中華民國第42屆中小學科學展覽會

:.: 作品說明書 :.:

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：小題大作－－－用軟體(GSP)玩幾何

關 鍵 詞：軌 跡、正 n 多邊形

編　　號：040413

學校名稱：

國立溪湖高級中學

作者姓名：

張家豐、施旭芳、許雅晴、邱怡臻

指導老師：

陳宏盈

小題大作 -----　利用軟體（GSP）玩幾何

一、研究動機：

在“科學教育月刊第 212 期（1998.9）”裡有一道題目“一則幾何問題”，在文章的最後作者建議讀者可進一步利用動態幾何軟體 Geometer Sketchpad （GSP） 來處理、探索這有趣的幾何題目。當我們看到筆者如此的建議，便詢問老師這套軟體，並央求老師指導我們。起初我們只是認為這套軟體好玩，可以讓幾何圖形移動，讓以前只能存在心中的轉動、移動或疊合之類的幾何變換都然能真實地呈現在我們眼前。但當我們再利用 GSP 深入此問題時，我們竟發現了一些出乎我們預料卻蘊含規則的結果。於是我們就再請教老師，並做了此份探討與研究。

我們做此份研究事先並沒有預設目標。憑著好奇心，在亂中發現、尋找規律。也多虧有此套軟體（GSP）的實際操作，讓我們的發現以致於猜測都可以得到初步的檢驗，而終究才有結論。總而言之，這份研究可說是在好奇、探索與驚呼中走過。

二、研究目的：

利用動態幾何軟體，將平面幾何圖形，活靈活現的展現在我們面前。

三、研究設備及器材：

筆、紙、電算器、電腦與及動態幾何軟體 Geometer Sketchpad （GSP）。

四、研究問題與過程：

【起源】：

在圖書館翻閱科學教育月刊時，看到月刊上這道題目（見附件一），覺得此題目和<u>謝銘峰老師</u>（筆者）所提供給我們的想法與解法，與一般證明論述方式不大相同，讓我們有想看下去的衝動-------------

而科學教育月刊的題目如下：

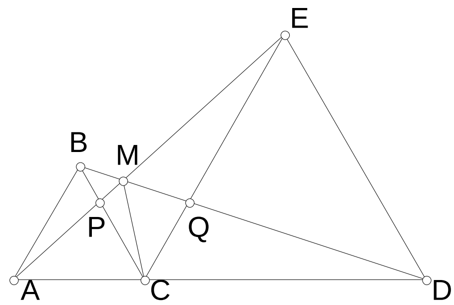
———————————————————————————————————

將線段$\overline{AD}$分成$\overline{AC}$、$\overline{CD}$兩段。分別以$\overline{AC}$、$\overline{CD}$為邊，在$\overline{AD}$的同側做兩個正三角形，如圖所示：連接$\overline{AE}$、$\overline{BD}$交於M點

（1）　試求$\angle AMD =$？（120^0）

（2）　證明$\overline{MC}$平分$\angle AMD$

（3）　證明$\overline{CQ}=\overline{CP}$



(4)　若 S,T 分別為 $\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 之中點，試求 ΔCST 是何種三角形？（正三角形）

＜解法詳見附件一＞

（一）研究問題：

1 .將原題目條件推廣---以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為邊，若同側作兩邊數相同之正多邊形，會有共通的結論嗎？（定理 1）

2 .利用動態幾何軟體，將圖形中的 C 點移動，則另一關係點—M 點，其移動的軌跡有何特性？（定理 2.3）

3.將上述 2 的圖形作修改，探討修改後圖形中的 M 點，移動的軌跡又有何特性？（範例 4 與定理 5）

（二）研究過程：

原來的題目是以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，向同側作兩正三角形。如果仍以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為邊，但改做兩正四邊形、正五邊形，……（利用軟體描繪），我們好奇：在所得到的圖形裡面，是不是可以保有像原題目中各小題的特性。在這多個圖形中，初步利用 GSP 度量，答案似乎是確定的。所以我們就把這一致的結論陳述於下面的定理 1，並嘗試比較嚴謹的證明來支持我們提出的結論。

定理 1

在 $\overline{AD}$ 上有任意一點 C，分別以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，向同側作兩正 n 邊形（n 相同），

