中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：正 **N** 邊形的撞球路徑

關 鍵 詞：

編　　號：040414

學校名稱：

國立臺中第一高級中學

作者姓名：

楊天立、蔡逸帆、曾韋中

指導老師：

賴瑞楓、莊文昇

正　N　形　的　撞　球　路　徑

1. 研究動機：曾經看過有人作矩形的撞球路徑問題，希望做進一步的推廣。

2. 研究目的：找出發射路徑和進洞所需碰撞次數關係。

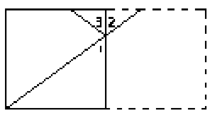
3. 研究器材：紙筆、厚紙片、剪刀、電腦，線。

4. 研究過程：

1. 矩形.

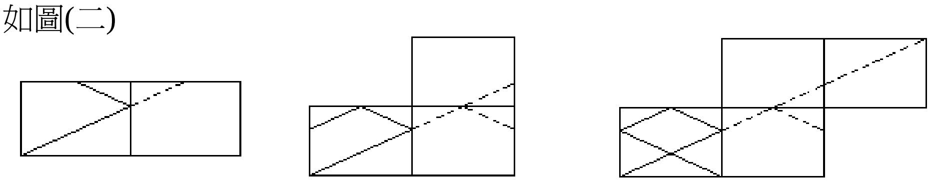
考慮一個頂點作爲發射點，以此四個頂點爲球袋，作彈性碰撞的情形。

如圖(一)所示，



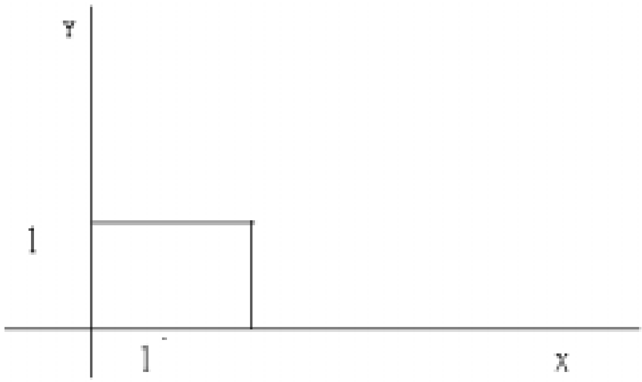
因此， EM與CD之交點E對BC邊作對稱後，可得碰撞後，第二次所打到之點E。以此類推，只要碰到邊，就作對稱圖形，可使路徑成一直線。

如圖(二)



因此，若此直線連接到對稱n次後之頂點，那麼，即表示它作n次對稱回來後，會在一頂點上，亦即撞了n次後會進洞。可以得到以下結論：

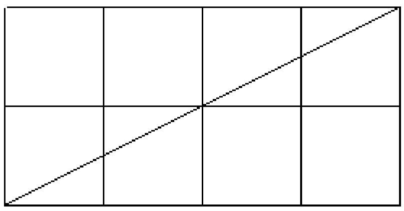
視此矩形爲座標平線上之一個”格子”



，則有

1). 斜率爲Y/X之出發路徑，2). 共使用了 X-Y-1個”格子” ，3). 所以碰撞了X-Y-2次 4). 由於撞到頂點後碰撞即停止，因此，Y/X必須爲最簡分數。

如圖(三)



如圖(三) 2/4之斜率 其實至(2,1)已經停止

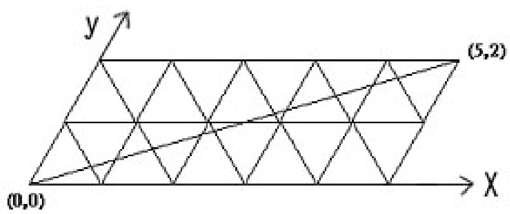
2. 正三角形

由證明矩形時所得的性質，可將兩三角形合併爲一平行四邊形來處理，是爲一”格子”。每一平行四邊形都碰撞2次，最後一個碰撞一次。因此，在此斜角座標中，斜率爲Y/X之出發路徑共碰撞了 [<u>(X＋Y－1)</u>－1]×2＋1 次(※)

其中 [<u>(X＋Y－1)</u>－1]×2＋1 最後一個一代表最後一個格子只撞一次，此外X和Y都是整數 ↘格子數

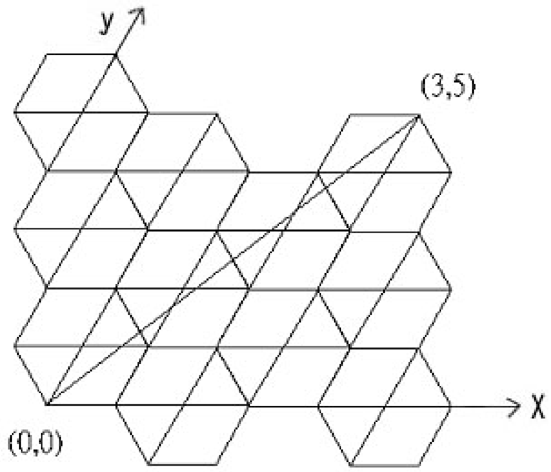
前一項爲平行四邊形碰撞2次，最後1次

如圖(四)



