

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國小-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 小 組

作品名稱：柱多久？錐多大？

關 鍵 詞：錐 體、柱 體、體 積

編 號：080404

學校名稱：

國立高雄師範大學附屬高級中學

作者姓名：

朱軒緯

指導老師：

陳碧霞、黃善楓



名稱：柱多大？錐多大？

壹、 摘要：

這個研究主要是探究柱體和錐體的體積。探究的步驟是

- 一、 找出方便且誤差較小之測量體積的方法。
- 二、 提出假設，設計實驗。
- 三、 製作模型、測量體積、做實驗並且記錄結果。
- 四、 藉由觀察實際測量角柱體積的記錄結果，來驗證對角柱體積求法所作的假設。
- 五、 藉由觀察高度不同、底面積相同的角錐之體積、高、腰長的變化，來探究角錐的體積求法。
- 六、 比較角柱體積的求法與角錐體積的求法。

經過以上六個步驟，我發現：

角柱的體積 = 底面積 × 高

角錐的體積 = 0.336 × 底面積 × 高

貳、 研究動機：

在六年級上學期的時候，數學課有一個單元叫『柱體與錐體』，在這一個單元裡，我學到了什麼是錐體，什麼是柱體。在習作裡也記錄了各種柱體和錐體頂點、邊、底面、側面的數目，但是教科書上卻沒有提到柱體或者是錐體的體積要如何算。而且，在生活當中，能看到的形體，不只是長方體而已，進一步去了解其他形體，我想也是很重要的。因此讓我想用六年級上學期的單元『體積與容積』裡的方法，來尋找和驗證錐體和柱體體積的求法。

參、研究目的：

- 一、 找尋方便且誤差較小之測量體積的方法。
- 二、 找出角錐體積的計算方法或是估算的方法。
- 三、 求證柱體體積是否真的是底面積乘以高。
- 四、 比較角錐體積和角柱體積的求法。

肆、研究設備器材：

水、太白粉、圓規、直尺、游標尺、量角器、美工刀、厚紙板、量筒、剪刀、膠帶、細砂、電腦、繪圖軟體 Corel Draw8.0、印表機、計算機

伍、研究範圍與名詞定義：

- 一、 **角柱**：課本上所提到的，側面為長方形，而底面為兩平行且全等**正多邊形**的柱體，包括了三角柱、四角柱、五角柱、六角柱。
- 二、 **角錐**：課本上所提到的，側面為等腰三角形，而底面為一個**正多邊形**的錐體，包括了三角錐、四角錐、五角錐、六角錐。
- 三、 **角柱的高**：垂直兩個底面的直線長。
- 四、 **角錐的高**：通過角錐的頂點且垂直底面的直線長。
- 五、 **角錐的腰長**：在此我定義角錐的腰長為側面等腰三角形的腰長。
- 六、 **誤差率**：實際測量值和實際值的差 $\div$ 實際值

