

# 中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

## 國小-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 小 組

作品名稱：真的就是這一張嗎

關 鍵 詞：魔 術、撲 克 牌、組 合

編 號：080401

---

**學校名稱：**

連江縣馬祖敬恆國民小學

**作者姓名：**

林芷卉、黃詩婷

**指導老師：**

古靖章、黃惠敏



# 真的就是這一張嗎

## 壹、研究動機

在上數學第十一冊第 5 單元時，教到了有關兩個骰子各種點數組合出現機率的問題，而老師示範了另一種「撲克牌」魔術，在經過精心設計後，某一張特定的牌，就會在老師的預測中出現。為瞭解其中的奧秘，我們就請老師教會我們這個魔術，並且加以深入研究。

## 貳、研究目的

- 一、研究撲克牌紙牌的組成，及相互的排列關係。
- 二、瞭解魔術的規則。
- 三、破解魔術。
- 四、研究取牌張數對魔術結果的影響。
- 五、研究發牌排數對魔術結果的影響。
- 六、依照原魔術的規則與原理，研發新的魔術。

## 參、研究設備及器材

- |       |     |          |       |
|-------|-----|----------|-------|
| 一、撲克牌 | 4 副 | 二、A4 影印紙 | 300 張 |
| 三、原子筆 | 6 枝 |          |       |

## 肆、名詞解釋

- 一、取牌數：魔術規則（一）中所取的牌。
- 二、發牌排數：魔術規則（三）中所發的牌。

## 伍、研究過程

### 一、研究撲克牌紙牌的組成及相互的排列關係

一副撲克牌總共有五十二張牌。其中包含四種花色（、、、），每種花色各十三張牌（A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K）所組成的。

### 二、講解魔術規則

- （一）先取 25 張牌，取牌時牌面朝上，取完後再將牌面朝下，置於一旁（發牌者要記住第十五張牌的花色與點數）。（如圖一、圖二）
- （二）發牌者告知觀眾稍後的魔術中，某張牌（底牌）會如自己預測出現（答案尚不能公布），並將花色與點數寫下，摺好，置於一旁。

- (三) 接著將剩下的牌分成 3 排，並按照每一排第一個數字往下數到 13 為止。例如：
- 1、第一排第一張牌點數是 3，就接著發牌，從 4 開始數，數到 13 就換發下一排。  
(如圖三)
  - 2、如果第二排第一張牌點數是 J，就接著數 12、13。(如圖四)
  - 3、如果第三排第一張牌點數是 7，就從 8 開始數，數到 13 為止。(如圖五)
- (四) 剩下的牌就疊至剛剛放在一旁的 25 張牌上面。如果發三排有牌不夠的現象時，必須從剛剛所放的 25 張牌上面開始拿，直到三排的牌數完為止。
- (五) 接著請觀眾將每一排第一張牌點數相加，如果加總的點數和是 18，請觀眾猜那一疊牌中由上往下數的第 18 張為何？猜完之後，發牌者即可將之前預測答案公布並翻牌加以核對。

(圖一)



(圖二)



(圖三)



(圖四)



(圖五)



