中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：過多邊形內外一定點的面積平分線作法

（尺規作圖）

關 鍵 詞：過形內、外一定點

三角形、四邊形面積平分線的尺規作圖

任意 n 邊形面積平分線的作法

編號：040412

學校名稱：

國立嘉義高級中學

作者姓名：

陳省吾、劉又瑋、吳玟叡、侯佑霖

指導老師：

林德煜、彭威銘

一、摘要：

(一)先利用座標幾何導出過三角形內或外一定點的面積平分線公式，再利用尺規作圖，作出其面積平分線。

(二)對於求作過四邊形內或外一定點的面積平分線，我們也是先利用座標幾何討論出其面積平分線交於那兩邊，然後再把原點選在適當位置，使計算較為容易，而導出其面積平分線公式。類似(一)，我們再利用尺規作圖，作出其面積平分線。

(三)對於求作過多邊形內或外一定點的面積平分線，我們也是仿照(二)，先決定面積平分線交於那兩邊，然後再將多邊形轉換成相等面積的四邊形或三角形，再利用(二)或(一)的方法處理之！

(四)當我們利用座標幾何判斷出面積平分線交四邊形或多邊形於那兩邊(見(二)及(三))後，亦可利用另外兩個方法求作其面積平分線：面積座標法(見附錄A)及綜合幾何法(見附錄 B) 。

二、研究動機：

我們在高一學平面座標時看到了以下的題目：

平面上三點 A (1, 0)　B (2, 0)　C (0, 1)，若直線 y = mx 平分△ABC 的面積，求斜率 m。

＜sol＞ 1. 設直線交 $\overline{AC}$ 於 P ，交 $\overline{BC}$ 於 Q

可解得 P 的座標為 $(\frac{1}{m+1},\ \frac{m}{m+1})$, Q 的座標為 $(\frac{2}{2m+1},\ \frac{2m}{2m+1})$

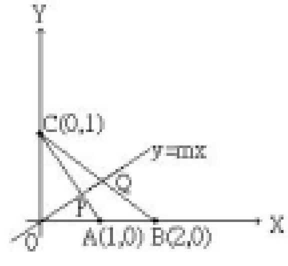
2. ∵△ABC 面積為 $\frac{1}{2}$

∴當△CPQ 面積為 $\frac{1}{4}$ 時滿足所求

△CPQ = △COQ - △COP

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left[\ \frac{2}{2m+1} - \frac{1}{m+1}\ \right]$

$m = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (負不合)



看到了這一題，不禁令人聯想到，過三角形內或外任意一定點的面積平分線是否存在？能否作得出？用什麼方法作出？在四邊形、多邊形時又如何呢？問了老師及同學均得不到確定的方法，參考書籍上亦未見類似的作法。於是找了幾位有較佳數學基礎及興趣的同學，共同研究過定點面積平分線的作法。

三、研究目的：

藉由斜座標、面積座標及綜合幾何等方法，期望能以有條理的方式，依序探討三角形、四邊形、五邊形等等的過定點面積平分線作法，並利用同學所設計的繪圖軟體輔助討論。

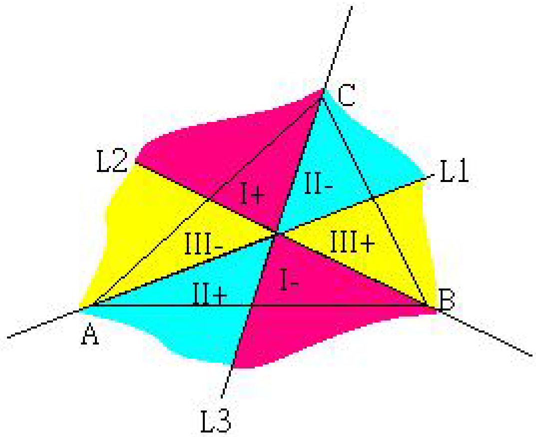
四、研究過程：

以下討論順序為：

1. 先找出過三角形內部及外部一定點的面積平分線作法。
2. 再找出過四邊形內部及外部一定點的面積平分線作法。
3. 由三角形及四邊形的作法推廣到多邊形。
4. 面積平分線的其他作法。(見附件 A,B)

(一)過△ABC 內、外一定點 P，作此三角形的面積平分線 L

1.(1)首先討論點 P 與 ΔABC 的位置關係，如下圖，分別作出三中線 Li $(i=1,2,3)$，將所在平面分成六個區域。(見五.討論(一))



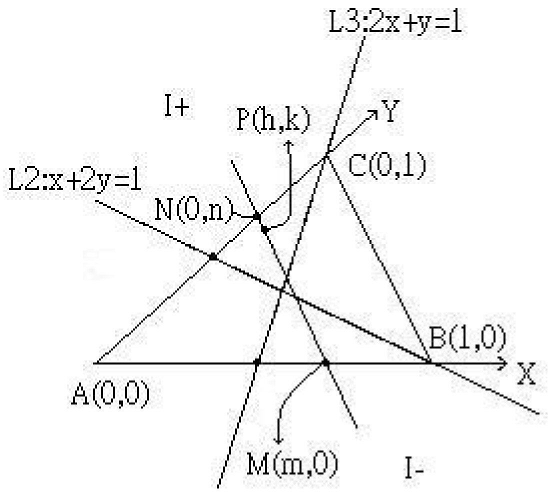
當 $P \in Li$ $(i=1,2,3)$，則 Li 即為所求直線

當 $P \in I^{+} \vee I^{-}$ ，則定斜座標系 $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$P \in \mathrm{II}^{+} \vee \mathrm{II}^{-}$ ，則定斜座標系 $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$

$P \in \mathrm{III}^{+} \vee \mathrm{III}^{-}$，則定斜座標系 $(C;\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$

(2)由對稱性知只需討論 P$\in I^{+}\vee I^{-}$的情形



設 L 交兩座標軸於 $M(m,0),N(0,n)$

則 L 方程式：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$

$\because$ L 通過 $P(h,k)$ $\quad\therefore\dfrac{h}{m}+\dfrac{k}{n}=1$ …… ①

又 $\Delta AMN=\dfrac{1}{2}\Delta ABC$ $\qquad\therefore\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$ ， $mn=\dfrac{1}{2}$ …… ②

解 ① ② 得 $\quad 2km^{2}-m+h=0$ ……(∗)

$(m,n)=(\dfrac{1\pm\sqrt{1-8hk}}{4k},\dfrac{1\mp\sqrt{1-8hk}}{4h})$

ㄅ. 當 P$\in I^{+}$ 時 ， $\because h+2k>1,\quad 2h+k<1,$

$\therefore$取 $(m,n)=(\dfrac{1+\sqrt{1-8hk}}{4k},\dfrac{1-\sqrt{1-8hk}}{4h})$

ㄆ. 當 P$\in I^{-}$ 時 ， $\because h+2k<1,\quad 2h+k>1,$

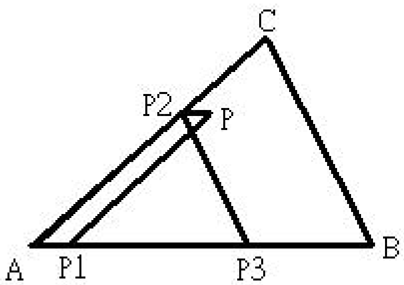
$\therefore$取 $(m,n)=(\dfrac{1-\sqrt{1-8hk}}{4k},\dfrac{1+\sqrt{1-8hk}}{4h})$

2. 作圖時只要先作出 m 長，取點 M 後再與點 P 相連，即可得面積平分線 L
由前方程式(∗)：$2km^{2}-m+h=0$
可設兩根 $m_{1}=\dfrac{1+\sqrt{1-8hk}}{4k},m_{2}=\dfrac{1-\sqrt{1-8hk}}{4k}$

則$\begin{cases} m_1 + m_2 = \dfrac{1}{2k} \\ m_1 \cdot m_2 = \dfrac{h}{2k} \end{cases}$

(以下作圖定$\overline{AB}$為單位長)

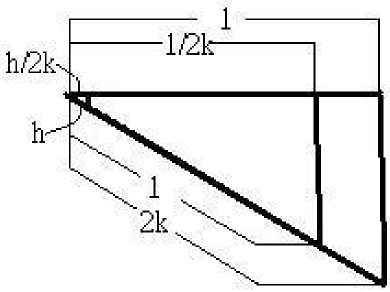
(1)P 在△內：



<STEP1>作$\overline{PP_1} // \overline{AC}$，得$h = \overline{AP_1}$

作$\overline{PP_2} // \overline{AB}$，再作$\overline{P_2P_3} // \overline{BC}$得

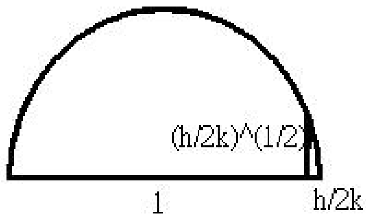
$k = \overline{AP_3}$



<STEP2> 利用比例線段

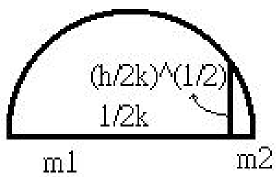
$\dfrac{h}{2k} : h = \dfrac{1}{2k} : 1 = 1 : 2k$ 作圖得

$\dfrac{h}{2k}$及$\dfrac{1}{2k}$



<STEP3> 作 1 與$\dfrac{h}{2k}$的幾何平均數得

$\sqrt{\dfrac{h}{2k}}$



<STEP4> 利用$m_1 + m_2 = \dfrac{1}{2k}$及兩者的幾何平均數$\sqrt{\dfrac{h}{2k}}$，作出$m_1$與$m_2$的長

當$P \in I^+$ 時取$m = m_1$

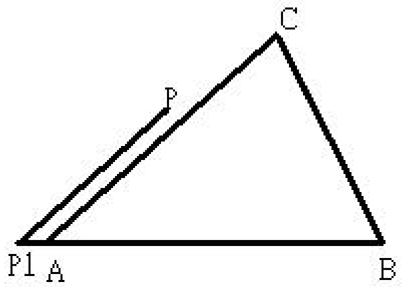
$P \in I^-$ 時取$m = m_2$

(2)P 在△外：

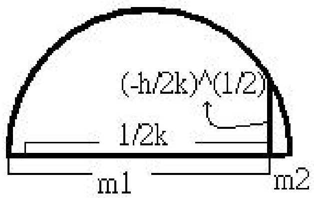
當 P$\in I^+$ 時 $h<0$, $k>0$ 則 $m_1>0$， $m_2<0$

令 $m_2' = -m_2$ 可得 $\begin{cases} m_1 - m_2' = \dfrac{1}{2k} \\ m_1 \times m_2' = \dfrac{-h}{2k} \end{cases}$

作法須修正以下二步驟，其餘大致同(1)



<STEP1> 作 $\overline{PP_1} // \overline{AC}$，所得到的 $\overline{AP_1}$ 是 $-h$



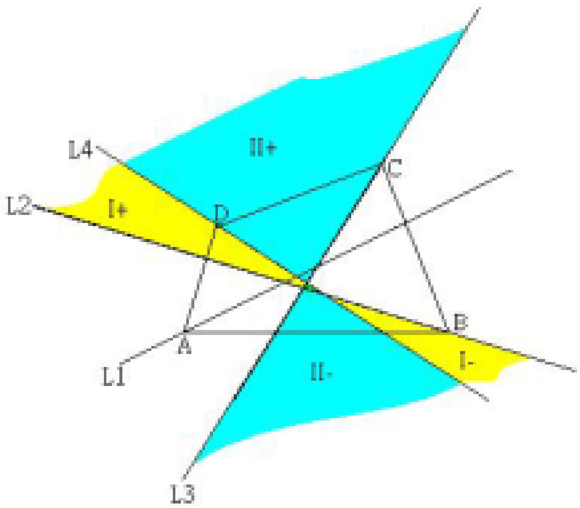
<STEP4> 利用 $\dfrac{1}{2k}$ 線段的一半與 $\sqrt{\dfrac{-h}{2k}}$ 先作出圓的半徑，再作出 m_1 及 m_2' 的長

