中華民國第42屆中小學科學展覽會

:::: 作品說明書 ::::

國小－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 小 組

作品名稱：由 2 說起

關 鍵 詞：質 數、整除性、數 論

編　　號：080402

學校名稱：

臺北縣樹林市文林國民小學

作者姓名：

江雅珺、高鼎鈞、鍾育旻、陳旆玎

指導老師：

林忠正、王郁惠

由 2 說起

壹、摘要：

一、由課本的因數倍數研究起，進而探討 100 以內質數的倍數之識別法，並將質數依個位數的不同，分類成個位數為 1、3、7、9 四種，最後整理歸納出任一質數的倍數識別法。

二、若有一數目 x，可表示成 10a＋b 的形式（其中 a 為任意正整數，b 為個位數），則欲判斷其是否為質數 p 的倍數時，其識別法如下：

（一）當質數的個位數為 1 時，只要判斷〝a－（$\frac{p-1}{10}$）b〞是否為質數 p 的倍數即可。

（二）當質數的個位數為 3 時，只要判斷〝a＋（$\frac{3p+1}{10}$）b〞是否為質數 p 的倍數即可。

（三）當質數的個位數為 7 時，只要判斷〝a－（$\frac{3p-1}{10}$）b〞是否為質數 p 的倍數即可。

（四）當質數的個位數為 9 時，只要判斷〝a＋（$\frac{p+1}{10}$）b〞是否為質數 p 的倍數即可。

貳、研究動機：

在五年級的數學課本裡，有因數、倍數的單元。老師教我們如何判斷質數 2、3、5、11 的倍數時，班上同學問老師像 13、17、19…等質數要怎麼判斷其倍數？老師鼓勵我們研究看看，後來，我們就在老師的指導下，研究此一問題。

參、研究目的：

一、找出 100 以內質數倍數的識別法。

二、從不斷的分析、探討中，尋找是否有共通的法則，歸納整理出其規則，並進而建構出數學的規律性。

三、培養對數學的興趣。

肆、研究設備器材：

紙、筆、計算機。

伍、研究過程：

在我們收集的許多資料中，有一個方法給了我們很大的啟示，這個方法是教我們如何檢驗 3、7、19 的倍數，其方法如下，〝若一數目 x，可表示成 100a＋b 的形式（其中 a 為任意正整數，b 為一兩位數），它可被 399 或它的任何因數除盡，則 a＋4b 也可以被同一個數目整除〞（說明：399＝3×7×19）。我們就從證明這個方法的敘述是否成立，開始著手研究之。

〔證明〕：有一數 x，可表示成 $100a+b$，（其中 a 為任意正整數，b 為一兩位數）

則假設 $x=100a+b=399\times\square$

$\Rightarrow 400a+4b=399\times\square\times 4$

$\Rightarrow 399a+a+4b=399\times\square\times 4$

因為 $399a$ 必為 399 或 3、7、19 的倍數，所以欲判斷 x 這個數是否為 399 或 3、7、19 的倍數時，只要判斷 $a+4b$ 是否為 399 或 3、7、19 的倍數即可。

以下，我們就運用上述的方法，來研究證明質數倍數的識別法。

一、有一數目 x，可表示成 $10a+b$ 的形式（其中 a 為任意正整數，b 為個位數）：

（一）判斷 2 的倍數之方法：

假設 $10a+b=2\times\square$

因為 $10a$ 已是 2 的倍數，所以只要判斷〝b〞是否為 2 的倍數即可。

（二）判斷 3 的倍數之方法：

假設 $10a+b=3\times\square$

$\Rightarrow 9a+a+b=3\times\square$

因為 $9a$ 已是 3 的倍數，所以只要判斷〝$a+b$〞是否為 3 的倍數即可。

例：$3\times 37=111$，欲判斷 111 是否為 3 的倍數，只要判斷 $11+1$ 是否為 3 的倍數即可：

$$\begin{array}{r} 11\cancel{1} \\ \underline{+\ \ 1} \\ 12 \end{array} \quad (1\times 1=1)$$