### 三、破解魔術

#### (一) 找出所有的組合.

由於不瞭解魔術的規則，我們決定將所有的組合找出來，以瞭解魔術的規則，步驟如下：

##### 1. 找出所有數字組合

- (1) 算出第一張牌點數的總和，為 3 至 39，一共 37 種(如表一)。  
 (2) 找出不同點數總和的所有組合 ➡ 所有數字組合(如表一)。

表 一

| 各排第一張牌的點數的總和 | 組合                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3            | (1, 1, 1)                                                                                                                                                                                                                                         |
| 4            | (1, 1, 2)                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5            | (1, 1, 3)、(1, 2, 2)                                                                                                                                                                                                                               |
| 6            | (1, 1, 4)、(1, 2, 3)、(2, 2, 2)                                                                                                                                                                                                                     |
| 7            | (1, 1, 5)、(1, 2, 4)、(1, 3, 3)、(2, 2, 3)                                                                                                                                                                                                           |
| 8            | (1, 1, 6)、(1, 2, 5)、(1, 3, 4)、(2, 2, 4)、(2, 3, 3)                                                                                                                                                                                                 |
| 9            | (1, 1, 7)、(1, 2, 6)、(1, 3, 5)、(1, 4, 4)、(2, 3, 4)、(2, 2, 5)、(3, 3, 3)                                                                                                                                                                             |
| 10           | (1, 1, 8)、(1, 2, 7)、(1, 3, 6)、(1, 4, 5)、(2, 3, 5)、(2, 2, 6)、(2, 4, 4)、(3, 3, 4)                                                                                                                                                                   |
| 11           | (1, 1, 9)、(1, 2, 8)、(1, 3, 7)、(1, 4, 6)、(1, 5, 5)、(2, 2, 7)、(2, 3, 6)、(2, 4, 5)、(3, 4, 4)、(3, 5, 3)                                                                                                                                               |
| 12           | (1, 1, 10)、(1, 2, 9)、(1, 3, 8)、(1, 4, 7)、(1, 5, 6)、(2, 2, 8)、(2, 3, 7)、(2, 4, 6)、(2, 5, 5)、(3, 3, 6)、(3, 4, 5)、(4, 4, 4)                                                                                                                          |
| 13           | (1, 1, 11)、(1, 2, 10)、(1, 3, 9)、(1, 4, 8)、(1, 5, 7)、(1, 6, 6)、(2, 2, 9)、(2, 3, 8)、(2, 4, 7)、(2, 5, 6)、(3, 3, 7)、(3, 4, 6)、(3, 5, 5)、(4, 4, 5)                                                                                                     |
| 14           | (1, 1, 12)、(1, 2, 11)、(1, 3, 10)、(1, 4, 9)、(1, 5, 8)、(1, 6, 7)、(2, 2, 10)、(2, 3, 9)、(2, 4, 8)、(2, 5, 7)、(2, 6, 6)、(3, 3, 8)、(3, 4, 7)、(3, 5, 6)、(4, 4, 6)、(4, 5, 5)                                                                               |
| 15           | (1, 1, 13)、(1, 2, 12)、(1, 3, 11)、(1, 4, 10)、(1, 5, 9)、(1, 6, 8)、(1, 7, 7)、(2, 2, 11)、(2, 3, 10)、(2, 4, 9)、(2, 5, 8)、(2, 6, 7)、(3, 3, 9)、(3, 4, 8)、(3, 5, 7)、(3, 6, 6)、(4, 4, 7)、(4, 5, 6)、(5, 5, 5)                                               |
| 16           | (1, 2, 13)、(1, 3, 12)、(1, 4, 11)、(1, 5, 10)、(1, 6, 9)、(1, 7, 8)、(2, 2, 12)、(2, 3, 11)、(2, 4, 10)、(2, 5, 9)、(2, 6, 8)、(2, 7, 7)、(3, 3, 10)、(3, 4, 9)、(3, 5, 8)、(3, 6, 7)、(4, 4, 8)、(4, 5, 7)、(4, 6, 6)、(5, 5, 6)                                   |
| 17           | (1, 3, 13)、(1, 4, 12)、(1, 5, 11)、(1, 6, 10)、(1, 7, 9)、(1, 8, 8)、(2, 2, 13)、(2, 3, 12)、(2, 4, 11)、(2, 5, 10)、(2, 6, 9)、(2, 7, 8)、(3, 3, 11)、(3, 4, 10)、(3, 5, 9)、(3, 6, 8)、(3, 7, 7)、(4, 4, 9)、(4, 5, 8)、(4, 6, 7)、(5, 5, 7)、(6, 6, 5)             |
| 18           | (1, 4, 13)、(1, 5, 12)、(1, 6, 11)、(1, 7, 10)、(1, 8, 9)、(2, 3, 13)、(2, 4, 12)、(2, 5, 11)、(2, 6, 10)、(2, 7, 9)、(2, 8, 8)、(3, 3, 12)、(3, 4, 11)、(3, 5, 10)、(3, 6, 9)、(3, 7, 8)、(4, 4, 10)、(4, 5, 9)、(4, 6, 8)、(4, 7, 7)、(5, 5, 8)、(5, 6, 7)、(6, 6, 6) |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 19 | (1, 5, 13) (1, 6, 12) (1, 7, 11) (1, 8, 10) (1, 9, 9)<br>(2, 4, 13) (2, 5, 12) (2, 6, 11) (2, 7, 10) (2, 8, 9)<br>(3, 3, 13) (3, 4, 12) (3, 5, 11) (3, 6, 10) (3, 7, 9)<br>(3, 8, 8) (4, 4, 11) (4, 5, 10) (4, 6, 9) (4, 7, 8) (5, 6, 8)<br>(5, 7, 7) (6, 7, 6) (5, 5, 9)                |
| 20 | (1, 6, 13) (1, 7, 12) (1, 8, 11) (1, 9, 10) (2, 5, 13)<br>(2, 6, 12) (2, 7, 11) (2, 8, 10) (2, 9, 9) (3, 4, 13)<br>(3, 5, 12) (3, 6, 11) (3, 7, 10) (3, 8, 9) (4, 4, 12)<br>(4, 5, 11) (4, 6, 10) (4, 7, 9) (4, 8, 8) (5, 5, 10)<br>(5, 6, 9) (5, 7, 8) (6, 6, 8) (6, 7, 7)              |
| 21 | (1, 7, 13) (1, 8, 12) (1, 9, 11) (1, 10, 10) (2, 6, 13)<br>(2, 7, 12) (2, 8, 11) (2, 9, 10) (3, 5, 13) (3, 6, 12)<br>(3, 7, 11) (3, 8, 10) (3, 9, 9) (4, 4, 13) (4, 5, 12)<br>(4, 6, 11) (4, 7, 10) (4, 8, 9) (5, 5, 11) (5, 6, 10)<br>(5, 7, 9) (5, 8, 8) (6, 6, 9) (6, 7, 8) (7, 7, 7) |
| 22 | (1, 8, 13) (1, 9, 12) (1, 10, 11) (2, 7, 13) (2, 8, 12)<br>(2, 9, 11) (2, 10, 10) (3, 6, 13) (3, 7, 12) (3, 8, 11)<br>(3, 9, 10) (4, 5, 13) (4, 6, 12) (4, 7, 11) (4, 8, 10)<br>(4, 9, 9) (5, 5, 12) (5, 6, 11) (5, 7, 10) (5, 8, 9)<br>(6, 6, 10) (6, 7, 9) (6, 8, 8) (7, 7, 8)         |
| 23 | (1, 9, 13) (1, 10, 12) (1, 11, 11) (2, 8, 13) (2, 9, 12)<br>(2, 10, 11) (3, 7, 13) (3, 8, 12) (3, 9, 11) (3, 10, 10)<br>(4, 6, 13) (4, 7, 12) (4, 8, 11) (4, 9, 10) (5, 5, 13)<br>(5, 6, 12) (5, 7, 11) (5, 8, 10) (5, 9, 9) (6, 6, 11)<br>(6, 7, 10) (6, 8, 9) (7, 7, 9) (7, 8, 8)      |
| 24 | (1, 10, 13) (1, 11, 12) (2, 9, 13) (2, 10, 12) (2, 11, 11)<br>(3, 8, 13) (3, 9, 12) (3, 10, 11) (4, 7, 13) (4, 8, 12)<br>(4, 9, 11) (4, 10, 10) (5, 6, 13) (5, 7, 12) (5, 8, 11)<br>(5, 9, 10) (6, 6, 12) (6, 7, 11) (6, 8, 10) (6, 9, 9)<br>(7, 7, 10) (7, 8, 9) (8, 8, 8)              |
| 25 | (1, 11, 13) (1, 12, 12) (2, 10, 13) (2, 11, 12) (3, 9, 13)<br>(3, 10, 12) (3, 11, 11) (4, 8, 13) (4, 9, 12) (4, 10, 11)<br>(5, 7, 13) (5, 8, 12) (5, 9, 11) (5, 10, 10) (6, 6, 13)<br>(6, 7, 12) (6, 8, 11) (6, 9, 10) (7, 7, 11) (7, 8, 10)<br>(7, 9, 9) (8, 8, 9)                      |
| 26 | (1, 12, 13) (2, 11, 13) (2, 12, 12) (3, 10, 13) (3, 11, 12) (4, 9, 13)<br>(4, 10, 12) (4, 11, 11) (5, 8, 13) (5, 9, 12)<br>(5, 10, 11) (6, 7, 13)<br>(6, 8, 12) (6, 9, 11) (6, 10, 10) (7, 7, 12) (7, 8, 11)<br>(7, 9, 10) (8, 8, 10) (8, 9, 9)                                          |
| 27 | (1, 13, 13) (2, 12, 13) (3, 11, 13) (3, 12, 12) (4, 10, 13) (4, 11, 12)<br>(5, 9, 13) (5, 10, 12) (5, 11, 11) (6, 8, 13)<br>(6, 9, 12) (6, 10, 11) (7, 7, 13) (7, 8, 12) (7, 9, 11)<br>(7, 10, 10) (8, 8, 11) (8, 9, 10) (9, 9, 9)                                                       |
| 28 | (2, 13, 13) (3, 12, 13) (4, 11, 13) (4, 12, 12) (5, 10, 13) (5, 11, 12)<br>(6, 9, 13) (6, 10, 12) (6, 11, 11) (7, 8, 13)                                                                                                                                                                 |

