中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：多面體的缺角和

關 鍵 詞：缺 角、變 形、嘍空多面體

編　　號：040411

學校名稱：

嘉義市私立興華高級中學

作者姓名：

吳東興

指導老師：

林弘斌

多面體的缺角和

一、 緣起

某日數學課時，老師提到了一些有關多面體之公式，如歐拉定理等，另外亦提出一些有關多面體的角度問題，例如多面體之面角和，因而引起大家的注意，也開啟此次作品的開端。

二、 主題

討論多面體之各頂點缺角和與各種不同多面體之關係

三、 探討：多面體之各頂點缺角和

（一）凸多面體之缺角和

1、定義〝缺角〞：

在一多面體中以 P 點為頂點之各面角為$\angle 1$，$\angle 2$，…，$\angle n$，則此頂點 P 之缺角定義為

頂點 P 之缺角= $360°-(\angle 1+\angle 2+\ldots+\angle n)$

例如：由圖 1-1（正四面體）而言，其頂點 A 由三個不同之面 ABC、ACD、ABD 相交組合而成，而就頂點 A 而言

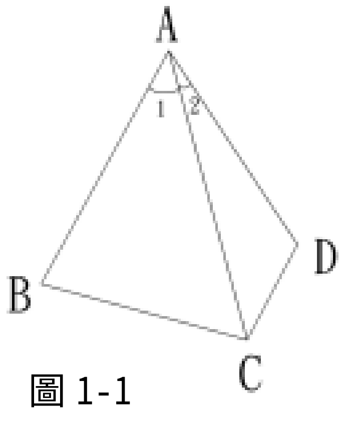


圖 1-1

A 點之缺角

$360°-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$

$= 360°- 3*60°$

$= 180°$

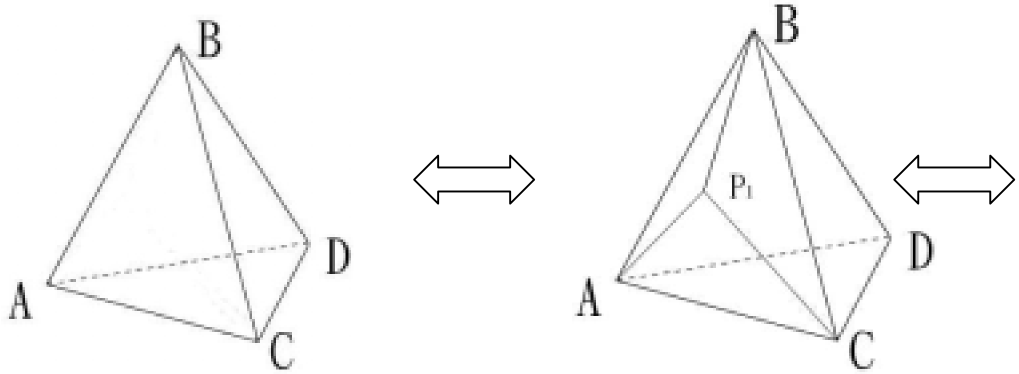
2、一些例子--正多面體之各頂點缺角和

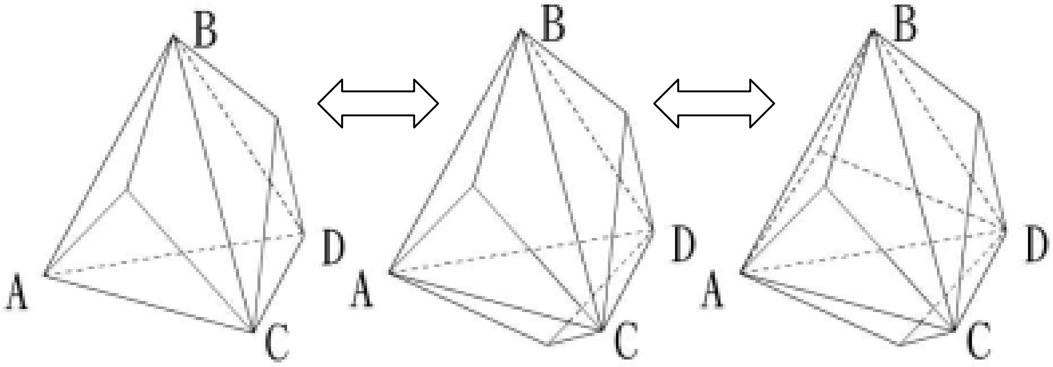
我們由已知的多面體公式可知，正多面體共有五種，分別為正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體，而我們發現他們的缺角總和為 720°，整理如下表：