取 $m = m_1$ 即可。

當 P$\in I^-$ 時，作法類似，在此省略。

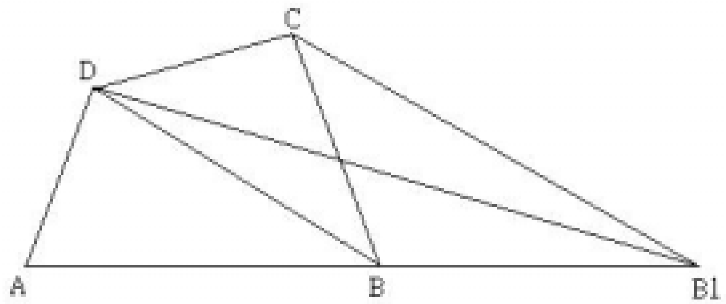
(二)過四邊形 $ABCD$ 內、外一定點，作此四邊形的面積平分線 L

1. 首先討論 P 點與四邊形 $ABCD$ 的位置關係，如下圖，分別作出四條面積平分線 Li $(i=1,2,3,4)$



(1)當 P$\in Li$ ($i=1,2,3,4$)則 Li 即為所求直線

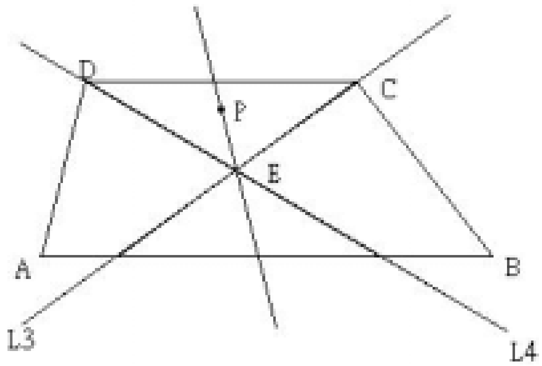
(2)當 P$\in I^{+}\vee I^{-}$，則 L 必交於四邊形的兩相鄰邊 $\overline{AB},\overline{AD}$，可先作圖將四邊形 ABCD 轉換成相等面積的△$AB_1D$，再用三角形面積平線的作法而得 L。



作 $\overleftrightarrow{CB_1}$ // $\overline{BD}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 B_1，連接 $\overline{DB_1}$ 可得△AB_1D

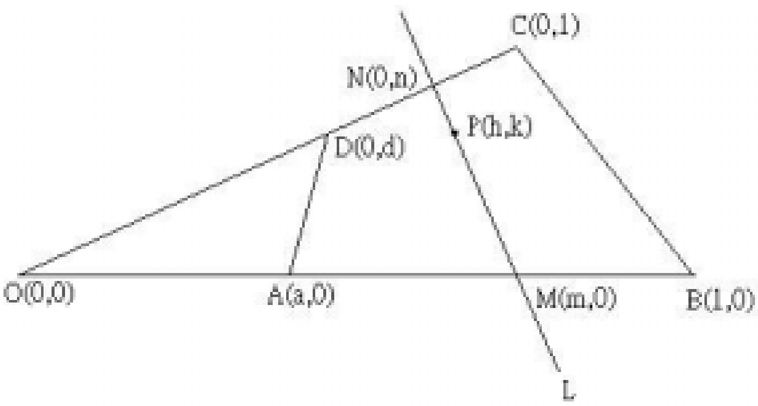
(3) P$\in$ II$^{+}\vee$ II^{-}，則 L 必交於四邊形的兩相對邊 $\overline{AB}$， $\overline{CD}$ (見五.討論(二))

ㄅ. $\overline{CD}$ // $\overline{AB}$



設 L_3,L_4 相交於 E，作 $\overleftrightarrow{PE}$ 即為所求直線 L

ㄆ. $\overline{CD}$ 不平行 $\overline{AB}$



設 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 相交於 O，建立斜座標系(O；$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$)

設 L 交兩座標軸於 $M(m,0), N(0,n)$

則 L 方程式：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$

$\because$ L 通過 $P(h,k)$ $\quad\therefore \dfrac{h}{m}+\dfrac{k}{n}=1$ ……①

又 $\dfrac{\text{四邊形}AMND}{\text{四邊形}ABCD}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\Delta OMN-\Delta OAD}{\Delta OBC-\Delta OAD}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{mn-ad}{1-ad}=\dfrac{1}{2}$ ……②

解① ②得 $2km^2-(1+ad)m+(1+ad)h=0$ ……(∗∗)

$$(m,n)=\left(\frac{t\pm\sqrt{t^2-8thk}}{4k},\frac{t\mp\sqrt{t^2-8thk}}{4h}\right)$$ 其中 $t=1+ad$

當 $P\in I^{+}$ 時，取 $(m,n)=\left(\dfrac{t+\sqrt{t^2-8thk}}{4k},\dfrac{t-\sqrt{t^2-8thk}}{4h}\right)$

當 $P\in I^{-}$ 時，取 $(m,n)=\left(\dfrac{t-\sqrt{t^2-8thk}}{4k},\dfrac{t+\sqrt{t^2-8thk}}{4h}\right)$

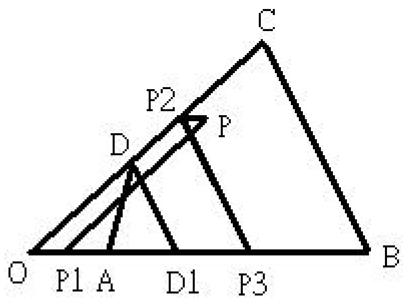
2. 作圖同樣只要先作出 m 長，取點 M 後再與點 P 相連，即可得面積平分線 L
由前方程式(∗∗)：$2km^2-tm+th=0$

設兩根 $\quad m_1=\dfrac{t+\sqrt{t^2-8thk}}{4k}$ ，$m_2=\dfrac{t-\sqrt{t^2-8thk}}{4k}$

則 $\begin{cases} m_1+m_2=\dfrac{t}{2k} \\ m_1m_2=\dfrac{th}{2k} \end{cases}$

(以下作圖定 $\overline{AB}$ 為單位長)

(1) P 在四邊形內：



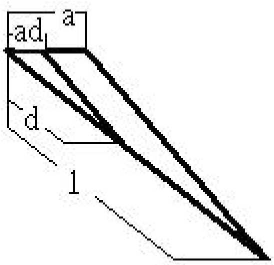
<STEP1>作 $\overline{PP_1}\,//\,\overleftrightarrow{CD}$，得 $h=\overline{OP_1}$

作 $\overline{PP_2}\,//\,\overleftrightarrow{AB}$，再作 $\overline{P_2P_3}\,//\,\overline{BC}$ 得

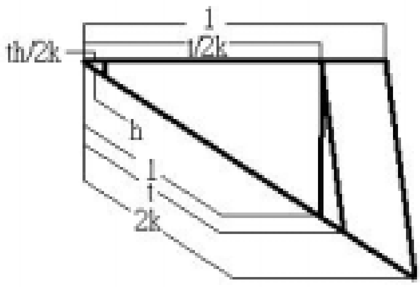
$k=\overline{OP_3}$

作 $\overline{DD_1}\,//\,\overline{BC}$ 得 $d=\overline{OD_1}$

取 $a=\overline{OA}$

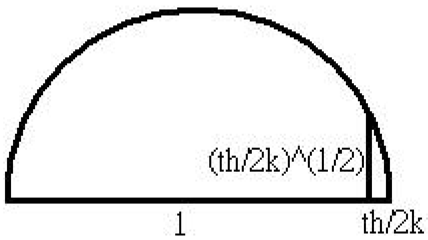


<STEP2>利用比例線段 $ad:d=a:1$ 得 ad，再得 $t=ad+1$



利用比例線段 $\frac{t}{2k}:t=1:2k$ 作圖得 $\frac{t}{2k}$ 再利用比例線段

$\frac{th}{2k}:h=\frac{t}{2k}:1$ 作圖得 $\frac{th}{2k}$



<STEP3>作 1 與 $\frac{th}{2k}$ 的幾何平均數得 $\sqrt{\frac{th}{2k}}$

<STEP4>利用幾何平均數作圖得 m_1 及 m_2 長

當 P 在 $\in I^+$ 時取 $m=m_1$

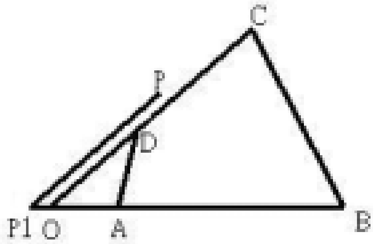
P 在 $\in I^-$ 時取 $m=m_2$

(2) P 在四邊形外：

P $\in I^+$ 時， $h<0$， $k>0$，則 $m_1>0$， $m_2<0$

令 $m_2'=-m_2$ 可得 $\begin{cases} m_1-m_2'=\dfrac{t}{2k} \\ m_1\times m_2'=\dfrac{-th}{2k} \end{cases}$

作法須修正以下二步驟，其餘大致同(1)



<STEP1> 作 $\overline{PP_1}//\overleftrightarrow{CD}$，所得到的 $\overline{OP_1}$ 是

$-h$

<STEP4> 利用 $\frac{t}{2k}$ 線段的一半與 $\sqrt{\frac{-th}{2k}}$ 先作出圓的半徑，再作出 m_1 及 m_2' 長

取 $m = m_1$ 即可。

當 $\mathrm{P} \in I^-$ 時，作法類似，在此省略。

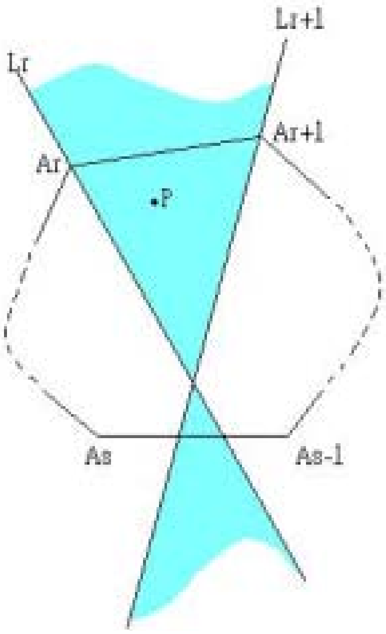
(三)過任意 n 多邊形外、內一定點 P 作其面積平分線 L

在處理四邊形的面積平分線後，我們得到了一條通往任意 n 多邊形之路。就是必須先判斷 L 會與 n 邊形 $A_1A_2\Lambda\ A_n$ 的哪二邊相交。

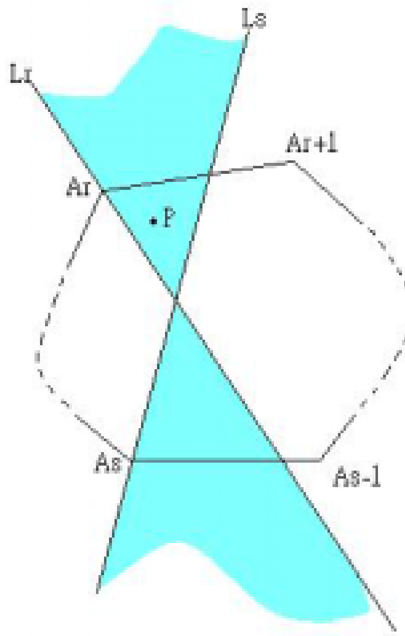
1. 首先過 Ai 作面積平分線 $Li\,(i = 1.2.\Lambda\ n)$

當 $P \in Li$，則 Li 即為所求直線

否則，P 必落在通過多邊形相同兩邊的 Li 之間



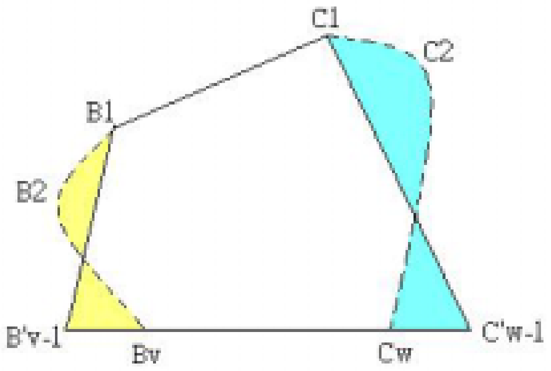
P 在 L_r 與 L_{r+1} 之間



P 在 L_r 與 L_s 之間

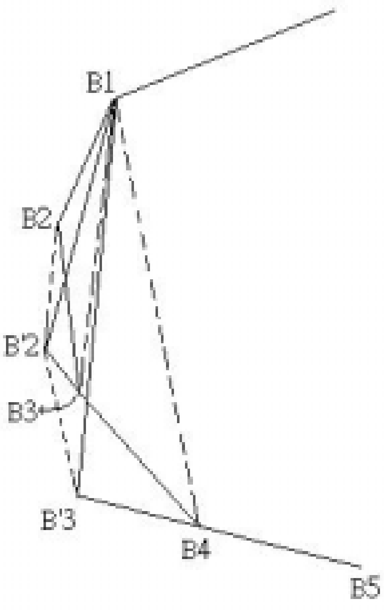
2.(1)為方便以下說明，將 A_r 依逆時針方向到 A_S 的頂點改為 $B_{1,}B_{2,}B_3\Lambda\ B_v$