|    |                                                                                                                                                                                                                             |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | ( 7 , 9 , 12 ) ( 7 , 10 , 11 ) ( 8 , 8 , 12 ) ( 8 , 9 , 11 ) ( 8 , 10 , 10 )                                                                                                                                                |
| 29 | ( 3 , 13 , 13 ) ( 4 , 12 , 13 ) ( 5 , 11 , 13 ) ( 5 , 12 , 12 ) ( 6 , 10 , 13 ) ( 6 , 11 , 12 ) ( 7 , 9 , 13 ) ( 7 , 10 , 12 ) ( 7 , 11 , 11 ) ( 8 , 8 , 13 ) ( 8 , 9 , 12 ) ( 8 , 10 , 11 ) ( 9 , 9 , 11 ) ( 9 , 10 , 10 ) |
| 30 | ( 4 , 13 , 13 ) ( 5 , 12 , 13 ) ( 6 , 11 , 13 ) ( 6 , 12 , 12 ) ( 7 , 10 , 13 ) ( 7 , 11 , 12 ) ( 8 , 9 , 13 ) ( 8 , 10 , 12 ) ( 8 , 11 , 11 ) ( 9 , 9 , 12 ) ( 9 , 10 , 11 ) ( 10 , 10 , 10 )                              |
| 31 | ( 5 , 13 , 13 ) ( 6 , 12 , 13 ) ( 7 , 11 , 13 ) ( 7 , 12 , 12 ) ( 8 , 10 , 13 ) ( 8 , 11 , 12 ) ( 9 , 9 , 13 ) ( 9 , 10 , 12 ) ( 9 , 11 , 11 ) ( 10 , 10 , 11 )                                                             |
| 32 | ( 6 , 13 , 13 ) ( 7 , 12 , 13 ) ( 8 , 11 , 13 ) ( 8 , 12 , 12 ) ( 9 , 10 , 13 ) ( 9 , 11 , 12 ) ( 10 , 10 , 12 ) ( 10 , 11 , 11 )                                                                                           |
| 33 | ( 7 , 13 , 13 ) ( 8 , 12 , 13 ) ( 9 , 11 , 13 ) ( 9 , 12 , 12 ) ( 10 , 10 , 13 ) ( 10 , 11 , 12 ) ( 11 , 11 , 11 )                                                                                                          |
| 34 | ( 8 , 13 , 13 ) ( 9 , 12 , 13 ) ( 10 , 11 , 13 ) ( 10 , 12 , 12 ) ( 11 , 11 , 12 )                                                                                                                                          |
| 35 | ( 9 , 13 , 13 ) ( 10 , 12 , 13 ) ( 11 , 11 , 13 ) ( 11 , 12 , 12 )                                                                                                                                                          |
| 36 | ( 10 , 13 , 13 ) ( 11 , 12 , 13 ) ( 12 , 12 , 12 )                                                                                                                                                                          |
| 37 | ( 11 , 13 , 13 ) ( 12 , 12 , 13 )                                                                                                                                                                                           |
| 38 | ( 12 , 13 , 13 )                                                                                                                                                                                                            |
| 39 | ( 13 , 13 , 13 )                                                                                                                                                                                                            |