	正四面體	正六面體	正八面體	正十二面體	正二十面體
每一頂點缺角	180°	90°	120°	36°	60°
頂點數	4	8	6	20	12
缺角總和	720°	720°	720°	720°	720°

3、非正之凸多面體之缺角和

（1） 我們設想以圖 1-1 之正四面體，接著將ΔABC 之面內任一點 P 作三線段分別至點 A、B、C，之後將 P 點牽引至 ABC 平面外任一點 P_1，則在此ΔABC 之面上又形成一角錐 P_1-ABC，再將原正四面體之ΔACD、ΔABD、ΔBCD 作以上步驟，則此正四面體變形成了一不規則的十二面體，反之如 P_1 等點可壓回，此十二面體亦可變回四面體。





＜引理 a ＞變形下之不變量，有以下甲、乙、丙之變形方式

在（1）中如此變形所形成新多面體之各頂點缺角和依然維持不變，一般多面體情形也成立，證明如下：

＜pf＞

假定有一多面體之某一面如圖 1-2

而單就此面之多邊形之總角度和

$Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_n = 360°$

$(Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_n) + (X_1+X_{2n})$

$+ (X_2+X_3) + (X_4+X_5) + \ldots$

$+ (X_{2n-2}+X_{2n-1})$ ······ ❶

其中 $X_1+X_2+Z_1 = 180°$

$X_3+X_4+Z_2 = 180°$

：

$X_{2n-1}+X_{2n}+Z_n = 180°$

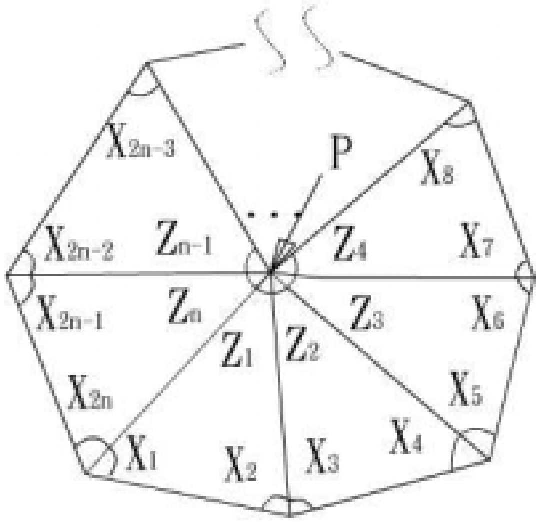


圖 1-2

甲、形成新多面體後角度變化後其總和依然不變（P 點向外延伸後至 P_1）

$(z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n)$ ＋

(x_1+x_{2n}) ＋ (x_2+x_3) ＋

$(x_4+x_5)+\ldots+$ $(x_{2n-2}+x_{2n-1})$

$\cdots\cdots$ ❷

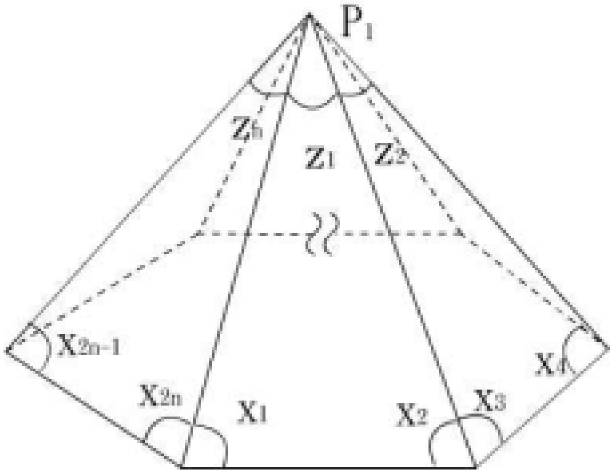


圖 1-3

又 ∵ $x_1+x_2+z_1=180°$

$x_3+x_4+z_2=180°$

$\vdots$

$x_{2n-1}+x_{2n}+z_n=180°$

=> ❶ ❷ 式相等，又因為原 P 點面角和為 360°故不影響各頂點缺角和，得證

乙、又 P 點向內縮回至 P_2 後角度變化後其總和依然不變

$(k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n)$ ＋ (y_1+y_{2n})

