$\text{【小杯】: } 4.35 \times 4.35 \times 3.14 \times 9.7 = 576.3415 \dots \text{大圓柱體積}$$

$$2.85 \times 2.85 \times 3.14 \times 9.7 = 247.3951 \dots \text{小圓柱體積}$$

$$(576.3415 - 247.3951) \div 2 = 164.4732 \dots \text{大小差的一半}$$

$$247.3951 + 164.4732 = \boxed{411.8683} \dots \text{小杯的體積}$$

$$\text{【紙杯】: } 3.25 \times 3.25 \times 3.14 \times 7.5 = 248.746875 \dots \text{大圓柱體積}$$

$$2.1 \times 2.1 \times 3.14 \times 7.5 = 103.8555 \dots \text{小圓柱體積}$$

$$(248.746875 - 103.8555) \div 2 = 72.445685 \dots \text{大小差的一半}$$

$$72.445685 + 103.8555 = \boxed{176.30118} \dots \text{紙杯的體積}$$

【附件十】

實驗過程觀察記錄

討論主題：利用圓錐體積來求圓錐台的體積實際記錄

成員：A、D、E

日期：91/03/20

老師：T1、T2

整理：D、E

種類	大杯	中杯	小杯	紙杯
大半徑(大 的底)	4.35	4.35	4.35	3.25
小半徑(小 的底)	3	2.7	2.85	2.1
圓錐台高	16.5	12.5	9.7	7.5
幾倍擴大圖(大 底÷小 底)	1.45	1.61	1.53	1.55
小圓錐高	36.67	20.49	18.30	13.64
大圓錐高	53.17	32.99	28	21.14

假設小圓錐的高為 x ，則：

(大杯)大圓錐高為 $1.45x$ ， $1.45x - x = 0.45x = 16.5$ ，所以 $x = 36.67$ $36.67 + 16.5 = 53.17$

(中杯)大圓錐高為 $1.61x$ ， $1.61x - x = 0.61x = 12.5$ ，所以 $x = 20.49$ $20.49 + 12.5 = 32.99$

(小杯)大圓錐高為 $1.53x$, $1.53x - x = 0.53x = 9.7$, 所以 $x = 18.30$ $18.30 + 9.7=28.77$
 (紙杯)大圓錐高為 $1.55x$, $1.55x - x = 0.55x = 7.5$, 所以 $x = 13.64$ $13.64 + 7.5=21.14$

【大杯體積】

$4.35 \times 4.35 \times 3.14 \times 53.17 \div 3 = 1053.061 \dots$ 大圓錐體積
 $3 \times 3 \times 3.14 \times 36.67 \div 3 = 345.4314 \dots$ 小圓錐體積
 $1053.061 - 345.4314 = 707.6296 \dots$ 大圓錐台體積

【中杯體積】

$4.35 \times 4.35 \times 3.14 \times 32.99 \div 3 = 653.3851 \dots$ 大圓錐體積
 $2.7 \times 2.7 \times 3.14 \times 20.49 \div 3 = 156.3428 \dots$ 小圓錐體積
 $653.3851 - 156.3428 = 497.0423 \dots$ 大圓錐台體積

【小杯體積】

$4.35 \times 4.35 \times 3.14 \times 28 \div 3 = 554.5554 \dots$ 大圓錐體積
 $2.85 \times 2.85 \times 3.14 \times 18.3 \div 3 = 155.5784 \dots$ 小圓錐體積
 $554.5554 - 155.5784 = 398.977 \dots$ 大圓錐台體積

【小杯體積】

$3.25 \times 3.25 \times 3.14 \times 21.14 \div 3 = 233.7115 \dots$ 大圓錐體積
 $2.1 \times 2.1 \times 3.14 \times 13.64 \div 3 = 62.9595 \dots$ 小圓錐體積
 $233.7115 - 62.9595 = 170.752 \dots$ 大圓錐台體積

【附件十一】

實驗過程觀察記錄

討論主題：圓柱體積求法為何與實際測量有較大的差異？

成員：A、B、C、D、E
 老師：T1、T2

日期：91/03/20
 整理：A

種類	圓柱體積求法 (cm ³)	圓錐體積求法 (cm ³)	實測 (cm ³)
大杯	大約 723.3324	大約 707.6296	700
中杯	大約 514.4203	大約 497.0423	500
小杯	大約 411.8683	大約 398.977	395
紙杯	大約 176.3012	大約 170.752	170