## 2、找出數字組合的類型。

數字組合的類型有 ( 甲 , 甲 , 甲 ) ( 甲 , 甲 , 乙 ) ( 甲 , 乙 , 丙 ) 三種，說明如下：

(1)( 甲 , 甲 , 甲 )：當每排第一張點數都為同一號碼時。

例：( 1 , 1 , 1 ) ( 2 , 2 , 2 ) ( 3 , 3 , 3 ) .....。

(2)( 甲 , 甲 , 乙 )：每排第一張點數有二個同號碼，一個不同時。

例：( 1 , 1 , 2 ) ( 1 , 1 , 3 ) ( 1 , 1 , 4 ) .....。

(3)( 甲 , 乙 , 丙 )：當每排第一張點數有三個不同號碼時。

例：( 1 , 2 , 3 ) ( 1 , 2 , 4 ) ( 1 , 2 , 5 ) .....。

## 3.三種數字組合類型配上花色成為三組基本類型

(1) 第一組基本類型【來自 ( 甲 , 甲 , 甲 ) 的類型】：當每排第一張點數都為同一號碼時，我們知道有 4 種組合 ( 如表二之 1 )。

(2) 第二組基本類型【來自 ( 甲 , 甲 , 乙 ) 的類型】：每排第一張點數有二個同號碼，一個不同時，有 24 種組合 ( 如表二之 2 )。

(3) 第三組基本類型【來自 ( 甲 , 乙 , 丙 ) 的類型】：當每排第一張點數有三個不同號碼時，有 64 種組合 ( 如表二之 3 )。

第一組基本類型【來自（甲，甲，甲）的類型】---有 4 種組合。

表 二 之 1

|   | 點數甲  | 點數甲  | 點數甲  |
|---|------|------|------|
| 1 | 黑桃♠甲 | 紅心♥甲 | 方塊♦甲 |
| 2 | 黑桃♠甲 | 方塊♦甲 | 梅花♣甲 |
| 3 | 黑桃♠甲 | 紅心♥甲 | 梅花♣甲 |
| 4 | 紅心♥甲 | 方塊♦甲 | 梅花♣甲 |

第二組基本類型【來自（甲，甲，乙）的類型】---有 24 (6 ×4)種組合。

表 二 之 2

|   | 點數甲  | 點數甲  | 點數乙                 | 可能排列數 |
|---|------|------|---------------------|-------|
| 1 | 黑桃♠甲 | 紅心♥甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |
| 2 | 黑桃♠甲 | 方塊♦甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |
| 3 | 黑桃♠甲 | 梅花♣甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |
| 4 | 紅心♥甲 | 方塊♦甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |
| 5 | 紅心♥甲 | 梅花♣甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |
| 6 | 方塊♦甲 | 梅花♣甲 | 黑桃♠乙、紅心♥乙、方塊♦乙、梅花♣乙 | 4     |

第三組基本類型【來自（甲，乙，丙）的類型】---有 64 (16 ×4)種組合

表 二 之 3

|    | 點數甲  | 點數乙  | 點數丙                 | 可能排列數 |
|----|------|------|---------------------|-------|
| 1  | 黑桃♠甲 | 黑桃♠乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 2  | 黑桃♠甲 | 紅心♥乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 3  | 黑桃♠甲 | 方塊♦乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 4  | 黑桃♠甲 | 梅花♣乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 5  | 紅心♥甲 | 黑桃♠乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 6  | 紅心♥甲 | 紅心♥乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 7  | 紅心♥甲 | 方塊♦乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 8  | 紅心♥甲 | 梅花♣乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 9  | 方塊♦甲 | 黑桃♠乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 10 | 方塊♦甲 | 紅心♥乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 11 | 方塊♦甲 | 方塊♦乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 12 | 方塊♦甲 | 梅花♣乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 13 | 梅花♣甲 | 黑桃♠乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 14 | 梅花♣甲 | 紅心♥乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 15 | 梅花♣甲 | 方塊♦乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |
| 16 | 梅花♣甲 | 梅花♣乙 | 黑桃♠丙、紅心♥丙、方塊♦丙、梅花♣丙 | 4     |

#### 4、找出所有組合

利用表一的數字組合與基本類型搭配，即可找出所有的組合（如附件）。

在找出所有組合前，利用表一、表二之 1、表二之 2、表二之 3 我們做了以下的統計（如表三），以確認組合總數無誤。

表 三

|            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 各排第一張牌點數總和 | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| 幾種組合       | 4     | 24    | 48    | 92    | 136   | 200   | 268   | 352   | 440   | 548   |
| 累積次數       | 4     | 28    | 76    | 168   | 304   | 504   | 772   | 1124  | 1564  | 2112  |
| 各排第一張牌點數總和 | 13    | 14    | 15    | 16    | 17    | 18    | 19    | 20    | 21    | 22    |
| 幾種組合       | 656   | 784   | 916   | 1040  | 1128  | 1212  | 1256  | 1296  | 1300  | 1296  |
| 累積次數       | 2768  | 3552  | 4468  | 5508  | 6636  | 7848  | 9104  | 10400 | 11700 | 12996 |
| 各排第一張牌點數總和 | 23    | 24    | 25    | 26    | 27    | 28    | 29    | 30    | 31    | 32    |
| 幾種組合       | 1256  | 1212  | 1128  | 1040  | 916   | 784   | 656   | 548   | 440   | 352   |
| 累積次數       | 14252 | 15464 | 16592 | 17632 | 18548 | 19332 | 19988 | 20536 | 20976 | 21328 |
| 各排第一張牌點數總和 | 33    | 34    | 35    | 36    | 37    | 38    | 39    |       |       |       |
| 幾種組合       | 268   | 200   | 136   | 92    | 48    | 24    | 4     |       |       |       |
| 累積次數       | 21596 | 21796 | 21932 | 22024 | 22072 | 22096 | 22100 |       |       |       |

## (二) 破解魔術

### 1、提出假設

在找出所有組合過程中，讓我們發現所取的 25 張牌中，第 15 張牌必定不會被動到。在所取的 25 張牌中，(由下往上數)第 15 張牌在倒置後即變為(由下往上數)第 11 張牌，而一副牌的總數為 52 張， $52 - 11 + 1 = 42$ ，

**因此假設：每次魔術會用去 42 張牌，而第 42 張牌即為所預測的那張牌。**

### 2、證明假設

數字組合的類型有(甲，甲，甲)、(甲，甲，乙)、(甲，乙，丙)三種。

以(1, 1, 1)、(1, 1, 2)、(1, 2, 3)為例，以確認每次魔術會用去 42 張牌。

以 (1, 1, 1) 為例：

表 四 之 1

|           | 第一排 | 第二排 | 第三排 | 合計 |
|-----------|-----|-----|-----|----|
| 各排第一張牌的點數 | 1   | 1   | 1   | 3  |
| 各排用去的張數   | 13  | 13  | 13  | 39 |
| 總 和       | 14  | 14  | 14  | 42 |