PS.因為與圓形相關的形體製作較困難，且圓形面積牽涉到圓周率是一個概數，容易產生較大的誤差。為方便研究，所以把它們排除在研究範圍之外。

陸、研究過程：

為方便記錄，本研究使用的長度單位皆為公分，體積單位皆為立方公分，之後不再標示。

一、找出方便且誤差較小之測量體積方法

因為研究需要，我得控制形體的大小規格，所以得自己製作形體模型。

（一）可嘗試的方法：

方法 1：採用 6 年級上學期數學課本第三單元『體積與容積』裡的方法，將欲測量體積之形體放入水中，測量排開水的體積，即為該形體的體積。

方法 2：以太白粉填滿模型內部，再倒進量具內壓平後測量，作為該形體的體積。

方法 3：用砂子填滿模型內部，再倒進量杯內壓平後測量，作為該形體的

體積。

方法 4：將水倒入模型內，再倒進量杯內，即為該形體的體積。

方法 5：先測量 1 立方公分砂子的重量。用砂子填滿模型內部，再測量模型內部砂子的重量，然後除以 1 立方公分砂子的重量，便得到模型的體積大小。

（二）嘗試與考慮後的結果：

方法 1 一直無法製作出理想的模型，所以不採用。

方法 2 太白粉碰到哪裡沾到哪裡，而且很容易不斷飄散，誤差過大，所以不採用。

方法 3 砂子取材方便而且比較容易操控，決定使用

方法 4 無法製作防水模型，無法克服這個困難，所以不採用。

方法 5 實際實驗的結果，發現誤差過大，所以不採用。

最後決定採用方法 3，方法 3 測量模型體積的過程如下：

測量模型體積的過程（方法3）



1.將砂子填滿模型內部



2.把表面刮平



3.將砂子倒入量筒內



4.把砂子輕輕壓平，測量體積

二、提出假設，設計實驗

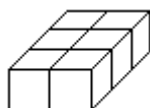
(一) 關於角柱

我之前有學過長方體的求法(長方體的體積=長×寬×高)，而當我學到『柱體與錐體』這個單元時，發現四角柱其實也是長方體的一種，所以體積的求法，應該跟長方體的體積求法是一樣的，但是其他柱體的底面形狀跟四角柱的底面形狀完全不同，所以我找不出它們底面的長、寬：不過，按照長方體的概念來說，以邊長 1 公分(如圖一)的正立方體體積為 1 立方公分，那圖二的長方體體積便為 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (立方公分)，圖三的長方體體積便為 $3 \times 2 \times 2 = 12$ (立方公分)，圖四的長方體體積便為 $3 \times 2 \times 3 = 18$ (立方公分)，圖五的長方體體積便為 $3 \times 2 \times 4 = 24$ (立方公分)，從高 1 公分體積 6 立方公分的體積開始，高變成幾倍，體積就變成幾倍。很顯然，

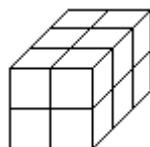
長方體的體積=底面積×高。



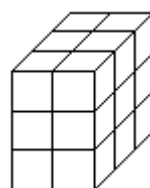
圖一



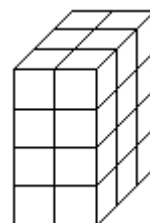
圖二



圖三



圖四



圖五

如果我也從這個角度去想角柱的體積，固定底面積，從高 1 公分開始也像圖二到圖五這樣來疊高它，也會隨高度變成幾倍，體積就隨著變成幾倍，那或許有可能角柱的體積也會等於底面積×高。

於是我假設：**角柱的體積 = 底面積 × 高。**

只要先製作出一些角柱的模型，先用這個公式算出體積，再實際測量其體積，再比較算出的體積和實際測量的體積，就可以知道我的想法是不是正確的。

（二）關於角錐

如果從上圖（圖一、圖二、圖三、圖四、圖五）的觀點來看角錐的話。我想到：如果把角錐的底面積大小固定住，而逐漸使其高度變高或變低。隨著高的變化，體積不知道會有什麼樣的變化呢？是不是跟長方體一樣當高變成幾倍，體積就變成幾倍呢？我可以設計這樣子的實驗來解開我心中的謎。

另一方面，如果把角錐的高度固定住，而逐漸使其底面積變大或變小。體積不知道會有什麼樣的變化呢？只可惜，在製作模型的時候，角錐的高實在很難控制，所以只好先放棄這樣的實驗。

（三）關於角錐與角柱

如果能順利找出角錐的體積求法或是角錐體積的推估方法，並且還驗證了角柱的體積求法，我還想要比較一下這兩者之間，是否有什麼關聯存在？如果有的話，那他們的關聯是會是什麼呢？所以我打算做同樣高度的角錐與角柱來比較。因為角錐的高度較難控制，所以得先做角錐的模型，測量出角錐的高後，再配合其高度分別做同樣高度的角柱模型。