將 A_{r+1} 依順時針方向到 A_{S-1} 的頂點改為 $C_{1,}C_{2,}C_3\Lambda\ C_W$ (其中 $v+w=n$)



(2)現在我們要將 n 邊形轉換成相等面積的四邊形 $B_1B'_{V-1}C'_{W-1}C_1$

($B'_{V-1},C'_{W-1}\in\overleftrightarrow{B_VC_W}$)



如圖，作 $\overleftrightarrow{B_2B_2{}'}\,//\,\overline{B_1B_3}$ 且交 $\overleftrightarrow{B_3B_4}$ 於 $B_2{}'$，則

$A_1\Lambda\Lambda\ A_n$ 面積=

$B_1B_2{}'B_3B_4\Lambda\ B_VC_W\Lambda\Lambda\ C_1$ 面積

作 $\overleftrightarrow{B_2{}'B_3{}'}\,//\,\overline{B_1B_4}$ 且交 $\overleftrightarrow{B_4B_5}$ 於 $B_3{}'$，則

$A_1\Lambda\Lambda\ A_n$ 面積=

$B_1B_3{}'B_4\Lambda\ B_VC_W\Lambda\Lambda\ C_1$ 面積

重複 $v-2$ 次後，可得 $A_1\Lambda\Lambda\ A_n$ 面積

$=B_1B'_{V-1}\ C_W\Lambda\Lambda\ C_1$ 面積

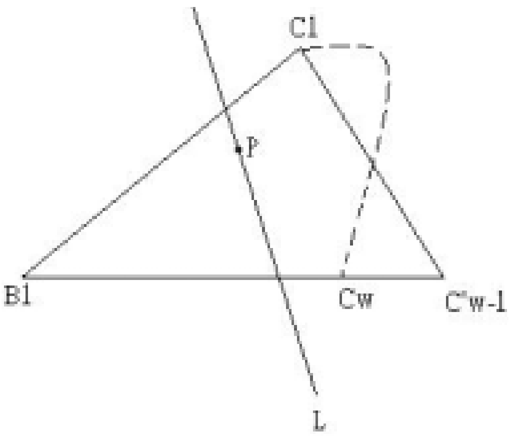
接著同樣修正 $C_{1,}C_{2,}C_3\Lambda\ C_W$ 最後得 $A_1\Lambda\Lambda\ A_n$ 面積= $B_1B'_{V-1}\ C'_{W-1}C_1$ 面積

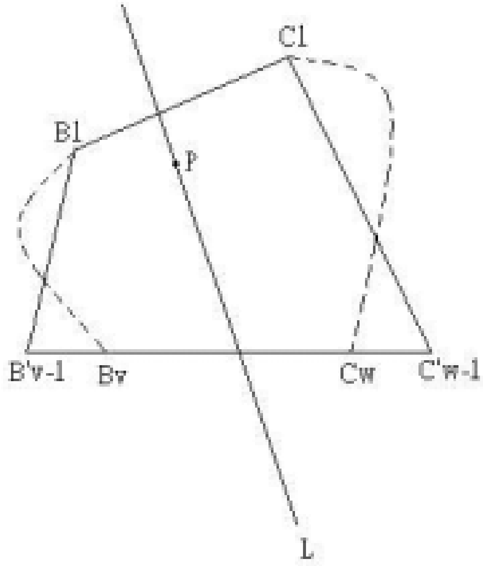
(3)當一開始 $\overline{B_1C_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_VC_W}$ 為相鄰兩邊時(即 $B_1=B_V$ 或 $C_1=C_W$)，

n 邊形轉換後成一個三角形，可由三角形面積平分線的作法而得。

當一開始 $\overline{B_1C_1}$ 與 $\overleftrightarrow{B_VC_W}$ 不為相鄰兩邊時， n 邊形轉換後成一四邊形

可由四邊形面積平分線作法而得。

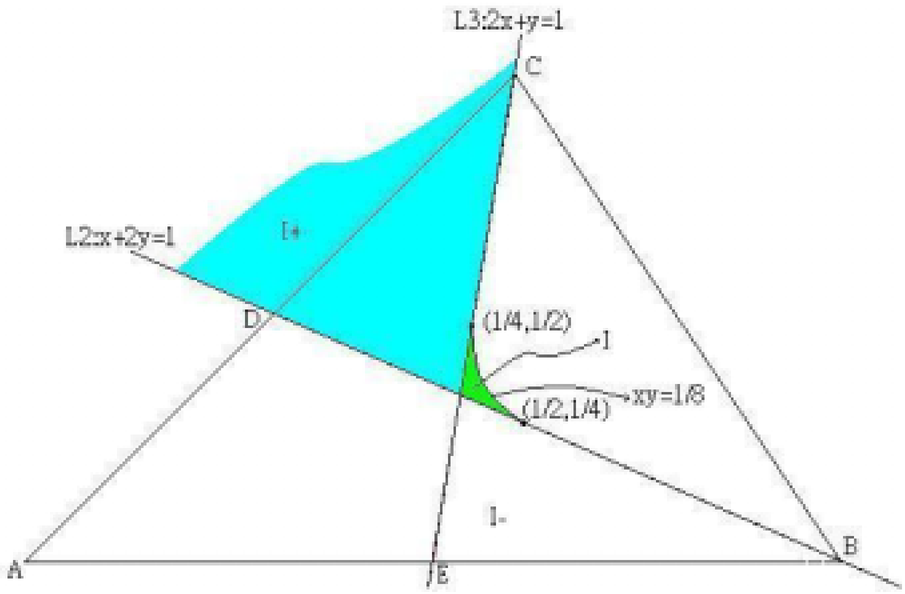




五、討論：

(一)為什麼要將三角形分成六個區域來討論

1. 由前面的討論得兩組解



(1) $m=\dfrac{1+\sqrt{1-8hk}}{4k}$

$n=\dfrac{1-\sqrt{1-8hk}}{4h}$

由 $\begin{cases} D=1-8hk\geq 0 \\ 0\leq m\leq 1 \\ 0\leq n\leq 1 \end{cases}$

可解得

$$\begin{cases} hk\leq \dfrac{1}{8} \\ k\geq \dfrac{1}{4}\text{ , } h+2k\geq 1 \\ h\leq \dfrac{1}{4}\text{ , } 2h+k\leq 1 \text{ or } h>\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

即是 $I^{+}\cup I$ (包含邊界)

(2) $m=\dfrac{1-\sqrt{1-8hk}}{4k}$

$n=\dfrac{1+\sqrt{1-8hk}}{4h}$

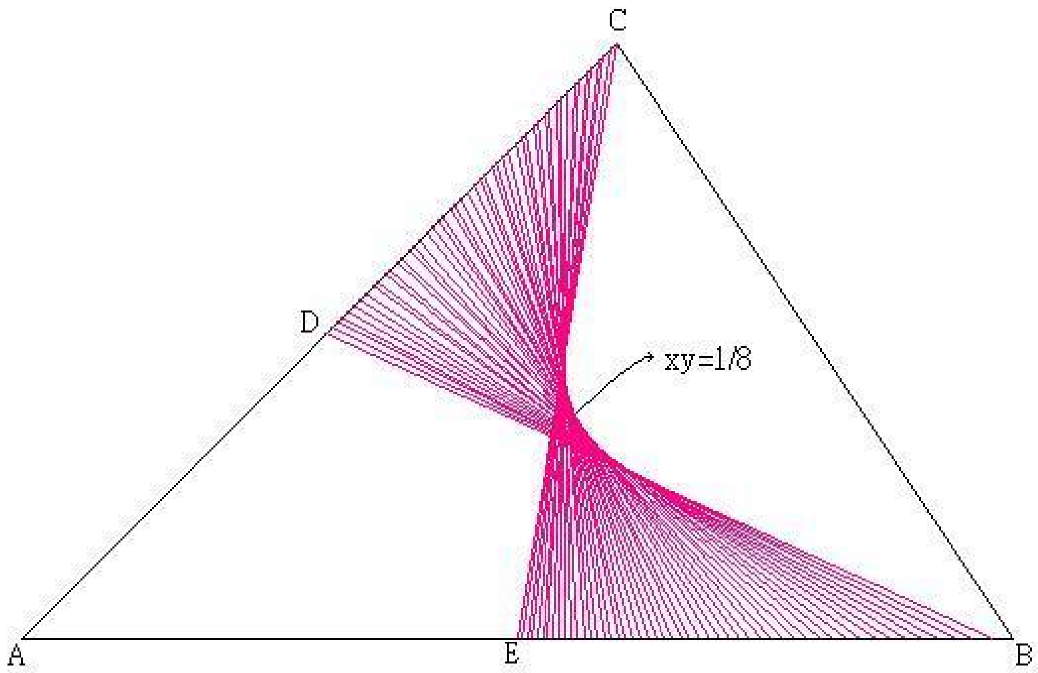
同理可解得 $I^{-}\cup I$ (包含邊界)

由此可知 I 區的點﹝不包括 $xy=\dfrac{1}{8}$ ﹞可作兩條不同的面積平分線交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 兩邊

所以三角形內有些位置的點可作面積平分線通過不同的兩邊，而對於相同的兩邊也可以有超過一條的平分線。

2．為什麼會產生 $xy=\dfrac{1}{8}$ 的界線？

我們用電腦將面積平分線由 $\overline{CE}$ 掃到 $\overline{DB}$，發覺會產生一個曲線的邊界，經由老師指導得知，這些面積平分線包絡出這條 $xy=\dfrac{1}{8}$ 曲線。



(二)在四邊形的討論中，為什麼當 $\mathrm{P}\in \mathrm{II}^{+}\vee \mathrm{II}^{-}$ 時，L 必過 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 兩邊？

1．由前面的討論得兩組解

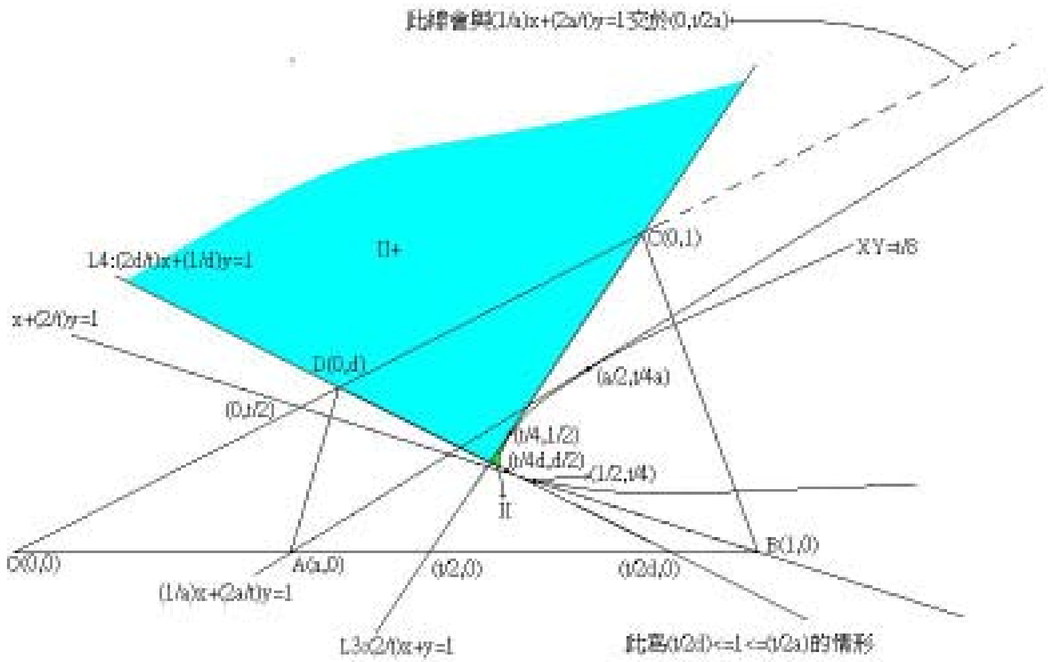
(1) $m=\dfrac{t+\sqrt{t^2-8thk}}{4k}$

$n=\dfrac{t-\sqrt{t^2-8thk}}{4h}$ 　　其中 $t=1+ad$

由 $\begin{cases} D=t^2-8thk\ge 0 \\ a\le m\le 1 \\ d\le n\le 1 \end{cases}$

$$
可解得\begin{cases}
hk \le \dfrac{t}{8} \\
h+\dfrac{2}{t}k \ge 1 \text{ , } k \ge \dfrac{t}{4} \\
k \ge \dfrac{t}{4a} \text{ , } \dfrac{1}{a}h+\dfrac{2a}{t}k \le 1 \text{ or } k < \dfrac{t}{4a} \\
h \le \dfrac{t}{4d} \text{ , } \dfrac{2d}{t}h+\dfrac{1}{d}k \ge 1 \\
h \le \dfrac{t}{4} \text{ , } \dfrac{2}{t}h+k \le 1 \text{ or } h > \dfrac{t}{4}
\end{cases}
$$