則（1）$\angle AMD=\dfrac{360^0}{n}$。（正 n 邊形時）

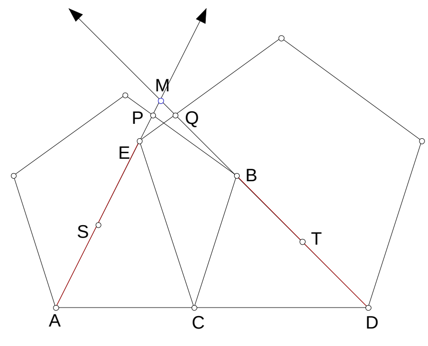
（2）$\overline{MC}$ 平分 $\angle AMD$。

（3）若 S,T 分別為 $\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 之中點，則 ΔCST 是等腰三角形？

由於無法說明所有的情況($\Theta\ n\in N\quad n\geq 3$)，但我們發現：在這每一類圖形中，彼此都存在著關係。不失一般性：我們用正五邊形一例說明：將 $\overline{AD}$ 分成 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 兩段，分別再以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，於同側做兩個正五多角形。如圖 G 1-1 所示：

【證明】上述的幾項敘述可利用軟體 GSP 度量，都可清楚的知道其成立與否，

及 $\angle AMD=\dfrac{360^0}{n}$（同外角大小）。



G 1.1

然而也有較為嚴謹的論述支持它們的存在。如下：

(1) 因為 $\overline{AC}=\overline{BC}$ $\overline{CE}=\overline{CD}$ $\angle ACE=\angle BCD$

(同外角大小)

所以 $\Delta ACE\cong\Delta BCD$ (SAS)

故 $\angle DBC=\angle EAC$ 再加上 $\angle BDC=\angle BDC$

則 $\Delta DCB\sim\Delta DAM$ (AA)

即 $\angle AMB=\angle DCB=\dfrac{360^0}{n}$ (Θ $\angle DCB$ 為正多邊形的外角)

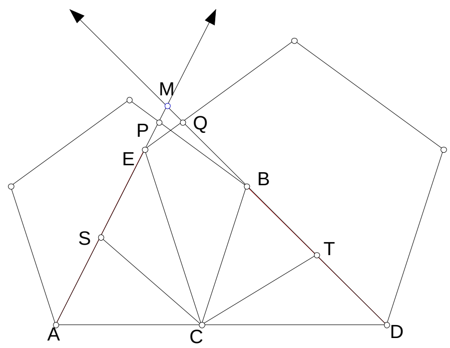
(2) 承上。在四邊形 $AMBC$ 中，Θ $\angle AMB$ ＋ $\angle ACB$ =180^0 (外角+內角 =180^0) 故 $AMBC$ 四點共圓，又因為 AC 弧與 BC 弧相等（等弦對等弧），則 $\angle AMC=\angle CMB$，即 $\overline{MC}$ 平分 $\angle AMD$。

(3) 承 (1)，因為 $\overline{AE}=\overline{BD}$，

$\therefore$ $\frac{1}{2}\overline{AE}=\overline{SE}=\overline{TD}=\frac{1}{2}\overline{BD}$

$\therefore$ $\Delta CSE\cong\Delta CTD$ (SAS)，亦可看成 ΔCSE 以 C 點為中心，順時鐘旋轉一角度（正 n 邊形內角大小），而與 ΔCTS 疊合。(如圖 G 1-2)

故 $\overline{CS}=\overline{CT}$，$\therefore$ ΔCST 是等腰三角形，且此等腰三角形頂角與正 n 邊形之內角相等。



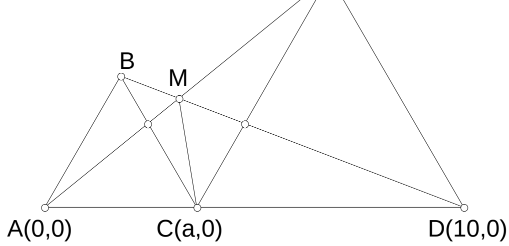
<G 1-2>

利用軟體 GSP 描繪此圖形時，我們嘗試過軟體上各種工具。我們發現 $\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 的交點---M，當 C 點在 $\overline{AD}$ 上移動，M 點移動的軌跡會構成一條平滑的曲線。而我們再利用此軟體（GSP）作通過 A,M,D 三點的圓弧時，我們竟然發現此圓弧會與 M 點的移動軌跡互相重疊！＜見附件二＞ 這不就說明了 M 點的軌跡是一圓弧嗎？此結論詳見定理 2，我們並嘗試說明。

