

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-數學科

科 別： 數 學

組 別： 高 中 組

作品名稱：開 關 函 數 及 其 應 用

關鍵詞：函 數、同 類、標準圖形

編 號：040415

學校名稱：

臺北市立第一女子高級中學

作者姓名：

葉均承

指導老師：

蘇麗敏



壹、摘要

玩 5×5 開關電燈遊戲時有很多不同的變化，我們研究這些變化中對應的函數和集合，透過這些函數和集合的概念，我們研究 1.判斷任意二個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 X 和 Y 是否同類？如果 X 和 Y 是同類，則我們將找出所有使圖 X 變成圖 Y 的方法（開關電燈遊戲問題只是第一個問題的特殊情形）；2. 所有的 2^{n^2} 個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形有多少不同類圖形？由於 $n \times n$ 圖形有 2^{n^2} 個，當 n 的值愈來愈大時，要確實討論這些圖形非常困難。在這個研究計劃裡，我們給出只要計算 n 個圖形和一些簡單分析就可以解答上述二個問題的方法，這樣不但大幅地加快解題速度，同時也大幅地減少問題的難度。用這種方法，我們只列出 $n = 18$ 情形的解答(限於篇幅問題)。

貳、研究動機

前幾年我玩過一個遊戲：

有一個 5×5 的方格表，每個方格內都有開啟光明的裝置，只要在方格內點一下，就可同時點亮自己以及上、下、左、右相鄰的方格，但若是原本已是光明的方格就會變成黑暗的。如果本來的 25 個方格內的燈炮狀態全是黑暗的，請問是否能將方格表內的燈炮全部點亮呢？

今年老師教我們集合和函數，我覺得在日常生活中，我們常常使用函數，但自己卻不察覺。在玩這個開關電燈遊戲時有很多不同的變化，而每一種變化都是一種函數，每個函數有它的定義域和值域；而且有的變化也涵蓋了一些合成函數的概念。在這個研究計劃裡，我希望透過

這個遊戲，來研究使用過的集合和函數，使我深入了解集合和函數的概念，同時也能對這個遊戲更深一層的研究。

參、研究目的

如果在一些小方格內各點一下之後，就可以把圖形 X 變成 Y，則稱圖 X 與圖 Y 同類。

我們將研究：

(一).判斷任意二個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 X 和 Y 是否同類？如果 X 和 Y 是同類，則我們將找出所有使圖 X 變成圖 Y 的方法。

(二).所有的 2^{n^2} 個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形有多少不同類圖形？

最後我們也把這種想法和技巧應用到翻棋分類的問題。

肆、研究設備及器材

紙、筆、圍棋、圍棋盤、電腦

伍、研究過程或方法

一、定義和記號

定義一

- 1.用 0 和 1 代表燈炮黑暗和光明，燈炮狀態圖形就是描述方格表內燈炮的狀態來的圖形；
- 2.用 ■ 和 □ 代表點奇數下和點偶數下，觸摸開關狀態圖形就是記錄在方格表的一些小方格內觸摸次數的圖形；
- 3.用 c 和 x 代表改變和不改變方格內燈炮的狀態，改變狀態圖形就是記錄在方格表內改變燈炮

狀態情形的圖形。

我們用下列記號：

$B_n = \{X | X \text{ 是 } n \times n \text{ 的方格表中的燈炮狀態圖形}\}$ 。 $\text{id}(B_n)$ 是指方格表中每個方格內燈炮的狀態全部是 0 的燈炮狀態圖形；

$C_n = \{P | P \text{ 是 } n \times n \text{ 的方格表中的改變狀態圖形}\}$ 。 $\text{id}(C_n)$ 是指方格表中每個方格內全部是 x 的改變狀態圖形；

$T_n = \{K | K \text{ 是 } n \times n \text{ 的方格表中的觸摸開關狀態圖形}\}$ 。 $\text{id}(T_n)$ 是指方格表中每個方格內全部是 $\square$ 的改變狀態圖形；

燈炮狀態圖形

0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1

圖 1.a

觸摸開關狀態圖形

$\blacksquare$				
				$\blacksquare$
	$\blacksquare$			
		$\blacksquare$		

圖 1.b

改變狀態圖形

c	c	x	x	c
c	c	x	c	c
c	c	x	x	c
x	x	c	c	x
x	x	c	x	x

圖 1.c

定義二. 下面我們將定義四個函數

1. 函數 $f_n: T_n \rightarrow C_n$: 給定一個 $n \times n$ 觸摸開關狀態圖形 K , 則改變狀態圖形 $f_n(K)$ 就是記錄這個觸摸開關狀態圖形 K 所造成 $n \times n$ 的方格表內燈炮的明暗狀態變化的情形。例如 K 是圖 1.b , 則 $f_n(K)$ 是圖 1.c。
2. 函數 $g_P: B_n \rightarrow B_n$: 給定一個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 X , $g_P(X)$ 就是按照改變狀態圖形 P 來改變燈炮狀態圖形 X 內燈炮明暗狀態所得到的新燈炮狀態圖形; 而且 $g_P(g_P(X)) = X$ 。任何一個 $n \times n$ 改變狀態圖形 P , 我們都可以定義一個的函數。例如 P 是圖 1.c , X 是圖 2.a , 則 $g_P(X)$ 就是圖 2.b。