（三）判斷 5 的倍數之方法：

假設 $10a+b=5\times\square$

因為 $10a$ 已是 5 的倍數，所以只要判斷〝b〞是否為 5 的倍數即可。

（四）判斷 7 的倍數之方法：

假設 $10a+b=7\times\square$

$\Rightarrow 50a+5b=7\times\square\times 5$

$\Rightarrow 49a+a+5b=7\times\square\times 5$

$\Rightarrow 49a+7b+a-2b=7\times\square\times 5$

因為 $49a+7b$ 已是 7 的倍數，所以只要判斷〝$a-2b$〞是否為 7 的倍數即可。

例：$7\times 37=259$

$$\begin{array}{r} 25\cancel{9} \\ \underline{-18} \\ 7 \end{array} \quad (2\times 9=18)$$

（五）判斷 11 的倍數之方法：

假設 $10a+b=11\times\square$

$\Rightarrow 100a+10b=11\times\square\times 10$

$\Rightarrow 99a+a+10b=11\times\square\times 10$

$\Rightarrow 99a+11b+a-b=11\times\square\times 10$

因為 $99a+11b$ 已是 11 的倍數，所以只要判斷〝$a-b$〞是否為 11 的倍數即可。

例：$11\times 37=407$

$$\begin{array}{r} 40\cancel{7} \\ -\ 7 \\ \hline 33 \end{array} \quad (1\times7=7)$$

（六）判斷 13 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝13×□

⇒40a＋4b＝13×□×4

⇒39a＋a＋4b＝13×□×4

因為 39a 已是 13 的倍數，所以只要判斷〝a＋4b〞是否為 13 的倍數即可。

例：13×37＝481

$$\begin{array}{r} 48\cancel{1} \\ +\ 4 \\ \hline 5\cancel{2} \\ +\ 8 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} (4\times1=4) \\ \\ (4\times2=8) \end{array}$$

（七）判斷 17 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝17×□

⇒120a＋12b＝17×□×12

⇒119a＋a＋12b＝17×□×12

⇒119a＋17b＋a－5b＝17×□×12

因為 119a＋17b 已是 17 的倍數，所以只要判斷〝a－5b〞是否為 17 的倍數即可。

例：17×37＝629

$$\begin{array}{r} 62\cancel{9} \\ -\ 45 \\ \hline 17 \end{array} \quad (5\times9=45)$$

（八）判斷 19 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝19×□

⇒20a＋2b＝19×□×2

⇒19a＋a＋2b＝19×□×2

因為 19a 已是 19 的倍數，所以只要判斷〝a+2b〞是否為 19 的倍數即可。

例：19×37＝703

$$\begin{array}{r} 70\cancel{3} \\ +\ 6 \\ \hline 7\cancel{6} \\ +\ 12 \\ \hline 19 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2\times3=6) \\ \\ (2\times6=12) \end{array}$$

（九）判斷 23 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝23×□

⇒70a＋7b＝23×□×7

⇒69a＋a＋7b＝23×□×7

因為 69a 已是 23 的倍數，所以只要判斷〝a＋7b〞是否為 23 的倍數即可。

例：23×37＝851

$85\cancel{1}$
＋ 7　(7×1＝7)
$9\cancel{2}$
＋ 14　(7×2＝14)
23

（十）判斷 29 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝29×□

⇒30a＋3b＝29×□×3

⇒29a＋a＋3b＝29×□×3

因為 29a 已是 29 的倍數，所以只要判斷〝a+3b〞是否為 29 的倍數即可。

例：29×37＝1073

$107\cancel{3}$
＋ 9　(3×3＝9)
$11\cancel{6}$
＋ 18　(3×6＝18)
29

（十一）判斷 31 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝31×□

⇒280a＋28b＝31×□×28

⇒279a＋a＋28b＝31×□×28

⇒279a＋31b＋a－3b＝31×□×28

因為 279a＋31b 已是 31 的倍數，所以只要判斷〝a－3b〞是否為 31 的倍數即可。

例：31×37＝1147

$114\cancel{7}$
－ 21　(3×7＝21)
$9\cancel{3}$
－ 9　(3×3＝9)
0

（十二）判斷 37 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝37×□

⇒260a＋26b＝37×□×26

⇒259a＋a＋26b＝37×□×26

⇒259a＋37b＋a－11b＝17×□×26

因為 259a＋37b 已是 37 的倍數，所以只要判斷〝a－11b〞是否為 37 的倍數即可。

例：37×37＝1369

$$\begin{array}{rl} 136\cancel{9} & \\ -\ \ 99 & (11\times 9=99) \\ \hline 37 & \end{array}$$