因此，我先做角錐的模型，再做角柱的模型。

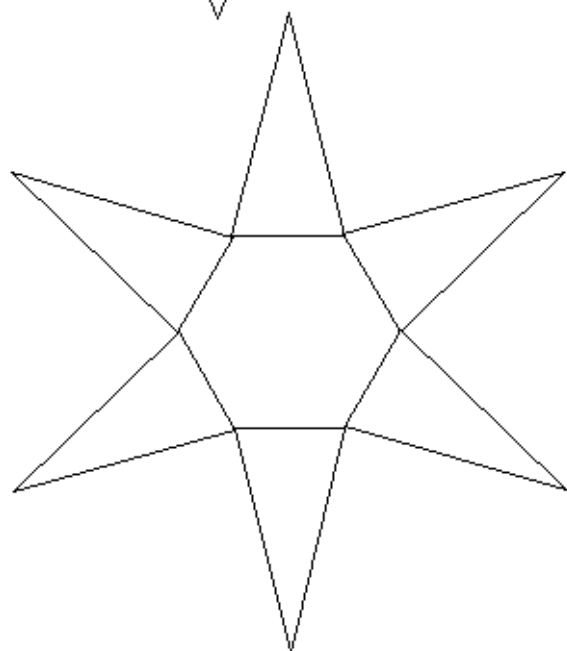
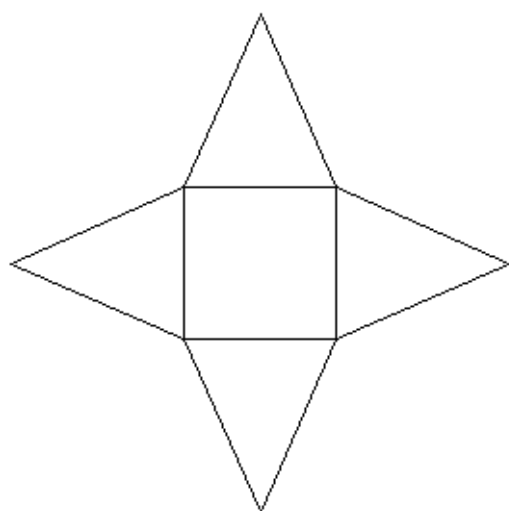
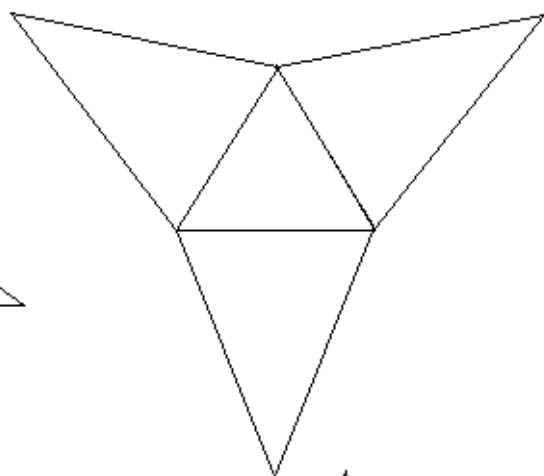
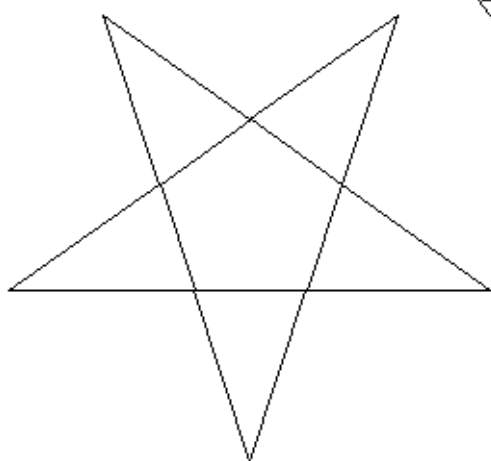
三、製作模型、測量體積、做實驗並且記錄結果。