0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1

圖 2.a

$g_P \rightarrow$

1	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1

圖 2.b

3. 函數 $h_K: B_n \rightarrow B_n$: 給定一個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 X , $h_K(X) = g_{f(K)}(X)$ 也就是按照改變狀態圖形 $f(K)$ 來改變燈炮狀態圖形 X 所得到的新燈炮狀態圖形。任何一個 $n \times n$ 觸摸開關狀態圖形 K , 都可以定義一個函數 h_K 。例如 K 是圖 1.b, X 是圖 2.a, 則 $h_K(X)$ 就是圖 2.b。

4. 函數 $w_B: B_n \times B_n \rightarrow C_n$: 給定二個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 X 與 Y , $w_B(X, Y)$ 是一個 $n \times n$ 改變

狀態圖形, 使得按照 $w_B(X, Y)$ 可以把圖形 X 變成圖 Y , 這樣的改變狀態圖形是唯一。如果

圖 X 與圖 Y 中 (i, j) 方格的燈炮狀態不同, 則 $w_B(X, Y)$ 中 (i, j) 方格內就是 c , 否則就是 x 。例

如 X 是圖 2.a, Y 是圖 2.b, 則 $w_B(X, Y)$ 就是圖 1.c。

定義三

1. 給定二個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形圖 X 與圖 Y , 則定義 $n \times n$ 燈炮狀態圖形 $X+Y$ 如下:

如果 X 與 Y 中 (i, j) 方格的燈炮狀態不同, 則 $X+Y$ 中 (i, j) 方格內就是 1, 否則就是 0。

2. 給定二個 $n \times n$ 改變狀態圖形 P 與 Q , 則定義 $n \times n$ 改變狀態圖形 $P+Q$ 如下:

如果 P 與 Q 中 (i, j) 方格的狀態不同, 則 $P+Q$ 中 (i, j) 方格內就是 c , 否則就是 x 。

3. 給定二個 $n \times n$ 觸摸開關狀態圖形 K 與 L , 則定義 $n \times n$ 觸摸開關狀態圖形 $K+L$ 如下:

如果 K 與 L 中 (i, j) 方格的狀態不同, 則 $K+L$ 中 (i, j) 方格內就是 $\blacksquare$, 否則就是 $\square$ 。

二、研究步驟與分析

給定二個 $n \times n$ 的燈炮狀態圖形 X 和 Y , 根據定義, 很容易得到把圖 X 變成圖 Y

的改變狀態圖形 $w_B(X,Y)$ ，我們知道 $w_B(X,Y)$ 也會把圖 Y 變成圖 X ，這是一種對稱性質。要找出使圖 X 變成圖 Y 的方法就是要找觸摸開關狀態圖形而不只是要找出改變狀態圖形，所以我們是要問

“是否存在一個 $n \times n$ 觸摸開關狀態圖形 K 使得 $f_n(K) = w_B(X,Y)$?”

要找出所有使圖 X 變成圖 Y 的方法就是要找所有使得 $f_n(K) = w_B(X,Y)$ 的觸摸開關狀態圖形 K 。當想要把圖 X 變成圖 Y 時。我們也可以把圖 Y 中的方格內燈炮狀態看成全是 0。而如果把圖 X 與圖 Y 中 (i,j) 方格的燈炮狀態不同，則把圖 X 中的 (i,j) 方格內燈炮狀態看成是 1；如果圖 X 與圖 Y 中 (i,j) 方格的燈炮狀態相同，則把圖 X 中的 (i,j) 方格內燈炮狀態看成是 0。這樣我們得到新的圖 X' ，其中 $w_B(X', \text{id}(B))$ 和 $w_B(X,Y)$ 是一樣。所以說我們只要討論把任意圖 X 變成 $\text{id}(B)$ 的情形就可以了。

為了要研究這個遊戲問題的 $n \times n$ 一般情形。我們將從較小值的 n 著手。為了方便起見，我們把 $w_B(X, \text{id}(B))$ 簡寫成 $w_B(X)$ 。

1. 2×2 和 3×3 方格表.