以 (1, 1, 2) 為例

表 四 之 二

|           | 第一排 | 第二排 | 第三排 | 合計 |
|-----------|-----|-----|-----|----|
| 各排第一張牌的點數 | 1   | 1   | 2   | 4  |
| 各排用去的張數   | 13  | 13  | 12  | 38 |
| 總 和       | 14  | 14  | 14  | 42 |

以 (1, 2, 3) 為例

表 四 之 三

|           | 第一排 | 第二排 | 第三排 | 合計 |
|-----------|-----|-----|-----|----|
| 各排第一張牌的點數 | 1   | 2   | 3   | 6  |
| 各排用去的張數   | 13  | 12  | 11  | 36 |
| 總 和       | 14  | 14  | 14  | 42 |

依據魔術規則，**各排第一張牌的點數和**就是最後要取出的牌數，再加上**各排用去的張數**，依據以上三組的結果可知兩者之和（**各排第一張牌的點數和 + 各排用去的張數**）為 42，之後，經由所有組別的印證，結果皆為 42（如附件），**因此可以證明假設（每次魔術會用去 42 張牌，而第 42 張牌即為所預測的那張牌）為真。**

3、導出表四之 1、2、3 中，總和為 42 的通式

(1) 設第一排第一張牌點數為  $\alpha$ ；

設第二排第一張牌點數為  $\beta$ ；

設第三排第一張牌點數為  $\gamma$ 。

(2) 由表四之 1、2、3 可知，

各排第一張牌的點數 + 各排用去的張數 = 14

→ 各排用去的張數 =  $14 - \text{各排第一張牌的點數}$

(3) 將 (1)(2) 整理成表五

表 五

|           |               |              |               |
|-----------|---------------|--------------|---------------|
| 各排第一張牌的點數 | $\alpha$      | $\beta$      | $\gamma$      |
| 各排用去的張數   | $14 - \alpha$ | $14 - \beta$ | $14 - \gamma$ |

(4) 由表五導出通式

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (14 - \alpha) + (14 - \beta) + (14 - \gamma) = 42$$

#### 四、研究取牌張數對魔術結果的影響

##### (一) 求出取牌的最小值：11 張。

1. 一副牌共有 52 張，每次魔術會用去 42 張牌。

2.  $52 - 42 = 10$ 。

10 所表示的涵義為，牌取完後將牌面朝下至於一旁的下面 10 張必不會被動到。

3.  $10 + 1 = 11$

第 11 張牌正好是魔術中會用去的第 42 張牌，因此牌至少要發 11 張。

##### (二) 求出取牌最大值：49 張

1. 當各排第一張牌的點數為 (13, 13, 13) 時，各排所需發的牌最少，利用通式

$$(\cup + \times + \sqcap) + (14 - \cup) + (14 - \times) + (14 - \sqcap) = 42$$

$$\Rightarrow (14 - \cup) + (14 - \times) + (14 - \sqcap) = 42 - (\cup + \times + \sqcap)$$

$$\Rightarrow \text{各排用去的張數和} = 42 - (\cup + \times + \sqcap)$$

2. 將 ( $\cup$ ,  $\times$ ,  $\sqcap$ ) 以 (13, 13, 13) 帶入，可得

$$\Rightarrow \text{各排用去的張數和} = 42 - (\cup + \times + \sqcap)$$

$$= 42 - (13 + 13 + 13)$$

$$= 3$$

3. 一副牌共有 52 張， $52 - 3 = 49$

##### (三) 求出取牌合理值：11~31 張

1. 各排第一張牌的點數和以 21 出現的次數最多 (如表三)，

因 各排第一張牌的點數和 + 各排用去的張數和 = 42

$$\Rightarrow \text{各排用去的張數和} = 42 - \text{各排第一張牌的點數和}$$

$$\text{各排用去的張數和} = 42 - 21$$

$$= 21$$

2. 各排用去的張數和 = 21

其涵義為：各排用去的張數和最容易出現 21。

3. 一副牌共有 52 張， $52 - 21 = 31$ ，取牌最大合理值為 31，取牌的最小值為 11，因此取牌合理值為 11~31。

##### (四) 改變取牌張數對底牌 (發牌者在發牌時需記住的牌) 位置的影響

1. 經由實際操作發現發牌者須記住的底牌位置必須隨發牌數而變動，如：

(1) 發 11 張時，底牌的位置是牌面朝上時由下往上數的第 1 張。

(2) 發 25 張時，底牌的位置是牌面朝上時由下往上數的第 15 張。

(3) 發 31 張時，底牌的位置是牌面朝上時由下往上數的第 21 張。

2. 導出 取牌數與底牌的位置 關係的通式

(1) 試著將 取牌數 - 底牌的位置

$$11 - 1 = 10, 25 - 15 = 10, 31 - 21 = 10$$

(2) 歸納出 取牌數 - 底牌的位置 = 10

$$\Rightarrow \text{底牌的位置} = \text{取牌數} - 10$$

假設取牌數為  $a$  ( $a$  介於 11~31 之間)

$$\Rightarrow \text{底牌的位置} = a - 10$$

### 3.結論

**底牌的位置 =  $a - 10$** ，結論為發牌者須記住的底牌位置是取牌時的第  $a - 10$  ( $a$  介於 11~31 之間) 張。

### 4.檢驗

將  $a = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30$  帶入 **底牌的位置 =  $a - 10$** ，求出新底牌的位置，再加以實際發牌驗證，結果皆無誤，**10 就是改變取牌數後的關鍵數字。**