3. 正六邊形

考慮正六邊形



圖可知，每兩個格子就會有一個邊，所以Y/X之斜率的出發路徑

共碰撞了【(X＋Y－1)÷2】次　　其中【　】爲高斯符號

但是此(X, Y)必須爲頂點　若(X, Y)不是頂點，那必須找到一個最小的K

使(KX, KY)爲頂點　才能代入以上公式。　因此　，必須知道頂點(X, Y)，

X和Y的關係：

{(X,Y)| X=3k　　Y=3n or 3n+2}

{(X,Y)| X=3k+1　Y=3n or 3n+1}

{(X,Y)| X=3k+2　Y=3n+1 or 3n+2}

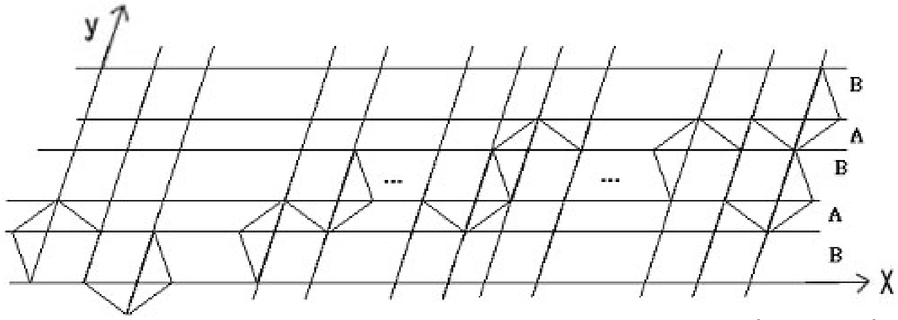
舉例來說(2, 3)不是頂點，　所以考慮(4, 6)

(4, 6)是頂點，　因此碰撞了【(4+6-1)/2】=【9/2】＋1＝4＋1＝5次

4. 正五邊形

1).由於正五邊形與之前討論的3、4、6邊形不同，他的外角是108^0，

不能鋪成整個平面，必須設計新的座標系，如圖五

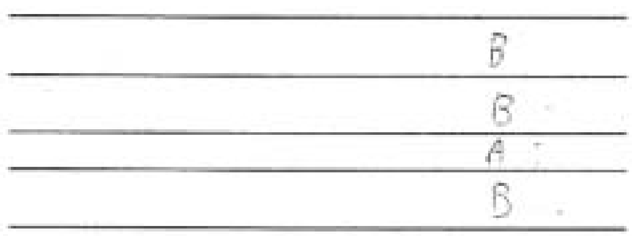


給定斜角座標中一點$(X,Y)=(\alpha A+\beta B+\gamma A+\delta B)$ 其中$A=\sin 36^0$ $B=\sin 72^0$

其中$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$屬於Z 則可得任意一$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$都表示一個唯一的向量

證:因A和B的比值爲無理數

抛棄已往觀念,以平行線來看,仍以BABB爲例。



它的單位常有2種一種是$B(=\sin 72^0)$一種是$A(=\sin 36^0)$ 由三角恆等式 可知

$\boldsymbol{B^2=AB+A^2}$ (註三) (此爲斜角座標中最重要的判別式)

這雖然是一個座標系但是我們沒辦法確定座標上的點 都是正五邊形的頂點(也就是球袋)

即使我們確定此點爲一球袋 必須考慮它與出發點的連線 是否能以正五邊形排滿

2).爲了研究方便， 便建立一套系統

1.以出發點開始 逆時針走爲[＋]，順時針方向走爲［－]，

所走過的編以［＋－－］或［－＋－]……表示

如圖(五)

2. [＋－－]表一向量或此頂點之座標

如 [＋－－]＝ $(\cos 0^0, \sin 0^0)+(\cos 72^0, \sin 72^0)+(\cos 0^0, \sin 0^0)+(\cos -72^0, \sin -72^0)$

3).出發路徑的此一直線，將與許多邊作對稱後之正五邊形的邊相交， 稱這些邊

爲 Cl

4).可發現， 這些Cl都是由＋轉爲－，或由－轉爲＋之前一個。

註: 這些Cl都是排列組合題目中ㄉ變號數這些Cl都是排列組合中的變號數給N個+、 M 個- X個變號數 求排列數

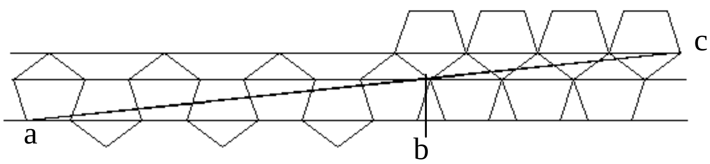
註三:由觀察感覺圖六中 A、B、C 三點共線

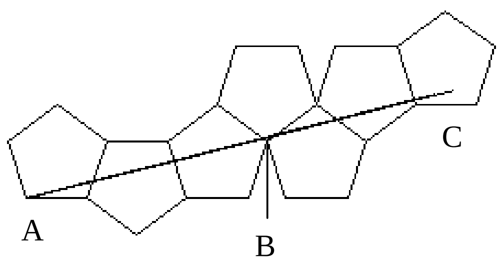
AB 斜率=B/(3B+A) BC 斜率=A/(2A+B) 若兩斜率相等的話，則交叉相乘