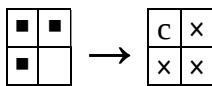


圖 3.a

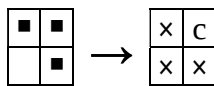


圖 3.b

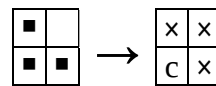


圖 3.c

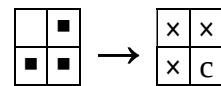


圖 3.e

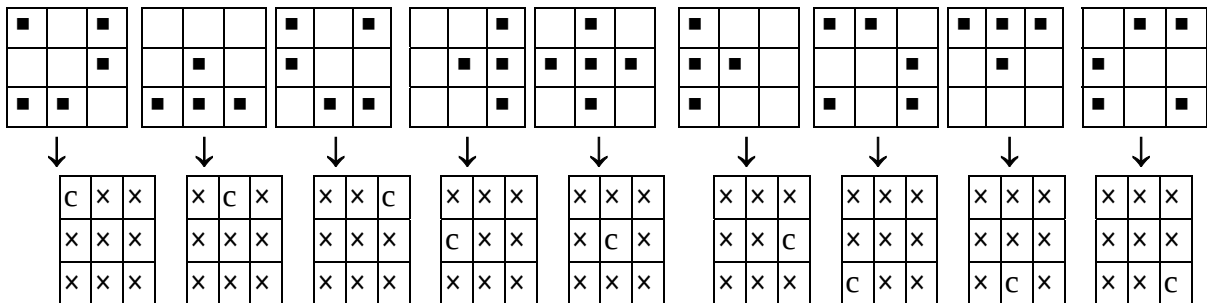


圖 4.a

圖 4.b

圖 4.c

圖 4.d

圖 4.e

圖 4.f

圖 4.g

圖 4.h

圖 4.i

由定義三可以推出 $f_n(K + L) = f_n(K) + f_n(L)$ ，加上圖 3 和圖 4，我們容易證明函數 $f_2: T_2$

→ C_2 和 $f_3: T_3 \rightarrow C_3$ 是一個一對一的對射函數，因此我們得到

1. 所有 2^4 個 2×2 的燈炮狀態圖形全是同類圖形。
2. 所有 2^9 個 3×3 的燈炮狀態圖形也全是同類圖形。
3. 給定任意二個 2×2 (或是 3×3) 的燈炮狀態圖形 X 和 Y ，將圖 X 變成圖 Y 的方法都恰好只有一種。

2. 4×4 和 5×5 方格表.

(1). 當 $n = 4$ 時。我們稱一個前三列方格中燈炮全是黑暗的 4×4 燈炮狀態圖形為一個標準的 4×4 的燈炮狀態圖形，它們共有 16 種。我們證明: 任意一個 4×4 的燈炮狀態圖形一定和一個標準的 4×4 的燈炮狀態圖形同類。再利用圖 5.a, 圖 5.b, 圖 5.c 和圖 5.d 可以推論出這些個標準的 4×4 的燈炮狀態圖形全是不同類圖形。最後得到

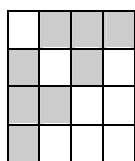


圖 5.a

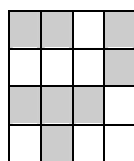


圖 5.b

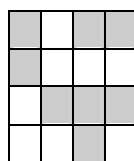


圖 5.c

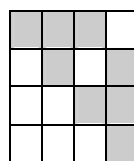


圖 5.d

1. 所有的 2^{16} 個 4×4 的燈炮狀態圖形共有 16 個不同類圖形。
2. 給定任意二個同類的 4×4 的燈炮狀態圖形 X 和 Y ，將圖 X 變成圖 Y 的方法都恰好只有 16 種。

(2). 當 $n = 5$ 時。我們稱一個前四列和最後一列的前三個方格中燈炮全是黑暗的 5×5 燈炮狀態圖形為一個標準的 5×5 的燈炮狀態圖形，它們共有 4 種。我們證明: 任意一個 5×5 的燈炮狀態圖形一定和一個標準的 5×5 的燈炮狀態圖形同類，再利用圖 6.a 和 圖 6.b 可以推論出這些個標準的 5×5 的燈炮狀態圖形全是不同類圖形。最後得到

1. 所有的 2^{25} 個 5×5 的燈炮狀態圖形共有 4 個不同類圖形。

2.任意二個同類的 5×5 的燈炮狀態圖形 X 和 Y ,將圖 X 變成圖 Y 的方法都恰好只有 4 種

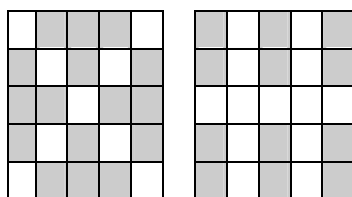


圖 6 .a

圖 6 .b

3. 一般 $n \times n$ 方格表.