圖形的方程式，也可以看做圖形上的座標點所具有的共通關係式。而下面的算法乃是依此策略而為。

定理 2 如圖＜G 2-1＞，在 $\overline{AD}$ 上有一點 C，分別以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，向同側作兩正三角形，則當 C 點在 $\overline{AD}$ 滑動，點 M 移動的軌跡會是圓弧的一部分。

【證明】：(利用解析幾何證明)



<G 2-1>

將此圖形置於直角座標， 且 $A(0,0)$、 $D(10,0)$。令點 $C(a,0)$，我們可由 ΔABC 與 ΔCED 為正三角形

且推得 B 點座標為 $\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$ 與 點 E 座標為 $\left(\dfrac{10+a}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}(10-a)\right)$

則通過 $\overline{AE}$ 的直線方程式為 $\dfrac{y-0}{x-0}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(10-a)-0}{\frac{10+a}{2}-0}=\dfrac{(10-a)\sqrt{3}}{10+a}$

即為 $a(y+\sqrt{3}x)=10\sqrt{3}x-10y$ …①

通過 $\overline{BD}$ 的直線方程式為 $\dfrac{y-0}{x-10}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a-0}{\frac{a}{2}-10}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a-20}$

故 $a(y-\sqrt{3}x+10\sqrt{3})=20y$…… ②

當 $a\neq 0$ 時，

由① ÷ ② 可推得 M 點的軌跡方程式為 $x^2+y^2-10x-\dfrac{10}{3}\sqrt{3}y=0$

=> $(x-5)^2+\left(y-\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2=\dfrac{75}{3}$

因為 M 點的移動軌跡位於上述的方程式中，由此可以判斷：M 點的移動軌跡為一圓弧。

且圓心為 $\left(5,\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$，半徑為 $\sqrt{\dfrac{75}{3}}$。

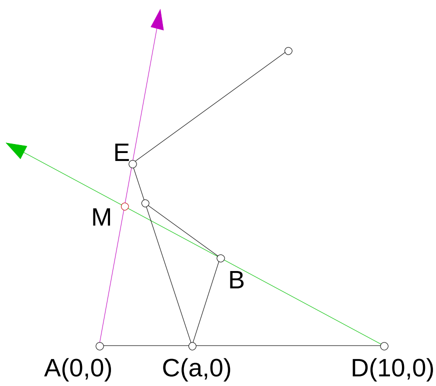
由定理 2 的經驗，再加上我們已經有定理 1 的想法，我們大膽的嘗試：如果我們把定理 1 圖形中的 C 點也在 $\overline{AD}$ 上移動，則 M 點軌跡會不會像定理 2 一樣存在著規則呢？我們依舊先利用 GSP 作圖，再利用此軟體做初步驗證，但結果讓我們滿意，因為 M 點的軌跡也是一圓弧。

＜詳見附件三＞， 我們將此結論寫在下面的定理 3。

定理 3

承定理 1，以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，於同側做兩正 n 邊形（n 相同 $n\in N$ $n\geq 3$），則隨 C 點在 $\overline{AD}$ 上的滑動，$\overrightarrow{AE}$、$\overrightarrow{BD}$ 的交點--M 點，其移動的軌跡為一圓弧。

【證明】如右圖<G 3-1>



<G 3-1>

令參數θ為正n邊形的外角，
＜如三角形，$\theta=120^0$；八邊形，$\theta=45^0$＞
故 $0^0<\theta\le 120^0$

（$\because n\ge 3$ ，$\therefore 0^0<\theta=\dfrac{360^0}{n}\le\dfrac{360^0}{3}=120^0$）

則點B可表示為 $(a+a\cos\theta\,,\,a\sin\theta)$、點 $E(a(1+\cos\theta)-10\cos\theta\,,\,(10-a)\sin\theta)$

則通過$\overline{AE}$的直線方程式為 ：

$$\frac{y}{x}=\frac{(10-a)\sin\theta}{a(1+\cos\theta)-10\cos\theta}=\frac{10\sin\theta-a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)-10\cos\theta}$$

$$\Rightarrow a(y+y\cos\theta+x\sin\theta)=10x\sin\theta+10y\cos\theta \quad\cdots①$$