（一）模型的製作方法

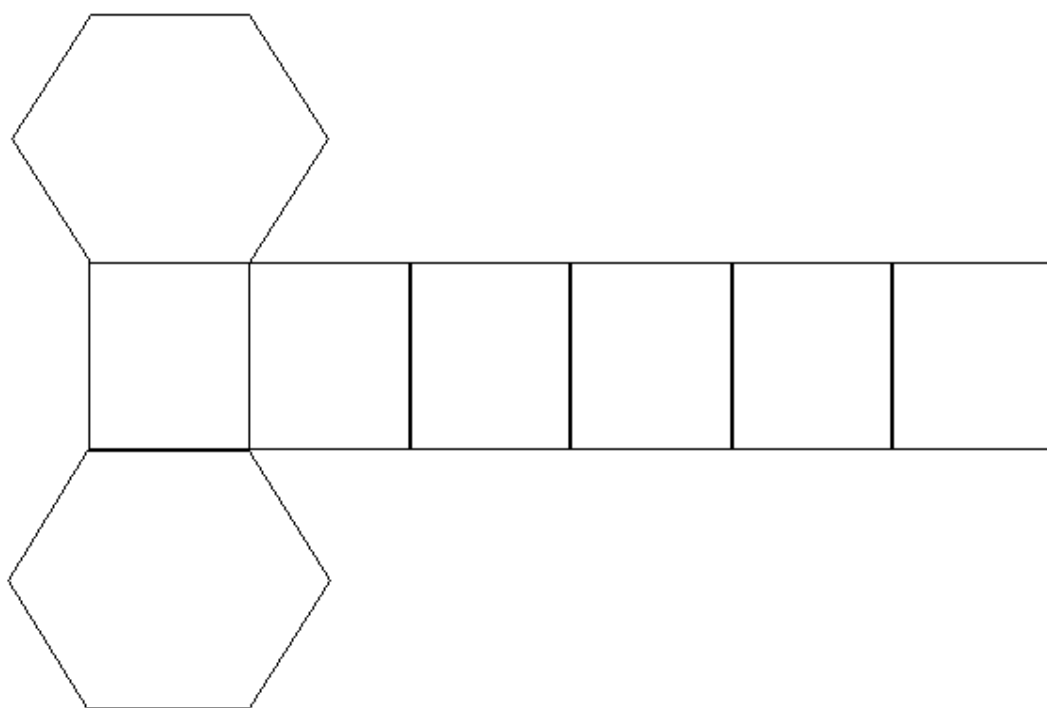
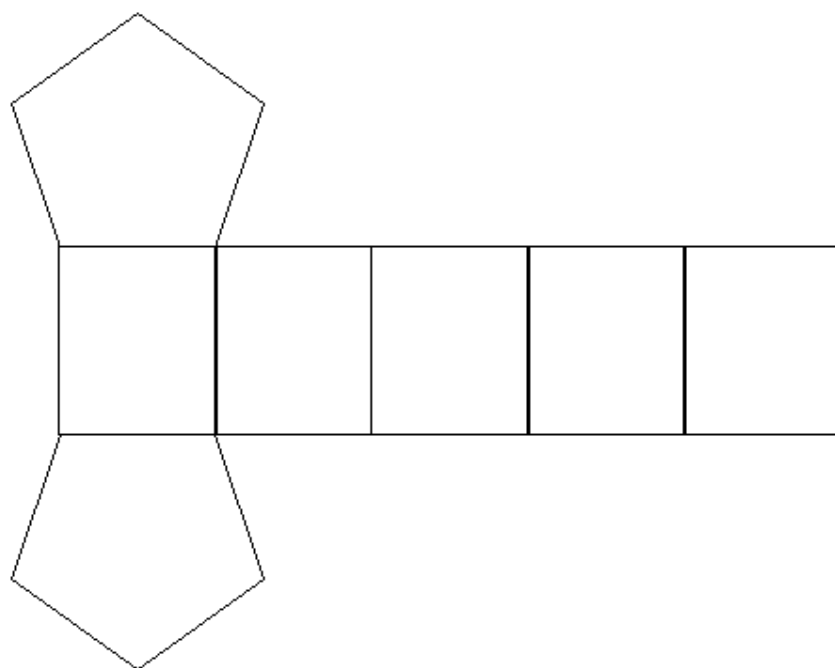
我用電腦繪圖軟體 Corel Draw 8.0 畫出所需形體的展開圖，列印出來，再描繪到厚紙板上。沿線剪下並黏貼起來，便製作成所想要的形體模型，只要事先預留開口或事後再剪開一個口，便可以把砂子倒進去了。