當 $n = 4, 5$ 時。我們使用的方法相同，而且使用的方法可以推廣到這個遊戲問題的一般 $n \times n$ 情形。在 $n \times n$ 的方格表中，我們由上而下，由左而右，把方格表中的方格依自然數順序，由小而大，從 $1, 2, \dots$ 編號到 n^2 。令

集合 $U_n = \{K | K \text{ 是 } n \times n \text{ 的觸摸開關狀態圖形，除了第一列之外的每一方格內狀態都是 } \square\}$;

集合 $F_n(X) = \{L | L \text{ 是 } n \times n \text{ 的觸摸開關狀態圖形，且 } h_L(X) \text{ 的前 } n-1 \text{ 列方格的燈炮狀態全是 } 0\}$ 。

給定一個燈炮狀態圖形 X ，我們定義一個函數 $v_X: U_n \rightarrow F_n(X)$ ，其中對於集合 U_n 中的任一個元素觸摸開關狀態圖形 K ，按照下面操作程序，最後得到的觸摸開關狀態圖形就是 $v_X(K)$ ：

圖形 K 中第一列的每一方格內狀態已經給定，從第二列第一個方格開始，到最後一列最後一個方格為止，依由小而大的編號順序，按照下列規則來決定圖形 K 的方格內是 $\blacksquare$ ，還是 $\square$ 。

規則： 如果燈炮狀態圖形 X 中 (i, j) 方格內是 1 且圖形 K 中 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1)$ 和 $(i-2, j)$ 方格內共點偶數下；或者如果燈炮狀態圖形 X 中 (i, j) 方格內是 0 且觸摸開關狀態圖形 K 中 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1)$ 和 $(i-2, j)$ 方格內共點奇數下，則 K 中 (i, j) 方格內就是 $\blacksquare$ 。否則就是 $\square$ 。

由於只有在 $n \times n$ 的方格表中 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1), (i, j)$ 和 $(i+1, j)$ 五個方格內點一下才會影響到方格表中 (i, j) 方格內燈炮狀態，而 (i, j) 方格是這五個方格裡編號最大，按照上述程序， (i, j) 方格可以說是由最後得到的觸摸開關狀態圖形 $v_X(K)$ 所得到 $h_{v_X(K)}(X)$ 中 $(i-1, j)$ 方格內狀態的最後一個拍板敲定的方格。按照上述規則來操作，一直到我們把觸摸開關狀態圖形 K 中最後一列最後一個方格決定了才停止。我們知道最後得到的觸摸開關狀態圖形 $v_X(K)$ 是唯一的，而且會造成 $h_{v_X(K)}(X)$ 的前 $n-1$ 列方格內的燈炮狀態全是 0。

令觸摸開關狀態圖形 M_i 是 U_n 中的元素，其中 M_i 的第一列第 i 個方格是 ■，其餘都是 □。

我們先計算 $v_{id(B)}(M_i)$ ，由定義三可以推出 $h_K(X) + h_L(X) = h_{K+L}(X)$ ，我們得到集合

$$D_n = \{ h_{v_{id(B)}(M)}(id(B)) \mid M \in U_n \}.$$

例一．當 $n=5$ 時，計算 $v_{id(B)}(M_i)$ ，我們得到

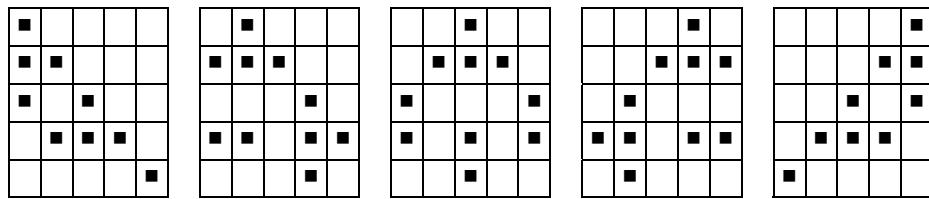


圖 7. $v_{id(B)}(M_i), i = 1, 2, 3, 4, 5$

再計算 $h_{v_{id(B)}(M)}(id(B))$ ，我們得到

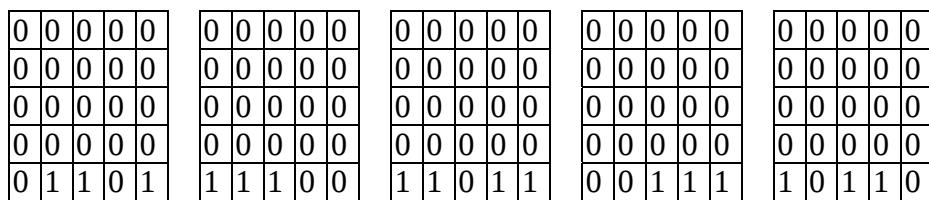


圖 8. $h_{v_{id(B)}(M_i)}(id(B)), i = 1, 2, 3, 4, 5$

由公式 $h_K(X) + h_L(X) = h_{K+L}(X)$ ，我們得到圖 9 中八個圖形所成的集合 D_5

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	1	1	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

圖 9.