＋ (y_2+y_3) ＋ $(y_4+y_5)+\ldots$

＋ $(y_{2n-2}+y_{2n-1})$ $\cdots\cdots$ ❸

又 ∵ $y_1+y_2+k_1=180°$

$y_3+y_4+k_2=180°$

$\vdots$

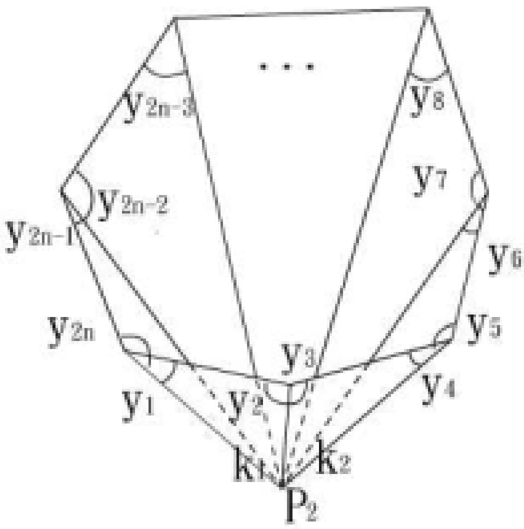


圖 1-4

$y_{2n-1}+y_{2n}+k_n=180°$

=> ❶ ❸ 式相等，得證

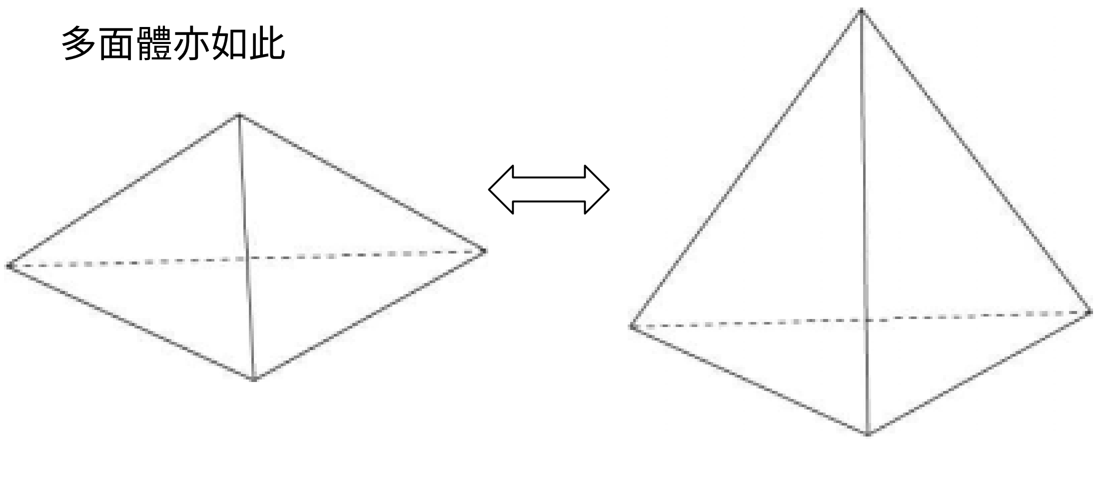
在甲、乙、中若 P_1、P_2 碰到原多面體之面、頂點或稜線甚至穿越，則缺角和依然不變（須在不可構成鏤空多面體之前提下，鏤空多面體在下文中會另作討論）：

若 P_1、P_2 接觸到其他面、稜線則因為不影響其面角和與頂點數，故缺角和不變，若 P_1、P_2 接觸到頂點，則我們因為可從兩個方向看到此點，故我們應從兩個方向來分別計算缺角，各頂點缺角和依然不變。

若 P_1、P_2 穿越原多面體，則其可視作另一面如同（1）步驟之變形，故依然不影響其各頂點缺角和。

丙、在變形過程中，稜線可任意伸縮而不影響各頂點之缺角和：

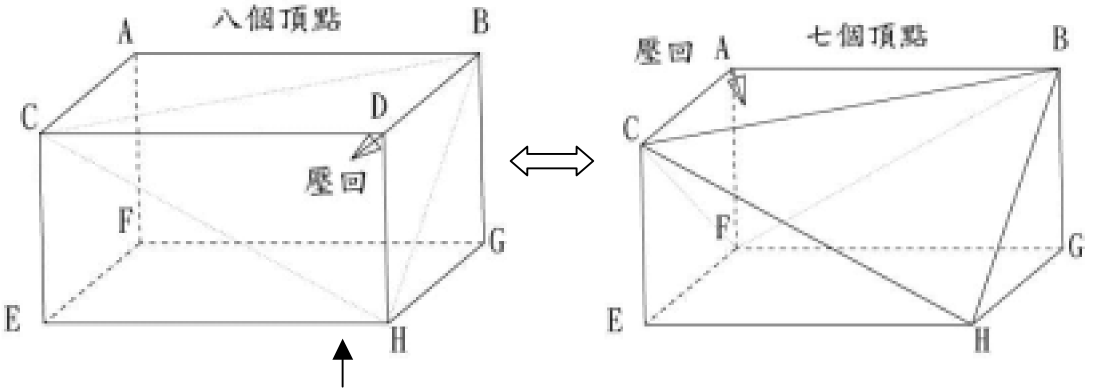
因為稜線伸縮並不會影響各面面角總和，故不影響各頂點之缺角和。如下圖所示此四面體之缺角總和依然為 4*180°，其他多面體亦如此