通過$\overline{BD}$的直線方程式為 ：

$$\frac{y}{x-10}=\frac{a\sin\theta}{a+a\cos\theta-10}=\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)-10}$$

$$\Rightarrow a(y+y\cos\theta+10\sin\theta-x\sin\theta)=10y\cdots\cdots\cdots ②$$

由（① ÷ ②） （$a\neq 0$）

$$\frac{y+y\cos\theta+x\sin\theta}{y+y\cos\theta+10\sin\theta-x\sin\theta}=\frac{10x\sin\theta+10y\cos\theta}{10y}=\frac{x\sin\theta+y\cos\theta}{y}$$

$$\Rightarrow y^2+y^2\cos\theta+xy\sin\theta=xy\sin\theta+xy\sin\theta\cos\theta+10x\sin^2\theta-x^2\sin^2\theta$$
$$+y^2\cos\theta+y^2\cos^2\theta+10y\sin\theta\cos\theta-xy\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2\sin^2\theta+y^2\sin^2\theta-10x\sin^2\theta-10y\sin\theta\cos\theta=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-10x-10\cot\theta\; y=0$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+(y-5\cot\theta)^2=25+25\cot^2\theta=\left(\sqrt{25+25\cot^2\theta}\right)^2$$

由上述軌跡方程式判斷：當C點於$\overline{AD}$上滑動，M相對移動的軌跡為一圓弧，且圓心為$(5,5\cot\theta)$ 半徑為 $\sqrt{25+25\cot\theta}$，

＜其中參數θ為正n邊形的外角＞

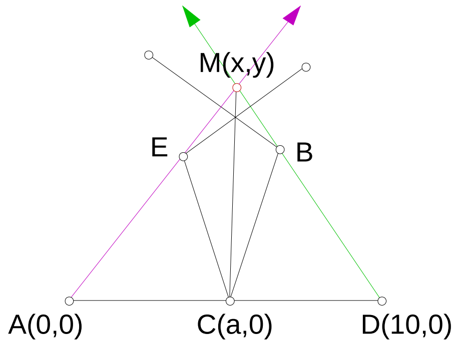
在尋找點M所具有之特性的同時，我們又有其他的想法。由於我們已相當熟悉定理 1 的結論，即$\angle AMD$的角度恆與正n邊形的內角互補，且$\overline{MC}$為$\angle AMD$的角平分線（見定理 1）。運用此的結論，我們又想出了另一個可以說明M點軌跡為圓弧的方法。詳見如下面的【證明二】。

【證明二】由定理一的結論：

$\angle AMD$ 的角度恆與正 n 邊形的內角互補，且 $\overline{MC}$ 恆為 $\angle AMD$ 的角平分線。

吾人令參數 ϕ 為正 n 邊形外角的一半，即 $\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{360^0}{n}\right) = \frac{180^0}{n}$)。

我們可以推得：$\angle AMC = \angle CMD = \phi$ 如 <G 3-2>：



<G 3-2>

在直角座標上 令 $A(0,0)$、$B(10,0)$，且點 $M(x,y)$、點 $C(a,0)$

因為 $\overline{MA}$ 的斜率為 $\frac{y}{x}$ 、 $\overline{MC}$ 的斜率為 $\frac{y}{x-a}$、 $\overline{MD}$ 的斜率為 $\frac{y}{x-10}$。

所以

$$\tan\angle AMC = \tan\phi = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x}} = \frac{ay}{(x-a)x + y^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\tan\angle DMC = \tan\phi = \frac{\frac{y}{x-10} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x-10}} = \frac{y(10-a)}{(x-a)(x-10)x + y^2} \quad \cdots\cdots ②$$

再令 $l = \tan\phi$ 則 $\frac{ay}{(x-a)x + y^2} = l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$

$$\frac{y(10-a)}{(x-a)(x-10)x + y^2} = l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

由 ③ $ay = (x-a)xl + l\,y^2$

$$=> a\cdot(y + xl) = l\cdot x^2 + l\cdot y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