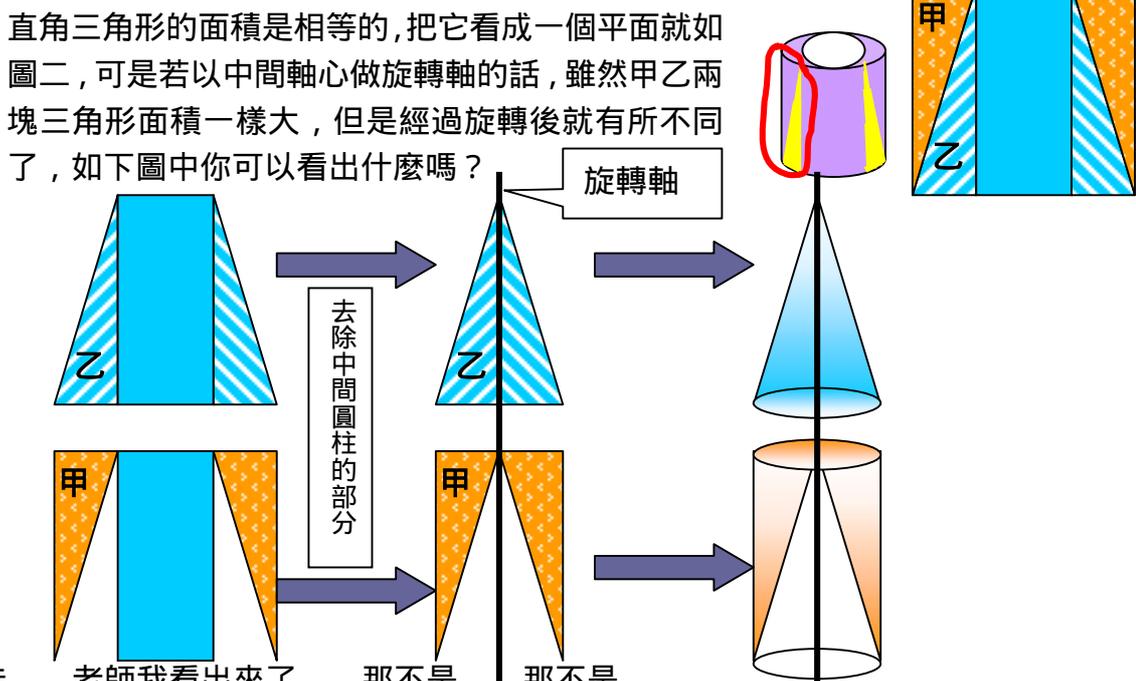
B：為什麼我想的方法會不太一樣？我還跟我爸爸討論過呀，他也是這麼想的！
 D：嗯 我想你的方法若用平面來看的話，好像是沒錯，可是事實上我們這個是立體的，是不是會有不一樣的地方呢？
 E：老師，我問我爸爸，他說在高中是用圓錐的公式來算的，而且它有一個什麼 r_1r_2 的還有什麼 h 的，還有 之類，反正他說只要我們找到杯子的上緣和下緣的半徑，

再找到杯子的高度，就可以直接套入公式算出杯子的體積，可是那個公式好複雜哦，我都看不懂！

T：嗯 公式是可以幫我們很多忙，但是一個公式的產生，一定是有原因的，這個圓錐體積的公式就是用積分的方式一點一點積出來的，不過不在我們討論的範圍內，你們能不用套公式的方法，而用所學到的比例概念求出來，那是很棒的哦 現在要探討的就是為什麼我們用圓柱體積求出來的答案不是很正確？

B：是呀，我怎麼想都覺得應該是正確的呀

T：我想用旋轉的方式操作給你們看也許可以看出個所以然來。之前我們大家會想把大小圓柱體積的差除以 2，是因為我們覺得這兩片（如圖一）像



B：哇 老師我看出來了... 那不是... 那不是

E：我知道，這兩個組合起來剛好是一個圓柱，即然乙圖旋轉起來變成一個圓錐，而圓錐體積又是圓柱體積的 $\frac{1}{3}$ ，所以甲圖旋轉起來就剛好是乙圖體積的 2 倍了。

T：嗯 說的沒錯，反應真快，看來你們真的有吸收進去。

D：沒什麼啦沒什麼啦，我天生就是那麼優秀，吸收力超強，實在無法擋。

B、E、C：喂 又不是你 臉皮有夠厚

A：老師，那假若方法二（圓錐求法）所得的答案和實測完全一樣，那麼方法一（圓柱求法）比方法二多出來的部分是哪一部分呀？

B：剛好是圖乙旋轉出來的圓錐的 2 倍呀，因為甲轉出來的是乙轉出來的 2 倍呀

C：嗯 咦？ 好像不太對哦...