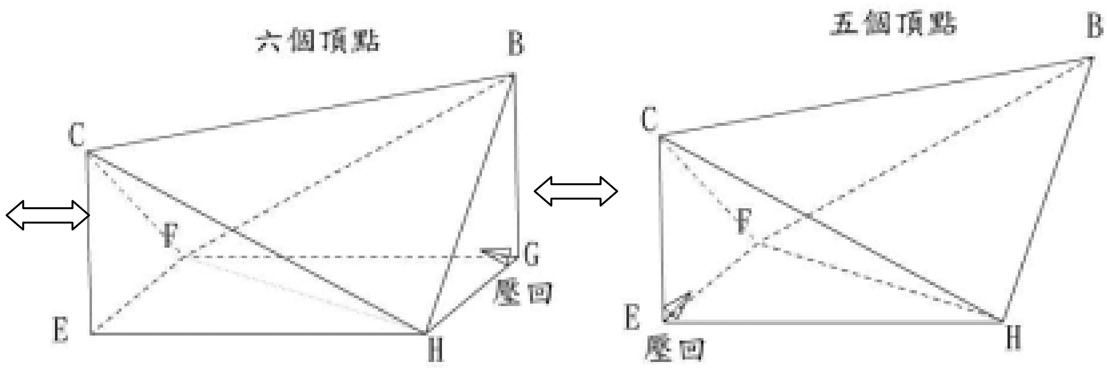
定理（一）

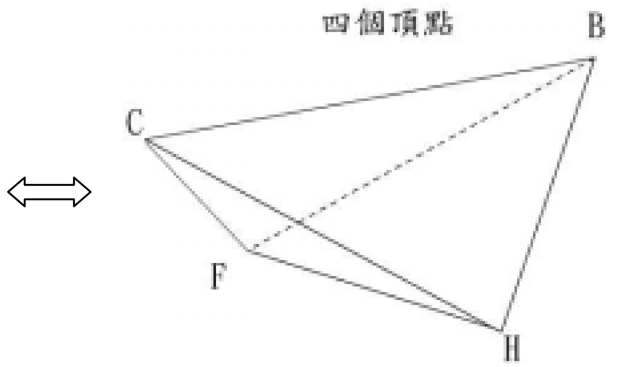
由以上變形原理可知，我們可以運用引理 a 之特性，先將一凸多面體之某一頂點有稜線連接相鄰之各頂點根據引理 a 之丙變形，使相鄰各頂點處於某同一平面上，再將某頂點壓回其相鄰頂點所形成之平面上（減少一個頂點），如此我們可在有限步驟內將一凸多面體之頂點數遞減至四個頂點（因由引理 a 可知變形過程之步驟缺角和不變）=>即是形成一四面體，又因為四面體之各頂點缺角和為 720°=>原多面體之各頂點缺角和 720°，反之一四面體亦可變形成為一凸多面體。

以下為六面體變形為四面體之情形



D 點壓回 BCH 構成之平面上　　其他亦如圖所示





（二）凹多面體之各頂點缺角和

1、定義：廣義缺角

在凸多面體中其缺角皆為大於 0°之數，而在凹多面體中我們發現，某些凹多面體之頂點的缺角小於 0°（圖 2-1 中之 E_1點及圖 2-2 中之 E 點），故我們在定義廣義缺角的範圍，將多面體之缺角視作一可正亦可負，亦可為零之值。