## 五、研究發牌排數對魔術結果的影響

### (一) 當只發一排時

#### 1. 求出取牌數的範圍： $39 \sim 51$

利用表五導出的通式

$$(\cup + \text{ㄗ} + \cap) + (14 - \cup) + (14 - \text{ㄗ}) + (14 - \cap) = 42$$

➡  **$(\cup) + (14 - \cup) = 14$**

(1) 一副牌共有 52 張，每次魔術會用去 14 張牌。

(2)  $52 - 14 = 38$ 。

38 所表示的涵義為，牌取完後將牌面朝下至於一旁的下面 38 張必不會被動到。

(3)  $38 + 1 = 39$

第 39 張牌正好是魔術中會用去的第 14 張牌，因此牌**至少要取 39 張**。

(4)  $52 - 1 = 51$

發一排時，第一張牌出現點數的機率為 1-13 各點平均出現，所以取牌牌數無合理值，只有最大值，意即點數為 13 時，只需發一張牌。

#### 2. 求出底牌的位置： $a_1 - 38$

(1) 利用研究四導出的通式

$$\text{底牌的位置} = a - 10$$

(2) 設發牌數為  $a_1$  ( $a_1$  介於 39~51 之間)，10 以 38 置換 (有 38 張必不會被動到)

➡ **底牌的位置 =  $a_1 - 38$**

### (二) 當發二排時

#### 1. 找出各排第一張牌的點數和出現次數最多的和

(1) 找出所有數字組合 (如表六)

表 六

| 各排第一張牌的點數總和 | 組合            |
|-------------|---------------|
| 2           | (1, 1)        |
| 3           | (1, 2)        |
| 4           | (1, 3)、(2, 2) |
| 5           | (1, 4)、(2, 3) |

|    |                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------|
| 6  | (1, 5)、(2, 4)、(3, 3)                                             |
| 7  | (1, 6)、(2, 5)、(3, 4)                                             |
| 8  | (1, 7)、(2, 6) \ (3, 5) \ (4, 4)                                  |
| 9  | (1, 8) \ (2, 7) \ (3, 6) \ (4, 5)                                |
| 10 | (1, 9) \ (2, 8) \ (3, 7) \ (4, 6) \ (5, 5)                       |
| 11 | (1, 10) \ (2, 9) \ (3, 8) \ (4, 7) \ (5, 6)                      |
| 12 | (1, 11) \ (2, 10) \ (3, 9) \ (4, 8) \ (5, 7) \ (6, 6)            |
| 13 | (1, 12) \ (2, 11) \ (3, 10) \ (4, 9) \ (5, 8) \ (6, 7)           |
| 14 | (2, 12) \ (3, 11) \ (4, 10) \ (5, 9) \ (6, 8) \ (7, 7) \ (1, 13) |
| 15 | (2, 13) \ (3, 12) \ (4, 11) \ (5, 10) \ (6, 9) \ (7, 8)          |
| 16 | (3, 13) \ (4, 12) \ (5, 11) \ (6, 10) \ (7, 9) \ (8, 8)          |
| 17 | (4, 13) \ (5, 12) \ (6, 11) \ (7, 10) \ (8, 9)                   |
| 18 | (5, 13) \ (6, 12) \ (7, 11) \ (8, 10) \ (9, 9)                   |
| 19 | (6, 13) \ (7, 12) \ (8, 11) \ (9, 10)                            |
| 20 | (7, 13) \ (8, 12) \ (9, 11) \ (10, 10)                           |
| 21 | (8, 13) \ (9, 12) \ (10, 11)                                     |
| 22 | (9, 13) \ (10, 12) \ (11, 11)                                    |
| 23 | (10, 13) \ (11, 12)                                              |
| 24 | (11, 13) \ (12, 12)                                              |
| 25 | (12, 13)                                                         |
| 26 | (13, 13)                                                         |

(2) 找出數字組合的類型。

數字組合的類型有 (甲, 甲) \ (甲, 乙) 二種。

(3) 兩種數字組合類型配上花色成為兩組基本類型

I. 第一組基本類型【來自 (甲, 甲) 的類型】: 當每排第一張點數都為同一號碼時, 我們知道有 6 種組合 (如表七之 1)。

II. 第二組基本類型【來自 (甲, 乙) 的類型】: 每排第一張點數二個同號碼不同時, 有 16 種組合 (如表七之 2)。

第一組基本類型【來自 (甲, 甲) 的類型】---有 6 種組合。

表 七 之 1

|   | 點數甲    | 點數甲    |
|---|--------|--------|
| 1 | 黑桃 ♠ 甲 | 紅心 ♥ 甲 |
| 2 | 黑桃 ♠ 甲 | 方塊 ♦ 甲 |
| 3 | 黑桃 ♠ 甲 | 梅花 ♣ 甲 |
| 4 | 紅心 ♥ 甲 | 方塊 ♦ 甲 |
| 5 | 紅心 ♥ 甲 | 梅花 ♣ 甲 |
| 6 | 方塊 ♦ 甲 | 梅花 ♣ 甲 |

第二組基本類型【來自（甲，乙）的類型】---有 16 種組合。

表 七 之 2

|    | 點數甲  | 點數乙  |
|----|------|------|
| 1  | 黑桃♠甲 | 黑桃♠乙 |
| 2  | 黑桃♠甲 | 紅心♥乙 |
| 3  | 黑桃♠甲 | 方塊♦乙 |
| 4  | 黑桃♠甲 | 梅花♣乙 |
| 5  | 紅心♥甲 | 黑桃♠乙 |
| 6  | 紅心♥甲 | 紅心♥乙 |
| 7  | 紅心♥甲 | 方塊♦乙 |
| 8  | 紅心♥甲 | 梅花♣乙 |
| 9  | 方塊♦甲 | 黑桃♠乙 |
| 10 | 方塊♦甲 | 紅心♥乙 |
| 11 | 方塊♦甲 | 方塊♦乙 |
| 12 | 方塊♦甲 | 梅花♣乙 |
| 13 | 梅花♣甲 | 黑桃♠乙 |
| 14 | 梅花♣甲 | 紅心♥乙 |
| 15 | 梅花♣甲 | 方塊♦乙 |
| 16 | 梅花♣甲 | 梅花♣乙 |