即是 $\mathrm{II}^{+} \cup \mathrm{II}$ (包含邊界)



(2) $m=\dfrac{t-\sqrt{t^2-8thk}}{4k}$

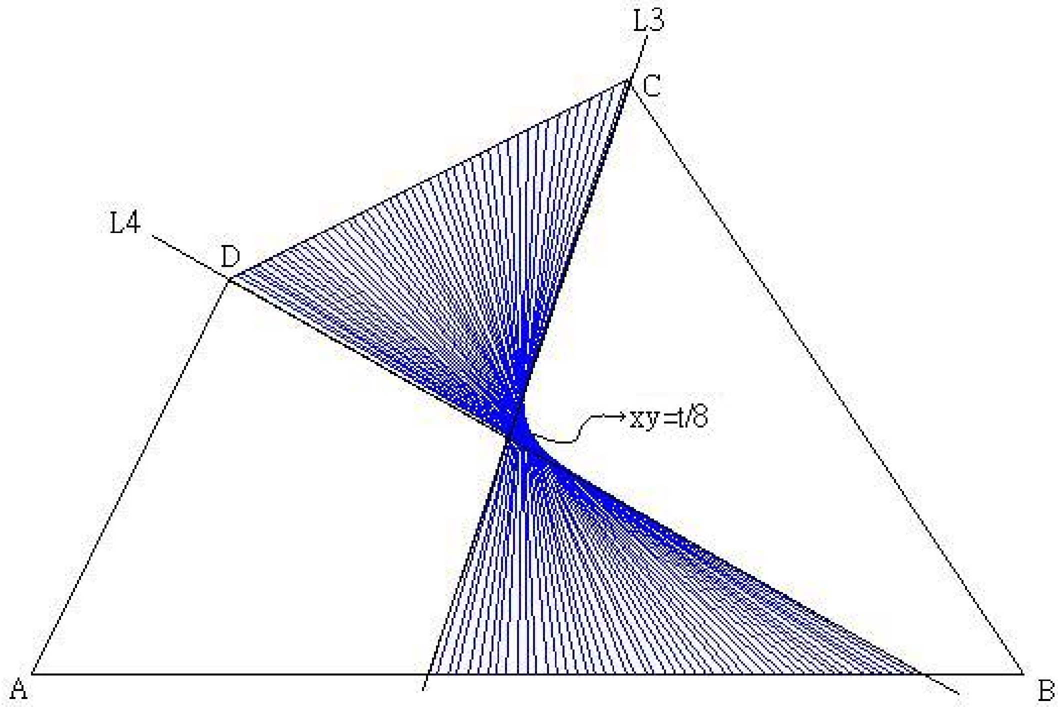
$n=\dfrac{t+\sqrt{t^2-8thk}}{4h}$

同理可得 $\mathrm{II}^{-} \cup \mathrm{II}$ (包含邊界)

由此更可得知， II 區的點(不包含 $xy=\dfrac{t}{8}$)可作兩條不同的面積平分線交於 $\overline{CD}$、 $\overline{AB}$ 兩邊。

所以四邊形內有些位置的點可作面積平分線通過不同的兩邊(如

$\mathrm{II}^{-} \cap \mathrm{I}^{+}$的點)，而對於通過相同的兩邊也可以有超過一條的平分線。我們同樣用電腦將面積平分線從L_3掃到L_4，發覺這些面積平分線同樣包絡出$xy = \frac{t}{8}$的曲線



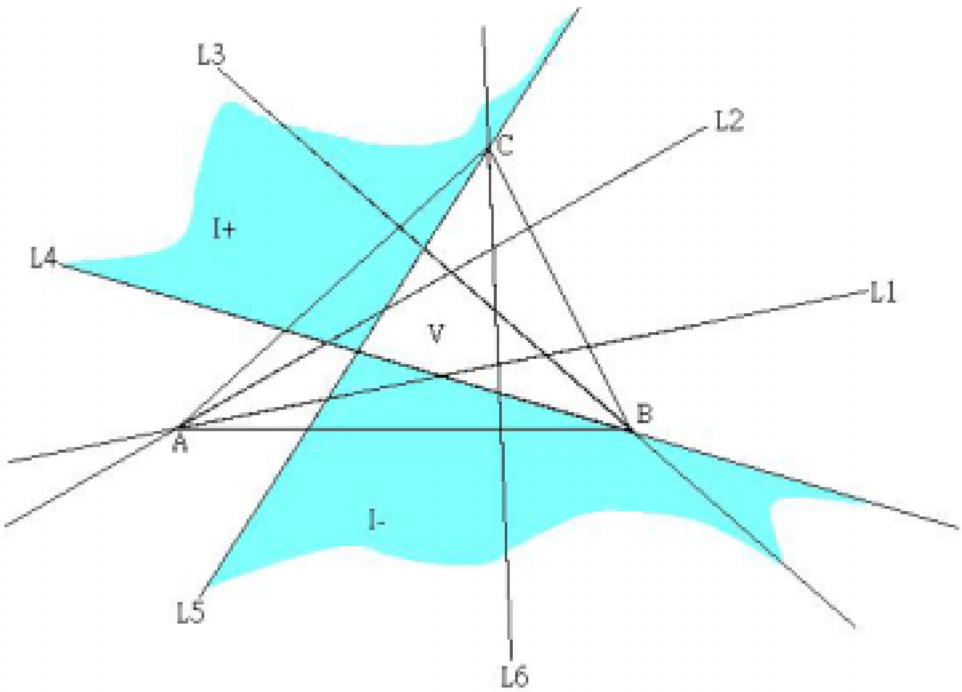
* 由(一)與(二)的討論我們可以知道利用Li來判斷通過P點的面積平分線L會與哪兩邊相交。同樣可以推廣到任意n邊形。

六、推廣：

過n邊形內、外一定點P，作面積r ：$1-r$的分割直線L

(一) n=3

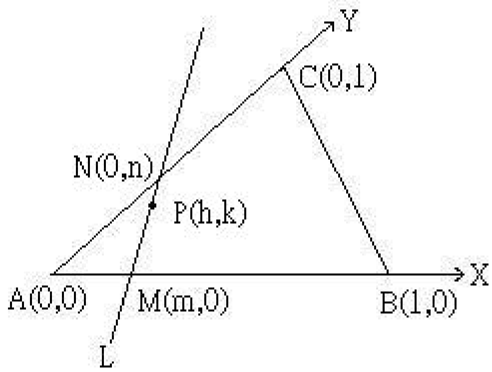
首先過三頂點作出六條面積r ：$1-r$的分割線Li $(i = 1,2,\Lambda\ ,6)$



P 位置情形主要有三：

1. 當 P$\in Li$，則 Li 即為所求直線

2. 當 P$\in I^{+}\vee I^{-}$，可作 L 通過 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 兩邊



設 L 交兩座標軸於 $M(m,0), N(0,n)$

則 L 方程式：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$

$\because$ L 通過 $P(h,k)$ $\quad\therefore \dfrac{h}{m}+\dfrac{k}{n}=1 \quad \cdots\cdots$ ①

又 $\dfrac{\Delta AMN}{\Delta ABC}=r \quad \therefore mn=r \quad \cdots\cdots$ ②

解 ① ② 得 $km^2-rm+rh=0$

$$(m,n)=\left(\frac{r\pm\sqrt{r^2-4rhk}}{2k},\frac{r\mp\sqrt{r^2-4rhk}}{2h}\right)$$

設 $m_1 = \dfrac{r+\sqrt{r^2-4rhk}}{2k}$ $m_2 = \dfrac{r-\sqrt{r^2-4rhk}}{2k}$

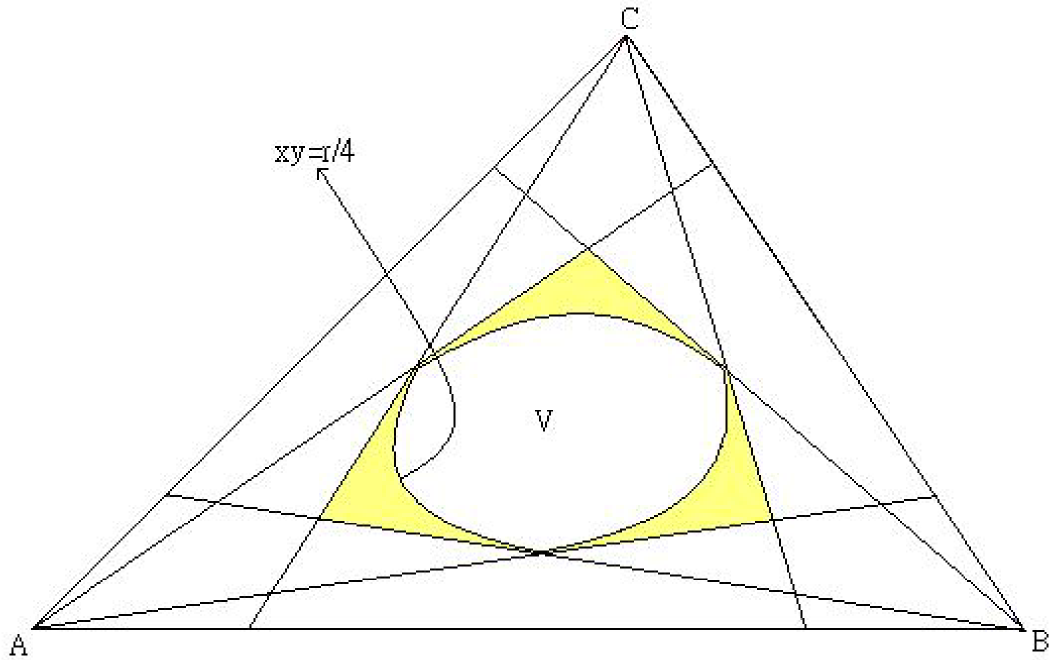
作圖時可利用 $\begin{cases} m_1+m_2 = \dfrac{r}{k} \\ m_1 m_2 = \dfrac{rh}{k} \end{cases}$

視 P 所在位置(I^+、I^- 與三角形內、外)