展開圖的架構圖大致如下：

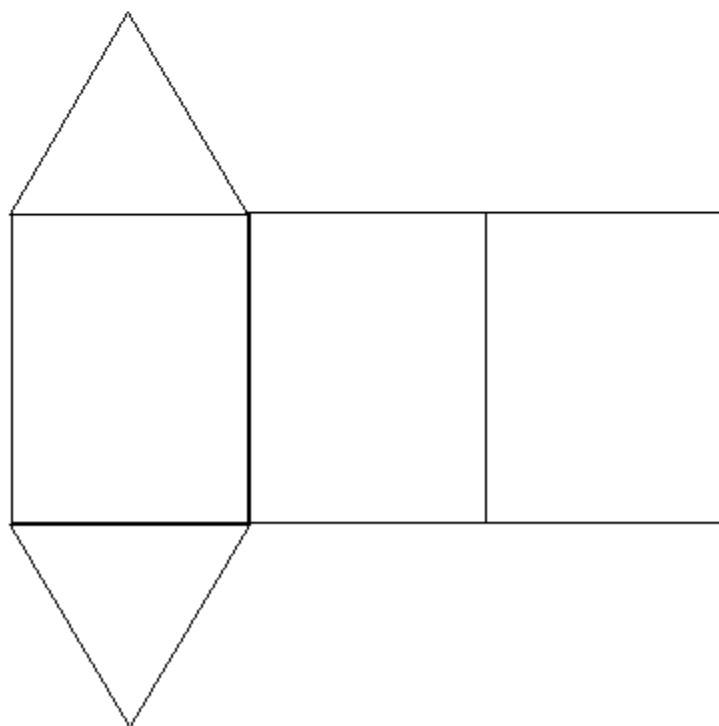
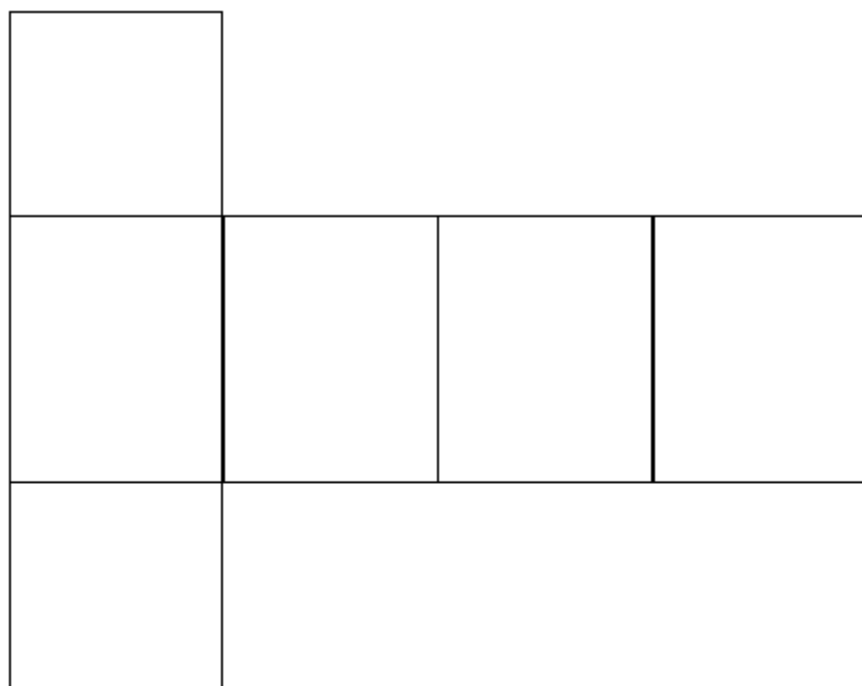
角錐展開圖的基本架構



角柱展開圖的基本架構



角柱展開圖的基本架構



(二) 實驗並記錄

對於三角錐、四角錐、五角錐、六角錐；三角柱、四角柱、五角柱、六角柱，我每樣都製作了六個底面積一樣，高不一樣的模型（如附件一）。而角柱的高分別都和角錐的高是一樣的。

由於在製作模型的時候，角錐的高不容易控制，所以先做角錐的模型，才做角柱的模型。而角錐的模型先做出後，再用游標尺測量出它們的高（如附件二）。

我沒有學過正六邊形和正五邊形面積的求法，於是我將它們分別切割成六個和五個全等的三角形，然後測量三角形的高，如此一來便可以藉著算三角形面積的和，進而求得正六邊形和正五邊形的面積了。