由於 D_5 中的元素前 4 列方格全是 0，我們只寫出最後一列方格內狀態

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	1	0	1	1

集合 $D_5 = \{$

0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$\}$

問題 1.任意一個 $n \times n$ 燈炮狀態圖形圖 X 是否和 $id(B)$ 同類？如果圖 X 和 $id(B)$ 同類，請找出所有使圖 X 變成 $id(B)$ 的方法。

答: (1). 只要找出集合 U 中的任一個元素觸摸開關狀態圖形 K ，然後計算 $h_{V_x(K)}(X)$ 。

則 “圖 X 和 $id(B)$ 同類 $\Leftrightarrow h_{V_x(K)}(X) \in D_n$ ”。

(2). 所有使圖 X 變成 $id(B)$ 的觸摸開關狀態圖形所成的集合就是

$$\{V_x(K) + V_{id(B)}(M) \mid h_{V_x(K)}(X) = h_{V_{id(B)}(M)}(id(B)), M \in U_n\}.$$

例二. 設 X 是圖 10.a，請問圖 X 是否和 $id(B)$ 同類？如果圖 X 和 $id(B)$ 同類，請找出所有使圖 X 變成 $id(B)$ 的方法。

答：觸摸開關狀態圖形 K (如圖 10.b)是集合 U 中的一個元素，則 $v_x(K)$ 就是圖 10.c

$h_{v_x(K)}(X)$ 是圖 10.d。由例一 1 知道 $h_{v_x(K)}(X) \in D_n$ 所以圖 X 和 $id(B)$ 同類。所有使

得 $h_{v_x(K)}(X) = h_{v_{id(B)}(M)}(id(B))$ 的觸摸開關狀態圖形 $v_{id(B)}(M)$ 有四個。它們是圖

10.e ,10.f, 10.g,10,h 因此所有使圖 X 變成 $id(B)$ 的觸摸開關狀態圖形有圖 10.i ,10.j,

10.k, 10.l。

1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0

圖 10.a

■	■			

圖 10.b

■	■			
■	■	■		■
	■		■	
■	■	■	■	■
			■	

圖 10.c

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0

圖 10.d

■			■	■
■	■	■		
■	■			■
■	■		■	■
■	■			■

圖 10.e

■	■	■		■
	■			■
			■	
	■	■	■	
■		■	■	■

圖 10.f

	■			
■	■	■		
			■	
■	■		■	■
			■	

圖 10.g

		■	■	
	■			■
■	■			■
	■	■	■	
	■	■		

圖 10.h

	■		■	■
				■
■			■	■
		■		
■	■		■	■

圖 10.i

		■		■
■		■		
	■			
■				■
■		■		■

圖 10.j

■				
				■
	■			
		■		

圖 10.k

■	■	■	■	
■		■		
■			■	■
■				■
	■	■	■	

圖 10.l

例三. 本來的遊戲是：有一個 5×5 的方格表，每個方格內都有開啟光明的裝置，只要在方格內點一下，就可同時點亮自己以及上、下、左、右相鄰的方格，但若是原本已是光明的方格就會變成黑暗的。如果本來的 25 個方格內的燈炮狀態全是黑暗的，請問是否能將方格表內的燈泡全部點亮呢？

答:可以。我們知道: 如果觸摸開關狀態圖形 K 使本來的 25 個方格內的燈炮全部是黑暗的圖形變成 25 個方格內的燈炮全部點亮的圖形, 則圖形 K 也可以使本來的 25 個方格內的燈炮全部是點亮的圖形變成 25 個方格內的燈炮全部黑暗的圖形。由問題 1 解答過程可以得到: 所有使本來的 25 個方格內的燈炮全部是黑暗的圖形變成 25 個方格內的燈炮全部點亮的圖形的觸摸開關狀態圖形有圖 11.a,11.b,11.c,11.d。

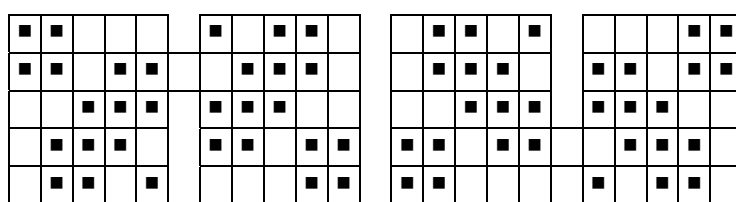


圖 11.a

圖 11.b

圖 11.c

圖 11.d

問題 2. 所有的 2^{n^2} 個燈炮狀態圖形有幾個不同類圖形 ?