由 ④ $y(10-a) = (x-a)(x-10)xl + l\,y^2$

$$=> a(\,l\cdot(x-10) - y) = l\cdot x(x-10) + l\cdot y^2 - 10y \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤÷⑥ 則 $\frac{y + xl}{l(x-10) - y} = \frac{lx^2 + ly^2}{lx(x-10) + ly^2 - 10y}$

$$=> l^2(x-10)(x^2+y^2) - ly(x^2+y^2) = lxy(x-10) + ly^3 - 10y^2 + l^2x^2(x-10) + l^2xy^2 - 10xyl$$

$$=> 2lyx^2 - 20xyl + 2ly^3 - 10y^2 + 10y^2l^2 = 0$$

$$=> 2lx^2 - 20xl + 2ly^2 - 10y + 10yl^2 = 0$$

$$=> x^2 - 10x + y^2 + \frac{5y(l^2-1)}{l} = 0$$

$$=> (x-5)^2 + \left[y + \frac{5(l^2-1)}{2l}\right]^2 = 25 + \frac{25(l^2-1)^2}{4l^2}$$

因為 M 點的軌跡位於上述方程式中，故判知：M 點的軌跡為一圓弧，而圓心為 $\left(5,\dfrac{-5\cdot(l^2-1)}{2l}\right)$，半徑為 $\left[25+\dfrac{25(l^2-1)^2}{4l^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

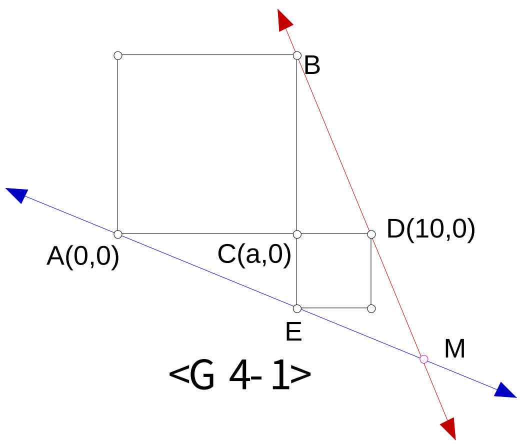
（其中 $l=\tan\phi$，而 $\phi=\dfrac{180^0}{n}$　$n\geq 3$）

我們在利用軟體 GSP 描繪相關圖形，乃是利用旋轉概念去做的。但旋轉角度有正、負之分，而我們就常因為沒有考慮周詳而把圖形畫錯。也就是說：我們把所要的圖形畫在異側，而不是所要的同側。不如將錯就錯，因此我們有了再把圖形推廣的想法：如果把錯誤的圖形（不同側），遵照之前定理二、三的做法：兩線$(\overline{AE}$與$\overline{BD})$的交點--M，相對於 C 點移動時的軌跡又會是如何呢？剛開始時，我們只是因好奇而作嘗試，但所得的結果卻出乎我們的預料，而具規則性。

其圖形詳見＜附件四＞，我們把討論的結果寫在範例 4。

範例 4

以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊固定，向異側作兩正四邊形，如圖<G 4-1>，並令 $\overleftrightarrow{BD}$ 與 $\overleftrightarrow{AE}$ 兩直線交於 M 點，求 C 點於 $\overline{AD}$ 上滑動時，M 點的軌跡方程式為何？



<G 4-1>

＜解＞令點 C（a,0）

則 $\overleftrightarrow{AE}$ 的軌跡方程式：

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{a-10}{a}$ ………①

$\overleftrightarrow{BD}$ 的軌跡方程式：

$\dfrac{y}{x-10}=\dfrac{a}{a-10}$ ……②

由① x ②知 $\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{x-10}=1$

$\Rightarrow x^2-y^2-10x=0$

$\Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{5^2}=1$

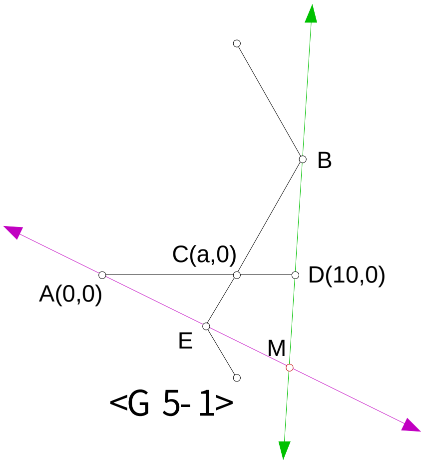
由上述軌跡方程式知道：M 點的移動軌跡恰乃是中心為 $(5,0)$ 的等軸雙曲線。