D：不對啦，圖甲旋轉出來雖然是圖乙旋轉出來的 2 倍，但是卻比它多 1 倍而已啦，就好像我有 20 元，你有 10 元，我是你的 2 倍，但我沒有比你多 20 元呀，我只有比你多 10 元而已啦

B：哦 那是不是說利用圓柱算出來的體積比圓錐算出來的體積多了一份圖乙旋轉出來的體積？

C：好像是耶

D：絕對是！

E：我覺得不對耶，本來應該是只要算乙圖旋轉的體積就好，可是我們確將它算成甲圖旋轉後加乙圖旋轉後的一半，也就是那片長方形旋轉後的一半，若將長方形旋轉成的體積當成 1，那麼我們應該只要它體積的 $\frac{1}{3}$ 就夠了，但是我們卻算了它體積的

$\frac{1}{2}$ ，這麼說來也就是多算了 $\frac{1}{6}$ ，而不是 $\frac{1}{3}$ 。

D：對哦 我懂了，甘拜下風，佩服佩服

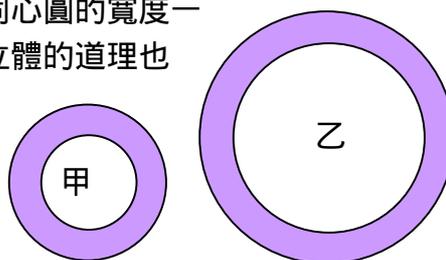
T：那麼你們不妨動手去計算看看，到底冠宜說得正不正確？

B：我來算哦 【方法一大杯 723.3324】 - 【方法二大杯 707.6292】 = 15.7032，有沒有等於大圓柱 - 小圓柱體積的 $\frac{1}{6}$ 呢？

D：不對耶，怎麼差這麼多？大圓柱 - 小圓柱 = 514.0847，它的 $\frac{1}{6}$ 是 85.6808，跟你算出

來的答案差好多哦 這是怎麼回事？

T：很好，你們找到問題了，我想這跟甲乙三角形距離軸心的位置有關，當我們把甲圖形離軸心遠一些，旋轉起來的錐體就很大，若靠軸心很近，旋轉起來就很小，就好比是一樣寬的同心圓（如下圖），你可以發現雖然同心圓的寬度一樣，但是甲圖的圓心圓面積小多了，相對的換成立體的道理也是一樣的，至於要算出它們之間的差多少，這已經超出你們的範圍了，以後有機會再探究吧！



【附件十二】

實驗過程觀察記錄

討論主題：如何作出有造型的伸縮杯？

成員：A、B、C、D、E

日期：91/03/20

老師：T1、T2

整理：D

T：很高興我們成功地做出了伸縮杯，接下來我們可以再進一步去思考，可以怎麼去變化伸縮杯的造型，讓它更俏麗，更有美感呢？

B：是不是可以加點弧度？

E：怎麼加呀？

T：你們可以以探索 3-2 的方法為基本，再想辦法來改變它的弧度造型。不妨每個人都回去想想可以怎麼變化，先用紙來試作看看，之後大家到學校再來報告你們的成果看看如何？

C：可是那個大圓好難畫哦，我們家又沒有長尺，就是有長尺，上面也沒有洞啊！

B：你忘了可以用繩子來畫啊 要不然就自己打洞。

C：可是回到家要姊姊幫我拉繩子，她都心不甘情願的。

E：我也是耶，要妹妹幫我拉，簡直就是礙手礙腳嘛

T：那你們想想看還有什麼方式可以畫大圓呢？

C：咦 老師 可不可以用影印的呀？

T：影印?? 怎麼影印法？

C：就是我們先畫一個像探索 3-2 的小圖，然後放大倍數不就

得了。一樣是 5 公分寬，間隔 3 公分，也就是交接處都是 1 公分，只是大圓的半徑用小一點 25 公分，然後依序往圓心部分畫就好了。

B：那你要放大多少倍？

C：我們放大 2 倍，半徑不就變成 50 了，跟我們原先實地畫的一樣大了。

B：嗯，有道理！

D：可是你將整個圖放大了，相同的整個寬度也會變 2 倍呀，也就是寬變成 10 公分，間隔變成 6 公分，連交接處都變成 2 公分，那與我們原先畫的還是大大的不一樣！

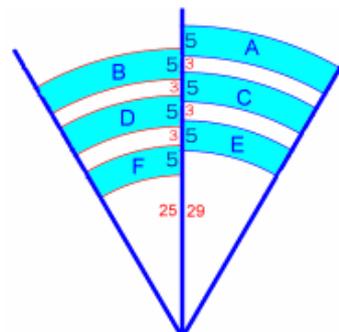
C：對哦 那怎麼辦呢？

E：我們可以把原來的圖照比例縮小不就得了，也就是原來是半徑 50 公分，現在半徑就用 25 來畫，原來寬是 5 公分，現在就用 2.5 公分，間隔 3 就改用 1.5 公分，交接處是 1 公分，現在就改用 0.5 公分，也就是把實際的圖縮為原來的一半，就好像是地圖一樣。到時用影印機放大兩半就和原來的一樣了！

T：真聰明，能應用我們現在所學的縮圖比例尺，真了不起，確實是個好方法 各位認怎麼樣？

D：可惡，給她先說去了 \$ @ \$ # * & @ # \$

T：那我們就畫出一張縮小圖，再放大給各位自己回家去嘗試加以變化囉 下回就要把成品或你的發現帶過來！看誰做出來的造型最成功。





活動照片





(第二名)(最佳鄉土教材獎)

能將生活中的物品加以研究，且研究之過程極詳實。