答: 所有的 2^{n^2} 個燈炮狀態圖形有 $|\{v_{id(B)}(K) | K \in U\}|$ 個不同類圖形。令集合 $I = \{v_{id(B)}(K) | K \in U\}$, 且設集合 I 有 i 個元素, 任意一個燈炮狀態圖形圖 X , 都恰好可以找到 i 個觸摸開關狀態圖形, 使得圖 X 保持不變, 因為所有的觸摸開關狀態圖形共有 2^{n^2} 個, 所以任意一個燈炮狀態圖形圖 X 都有 $2^{n^2}/i$ 個同類但不相同的圖形, 因此所有的 2^{n^2} 個燈炮狀態圖形有 $2^{n^2}/(2^{n^2}/i) = i$ 個不同類圖形。

4. 應用

在 $n \times n$ 方格中有九顆棋子 (棋子的正面是黑色, 反面是白色), 我們定義兩種操作:

(一). 每次把某一行或某一列的棋子全部翻面叫作一次 A 操作。

(二). 每次把某一行或某一列或某一個對角線的棋子全部翻面叫作一次 B 操作。

如果經過有限次 A 操作(或 B 操作)可以把圖 X 變成圖 Y , 則我們稱圖 X 與圖 Y 為相同 A-類 (或相同 B-類), 否則圖 X 與圖 Y 屬於不同的 A-類。所謂 “ $n \times n$ 方格翻棋分類問題”

是問：所有的 2^{n^2} 個 $n \times n$ 方格棋子圖形到底可以分成多少個不同的A-(或B-)類?

答: (一) A-類. 由於只有 $2n$ 種不同的一次 A 操作, 所以我們共有 2^{2n} 個不同的 A 操作, 其中任意圖 X 都恰好有兩個不同的 A 操作使得圖 X 保持不變, 所以任意圖 X 都有 2^{2n-1} 個同 A-類但不同的影像, 因此所有 2^{n^2} 個 $n \times n$ 方格棋子圖形有 $2^{n^2-2n+1} = 2^{(n-1)^2}$ 個不同類圖形。

(二) B-類. 由於只有 $2n+2$ 種不同的一次 B 操作, 所以我們共有 2^{2n+2} 個不同的 B 操作, 當 $n=4$ 時, 任意圖 X 都恰好有四個不同的 B 操作使得圖 X 保持不變, 因此所有 2^{16} 個 4×4 方格棋子圖形有 2^8 個不同類圖形。

當 $n \neq 4$ 時, 任意圖 X 都恰好有二個不同的 B 操作使得圖 X 保持不變, 因此所有 2^{n^2} 個 $n \times n$ 方格棋子圖形有 $2^{n^2-2n-1} = 2^{(n-1)^2-2}$ 個不同類圖形。

在討論立體 $n \times n \times n$ 方格翻棋分類問題時, 我們需要考慮到 C 操作。所謂一次 C 操作是指每次把某個平面上的某一行或某一列或某一個對角線的棋子全部翻面。我們一樣可以將所有 $n \times n \times n$ 方格棋子圖形分成不同的 C-類, 但是要確實地計算出有幾個 C 操作使得任意圖 X 保持不變是一件相當困難的事, 因為這個問題不是這個研究計劃的主題, 就此打住。

陸、研究結果

我們的研究結果是

1. 只要找出集合 U 中的任一個元素觸摸開關狀態圖形 K, 然後計算 $h_{V_x(K)}(X)$ 。我們有

“ $h_{V_x(K)}(X) \in D_n \Leftrightarrow$ 圖 X 和 id(B)同類”。

2. 所有使圖 X 變成 id(B)的觸摸開關狀態圖形所成的集合就是

$$\{v_X(K) + v_{id(B)}(M) \mid h_{v_X(K)}(X) = h_{v_{id(B)}(M)}(id(B)), M \in U\}.$$

4. 所有的 2^{n^2} 個燈炮狀態圖形有 $|\{v_{id(B)}(K) \mid K \in U\}|$ 個不同類圖形。

柒、討論

在這個研究計劃裡，開始最困難的事是：這個開關電燈遊戲中有很多不同的變化，而每一種變化都希望用適當的函數來表示，有的變化也涵蓋了一些合成函數的概念。而每個函數有它的定義域和值域，這些定義域和值域的集合常會混淆在一起，要弄清楚它們常常需要花費很多時間，而去找適當的函數需要花費更多的時間。