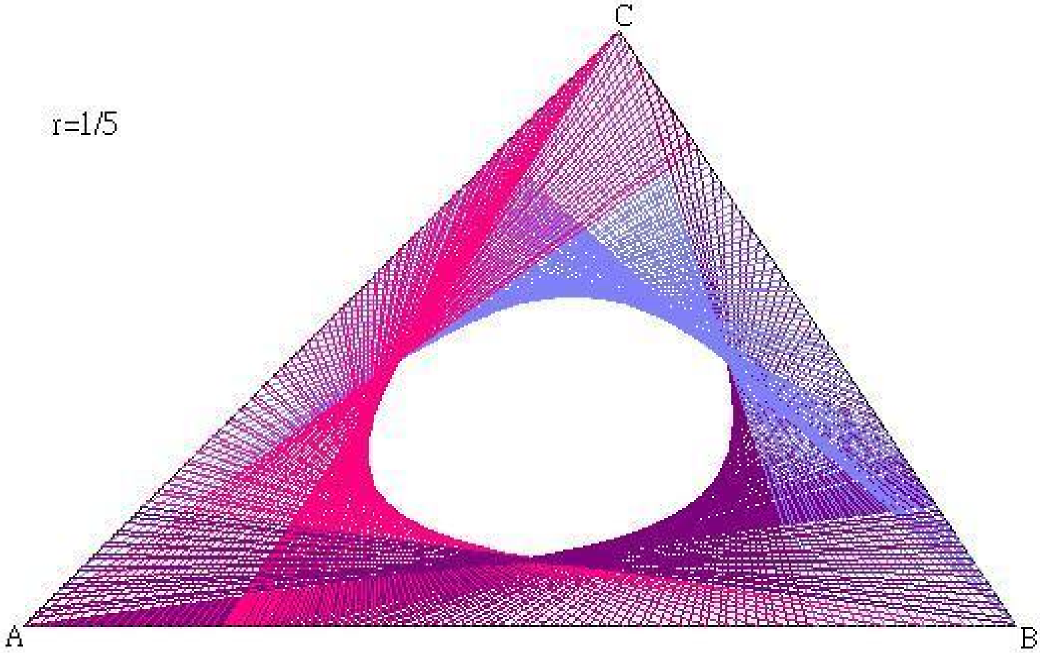
仿研究過程(一)，討論 m_1、m_2 的正負及作法得 m 長，最後作出面積分割線。

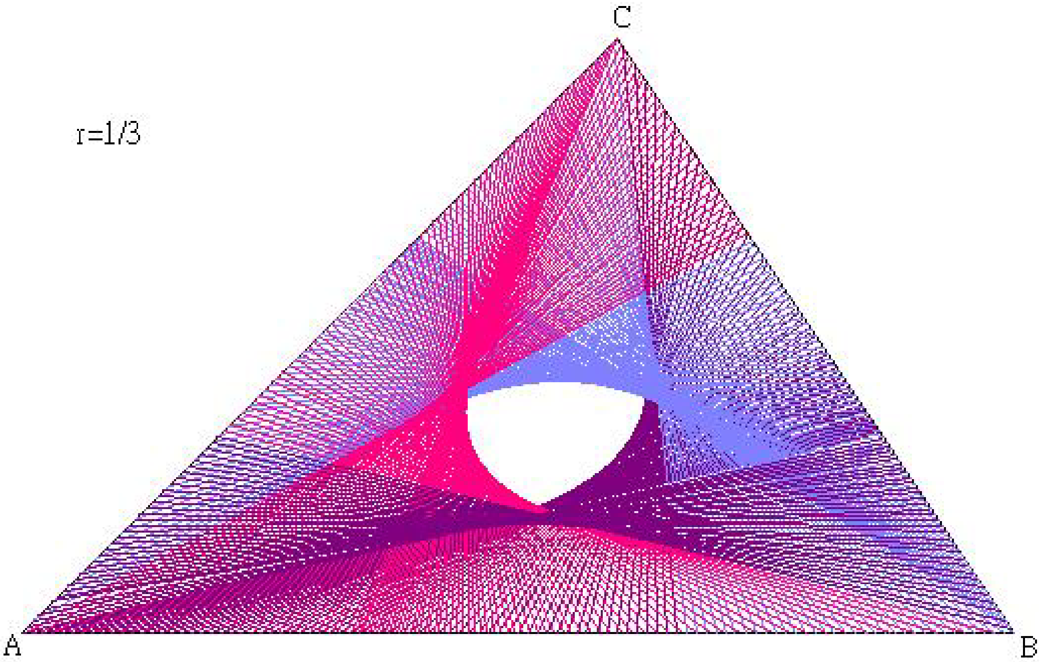
3. 當 $P \in$ V，由 $D = r^2 - 4rhk \geq 0$ 得 $hk \leq \dfrac{r}{4}$

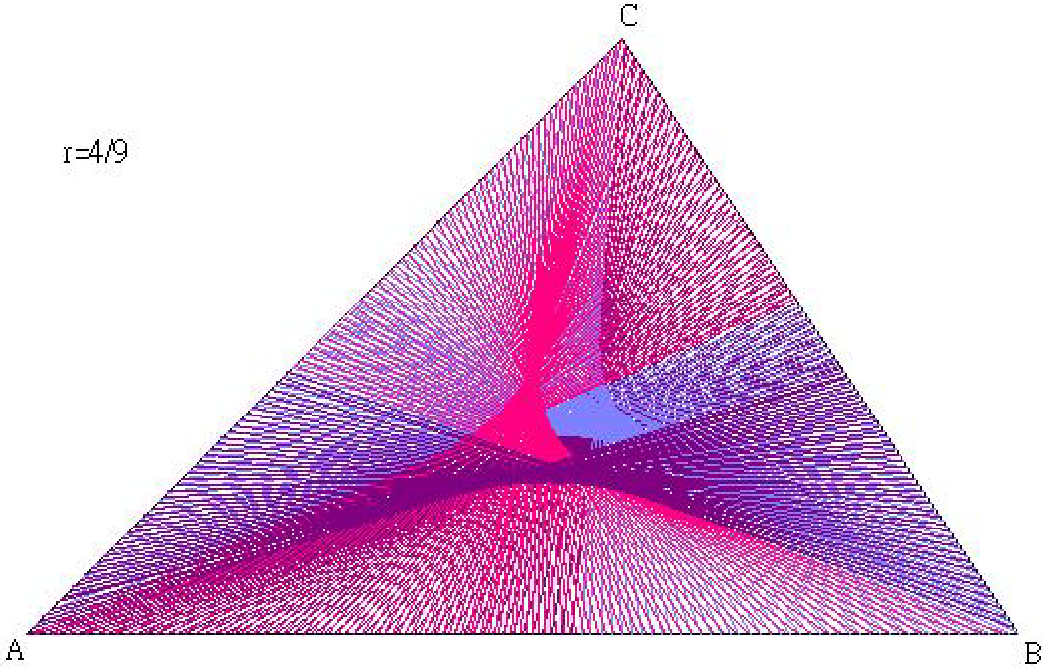
由對稱性知，V 區的中間可能會產生空洞﹝沒有 r ：$1-r$ 分割線通過的地方﹞

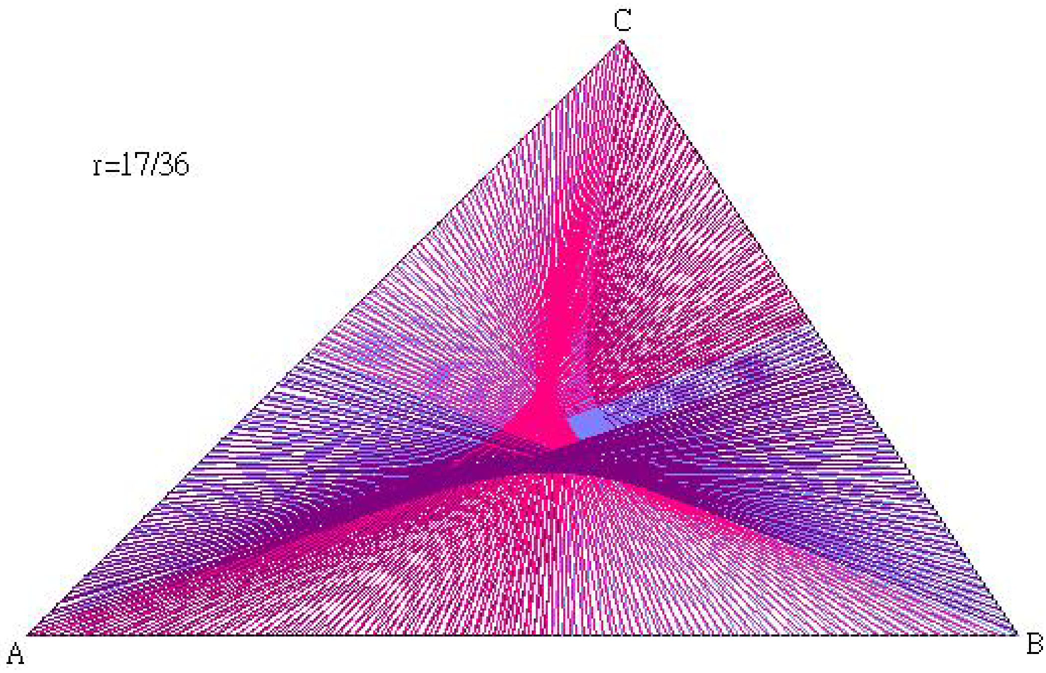


我們取 $r = \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{17}{36}$ 三種情形，用電腦將分割線掃出


C
r=1/5
A
B


C
r=1/3
A
B





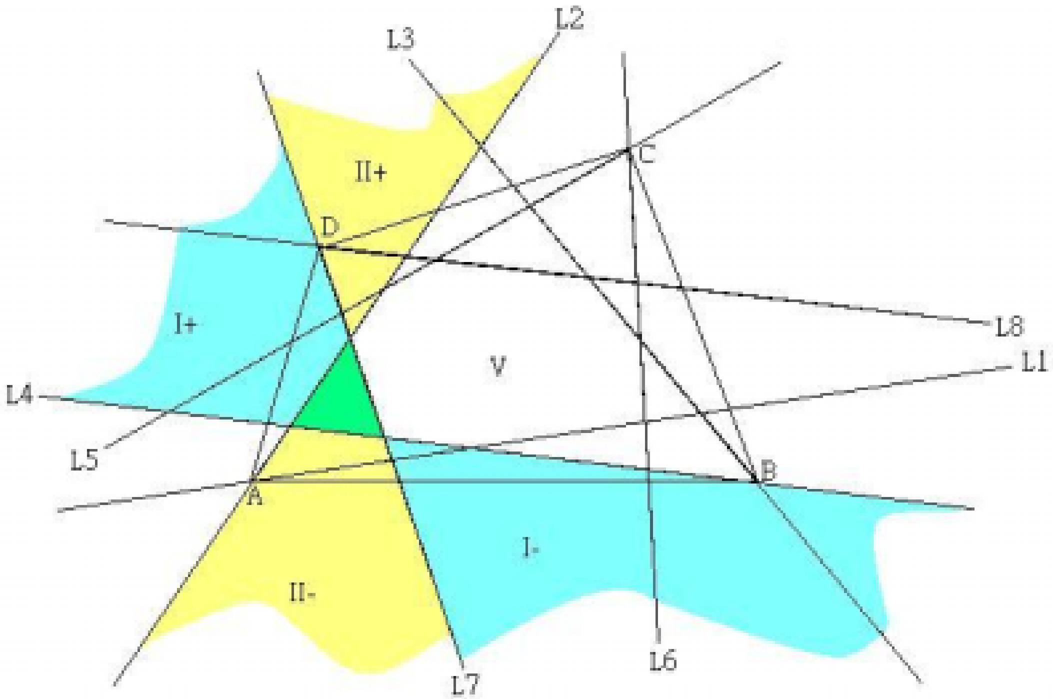
發覺 r 越小，曲線界線愈往旁邊移動，V 區的空洞愈大，代表三角形中有愈多的部分不能作出分割線

註：我們從第三十屆科展「三角形分割包絡線」知，$r=\frac{4}{9}$ 時是分割線能佈滿整

個平面的最小 r 值，現在利用我們解出的曲線邊界 $xy=\frac{r}{4}$，由對稱性知此邊界必須包含重心 $(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3})$ $\therefore \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{r}{4}$ 亦可得 $r=\frac{4}{9}$ 為最小

（二） $n=4$

首先過三頂點作出八條面積 r ：$1-r$ 的分割直線 Li $(i=1,2,\Lambda,8)$



P 位置情形主要有四：

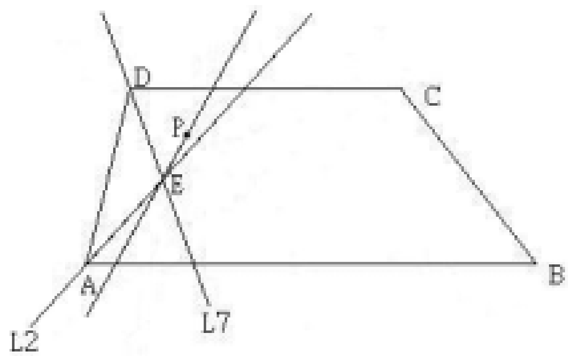
1. 當 $P\in Li$，則 Li 即為所求直線

2. 當 $P\in I^{+}\vee I^{-}$，L 必交於四邊形兩相鄰邊 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$