測量所有的模型體積後，我把這些模型的規格和測量結果記錄下來，如下表：

形體名稱	底面邊長	腰長	高	底面積	實際測量體積
三角錐 a	5	5	4.1	11	16.3
三角錐 b	5	6	5.25	11	18.8
三角錐 c	5	7	6.3	11	25.3
三角錐 d	5	8	7.4	11	27.6
三角錐 e	5	9	8.5	11	30.5
三角錐 f	5	10	9.65	11	34.3
四角錐 a	5	5	3.6	25	30
四角錐 b	5	6	4.75	25	38.5
四角錐 c	5	7	6	25	50
四角錐 d	5	8	7.1	25	58.5
四角錐 e	5	9	8.2	25	66.3
四角錐 f	5	10	9.4	25	78.1
五角錐 a	5	5	2.75	42.5	41.3
五角錐 b	5	6	4.35	42.5	63
五角錐 c	5	7	5.75	42.5	85.6
五角錐 d	5	8	6.9	42.5	96
五角錐 e	5	9	8	42.5	117
五角錐 f	5	10	9.2	42.5	130.5

形體名稱	底面邊長	腰長	高	底面積	實際測量體積
六角錐 a	5	5	0	66	無法測量
六角錐 b	5	6	3.4	66	79.9
六角錐 c	5	7	4.9	66	108.9
六角錐 d	5	8	6.4	66	143
六角錐 e	5	9	7.5	66	167.5
六角錐 f	5	10	8.7	66	192
三角柱 a	5		4.1	11	45.5
三角柱 b	5		5.25	11	58.3
三角柱 c	5		6.3	11	72.7
三角柱 d	5		7.4	11	80.5
三角柱 e	5		8.5	11	94
三角柱 f	5		9.65	11	107.5
四角柱 a	5		3.6	25	91.5
四角柱 b	5		4.75	25	120
四角柱 c	5		6	25	154.6
四角柱 d	5		7.1	25	174.3
四角柱 e	5		8.2	25	202.3
四角柱 f	5		9.4	25	234
五角柱 a	5		2.75	42.5	121.6
五角柱 b	5		4.35	42.5	185
五角柱 c	5		5.75	42.5	250.1
五角柱 d	5		6.9	42.5	293
五角柱 e	5		8	42.5	347.3
五角柱 f	5		9.2	42.5	392.9
六角柱 b	5		3.4	66	226.5
六角柱 c	5		4.9	66	315.9
六角柱 d	5		6.4	66	423
六角柱 e	5		7.5	66	513
六角柱 f	5		8.7	66	590

PS.後來在製作模型的時候，發現底面邊長和腰長同時為 5 公分的時候，六角錐的高是 0，所以製作不出來。所以，六角錐和六角柱都只製作了 5 個模型，只有 b、c、d、f 沒有 a 模型。

四、藉由觀察實際測量角柱體積的記錄結果，來驗證對角柱體積求法所作的假設。

之前，我假設 角柱的體積=底面積×高，現在以實際測量出來的體積和假設公式所算出來的體積做比較。

形體名稱	假設體積	實測體積	形體名稱	假設體積	實測體積
三角柱 a	45.1	45.5	五角柱 a	116.875	121.6
三角柱 b	57.75	58.3	五角柱 b	184.875	185
三角柱 c	69.3	72.7	五角柱 c	244.375	250.1
三角柱 d	81.4	80.5	五角柱 d	293.25	293
三角柱 e	93.5	94	五角柱 e	340	347.3
三角柱 f	106.15	107.5	五角柱 f	391	396.9
四角柱 a	90	91.5			
四角柱 b	118.75	120	六角柱 b	224.4	226.5
四角柱 c	150	154.6	六角柱 c	323.4	315.9
四角柱 d	177.5	174.3	六角柱 d	422.4	423
四角柱 e	205	202.3	六角柱 e	495	513
四角柱 f	235	234	六角柱 f	574.2	590

我們從上表中可以發現：

（一）實驗是有些小誤差的

四角柱其實就是長方體的一種，所以我知道 四角柱的體積就是底面積×高，而實驗當中，四角柱用公式所算出來的體積，和實際用砂子量出來的體積是有一點差異的，但是誤差其實很小。四角柱當中誤差率最大的四角柱 c，誤差率不過才 $(154.6 - 150) \div 150 = 0.03$ 。