（4）找出各排第一張牌的點數和出現次數最多的和

利用表六的數字組合與基本類型搭配，即可統計出出現次數最多的和與所有的組合數。（如表八）

表 八

| 各排第一張牌點數總和 | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7   | 8    | 9    | 10   | 11   |
|------------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| 幾種組合       | 6    | 16   | 22   | 32   | 38   | 48  | 54   | 64   | 70   | 80   |
| 累積次數       | 6    | 22   | 44   | 76   | 114  | 162 | 216  | 280  | 350  | 430  |
| 各排第一張牌點數總和 | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17  | 18   | 19   | 20   | 21   |
| 幾種組合       | 86   | 96   | 102  | 96   | 86   | 80  | 70   | 64   | 54   | 48   |
| 累積次數       | 516  | 612  | 714  | 810  | 896  | 976 | 1046 | 1110 | 1164 | 1212 |
| 各排第一張牌點數總和 | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   |     |      |      |      |      |
| 幾種組合       | 38   | 32   | 22   | 16   | 6    |     |      |      |      |      |
| 累積次數       | 1250 | 1282 | 1304 | 1320 | 1326 |     |      |      |      |      |

## 2. 求出取牌數的範圍：25~38

利用表五導出的通式

$$(\heartsuit + \spadesuit + \clubsuit) + (14 - \heartsuit) + (14 - \spadesuit) + (14 - \clubsuit) = 42$$

➡  $(\heartsuit + \spadesuit) + (14 - \heartsuit) + (14 - \spadesuit) = 28$

(1) 一副牌共有 52 張，每次魔術會用去 28 張牌。

(2)  $52 - 28 = 24$ 。

24 所表示的涵義為，牌取完後將牌面朝下至於一旁的下面 24 張必不會被動到。

(3)  $24 + 1 = 25$

第 25 張牌正好是魔術中會用去的第 28 張牌，因此牌至少要取 25 張。

(4) 求出最大合理值

1. 各排第一張牌的點數和以 14 出現的次數最多（如表八），

因 各排第一張牌的點數和 + 各排用去的張數和 = 28

➡  $\text{各排用去的張數和} = 28 - \text{各排第一張牌的點數和}$

$$\text{各排用去的張數和} = 28 - 14$$

$$= 14$$

II. 各排用去的張數和 = 14

其涵義為：各排用去的張數和最容易出現 14。

III. 一副牌共有 52 張， $52 - 14 = 38$ ，取牌最大合理值為 38。

## 3. 求出底牌的位置： $a_2 - 24$

(1) 利用研究四導出的通式

$$\text{底牌的位置} = a - 10$$

(2) 設發牌數為  $a_2$  ( $a_2$  介於 25~38 之間)，10 以 24 替代（有 24 張必不會被動到）

➡  $\text{底牌的位置} = a_2 - 24$

(三) 當發三排時

### 1. 求出取牌數的範圍：11~31

### 2. 求出底牌的位置： $a - 10$

(四) 當發四排時

$$(\heartsuit + \spadesuit + \clubsuit + \diamondsuit) + (14 - \heartsuit) + (14 - \spadesuit) + (14 - \clubsuit) + (14 - \diamondsuit) = 56$$

$56 > 52$ ，魔術無法進行。

## 六、研發新魔術

(一) 決定新魔術的發牌排數與取牌張數

依據研究四、五發現的規則，反覆加以試驗，發牌排數為 3 排，取牌數為 11~31 時，遊戲最俱玄疑性（不易被觀眾看穿）。

(二) 新的魔術規則

- 1、請觀眾由 11~31 中任選一個數字，以決定取牌張數【發牌者要記住取牌時的第  $a - 10$  ( $a$  介於 11~31) 張牌，證明如研究目的四】，取牌時牌面朝上，取完後再將牌面朝下，置於一旁。

2、其餘同原規則。

## 陸、研究結果

一、撲克牌一組為 52 張，在原魔術中，每次必定取走 42 張，因此這個魔術宣告破解。

二、總和為 42 的通式為

$$(\spadesuit + \heartsuit + \clubsuit) + (14 - \spadesuit) + (14 - \heartsuit) + (14 - \clubsuit) = 42$$

用途：計算魔術會用去的牌數和。

三、底牌位置會隨取牌的張數不同而改變，通式如下：

$$\text{底牌的位置} = a - 10 \quad (a \text{ 代表取牌張數，介於 } 11 \sim 31)$$

四、不同發牌排數對魔術結果的影響如下：

(一) 當只發一排時：

1. 每次魔術會用去 14 張牌。【 $(\spadesuit) + (14 - \spadesuit) = 14$ 】

2. 底牌的位置 =  $a_1 - 38$  ( $a_1$  為取牌數介於 39~51 之間)

(二) 當只發二排時：

➡ 1. 每次魔術會用去 28 張牌。【 $(\spadesuit + \heartsuit) + (14 - \spadesuit) + (14 - \heartsuit) = 28$ 】

2. 底牌的位置 =  $a_2 - 24$  ( $a_2$  為取牌數介於 25~38 之間)

(三) 當發四排時：

$$[(\spadesuit + \heartsuit + \clubsuit + \diamondsuit) + (14 - \spadesuit) + (14 - \heartsuit) + (14 - \clubsuit) + (14 - \diamondsuit)] = 56$$

魔術會用去 56 張牌，而一副牌只有 52 張，所以無此魔術。

(四) 發牌排數至少一排，至多三排。

## 柒、討論

一、不找出排列的原因是因為各組內數字的前後次序不同並不會影響結果。

二、所取的 25 張牌中，牌面朝上時的第 16 張到第 25 張在倒置後（倒置後成為第 1 到第 10 張）就不會被動到，而選擇第 15 張（倒置後成為第 11 張）的理由是如此才能與三組牌的第一張牌的點數和相吻合，可見魔術設計者的巧思。