   可仿研究過程(二)1.(2)，將四邊形 ABCD 轉換成相等面積的$\triangle AB_1D$，再用分割三角形的作法而得 L。

3. 當 $P\in II^{+}\vee II^{-}$，L 必交於四邊形兩相對邊 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$

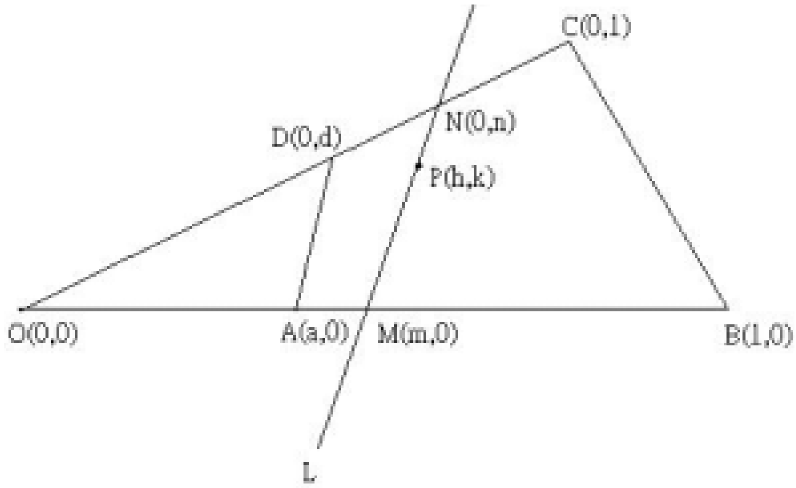
   (1) $\overline{CD}\,//\,\overline{AB}$



設 L_2, L_7 相交於 E，作 $\overleftrightarrow{PE}$ 即為所求分割線 L

(2) $\overline{CD}$ 不平行 $\overline{AB}$

設 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 相交於 O，建立斜座標系(O；$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$)



設 L 交兩座軸於 $M(m,0), N(0,n)$

則 L 方程式：$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1$

∵L 通過 $P(h,k)$ $\quad \therefore \dfrac{h}{m}+\dfrac{k}{n}=1$ ……①

又 $\dfrac{\text{四邊形}AMND}{\text{四邊形}ABCD}=r$

$\therefore \dfrac{\Delta OMN-\Delta OAD}{\Delta OBC-\Delta OAD}=r \qquad \dfrac{mn-ad}{1-ad}=r \quad \Lambda\,\Lambda$②

解① ②得 $km^2-Tm+Th=0$ 其中 $T=r+(1-r)ad$

$(m,n)=(\dfrac{T\pm\sqrt{T^2-4Thk}}{2k},\dfrac{T\,\mu\sqrt{T^2-4Thk}}{2h})$

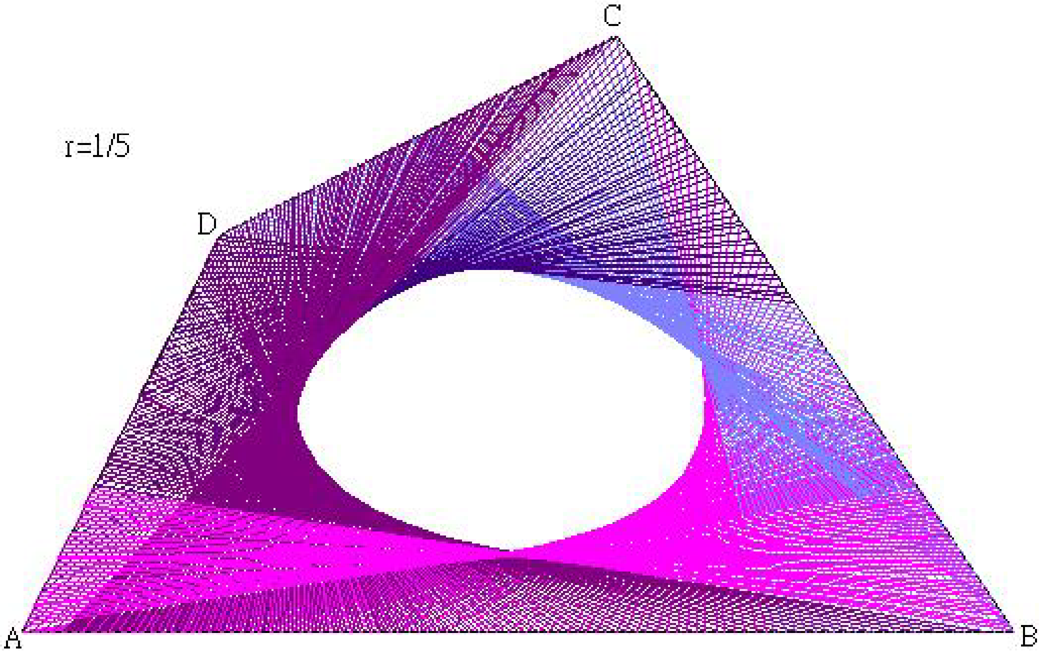
設 $m_1=\dfrac{T+\sqrt{T^2-4Thk}}{2k}$，$m_2=\dfrac{T-\sqrt{T^2-4Thk}}{2k}$

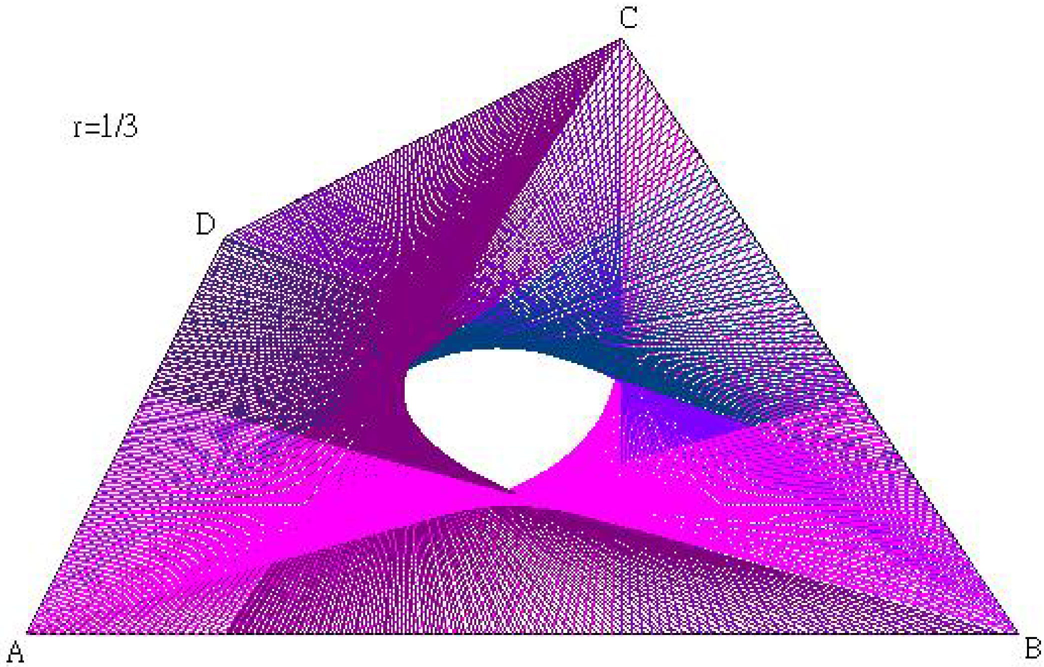
作圖時可利用 $\begin{cases} m_1+m_2=\dfrac{T}{k} \\ m_1m_2=\dfrac{Th}{k} \end{cases}$

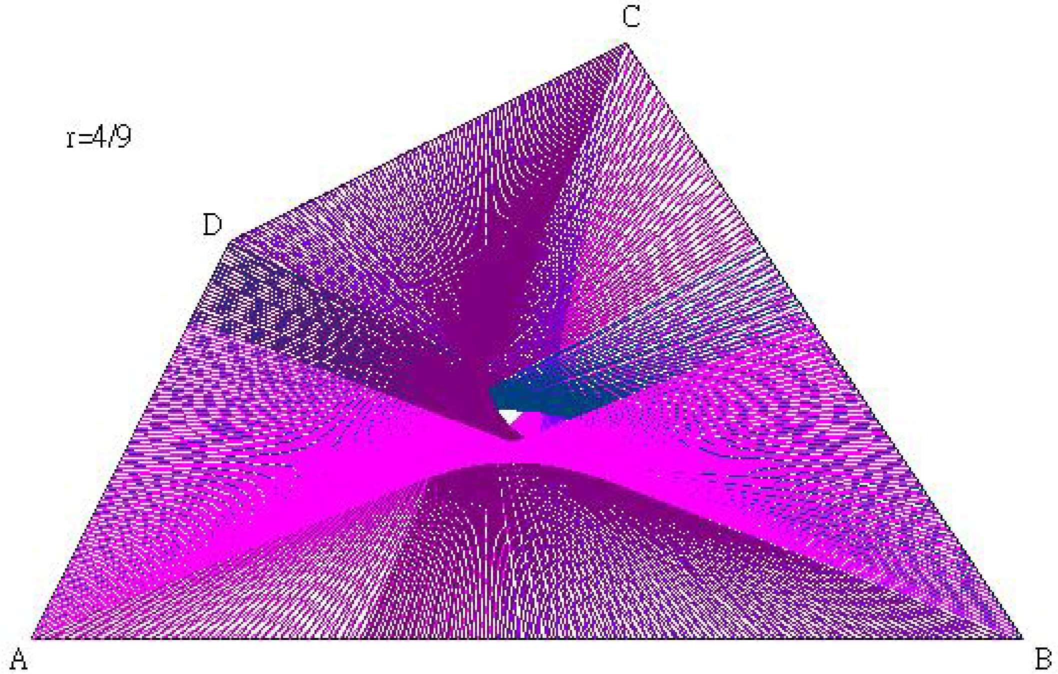
視 P 所在位置(II^+、II^-與四邊形內、外)

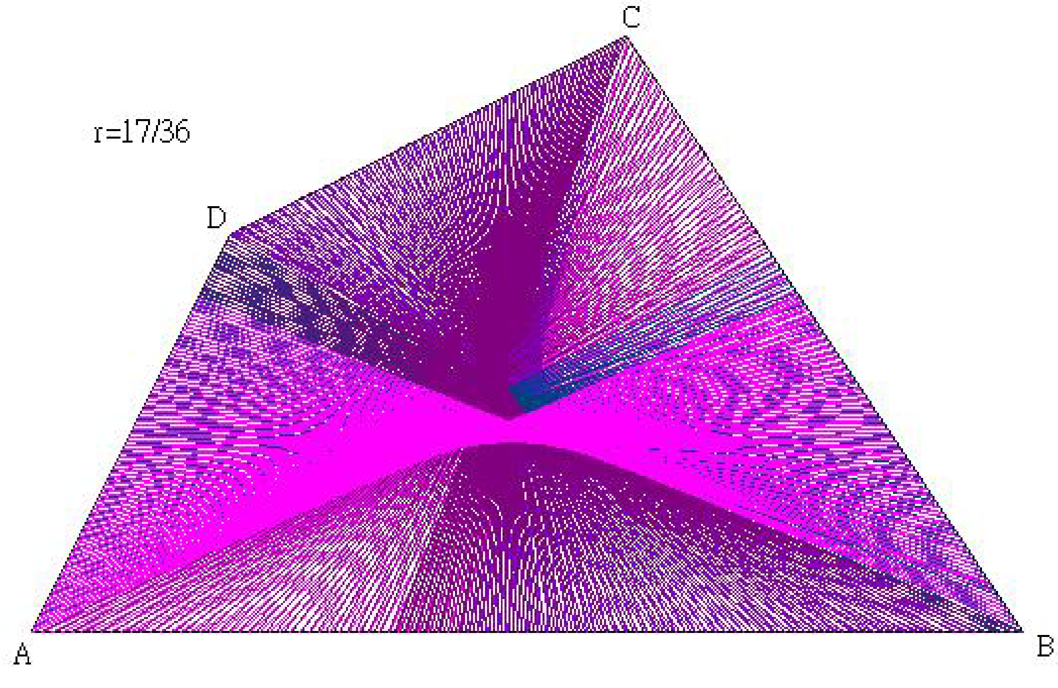
仿研究過程(二)2.，討論 m_1、m_2 的正負及作法得 m 長，最後作出面積分割線 L。