在研究過程裡，最困難的事是確實地計算出有幾個觸摸開關狀態圖形都使得任意燈炮狀態圖形 X 保持不變。也就是計算集合 I 中元素的個數。由於觸摸開關狀態圖形有 2^{n^2} 個，當 n 的值愈來愈大時，要確實計算這些圖形是非常困難，從上述研究過程，我們只要計算所有集合 U 中的 2^n 個元素即可，最後得到只要計算集合 U 中的 n 個元素就可以，這樣不但大幅地加快解題速度，同時也大幅地減少難度。

由於計算的個數大幅地減少。所以我們可以用電腦計算來輔助。經過一番計算之後我們得到（由於篇幅問題，在此只列出 $n = 18$ 的情形）

1. 所有 2^{n^2} 個燈炮狀態圖形有多少不同類圖形的結果記錄在下面的表格：

n=	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
i=	1	1	16	4	1	1	1	256	1	64	1	1	16	1	256	4	65536

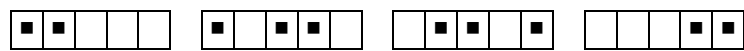
2. 把研究動機的遊戲問題中方格表的個數由 5×5 推廣到一般 $n \times n$ 情形。經過一番計算之後，

首先我們找到所有使得 $h_{v_X(K)}(X) = id(B)$ 之集合 U 中的圖形 K ，其中圖形 X 方格內的燈炮

全部點亮的。由對稱關係，我們知道由這些圖形 K 得到的 $v_x(K)$ 也就是所有使本來的 n^2 個方格內的燈炮全部是黑暗的圖形變成 n^2 個方格內的燈炮全部光明的觸摸開關狀態圖形。

由例 3 知道，圖 11.a, 11.b, 11.c, 11.d 是所有使本來的 25 個方格內的燈炮全部是黑暗的圖形變成 25 個方格內的燈炮全部光明的觸摸開關狀態圖形。

由於所有集合 U_n 中的觸摸開關狀態圖形 n^2 個方格內的燈炮除了第一列之外的每一方格內狀態都是 $\square$ ，我們將這些圖形 K 的第一列方格內狀態視為二進制表示的整數，例如



分別視為

$$11000 = \quad 10110 = \quad 01101 = \quad 00011 =$$

這四個二進制表示的整數分別為 24, 22, 13, 3。我們將計算之後得到這些 $n \times n$ 圖形 K 的第一列方格內狀態視為二進制表示的整數所成的集合 S_n 記錄在下面：

$$S_2 = \{3\}; S_3 = \{5\}; S_4 = \{1, 2, \dots, 16\}; S_5 = \{3, 13, 22, 24\}; S_6 = \{45\}; S_7 = \{107\}; S_8 = \{195\};$$

$$S_{10} = \{645\}; S_{12} = \{2565\}; S_{13} = \{6891\}; S_{14} = \{265, 1032, 2443, 3210, 4429, 5196, 6607, 7374, 8481,$$