三、依據表三，三個排第一張牌點數和為 21 出現的機率最高，點數和為 3 與 39 出現的機率最低（如圖六）。

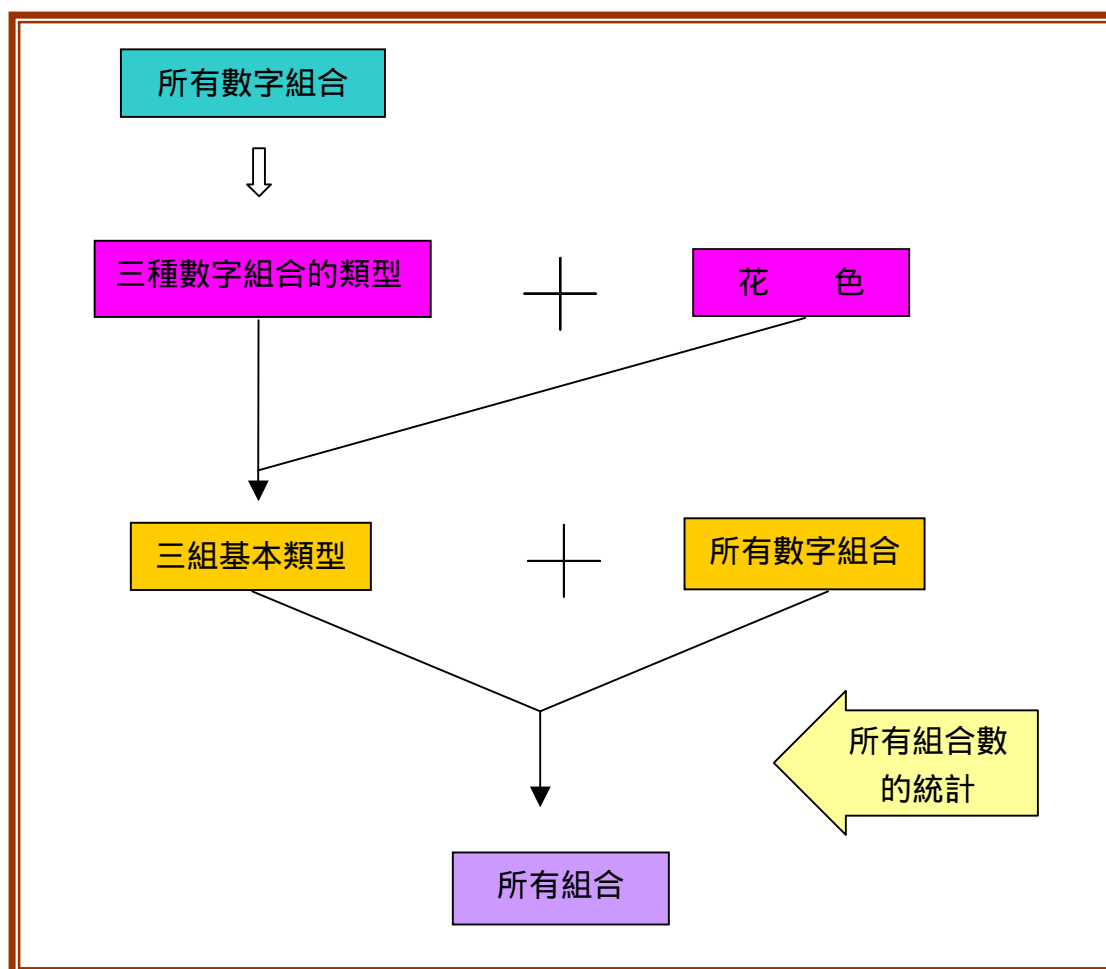
四、數字組合類型（甲，乙，丙），可用  $(A, B, C)$   $(a, b, c)$  .....等代替；通式中的  $(\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit)$  可用  $(A, B, C)$   $(a, b, c)$  .....等代替，端視研究者習慣而定。

五、先研究取牌張數對魔術結果的影響再研究發牌排數對魔術結果的影響的原因，是因為先了解取牌的範圍能使研究進行的更順暢。

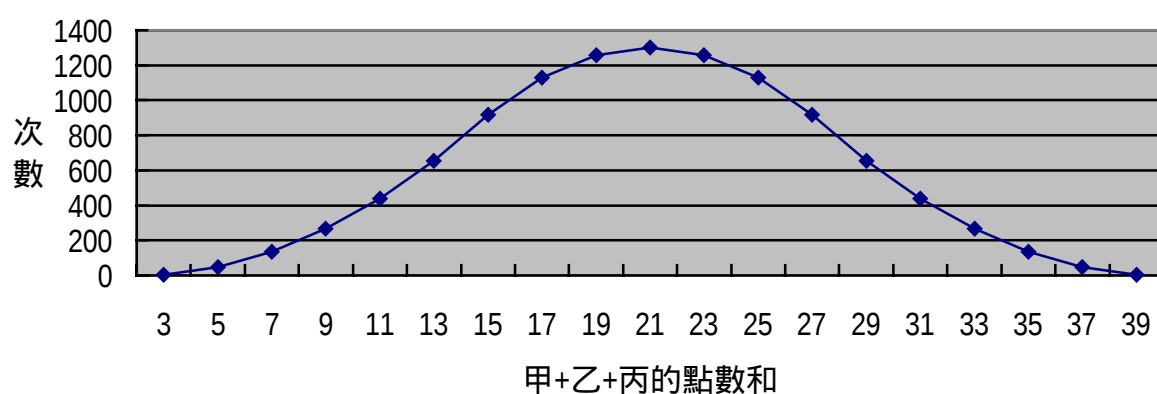
六、改變發牌排數的研究中，取牌數就邏輯上而言是可以取到最大值，但卻會讓魔術降低了玄疑性，因此改以合理值替代。

七、新魔術中的規則只是研究者的心得，讀者可視個人喜好加以更動。

八、找出所有組合的流程，如下圖：



點數和與出現次數關係圖(圖六)



## 捌、參考資料

本魔術為通俗遊戲，無任何書籍資料可供參考。