（十三）判斷 41 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝41×□

⇒370a＋37b＝41×□×37

⇒369a＋a＋37b＝41×□×37

⇒369a＋41b＋a－4b＝41×□×37

因為 369a＋41b 已是 41 的倍數，所以只要判斷〝a－4b〞是否為 41 的倍數即可。

例：41×37＝1517

$$\begin{array}{rl} 151\cancel{7} & \\ -\ \ 28 & (4\times 7=28) \\ \hline 12\cancel{3} & \\ -\ \ 12 & (4\times 3=12) \\ \hline 0 & \end{array}$$

（十四）判斷 43 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝43×□

⇒130a＋13b＝43×□×13

⇒129a＋a＋13b＝43×□×13

因為 129a 已是 43 的倍數，所以只要判斷〝a＋13b〞是否為 43 的倍數即可。

例：43×37＝1591

$$\begin{array}{rl} 159\cancel{1} & \\ +\ \ 13 & (13\times 1=13) \\ \hline 17\cancel{2} & \\ +\ \ 26 & (13\times 2=26) \\ \hline 43 & \end{array}$$

（十五）判斷 47 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝47×□

⇒330a＋33b＝47×□×33

⇒329a＋a＋33b＝47×□×33

⇒329a＋47b＋a－14b＝47×□×33

因為 329a＋47b 已是 47 的倍數，所以只要判斷〝a－14b〞是否為 47 的倍數即可。

例：47×37＝1739

$$\begin{array}{rl} 173\cancel{9} & \\ -126 & (14\times 9=126) \\ \cline{1-1} 47 & \end{array}$$

（十六）判斷 53 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝53×□

⇒160a＋16b＝53×□×16

⇒159a＋a＋16b＝53×□×16

因為 159a 已是 53 的倍數，所以只要判斷〝a＋16b〞是否為 53 的倍數即可。

例：53×37＝1961

$$\begin{array}{rl} 196\cancel{1} & \\ +\ 16 & (16\times 1=16) \\ \cline{1-1} 21\cancel{2} & \\ +\ 32 & (16\times 2=32) \\ \cline{1-1} 53 & \end{array}$$

（十七）判斷 59 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝59×□

⇒60a＋6b＝59×□×6

⇒59a＋a＋6b＝59×□×6

因為 59a 已是 59 的倍數，所以只要判斷〝a+6b〞是否為 59 的倍數即可。

例：59×37＝2183

$$\begin{array}{rl} 218\cancel{3} & \\ +\ 18 & (6\times 3=18) \\ \cline{1-1} 23\cancel{6} & \\ +\ 36 & (6\times 6=36) \\ \cline{1-1} 59 & \end{array}$$

（十八）判斷 61 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝61×□

⇒550a＋55b＝61×□×55

⇒549a＋a＋55b＝61×□×55

⇒549a＋61b＋a－6b＝11×□×55

因為 549a＋61b 已是 61 的倍數，所以只要判斷〝a－6b〞是否為 61 的倍數即可。

例：61×37＝2257

$$\begin{array}{rl} 225\cancel{7} & \\ -\ \ 42 & (6\times7=42) \\ \hline 18\cancel{3} & \\ -\ \ 18 & (6\times3=18) \\ \hline 0 & \end{array}$$

（十九）判斷 67 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝67×□

⇒470a＋47b＝67×□×47

⇒469a＋a＋47b＝67×□×47

⇒469a＋67b＋a－20b＝67×□×47

因為 469a＋67b 已是 67 的倍數，所以只要判斷〝a－20b〞是否為 67 的倍數即可。

例：67×37＝2479

$$\begin{array}{rl} 247\cancel{9} & \\ -180 & (20\times9=180) \\ \hline 67 & \end{array}$$

（二十）判斷 71 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝71×□

⇒640a＋64b＝71×□×64

⇒639a＋a＋64b＝71×□×64

⇒639a＋71b＋a－7b＝71×□×64

因為 639a＋71b 已是 71 的倍數，所以只要判斷〝a－7b〞是否為 71 的倍數即可。

例：71×37＝2627

$$\begin{array}{rl} 262\cancel{7} & \\ -\ \ 49 & (7\times7=49) \\ \hline 21\cancel{3} & \\ -\ \ 21 & (7\times3=21) \\ \hline 0 & \end{array}$$