4. 當 $P \in$ V，情形與推廣(一)3.類似，同樣取 $r=\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{4}{9},\frac{17}{36}$ 三種情形，用電腦將分割線掃出









可知當 r 愈小，邊界曲線愈往旁邊移動，V 區的空洞愈大，代表四邊形中有愈多的部分不能作出分割線

(三)當 $n \geq 5$ 時，用同樣的方法先判斷 L 會交於多邊形的哪二邊，再仿研究過程(三)的方法，將 n 邊形轉換成相等面積的三角形或四邊形再處理之即可完成。

七、結論：

(一) 過多邊形內部、外部任一定點，均可用一定的方法作出面積平分線。
(二) 我們目前所研究的過定點面積平分線作法不只一種。
(三) 多邊形內部的某些區域，可以作出不只一條的面積平分線。
(四) 多邊形內部某些區域的點，無法作出面積為某些比例的分割線。
(五) 當面積分割線 (r :1- r) 的 r 越小，多邊形內部不能作此種分割線的點所覆蓋的面積由中心愈往旁邊擴大。

八、展望：

(一) 我們希望能再研究出其他過定點面積平分線的作法。
(二) 當 $\frac{4}{9} \le r \le \frac{1}{2}$ 時，面積分割線 (r :1- r) 可以佈滿整個三角形，那麼四邊形、五邊形等等多邊形，是否也可以找到最小 r 值的面積分割線佈滿整個多邊形？
(三) 過凹多邊形內、外一定點的面積平分線是否也有類似作法？

九、參考資料：

(一) 世部貞市郎，1986，幾何學辭典，九章出版社譯
(二) 楊維哲，1992，微積分(下)，三民書局
(三) 嚴鎮軍，1991，高中數學競賽教程，九章出版社
(四) 陳旻宏，三角形分割線形成的包絡線，三十屆科展
(五) 朱柏貞，圓錐曲線上包絡線之探討，三十二屆科展

附錄 A

以面積座標法求作過多邊形內或外一定點的面積平分線

由前斜座標的討論，知只需解決三角形與四邊形(平分線交兩對邊)的情形，即可解決多邊形的問題，所以我們以下只討論三角形與四邊形。

一、過三角形內或外一定點 P 作面積平分線 L

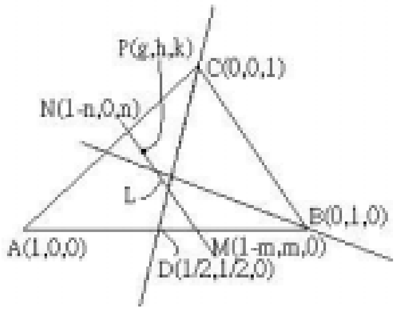
1.考慮 $P \in I^{+} \vee I^{-}$ 的情形

取△ABC 為座標三角形，建立面積座標系

設 P 在座標三角形的面積座標以 $< g, h, k >$

表示且直線 L 分別交 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 於

$M < 1-m, m, 0 >, N < 1-n, 0, n >$



$\overline{CD}$ 為△ABC 的中線

∵L 平分△ABC

$\therefore \overline{ND} // \overline{CM} \Rightarrow < \overrightarrow{ND} > = t < \overrightarrow{CM} >, (t \in R)$ ……引理(三)

$\Rightarrow < n-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -n > = t < 1-m, m, -1 >$

則 $t = n$，得 $mn = \frac{1}{2}$ ……①

又 $P, M, .N$ 三點共線

$\therefore \begin{vmatrix} g & h & k \\ 1-m & m & 0 \\ 1-n & 0 & n \end{vmatrix} = 0$ ……引理(四)

$\Rightarrow km + hn = mn$ ……②

解 ① ② 得 $2km^2 - m + h = 0$

$(m, n) = (\frac{1 \pm \sqrt{1-8hk}}{4k}, \frac{1 \mp \sqrt{1-8hk}}{4h})$

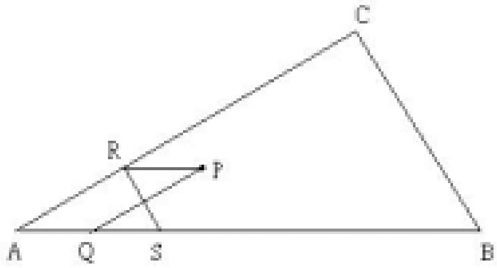
由上可知，此得出的公式與斜座標相同。

1.當 $P \in I^{+}$ 時，取 $(m, n) = (\frac{1+\sqrt{1-8hk}}{4k}, \frac{1-\sqrt{1-8hk}}{4h})$

2.當 $P \in I^{-}$ 時， 取 $(m, n) = (\frac{1-\sqrt{1-8hk}}{4k}, \frac{1+\sqrt{1-8hk}}{4h})$

2. 作圖：作出 m 長，取點 M 後，與點 P 相連即得面積平分線 L

(以下作圖定 $\overline{AB}$ 為單位長)



(1)作 $\overline{PQ} // \overline{AC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 Q，則 $\overline{AQ}$ 即 h 長。

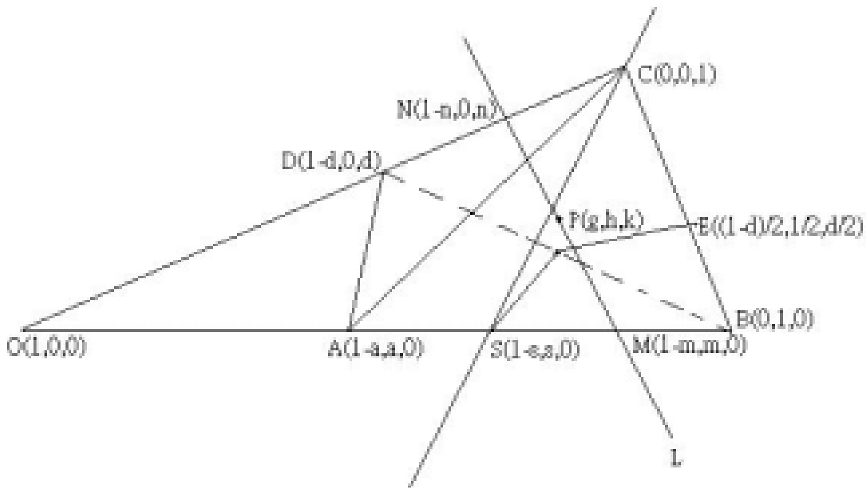
作 $\overline{PR} // \overline{AB}$ 交 $\overline{AC}$ 於 R，再作 $\overline{RS} // \overline{BC}$ 交 $\overline{AB}$ 於 S

則 $\overline{AS}$ 即 k 長。

(2)已知單位長及 h、k 長後，同前述斜座標之作法可求 m 長。

二、過四邊形 $ABCD$ 內或外一定點 P，作面積平分線 L(L 交兩對邊的情形)

若 $\overline{CD}$ 不平行 $\overline{AB}$，設 $\overleftrightarrow{AB},\overleftrightarrow{CD}$ 交於 O，取△OBC 為座標三角形，建立面積座標系



設過 C 之面積平分線交 $\overline{OB}$ 於 $S<1-s,s,0>$

而 E 為 $\overline{BD}$ 中點，則 $\overline{SE} // \overline{AC} \Rightarrow <\overrightarrow{SE}> = t<\overrightarrow{AC}>, t \in R$

$$\Rightarrow <\frac{1-d}{2}-1+s,\frac{1}{2}-s,\frac{d}{2}>=t<a-1,-a,1>$$

則 $t=\dfrac{d}{2}$，得 $s=\dfrac{ad+1}{2}$ …… ①

又 L 亦為四邊形 $ABCD$ 的面積平分線

$$\therefore \overline{SN}\,//\,\overline{MC} \Rightarrow <\overrightarrow{SN}>=u<\overrightarrow{MC}>,(u\in R)$$

$$\Rightarrow <s-n,-s,n>=u<m-1,-m,1>$$

則 $u=n$，得 $s=mn$ …… ②

又 P,M,N 三點共線

$$\therefore \begin{vmatrix} g & h & k \\ 1-m & m & 0 \\ 1-n & 0 & n \end{vmatrix}=0 \Rightarrow km+hn=mn \text{ …… ③}$$

由 ① ② ③ 可得 $2km^2-(1+ad)m+(1+ad)h=0$

$$m=\frac{t\pm\sqrt{t^2-8thk}}{4k} \quad , \quad n=\frac{t\mp\sqrt{t^2-8thk}}{4h} \quad (\text{其中 } t=1+ad)$$

作圖時同三角形之步驟，先定單位長及作出 h 與 k 的長，其餘同前述斜座標之作法。

三、引理

給定一三角形 ABC，以[ABC]表示它的有向面積，如果從 $A\rightarrow B\rightarrow C\rightarrow A$ 以反時針繞行，則定義[ABC]為正，順時針繞行則為負。P 為同一平面上任一點令 $u=\dfrac{[PBC]}{[ABC]},v=\dfrac{[APC]}{[ABC]},w=\dfrac{[ABP]}{[ABC]}$，則有序三元組 $<u,v,w>$ 稱為 P 對於三角形 ABC 的面積座標(易知 $u+v+w=1$)，而三角形 ABC 稱為座標三角形。

引理(一)：設 ΔABC 為座標三角形，若 $p<g,h,k>\Rightarrow g\overrightarrow{PA}+h\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

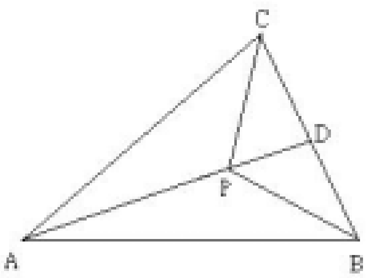
證明：延 $\overline{AP}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 D，則 $\overline{BD}$：$\overline{DC}=[PAB]$：$[PCA]=k$：h

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{h}{h+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{h+k}\overrightarrow{AC}$$

又 $\overline{AP}$：$\overline{AD}=[PCA]+[PAB]$：

$[ABC]=h+k$：1

$$\therefore \overrightarrow{AP}=(h+k)\overrightarrow{AD}=h\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$$



同理可得： $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BC}+g\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CP}=g\overrightarrow{CA}+h\overrightarrow{CB}$

$\therefore g\overrightarrow{PA}+h\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}$

$=-(g\overrightarrow{AP}+h\overrightarrow{BP}+k\overrightarrow{CP})$

$=-(gh\overrightarrow{AB}+gk\overrightarrow{AC}+hk\overrightarrow{BC}+hg\overrightarrow{BA}+kg\overrightarrow{CA}+kh\overrightarrow{CB})$

$=\vec{0}$

引理(二)：設 ΔABC 為座標三角形若 $p<g,h,k>\Leftrightarrow\begin{cases}x_p=gx_a+hx_b+kx_c\\ y_p=gy_a+hy_b+ky_c\end{cases}$

(x_p,y_p) 為 P 的直角座標

證明：先證($\Rightarrow$)

由引理(一)得 $g\overrightarrow{PA}+h\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Rightarrow g(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})+h(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$

$\Rightarrow (g+h+k)\overrightarrow{OP}=g\overrightarrow{OA}+h\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=g\overrightarrow{OA}+h\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$，(O 為直角座標系上的原點)

$\Rightarrow\begin{cases}x_P=gx_a+hx_b+kx_c\\ y_P=gy_a+hy_b+ky_c\end{cases}$

再證($\Leftarrow$)

由面積座標定義可知 P 的第一個面積座標為

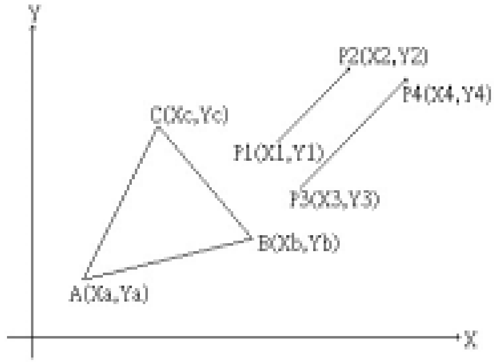
$$\frac{[PBC]}{[ABC]}=\frac{\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_p & y_p\\ 1 & x_b & y_b\\ 1 & x_c & y_c\end{vmatrix}}{\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_a & y_a\\ 1 & x_b & y_b\\ 1 & x_c & y_c\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}g+h+k & gx_a+hx_b+kx_c & gy_a+hy_b+ky_c\\ 1 & x_b & y_b\\ 1 & x_c & y_c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & x_a & y_a\\ 1 & x_b & y_b\\ 1 & x_c & y_c\end{vmatrix}}=g$$