B×(2A+B)=A×(3B+A) 化簡可得 $B^2=AB+A^2$ 以 $B=\sin 72^0$，$A=\sin 36^0$ 代入

驗算，可得 $\sin^2 72^0=\sin 36^0 \sin 72^0+\sin^2 36^0 \Rightarrow 4\cos^2 36-2\cos 36^0-1=0$

又 $\cos 36^0=(1-\sqrt{5})/4$，故上式成立。





因為 AB 向量難用 αA+βB 表式，所以定一個新符號，把 AB 向量稱為 B(2)，
ab 向量稱為 B(4)
BC 向量稱為 A(2)
bc 向量稱為 A(4)

定義 B(n)=((n-1)(2B+A)+B,B) 將 B(n),A(n)稱為一個算符

B(n.5)=((n-1)(2B+A)+2B,B)

A(n)= ((n-1)(B+A)+A,A)

.**共線定理**:1.B(n) (n-1)(B+A)+A = A(n)的斜率

證: B(n)的斜率=B/[(n-1)(2B+A)+B]

A(n)的斜率=A/[(n-1)(B+A)+A]

利用 $B^2=AB+A^2$ 即可知 B(n)的斜率= A(n)的斜率

2.B(n)+A(n-1) 的斜率=B(n)+A(n)+B(n-1) 的斜率

證: B(n)+A(n-1) 的斜率= (A+B)/ {[(n-1)(2B+A)+B]+(n-2)(B+A)}

B(n)+A(n)+B(n-1) 的斜率

=(A+2B)/{[(n-1)(2B+A)+B]+[(n-1)(B+A)+A] +[(n-2)(2B+A)+B]}

3.B(n.5) 的斜率=A(n+1)+B(n) 的斜率

證: B(n.5) 的斜率=B/[(n-1)(2B+A)+2B]

A(n+1)+B(n) 的斜率=

A+B/{[n(B+A)+A]+ [(n-1)(2B+A)+B]}

.碰撞路徑:

1. 規定碰撞路徑從B(n1)開始
2. 在碰撞路徑中以A(nx) B(ny)交互排列 x,y屬於N ｜ny-nx｜<1
3. 其中A(nx)A(ny)必不相鄰
4. 若以B(n.5)結束,則會比B(n)結束多一次
5. 利用共線定理來夾集碰撞路徑，會永遠夾集不完，而且共線定理會有無限多個，所以希望訂另一新方法。

1.

如圖:X BBAB｜A｜BABB

Y B ｜A｜ B

2.

如圖 X　BBAB｜A｜BABB

Y　 B A ｜B｜ A B

3.

如圖 X BBABBABAB｜A｜BABABBABB

Y　　B　　　｜A｜　　　B

4.

如圖X BBABBABAB｜A｜BABABBABB

Y　B　A　　｜B｜　A　B

由上4例可以觀察出,點對稱的規則:

B…………. ｜　｜ …………..B

此為由｜　｜為對稱軸作一次點對稱的碰撞路徑,若需再作一次點對稱

則有兩種方式:一種是以最後一個B對稱軸如圖:

5.

X　BBAB ABAB｜B｜BABABABB

Y　B A B A B ｜BABAB

以此類推…..

6.

X　BBAB ABAB｜A｜BABABABB

Y　B A B A｜B｜A B A B

因為我們使用B（n1）+A（n2）+…..

是無法確定是否為碰撞路徑，如果我們知道一個已知碰撞路徑就可以利用點對稱,把碰撞路徑加倍,就可以求出所有的碰撞路徑。

5.正N邊形

1. 與正五邊形相同，不能舖成整個平面。
2. 坐標中單位長度有好幾種。
3. 在坐標中亦可找出斜率判別式。
4. 能夠找出共線定理（小範圍）。
5. 利用共線定理,使用夾集可找出可能的碰撞路徑（小範圍）。
6. 利利用點對稱可以把已知碰撞路徑變長,進而找出所有的碰撞路徑。
7. 找出碰撞路徑即可找出碰撞次數。

6.展望:

1.在這次研究中發現,多單位斜角坐標與直角坐標相比較,可能有一些新的用途。但在有靈感而缺乏純數學的概念下,無法深切研究出來,希望在大學以後中的領域,繼續研究。