有了上面範例 4 的激勵，我們進一步把範例四的圖形再推廣成兩異側的正 n 邊形，並探索兩射線（$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$）的交點，M 於 C 點在 $\overline{AD}$ 移動時所呈現的軌跡會是何種圖形呢？

圖形詳見＜附件五＞，我們並且把探討的結論整理成定理 5。

定理 5

承範例 4，我們分別以為 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 一邊，向其異側作兩邊數相同的正 n 邊形，而 $\overleftrightarrow{BD}$ 與 $\overleftrightarrow{AE}$ 兩射線交於 M 點。當 C 點於在 $\overline{AD}$ 上滑動時， M 點軌跡可構成雙曲線。



<G 5-1>

【證明】如右圖<G 5-1>

令參數 θ 為正 n 邊形的外角

$(0^0 < \theta \le 120^0)$。

則點 $B(a + a\cos\theta\,,\, a\sin\theta)$、

點 E 座標 $(a + (10-a)\cos(\pi+\theta)\,,\,(10-a)\sin(\theta+\pi))$

$\Rightarrow \left(a + (a-10)\cos\theta\,,\,(a-10)\sin\theta\right)$

則通過 $\overleftrightarrow{AE}$ 的直線方程式為 ：

$$\frac{y}{x} = \frac{(a-10)\sin\theta}{a + (a-10)\cos\theta} = \frac{a\sin\theta - 10\sin\theta}{a + a\cos\theta - 10\cos\theta}$$

$$= \frac{a\sin\theta - 10\sin\theta}{a(1+\cos\theta) - 10\cos\theta}$$

$$\Rightarrow a(y + y\cos\theta - x\sin\theta) = 10y\cos\theta - 10x\sin\theta \cdots ①$$

通過 $\overleftrightarrow{BD}$ 的直線方程式為 ：

$$\frac{y}{x-10} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta) - 10}$$

$$\Rightarrow a(-y - y\sin\theta - 10\sin\theta + x\sin\theta) = -10y \cdots\cdots ②$$

由（① ÷ ②）　$(a \ne 0)$

$$\frac{y + y\cos\theta - x\sin\theta}{-y - y\cos\theta - 10\sin\theta + x\sin\theta} = \frac{10y\cos\theta - 10x\sin\theta}{-10y} = \frac{y\cos\theta - x\sin\theta}{-y}$$

$$\Rightarrow -y^2 - y^2\cos\theta + xy\sin\theta = xy\sin\theta\cos\theta - 10y\sin\theta\cos\theta - y^2\cos\theta - y^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta + 10x\sin^2\theta + xy\sin\theta + xy\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow y^2(\cos^2\theta - 1) = 2xy\sin\theta\cos\theta - 10y\sin\theta\cos\theta - x^2\sin^2\theta + 10x\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta - y^2\sin^2\theta - 10x\sin^2\theta + 10y\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow (\sin^2\theta)x^2 - (2\sin\theta\cos\theta)xy - (\sin^2\theta)y^2 - (10\sin^2\theta)x + (10\sin\theta\cos\theta)y = 0$$

令 $\delta=\begin{vmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta \end{vmatrix}=-\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta=-\sin^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$\underline{=-\sin^2\theta<0}$ ($\because 0<\theta\le 120^0$ ， $\therefore\ 0<\sin\theta<1$)

由上面的判別式知道：此二元二次方程式的圖形，可能為<u>雙曲線</u>或是<u>兩相交的直線</u>。

又 $\because \begin{vmatrix} 2\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta & -10\sin^2\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & -2\sin^2\theta & 10\sin\theta\cos\theta \\ -10\sin^2\theta & 10\sin\theta\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

$=-10\sin^2\theta\begin{vmatrix} -2\sin\theta\cos\theta & -10\sin^2\theta \\ -2\sin^2\theta & 10\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix}-10\sin\theta\cos\theta\begin{vmatrix} 2\sin^2\theta & -10\sin^2\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 10\sin\theta\cos\theta \end{vmatrix}$

$=10\sin^2\theta(20\sin^2\theta\cos^2\theta+20\sin^4\theta)$

$=200\sin^4\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$\underline{=200\sin^4\theta\neq 0}$ ($\because 0<\theta\le 120^0$ ， $\therefore\ 0<\sin\theta<1$)