（二）假設公式算出來的體積和實際測量的體積差異很小

在實驗有誤差的前提下，可以發現：假設公式算出來的體積和實際

測量的體積差異其實是很小的，如果假設體積就是真實體積的話，除了四角柱之外，誤差率最大的六角柱 f 不過也大約 0.03 而已。

(三) 結論：實驗難免會有一點誤差，這個實驗結果，再加上之前我用圖一到圖五的推論，我認為我的假設是成立的。也就是說 $\boxed{\text{角柱的體積} = \text{底面積} \times \text{高}}$

五、藉由觀察高度不同、底面積相同的角錐之體積、高、腰長的變化，來探究角錐的體積求法。

接下來觀察並比較角錐高度變化與體積的變化之間的關係；之前推論的時候，用疊積木的方式：當底面積固定，而高增為幾倍，體積也就變成幾倍。於是我想角錐的高和體積會不會也有什麼樣的關係存在，因此我便把四角錐的高和體積的倍數成長的關係算了出來。把最小角錐的高、腰長和體積都當作 1，則其他角錐相對的倍數關係 如下：

形體名稱	高	體積	腰長	形體名稱	高	體積	腰長
三角錐 a	1	1	1	五角錐 a	1	1	1
三角錐 b	1.28	1.15	1.2	五角錐 b	1.58	1.53	1.2
三角錐 c	1.54	1.43	1.4	五角錐 c	2.09	2.07	1.4
三角錐 d	1.80	1.69	1.6	五角錐 d	2.51	2.32	1.6
三角錐 e	2.07	1.97	1.8	五角錐 e	2.91	2.83	1.8
三角錐 f	2.35	2.10	2	五角錐 f	3.35	3.16	2
四角錐 a	1	1	1				
四角錐 b	1.32	1.28	1.2	六角錐 b	1	1	1
四角錐 c	1.67	1.67	1.4	六角錐 c	1.44	1.37	1.17
四角錐 d	1.97	1.95	1.6	六角錐 d	1.88	1.79	1.33
四角錐 e	2.28	2.21	1.8	六角錐 e	2.21	2.10	1.5
四角錐 f	2.61	2.60	2	六角錐 f	2.56	2.41	1.67

根據上表，我可以看出，角錐高的變化和體積變化有非常直接的關係，可以說幾乎是一樣的，尤其是四角錐。也就是說**角錐很有可能跟長方體一樣都具有：當底面積固定，高變成幾倍，體積也變成幾倍的性質。**但是我很清楚角錐的體積不可能等於底面積乘以高（如果是，那跟角柱的公式就一樣了）。所以，我猜想角錐的體積，或許是 $\square \times \text{角柱的體積}$ 這種形式也不一定。

我假設：

三角錐(X)的體積 = $\square_{3X} \times \text{底面積} \times \text{高}$

四角錐(X)的體積 = $\square_{4X} \times \text{底面積} \times \text{高}$

五角錐(X)的體積 = $\square_{5X} \times \text{底面積} \times \text{高}$

六角錐(X)的體積 = $\square_{6X} \times \text{底面積} \times \text{高}$

底面積已經知道了，體積和高也已經測量出來了，所以便可以把所有的 $\square$ 算出來。

我算出來的結果：

$\square_{3a}$	0.36	$\square_{3b}$	0.33	$\square_{3c}$	0.34	$\square_{3d}$	0.34
$\square_{3e}$	0.33	$\square_{3f}$	0.32				
$\square_{4a}$	0.33	$\square_{4b}$	0.32	$\square_{4c}$	0.33	$\square_{4d}$	0.33
$\square_{4e}$	0.32	$\square_{4f}$	0.33				
$\square_{5a}$	0.35	$\square_{5b}$	0.34	$\square_{5c}$	0.35	$\square_{5d}$	0.33
$\square_{5e}$	0.33	$\square_{5f}$	0.34				
$\square_{6b}$	0.36	$\square_{6c}$	0.34	$\square_{6d}$	0.34		
$\square_{6e}$	0.34	$\square_{6f}$	0.33				