同理 P 的第 2 個面積座標為 $\frac{[PCA]}{[ABC]}=h$，第 3 個面積座標為 $\frac{[PAB]}{[ABC]}=k$

引理(三)：設 P_i 的直角座標為 (x_i, y_i)，面積座標為 $< g_i, h_i, k_i >$， $i = 1,2,3,4$

若 $\overline{p_1p_2} \mathbin{/\!/} \overline{p_3p_4} \Rightarrow < \overrightarrow{p_1p_2} > = t < \overrightarrow{p_3p_4} >, t \in R$ ， 其中 $< \vec{\ } >$ 表示在面積座標下的向量

證明：$\because \overline{P_1P_2} \mathbin{/\!/} \overline{P_3P_4} \quad \therefore \overrightarrow{P_1P_2} = t\overrightarrow{P_3P_4} \quad (t \in R)$



$$\Rightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = t(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + t(x_4 - x_3) \\ y_2 = y_1 + t(y_4 - y_3) \end{cases}$$

由引理(二)

$$\begin{cases} x_2 = (g_1 + t(g_4 - g_3))x_a + (h_1 + t(h_4 - h_3))x_b + (k_1 + t(k_4 - k_3))x_c \\ y_2 = (g_1 + t(g_4 - g_3))y_a + (h_1 + t(h_4 - h_3))y_b + (k_1 + t(k_4 - k_3))y_c \end{cases}$$

又由引理(二)

$$\begin{cases} g_2 = g_1 + t(g_4 - g_3) \\ h_2 = h_1 + t(h_4 - h_3) \\ k_2 = k_1 + t(k_4 - k_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow < g_2 - g_1, h_2 - h_1, k_2 - k_1 > = t < g_4 - g_3, h_4 - h_3, k_4 - k_3 >$$

$$\Rightarrow < \overrightarrow{p_1p_2} > = t < \overrightarrow{p_3p_4} >$$

引理(四)：設 ABC 為座標三角形， P_1, P_2, P_3 是同一平面上的三點

$$P_i(g_i, h_i, k_i), i = 1,2,3 \Rightarrow [P_1P_2P_3] = \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & k_1 \\ g_2 & h_2 & k_2 \\ g_3 & h_3 & k_3 \end{vmatrix} [ABC]$$

證明：設 P_i 的直角座標為 $(x_i, y_i), i = 1,2,3$

則 $[P_1P_2P_3] = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots$ ①

由引理(二)可得

$$\begin{cases} x_i = g_i x_a + h_i x_b + k_i x_c \\ y_i = g_i y_a + h_i y_b + k_i y_c \end{cases}$$

與 $g_i + h_i + k_i = 1, i = 1,2,3$ 同時代入① 式

得 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} g_1 + h_1 + k_1 & g_1 x_a + h_1 x_b + k_1 x_c & g_1 y_a + h_1 y_b + k_1 y_c \\ g_2 + h_2 + k_2 & g_2 x_a + h_2 x_b + k_2 x_c & g_2 y_a + h_2 y_b + k_2 y_c \\ g_3 + h_3 + k_3 & g_3 x_a + h_3 x_b + k_3 x_c & g_3 y_a + h_3 y_b + k_3 y_c \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} g_1 & h_1 & k_1 \\ g_2 & h_2 & k_2 \\ g_3 & h_3 & k_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & k_1 \\ g_2 & h_2 & k_2 \\ g_3 & h_3 & k_3 \end{vmatrix}[ABC]$$

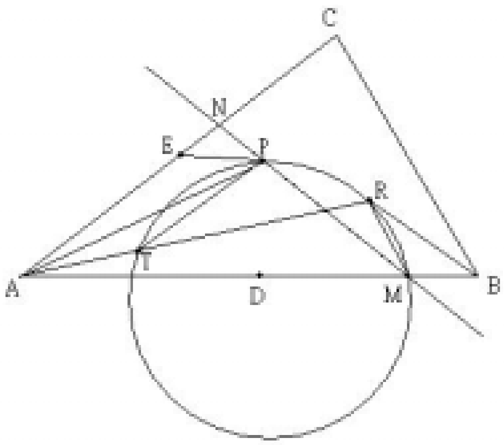
附錄 B

以綜合幾何法求作過多邊形內或外一定點的面積平分線

由前斜座標的討論，知只需解決三角形與四邊形(平分線交兩對邊)的情形，即可解決多邊形的問題，所以我們以下只討論三角形與四邊形。

一、過三角形內或外一定點 P 作面積平分線

(一)點 P 在 ΔABC 內部



作法：

1. 取 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 中點得 $D.E$

2. 在 ΔABC 內作 $\Delta ARB \quad \Delta AEP$

3. 過 P 作 $\overline{AE}$ 的平行線交 $\overline{AR}$ 於 T 點

4. 作 P,R,T 之外接圓，交 $\overline{BD}$ 於 M，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 即為所求。

証明：

設 $\overleftrightarrow{PM}$ 交 $\overline{AC}$ 於 N

$\Theta\ \Delta ARB \quad \Delta AEP \therefore \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AR} \times \overline{AP} \cdots\cdots ①$

$\Theta\ M, R, P, T$ 四點共圓 $\therefore \angle TPM = \angle ARM$

又 $\overline{AE} // \overline{TP} \therefore \angle ANP = \angle TPM = \angle ARM$

而 $\angle EAP = \angle RAB$

$\therefore \Delta ANP \quad \Delta ARM \Rightarrow \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AM}} \Rightarrow \overline{AR} \times \overline{AP} = \overline{AM} \times \overline{AN} \cdots\cdots$ ②

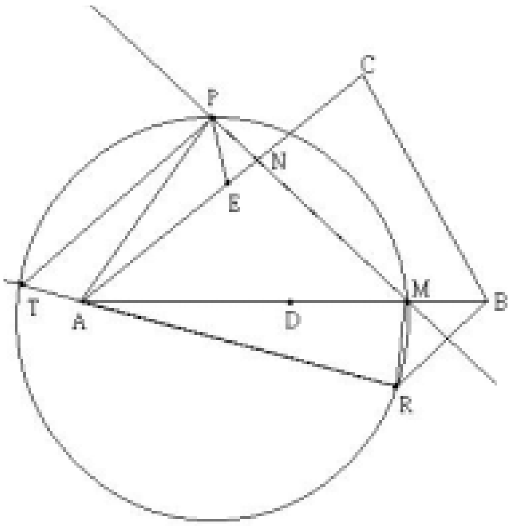
由 ① ② 可得 $\overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AM} \times \overline{AN}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} \overline{AB} \times \overline{AC} \sin \angle BAC = \dfrac{1}{2} \overline{AM} \times \overline{AN} \sin \angle BAC$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \Delta ABC = \Delta AMN$

故 $\overleftrightarrow{PM}$ 為 ΔABC 的面積平分線

(二)點 P 在 ΔABC 外部



作法：

1. 取 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 中點得 $D.E$

2. 在 ΔABC 外作 $\Delta ARB \quad \Delta AEP$

3. 過 P 作 $\overline{AE}$ 的平行線交 $\overrightarrow{RA}$ 於 T 點

4. 作 P, R, T 之外接圓，交 $\overline{BD}$ 於 M，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 即為所求。

証明：

設 $\overleftrightarrow{PM}$ 交 $\overline{AC}$ 於 N

$\Theta\ \Delta ARB \quad \Delta AEP \therefore \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AR} \times \overline{AP} \cdots\cdots$ ①

$\Theta\ M, R, P, T$ 四點共圓 $\therefore \angle TPN + \angle ARM = 180^o$

又 $\overline{TP} // \overline{AE}$ $\therefore \angle TPN + \angle ANP = 180^o \Rightarrow \angle ANP = \angle ARM$

而 $\angle EAP = \angle RAB$

$\therefore \Delta ANP \quad \Delta ARM \Rightarrow \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AM}} \Rightarrow \overline{AR} \times \overline{AP} = \overline{AM} \times \overline{AN} \cdots\cdots ②$

由 ①② 可得 $\overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{AM} \times \overline{AN}$

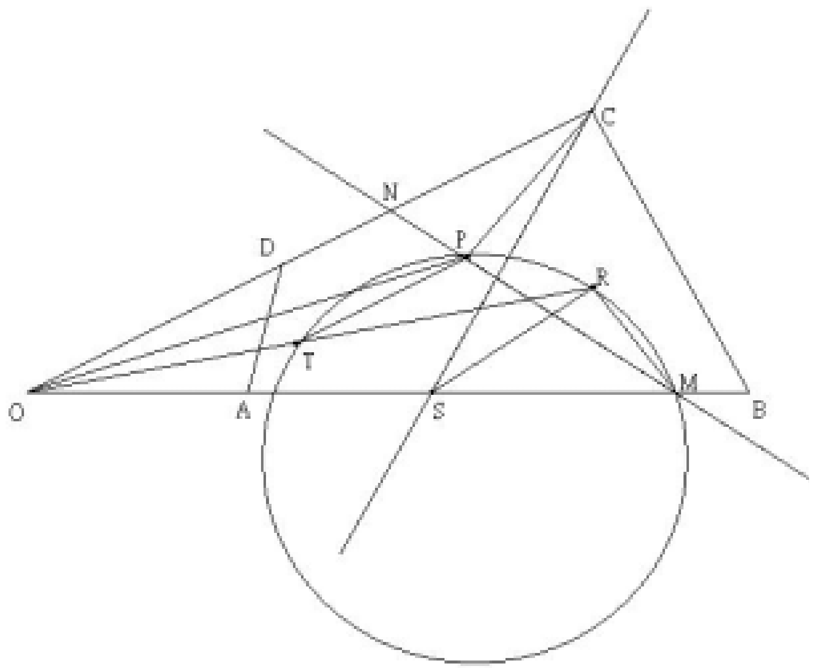
$\Rightarrow \dfrac{1}{4}\overline{AB} \times \overline{AC} \sin\angle BAC = \dfrac{1}{2}\overline{AM} \times \overline{AN} \sin\angle BAC$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\Delta ABC = \Delta AMN$

故 $\overleftrightarrow{PM}$ 為 ΔABC 的面積平分線

二、已知一四邊形 $ABCD$ 及一定點 P，求作面積平分線

(一)點在四邊形 ABCD 內($\overline{CD}$ 不平行 $\overline{AB}$)



作法：

1. 作 $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ 相交於 O

2. 過 C 作四邊形 $ABCD$ 的面積平分線交 $\overline{AB}$ 於 S

3. 作 $\Delta ORS \quad \Delta OCP$

過 P 作 $\overline{OC}$ 之平行線交 $\overline{OR}$ 於 T

4. 作 P，R，T 之外接圓交 $\overrightarrow{AB}$ 於 M 點，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 即為所求。

證明：

設 $\overleftrightarrow{PM}$ 交 $\overline{OC}$ 於 N

$$\Theta\ \Delta OCP \quad \Delta ORS \therefore \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} \Rightarrow \overline{OC} \times \overline{OS} = \overline{OR} \times \overline{OP} \quad \cdots\cdots ①$$

由已知 $\overline{ON} // \overline{TP} \Rightarrow \angle ONP = \angle TPM$

又 T，P，R，M 四點共圓，

$\therefore \angle TRM = \angle TPM = \angle ONP$

而 $\angle NOP = \angle ROM$

$$\therefore \Delta NOP \quad \Delta ROM \Rightarrow \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OM}} \Rightarrow \overline{OR} \times \overline{OP} = \overline{OM} \times \overline{ON} \cdots \cdots ②$$

由 ① ② 得 $\overline{OC} \times \overline{OS} = \overline{OM} \times \overline{ON}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{OS} \times \sin\angle BOC = \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{ON} \sin\angle BOC$$

$$\Rightarrow \Delta OCS = \Delta OMN$$

$$\Rightarrow \Delta OCS - \Delta ODA = \Delta OMN - \Delta ODA$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} ABCD$ 面積= $AMND$ 面積

故 $\overleftrightarrow{PM}$ 為 $ABCD$ 的面積平分線

(二)當點在形外，作法類似，故省略。