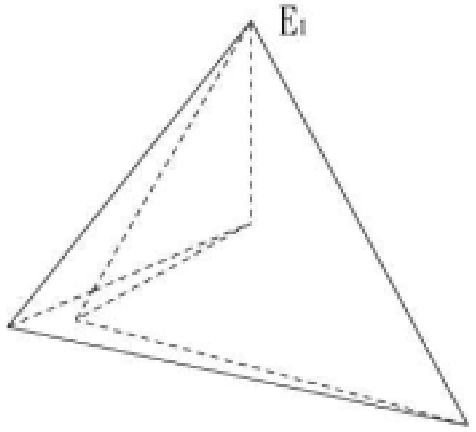


圖 2-1

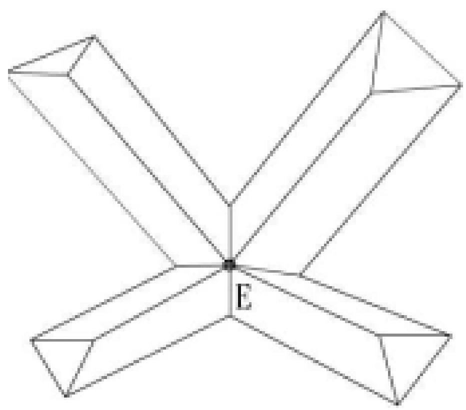


圖 2-2

2、探討：凹多面體之各頂點缺角和

在凸多面體中，我們運用了引理 a 證明了凸多面體的缺角和為 720°，而我們試想如果在引理 a 中的 P 點不是往外延伸，而是往內縮回形成凹多面體，由引理 a 之乙可知，其缺角和依然不變。

定理（二）

根據定理（一），我們只須將一凹多面體亦運用引理 a，將其變形回成為一凸多面體，再經定理（一）之步驟，亦可將一凹多面體變形成為一四面體，反之一四面體亦可變為一凹多面體而（由引理 a 可知變形過程之步驟缺角和不變）=> 凹多面體之各頂點缺角和為 720°。

（三）鏤空多面體之缺角和

在上述中的多面體皆為空間中的簡單多面體（即是之前所提到之凸多面體及凹多面體），但我們發現，在空間中另有不同於上述之多面體，如圖 3-1。

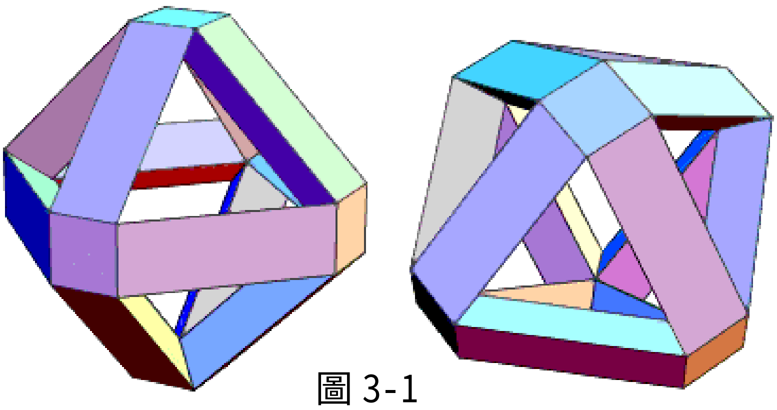


圖 3-1

而如上圖之多面體我們便稱為鏤空多面體

1、單一鏤空多面體

（1） 定義

在一多面體上我們任意選定某二個不同區域鑿空後，使其二塊區域互通形成一個多面體的空洞，反之，即我們可以嵌入一多

面體在此鏤空的部分，這種情形我們記為 m=1（m 表示可嵌入之多面體數）如圖 3-2，而 m=2 的情形如圖 3-3。

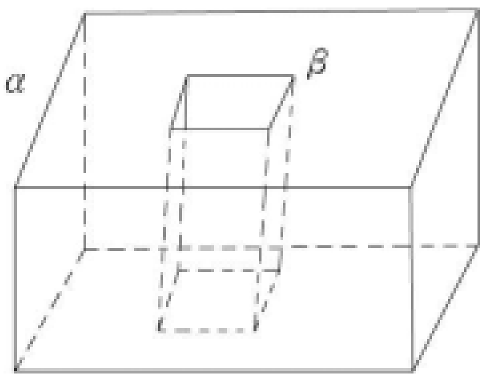


圖 3-2

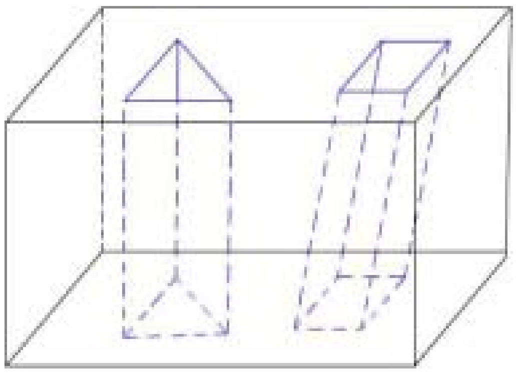
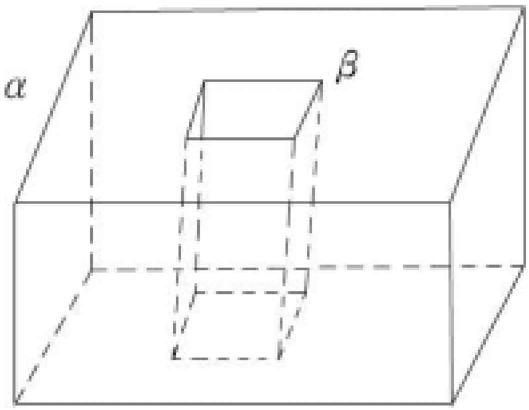
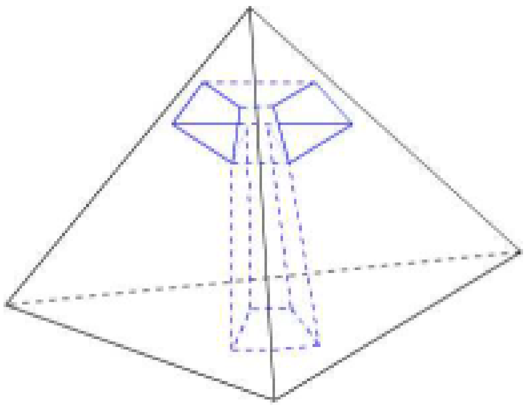