我發現所有的 $\square$ 都在 0.32 到 0.36 之間，差異非常小。如果考慮實驗有誤差，那麼這些 $\square$ ，可以說幾乎都是一樣的。

我想角錐的體積應該是等於 $\square \times \text{底面積} \times \text{高}$ 沒錯，至於 $\square$ 應該是多少呢？我取所有 $\square$ 的平均數，大約是 0.336，所以我推估

$$\text{角錐的體積} = 0.336 \times \text{底面積} \times \text{高}$$

之後，我又做了幾個錐體，並測量其體積，來驗證我所推論出的公式。角錐的規格如下：

角錐名稱	腰長	高
三角錐	7.5	7.1
四角錐	7.5	7
五角錐	7.5	6.7
六角錐	7.5	6.5

我測量它們的體積，而且還用假設的公式算了它們的體積，將這兩種數值都記錄下來，得到下表：

角錐名稱	實際測量體積	假設體積
三角錐	16.8	16.46
四角錐	39	37.63
五角錐	62.1	60.78
六角錐	87	90.42

我發現，誤差率最大的是六角錐，大約 0.04，可說非常小。況且用砂子測量的體積，本身也會有一點誤差，於是我認為：

$$\boxed{\text{角錐的體積} = 0.336 \times \text{底面積} \times \text{高}} \quad \text{是沒錯的。}$$

六、比較角柱體積的求法與角錐體積的求法

角柱的體積 = 底面積 × 高

角錐的體積 = $0.336 \times \text{底面積} \times \text{高}$

比較這兩個公式，我們可以很明顯的發現，同樣底面積且同高的角柱和角錐，角錐體積大約是角柱體積的 0.336 倍。

柒、研究結果：

- 一、 我找出較方便的測量體積方法：先用厚紙板製作模型，將砂倒入模型內，再測量砂子的體積。
- 二、 驗證結果，角柱的體積 = 底面積 × 高 是沒有錯的。
- 三、 當角錐的底面積不變，高變成幾倍，體積就變成幾倍。
- 四、 角錐的體積 = $0.336 \times \text{底面積} \times \text{高}$ 。
- 五、 相同底面積且同高的角錐與角柱，角錐體積大約是角柱體積的 0.336 倍。

捌、討論：

- 一、 如果我有更好的技術來製作能夠防水、精準、適當大小，且能夠沈入水裡的形體模型，或許我可以用六年級上學期數學課本第三單元，「體積與容積」裡的方法，用排開水的體積來當作模型的體積，應該可以測量出更準確的形體體積。
- 二、 因為時間緊迫，所以這次的研究僅限於課本中所教過的形體，若有更多的時間，應該可以擴大研究的範圍。
- 三、 圓錐與圓柱製作較為困難，製作出來容易造成較大的誤差，加上要計算其面積要用到圓周率 3.14，這個數值本身已經是概數，基於上面的理由，所以將圓錐與圓柱排除在研究範圍之外。
- 四、 實驗誤差可能來自於：
 - (一) 量具不夠精準。
 - (二) 測量各種長度時也可能會有誤差。
 - (三) 厚紙板本身具有厚度，會使測量值比實際值小。
 - (四) 少許砂子外漏，會使測量值比實際值小。

- (五) 模型內部受到砂子重量壓迫向外擴張，使測量值比實際值大。
- (六) 砂堆本身具有隙縫，測量過程的擠壓和搖晃，也會造成誤差。
- (七) 測量模型，把砂子刮平時，可能也會造成誤差。

玖、結論：

在這個研究裡，我嘗試了許多的方法來測量形體的體積，覺得蠻有趣也蠻辛苦的，但總算是研究出一些結果了。我在實驗中，發現

角柱的體積 = 底面積 × 高

角錐的體積 = 0.336 × 底面積 × 高

相同底面積且同高的角柱與角錐，角柱體積大約是角錐體積的 0.336 倍

如果能有更方便、更精準的製作模型方法，或測量體積方法，以及更多的時間，以後便能夠更擴大研究的範圍，如其他的角柱與角錐、圓柱與圓錐、斜角錐...等，也能夠使實驗更加精準。

拾、參考資料：

國民小學數學課本康軒版第十一冊