（二十一）判斷 73 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝73×□

⇒220a＋22b＝73×□×22

⇒219a＋a＋22b＝73×□×22

因為 219a 已是 73 的倍數，所以只要判斷〝a＋22b〞是否為 73 的倍數即可。

例：73×37＝2701

$$\begin{array}{rl} 270\cancel{1} & \\ +\ \ 22 & (22\times1=22) \\ \hline 29\cancel{2} & \\ +\ \ 44 & (22\times2=44) \\ \hline 73 & \end{array}$$

（二十二）判斷 79 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝79×□

⇒80a＋8b＝79×□×8

⇒79a＋a＋8b＝79×□×8

因為 79a 已是 79 的倍數，所以只要判斷〝a+8b〞是否為 79 的倍數即可。

例：79×37＝2923

$$\begin{array}{rl} 292\cancel{3} & \\ +24 & (8\times3=24) \\ \hline 31\cancel{6} & \\ +\ \ 48 & (8\times6=48) \\ \hline 79 & \end{array}$$

（二十三）判斷 83 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝83×□

⇒250a＋25b＝83×□×25

⇒249a＋a＋25b＝83×□×25

因為 249a 已是 83 的倍數，所以只要判斷〝a＋25b〞是否為 83 的倍數即可。

例：83×37＝3071

$$\begin{array}{rl} 307\cancel{1} & \\ +\ \ 25 & (25\times1=25) \\ \hline 33\cancel{2} & \\ +\ \ 50 & (25\times2=50) \\ \hline 83 & \end{array}$$

（二十四）判斷 89 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝89×□

⇒ 90a＋9b＝89×□×9

⇒89a＋a＋9b＝89×□×9

因為 89a 已是 89 的倍數，所以只要判斷〝a+9b〞是否為 89 的倍數即可。

例：89×37＝3293

$$
\begin{array}{rl}
329\cancel{3} & \\
+\ 27 & (9\times3=27) \\
\hline
35\cancel{6} & \\
+\ 54 & (9\times6=54) \\
\hline
89 &
\end{array}
$$

（二十五）判斷 97 的倍數之方法：

假設 10a＋b＝97×□

⇒ 680a＋68b＝97×□×68

⇒679a＋a＋68b＝97×□×68

⇒679a＋97b＋a－29b＝97×□×68

因為 679a＋97b 已是 97 的倍數，所以只要判斷〝a－29b〞是否為 97 的倍數即可。

例：97×37＝3589

$$
\begin{array}{rl}
358\cancel{9} & \\
-261 & (29\times9=261) \\
\hline
97 &
\end{array}
$$

二、我們將上述研究結果整理成下表：

有一數目 x，可表示成 10a＋b 的形式（其中 a 為任意正整數，b 為個位數）

質數	判斷法則
2	b
3	a＋b
5	b
7	a－2b
11	a－b
13	a＋4b
17	a－5b
19	a+2b
23	a＋7b
29	a+3b
31	a－3b
37	a－11b
41	a－4b
43	a＋13b
47	a－14b

53	a＋16b
59	a+6b
61	a－6b
67	a－20b
71	a－7b
73	a＋22b
79	a+8b
83	a＋25b
89	a+9b
97	a－29b

陸、討論：

一、除了 2 和 5 之外，其餘的質數倍數識別法，都是以 a±□b 的形式出現。

二、a±□b 的形式可以連續運算，直到得到一個較小或容易識別的數為止。

三、我們在研究如何找出質數的判斷法則時，發現為使判斷法則能以 a±□b 的形式出現，所以我們必須在〝10a＋b＝p×□〞等式中，同時乘以某一個數，以使得 a 之前的係數能夠提出 p 之倍數，且剩下一個 a，如下：