圖 3-3

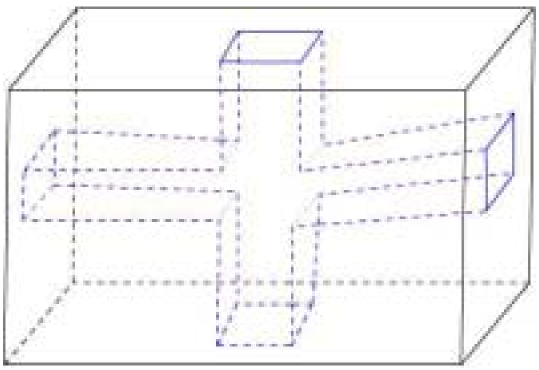
而 m=1 的情形，又可區分以下的形狀（依挖掉之面數 n 分）



n=2



n=3



……

n=4

……

因此我們定義：單一鏤空多面體，其 $m \in N$（自然數） $n=2m$

（2）缺角和

就單一鏤空多面體而言，我們可將其視作一多面體α中再嵌入另一不同之多面體β，再將多面體β其中的二面挖掉(如圖 3-2)，同理我們可以再嵌入多面體γ、δ、ε…等，但任二個嵌入之多面體並不相通。

而其缺角和：

原多面體α之缺角和為 720° 而多面體β之原缺角和為 720° 多面體γ之原缺角和為 720° 多面體δ之原缺角和為 720°…

（嵌入之多面體共有 m 個）

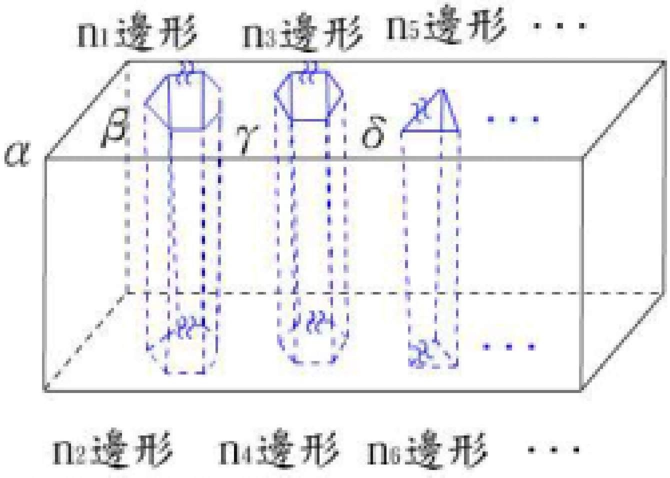


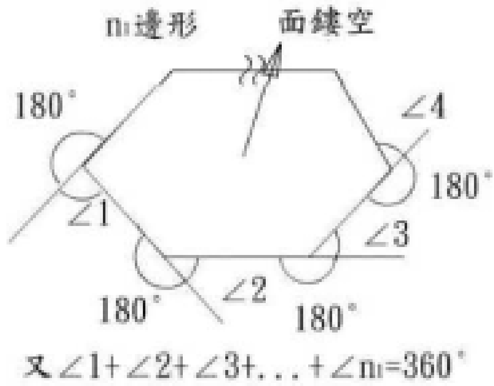
圖 3-4

令β挖掉之二面分別為 n_1邊形、n_2邊形 ； 令γ挖掉之二面分別為 n_3邊形、n_4邊形 ； 令δ挖掉之二面分別為 n_5邊形、n_6邊形 …

而挖掉 n_1 邊形後，新形成之面角和為 $180°*n_1+360°$ —>

而挖掉 n_2 邊形後，新形成之面角和為 $180°*n_2+360°$...