再由上式判別：發現此二次方程式的圖形是<u>非退化的雙曲線</u>。

即當 C 點於在 $\overline{AD}$ 上滑動時， M 點軌跡亦為<u>雙曲線</u>。

五、研究結果：

（一）由原本的題目（$\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為邊向同側作兩正三角形）推廣---以 $\overline{AC}$、$\overline{CD}$ 為一邊，向同側作兩邊數相同的正 n 邊形，其相關的結果與原本的題目結論一致。（見定理 1）

（二）以 $\overline{AC}$ 、$\overline{CD}$ 為邊，向同側做兩邊數相同的正 n 邊形，而 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點為 M 點。 隨著 C 點於 $\overline{AD}$ 上移動，<u>M 點移動軌跡會是一圓弧</u>。（見定理 2、3）

（三）以 $\overline{AC}$ 、$\overline{CD}$ 為邊，向異側做兩邊數相同的正 n 邊形，而 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點為 M 點。隨著 C 點於 $\overline{AD}$ 上移動，<u>M 點的移動軌跡乃為一組雙曲線</u>。（見範例 4 與定理 5）

六、討論：

（一）原題目中有四項敘述，但在<u>定理一</u>中我們僅列了三項，而原來的<u>第 3 項</u>敘述對於其他情況 ($n>3$) 結論都不會成立。

探究其原因---因為原題目（科學教育月刊中的題目）的證明具唯一

性而無一般性。即它利用了$\angle AMD = 120^0$，且$\angle BCE = 60^0$（正三角形的特殊情況），使得 $\angle AMD + \angle BCE = 180^0$，故$MBCE$共圓。但其他的狀況之下（$n > 3$），$\angle AMD + \angle BCE \neq 180^0$，則 $MBCE$已不再共圓，當然也沒有 $\overline{CQ} = \overline{CP}$ 的結果。

（二）<u>定理 3 中</u>：在$\overline{AD}$同側作正n邊時，M 點軌跡圓的半徑會有極值。試問 $n =$？

1.直觀而言：因為直徑為圓最長的一條弦，當$n = 4$時，軌跡圓的圓心恰落於$\overline{AD}$上，即$\overline{AD}$為圓弧的直徑，故當$n = 4$時的軌跡為最小的圓（直徑最小）。

2.就微分的觀點：由<u>定理 3</u>知：半徑$r = (25 + \frac{25(l^2 - 1)^2}{4l^2})^{-\frac{1}{2}}$

則$r' = \frac{1}{2}\left(25 + \frac{25(l^2 - 1)^2}{4l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{400l^3(l^2 - 1) - 200l(l^2 - 1)^2}{(4l^2)^2}\right)$

當$r' = 0$時， $400l^3(l^2 - 1) - 200l(l^2 - 1)^2 = 0$

$=> l(l^2 - 1)(l^2 + 1) = 0$

$=> l = 0, \pm 1, \pm i$

又因為$0 < \theta \leq 60^0$ （θ為正n邊形外角之半），

則 $0 < l \leq \sqrt{3}$，且$l \in R$

故 $l = 1$ $=> \theta = 45^0$， 即當$n = 4$，軌跡圓有最小的半徑。

七、結語：

由上面的定理與範例知道：當兩正n邊形作於$\overline{AD}$同側或異側時，M 點的軌跡圖形分別為<u>圓</u>與<u>雙曲線</u>。但在幾何中，我們知道屬於二次曲線的圖形卻有四種---<u>拋物線、圓、橢圓、雙曲線</u>。所以我們在探索此主題時，曾經再將相關的圖形作更多的改變，期待可以找到有關於橢圓與拋物線這兩部分的軌跡，但還沒有成功。

但我們相信數學是一套完整的美學。因而我們一致認為：只要再把這類圖形做更適當的修改或再注意一些細節，這類的圖形上面應該會有某一點，其相對於 C 點移動時所產生的軌跡，可以構成一<u>橢圓或拋物線</u>，而使得這份理論可以更趨完整、更近完美！

八、參考書籍：

（1）謝銘峰 1998 一則幾何問題 科學教育月刊 212 期 P11~P13

(2) 高中基礎數學第四冊　林福來、陳冒海等編著　南一出版社
(3) 高中數學甲（上）　　林福來、陳冒海等編著　南一出版社
(4) 動態幾何操作手冊　國立台灣師範大學數學系網路小組編撰　九章出版社