10a＋b＝p×□………①

（pk＋1）×10a＋（pk＋1）b＝p×□×（pk＋1）

（pk＋1）a＋（$\frac{pk+1}{10}$）b＝p×□×（$\frac{pk+1}{10}$）………②

pka＋a＋（$\frac{pk+1}{10}$）b＝p×□×（$\frac{pk+1}{10}$）……………③

我們由①、②中知，所乘的數為〝$\frac{pk+1}{10}$〞，而此數中的 k 值，由質數 p 的個位數來決定之。若質數 p 的個位數為 1 時，k＝9；若質數 p 的個位數為 3 時，k＝3；若質數 p 的個位數為 7 時，k＝7；若質數 p 的個位數為 9 時，k＝1；易言之，無論 p 的個位數為何，我們都得使 pk 之值的個位數為 9。我們將 p 的個位數與常數 k 的關係整理成下表：

P 的個位數	常數 k	（p 的個位數）×k 的乘積
1	9	9
3	3	9
7	7	49
9	1	9

四、由討論三得知，判斷式子為〝a+（$\frac{pk+1}{10}$）b〞

（一）當質數 P 的個位數為 1 時，k＝9，則判斷式子為：a－（$\frac{p-1}{10}$）b

〔說明〕：a+（$\frac{pk+1}{10}$）b 中，k＝9 代入

得 a+（$\frac{9p+1}{10}$）b

＝a＋pb＋（$\frac{1-p}{10}$）b

＝a＋pb－（$\frac{p-1}{10}$）b

因為 pb 為 P 之倍數，所以只要判斷〝a－（$\frac{p-1}{10}$）b〞即可。

（二）當質數 P 的個位數為 3 時，k＝3，則判斷式子為：a+（$\frac{3p+1}{10}$）b

（三）當質數 P 的個位數為 7 時，k＝7，則判斷式子為：a－（$\frac{3p-1}{10}$）b

〔說明〕：a+（$\frac{pk+1}{10}$）b 中，k＝7 代入

得 a+（$\frac{7p+1}{10}$）b

＝a＋pb＋（$\frac{1-3p}{10}$）b

＝a＋pb－（$\frac{3p-1}{10}$）b

因為 pb 為 P 之倍數，所以只要判斷〝a－（$\frac{3p-1}{10}$）b〞即可。

（四）當質數 P 的個位數為 9 時，k＝1，則判斷式子為：a+（$\frac{p+1}{10}$）b

五、在我們找出的 25 個質數的倍數之判斷法則中，有些質數的倍數判斷法則，是以 a－□b 的形式出現，這是為了計算上的方便，因為如果以 a＋□b 的形式來計算，其數目較大，較不方便計算。

六、除了個位數是 5 的數目以外，其餘的奇數也可以用此方法來識別其倍數。

柒、結論：

若有一數目 x，可表示成 10a＋b 的形式（其中 a 為任意正整數，b 為個位數），則欲判斷此數是否為質數 p 的倍數時，其識別法如下：

一、當質數的個位數為 1 時，只要判斷 ˋ$a-\left(\frac{p-1}{10}\right)b$ˊ 是否為質數 p 的倍數即可。

二、當質數的個位數為 3 時，只要判斷 ˋ$a+\left(\frac{3p+1}{10}\right)b$ˊ 是否為質數 p 的倍數即可。

三、當質數的個位數為 7 時，只要判斷 ˋ$a-\left(\frac{3p-1}{10}\right)b$ˊ 是否為質數 p 的倍數即可。

四、當質數的個位數為 9 時，只要判斷 ˋ$a+\left(\frac{p+1}{10}\right)b$ˊ 是否為質數 p 的倍數即可。

上述一 ~ 四中的判斷式子可以連續運算，直到得到一個較小或容易識別的數為止。我們將上述一 ~ 四中的結論整理成下表：

質數 P 的個位數	識別法
1	$a-\left(\frac{p-1}{10}\right)b$
3	$a+\left(\frac{3p+1}{10}\right)b$
7	$a-\left(\frac{3p-1}{10}\right)b$
9	$a+\left(\frac{p+1}{10}\right)b$

捌、參考資料：

一、張良杰、游耿能　趣味數學問題集　凡異出版社　86 年 6 月

二、談祥柏　數：上帝的寵物　上海教育出版社　1988 版

三、陳美珠　生活數學　數的整除性　台北市民族國中

四、五上數學課本 康軒版 第一、五單元 89 年 9 月

五、質數表

http://netcityl.web.hinet.net/UserData/lsc24285/%E8%B3%AA%E6%95%B8%E8%A1%A8.htm