$$9248, 10659, 11426, 12645, 13412, 14823, 15590\}; S_{15} = \{22861\}; S_{19} = \{12867, 53709, 91926, 99480\}.$$

捌、 結論

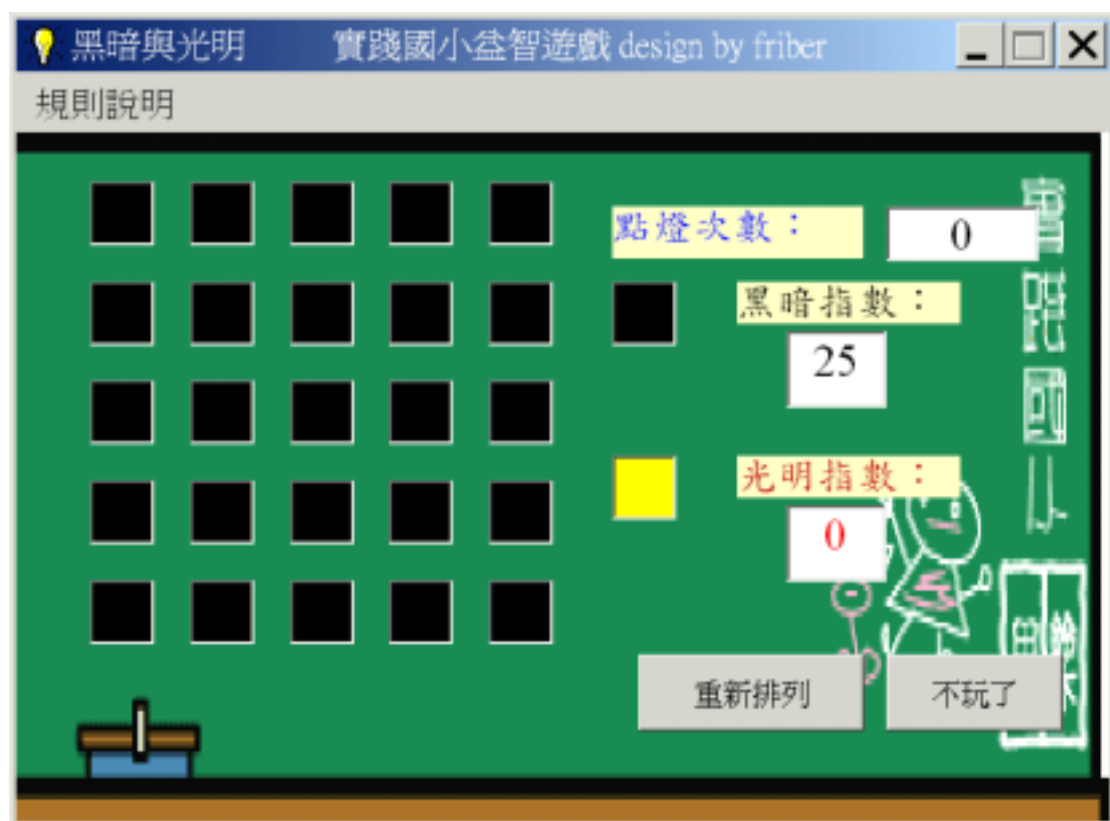
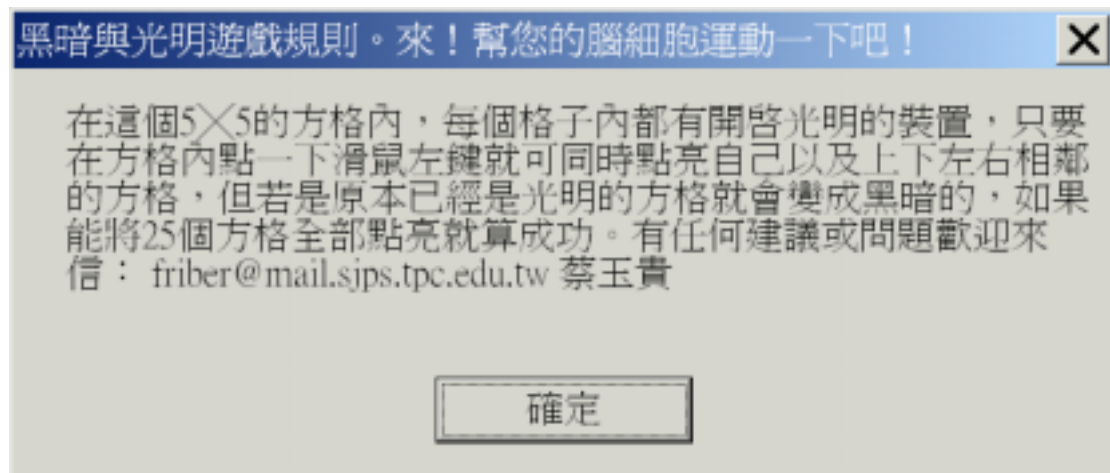
這個研究計劃是針對開關電燈遊戲來進行分析，基本上其中的變化牽涉到三種圖形：燈炮狀態圖形、觸摸開關狀態圖形和改變狀態圖形。我們常會把表格內的 $c, x, 1, 0, \blacksquare, \square$ 以及三種狀態圖形混淆在一起，本來在玩遊戲時，自己覺得觀念蠻清楚的，但是在講解給別人聽時，總會讓人困惑不已，而且剛開始用函數來研究這個遊戲時，自己也弄得很困惑，經過一而再，再而三的研究，才把整個概念弄得比較清楚。藉著這個研究，我們對課本裡的函數概念有比

較深入的了解，同時也藉著函數的概念，我們才有一般性的結果。

玖、參考資料及其他

1. 王芳夫、王登傳.數學遊戲大觀.前程出版社。
2. 葉均承 (民 90): 翻棋分類問題，台北市中等學校學生科學研究獎助研究計畫優勝作品專輯，台北市教育局。

壹拾、附錄



(第一名)

1. 思路清晰，思考敏捷，對問題認知非常清楚，內容可再深入研究
2. 立意特佳，運用巧妙、精細，思路廣
3. 應該是電燈泡，而不是電燈「炮」
4. 題材、表達方式、內容都十分周全

口頭簡報甚為敏捷。