故其缺角和為



$$720°+m*720°+\overbrace{(n_1-2)*180°+(n_2-2)*180°+(n_3-2)*180°+\ldots}^{\text{挖掉之面角和}}$$

$$-\underbrace{(180°*n_1+360°+180°*n_2+360°+180°*n_3+360°+\ldots)}_{\text{新形成之面角和}}$$

$$=720°+m*720°-n*720°=720°*(1+m-n)$$

（3）延伸

在（2）中之證明是建立在挖掉之平面和其相連外圍之面為同一平面的情形下，但若是如圖 3-5 的情形，上述證明是否成立呢？

運用引理 a 之特性，我們可以將圖 3-2 任意變形成為其它 m=1 n=2 之圖形如圖 3-5 而其缺角和亦不會變，同理遞推 m=2 n=4、m=3 n=6...等的多面體對上

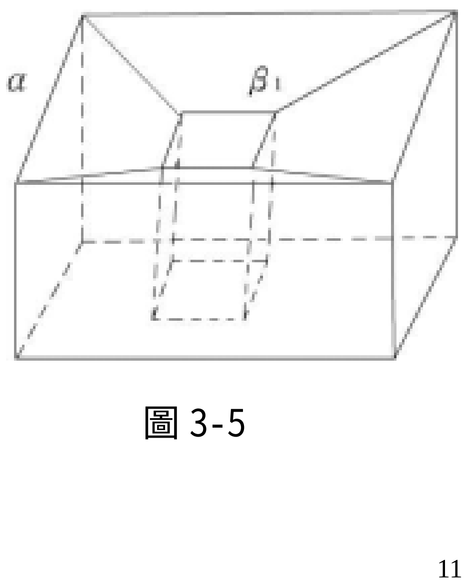


圖 3-5

述公式 720*（1+ m - n）皆可成立。

2、非單一之鏤空多面體

（1） 定義

引用先前單一鏤空多面體的定義，我們定義非單一之鏤空多面體： $m\in N \quad n>2m$

（2） 缺角和

先前多面體 β， γ， δ， ε ...等其鏤空的洞挖掉的面各只有二個面，但在非單一之鏤空多面體中，嵌入之多面體至少有一個以上其挖掉之面至少在三個面以上，如圖 3-6。

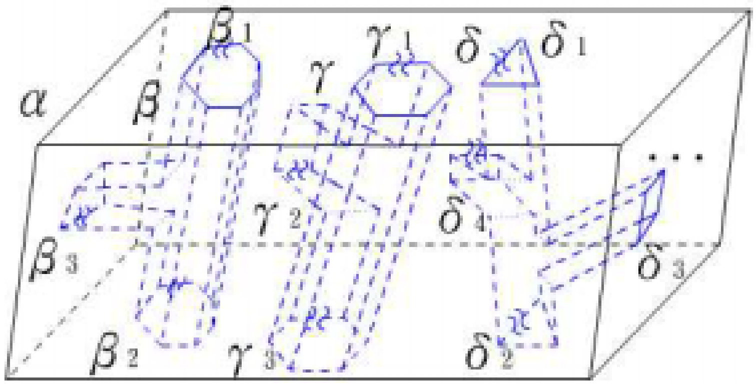


圖 3-6

原多面體 α 之缺角和為 720° 而多面體 β 之原缺角和為 720°

多面體 γ 之原缺角和為 720° 多面體 δ 之原缺角和為 720°...

（嵌入之多面體共有 m_1 個）

令 β 挖掉之面分別為 β_1 邊形、 β_2 邊形、 β_3 邊形...

令 γ 挖掉之面分別為 γ_1 邊形、 γ_2 邊形、 γ_3 邊形...

令 δ 挖掉之面分別為 δ_1 邊形、 δ_2 邊形、 δ_3 邊形...

令……（共有 n_1 個）

而挖掉 β_1 邊形後，新形成之面角和為 $180°*\beta_1+360°$

而挖掉 β_2 邊形後，新形成之面角和為 $180°*\beta_2+360°$……類推

故其缺角和為：

$720°+m_1*720°+(\beta_1-2)*180°+(\beta_2-2)*180°+(\beta_3-2)$

$*180°+\ldots+(\gamma_1-2)*180°+(\gamma_2-2)*180°+\ldots+(\delta_1-2)*180°$

$+(\delta_2-2)*180°+\ldots\ldots-(180°*\beta_1+360°+180°*\beta_2+360°+\ldots$

$+180°*\gamma_1+360°+180°*\gamma_2+360°+\ldots+180°*\delta_1+360°+180°$

$*\delta_2+360°+\ldots\ldots)$

$=720°+m_1*720°-n_1*720°$

$=720°*(1+m_1-n_1)$

（四）缺角和與尤拉特徵數（Euler characteristic number）之關係

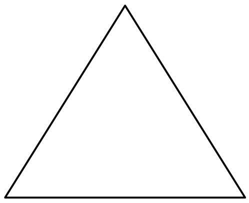
我們由觀察非鏤空多面體可發現其缺角和為 $720°=2*360°$，其中 2 為非鏤空多面體之尤拉特徵數，是否尤拉特徵數和多面體之缺角和有關係呢？以下為探討

1、非鏤空多面體

我們以三角化之概念可將一多面體視作每一面皆為三邊形，而由尤拉公式可知尤拉特徵數依然不變

設 V = 頂點數　F = 面數　E = 稜線數

就此多面體其中一面而言



=> 每一個面由三條稜線所組成

又每一稜線皆連接兩個面

故 $E = 3F/2$

又 $V + F - E = 2 \Rightarrow V + F - 3F/2 = 2 \Rightarrow V = 2 + F/2$

故其缺角和為 360°乘上頂點數減掉面角和

$$\Rightarrow 360° * V - 180° * F$$

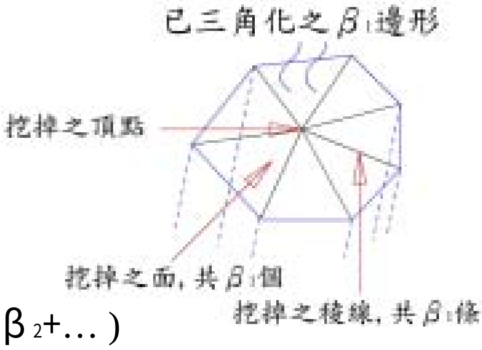
$$= 360° * (2 + F/2) - 180° * F$$

$$= 360° * 2$$

= 尤拉特徵數 $* 360°$

2、鏤空多面體之尤拉特徵數和先前 m、n 的關係

如同上式一鏤空多面體可視作有 m 個多面體挖掉 n 個面, 而鑲嵌在一多面體中，我們運用前面三角化及推導缺角和之概念對外面之多面體而言（如圖 3-6 的多面體 α）



$V_\alpha + F_\alpha - E_\alpha = 2$

(未挖掉 β_1 邊形、β_2 邊形…之前)

而挖掉 β_1 邊形、β_2 邊形…後

頂點數減少 n => $V_a - n$

面數減少$(\beta_1+\beta_2+\dots) \Rightarrow F_a - (\beta_1+\beta_2+\dots)$

稜線數減少$(\beta_1+\beta_2+\dots) \Rightarrow E_a - (\beta_1+\beta_2+\dots)$

$\Rightarrow V_\alpha - n + F_\alpha - (\beta_1+\beta_2+\dots) - [E_\alpha - (\beta_1+\beta_2+\dots)] = 2 - n$

而對內部之多面體 β，γ，δ，ε…（共有 m 個）

假設 $\beta_0, \gamma_0, \delta_0$…表示多面體 β，γ，δ…等各別挖掉之面數

$V_\beta - \beta_0 - (\beta_1+\beta_2+\dots) + F_\beta - (\beta_1+\beta_2+\dots) - [E_\beta - 2(\beta_1+\beta_2+\dots)] = 2 - \beta_0$

$V_\gamma - \gamma_0 - (\gamma_1+\gamma_2+\dots) + F_\gamma - (\gamma_1+\gamma_2+\dots) - [E_\gamma - 2(\gamma_1+\gamma_2$

$+\ldots))] = 2-\gamma_0$

⋮

$(\beta_0+\gamma_0+\delta_0+\ldots= n)$

故鏤空多面體之尤拉數為 $V+F-E=2+2m-2n$ 必為偶數

=> 鏤空多面體之缺角和 720°*（1+m-n）= 尤拉特徵數*360°

四、 結論

1、 變形之下的不變量：前述之各類多面體在變形後各頂點缺角和相同

2、 由以上推導得之，凸多面體及凹多面體之缺角和為 720°

3、 鏤空多面體之缺角和公式 720°*（1+ m- n），即是尤拉特徵數*360°

4、 由以上推導得知，上述各類多面體之尤拉特徵數= 2（1+m-n）皆為偶數

五、 展望

1、 未來我們期待在學習到更多之數學工具後，可以將由平面構成的多面體延伸至曲面，並探討其特性。

六、 參考資料

1、 作者：R.Courant & H.Robbins

書名：What Is Mathematics

出版社：Oxford University Press

出版年：1941 年

2、 作者：郭繼新,尚強

書名：立體幾何辭典

出版社：北京科學技術出版社

出版年：1997 年