中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：如何有效餵食流浪狗－機率、期望值的應用

關 鍵 詞：機 率、期望值、馬可夫鍊

編　　號：040410

學校名稱：

國立臺東高級中學

作者姓名：

賴祐仁、潘鎮宇、鍾其軒

指導老師：

趙仁虹

如何有效餵食流浪狗—機率、期望值的應用

壹、 摘要

本作品首先探討流浪狗於正m邊形中，設定一些假設條件後，以尋找已知數值之間相關性的方式，看能否找出ｎ天後其移動的機率通式，並且證明，然後套入台東市區分割圖中，則當狗符合假設之條件時，便可輕易求出ｎ天後某點的狗數期望值或某狗的移動到某點的機率，還有尋找不同方法（如高三上第四章矩陣）套用以化簡計算，最後推廣至很多狗很多天及複雜地圖的情形，並嘗試實際測試結果是否相符。

貳、 研究動機

在 78 年日大數學考題中，有一個問題：

有一人流浪 A、B、C、D 四鎮之間，此四鎮關係為一正方形，假設每日清晨，此人決定該日夜晚留宿該鎮，或改而前往相鄰任一鎮之機率皆為 1/3。若此人第一夜宿 A 鎮，則第三夜亦宿於 A 之機率為何？而第五夜此人宿於 A 鎮之機率為何？宿於 B 鎮機率為何？

我們很大的興趣，看完這問題後，我們突發奇想，報紙報導台東有很多流浪狗，為了解決流浪狗問題，我們打算找出某些流浪狗出現機率最高的地點加以餵食。根據此想法，我們將台東市區街道圖簡化，利用馬可夫推移矩陣來解開流浪狗最常出現的地方。

參、 研究目的

一、 找出一隻狗在 m 邊形的行走機率通式。

二、 找出 x 隻狗在 m 邊形中各相遇地方的機率與各地狗數期望值。

三、 台東市區街道圖中，狗可能出現的期望值、機率。

肆、 研究設備與器材

電腦 Microsoft Word 軟體

伍、 研究過程或方法

第一章　一隻流浪狗於正 m 邊形中移動的機率通式

假設一：狗狗必停留於頂點上，不停留於邊上。

假設二：狗狗所有移動可能的機率相等（移動到相鄰兩點及不動皆為$\frac{1}{3}$）。

假設三：狗狗一天最多移動一次（一段路）。

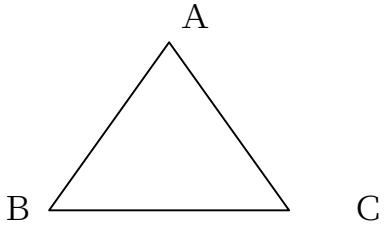
假設四：一開始只有一隻位於 A 點的狗。

定義：A_n為 n 天後狗狗移動到 A 點的機率（以此類推）。

第一節 少邊數正 m 邊形機率推導

1.　正三角形：

圖 1



如圖 1

n 天後移動到任一點的機率皆為 $\frac{1}{3}$

即 $A_n = B_n = C_n = \frac{1}{3}$

證：$n=1$時　$A_1 = \frac{1}{3}$　成立

令$n=x$時成立

則 $A_x = \frac{1}{3}$　$B_x = \frac{1}{3}$　$C_x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow n=x+1$時　　$A_{x+1} = \frac{A_x + B_x + C_x}{3} = \frac{1}{3}$　成立

同理　$B_n = \frac{1}{3}$　$C_n = \frac{1}{3}$　故得證

2. 正四邊形：

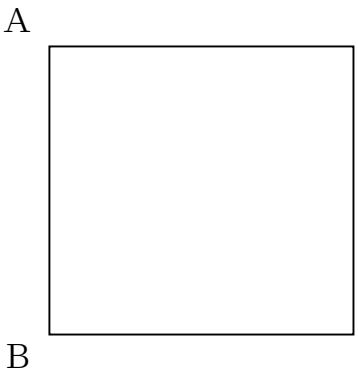


圖 2

表 1

	A	B	C	D
1 天後	1	1	0	1
2 天後	3	2	2	2
3 天後	7	7	6	7
4 天後	21	20	20	20
5 天後	61	61	60	61
6 天後	183	182	182	182
7 天後	547	547	546	547

(因為篇幅的關係, 我們只列出 7 天後的機率)

表 1 為機率的分子部份，分母部份為 3^n，由於 A 點分子方面是由相鄰兩點 B、C 及起始點 A 之前一項（前一天）相加而來，所以我們便往 3^n 思考，於是我們就先找找分子與 3^n 的差值（如下表）

	1 天後	2 天後	3 天後	4 天後	5 天後	6 天後	7 天後
3^n	1	3	9	27	81	243	729
A 的分子 K_n	1	3	7	21	61	183	547
差值	0	0	2	6	20	60	182

不難發現差值的奇數項為前項×3+2，偶數項為前項×3
可歸納出以下的機率公式：

$$K_n = 3^{n-1} - 2\cdot 3^{n-3} - 2\cdot 3^{n-5} - 2\cdot 3^{n-7} \cdots \text{(指數不為負)}$$

$$A_n = \frac{K_n}{3^n}$$

至於另外三點，為避免麻煩於是我們直接觀察與 A_n 的差值
於是又可歸納出下列公式

$B_n = \frac{K_n}{3^n}$ 當 n 為奇數；$\frac{K_n - 1}{3^n}$ 當 n 為偶數

D_n 同 B_n

$C_n = \frac{K_n - 1}{3^n}$　　證明如下

證：$n=1$時　　$A_1=\frac{1}{3}=\frac{K_1}{3^1}$　　成立

$B_1=\frac{1}{3}=\frac{K_1}{3^1}$　　成立　　D_1同B_1

$C_1=\frac{0}{3}=\frac{K_1-1}{3^1}$　　成立

令$n=x$時（x為奇數時）　成立

則$A_x=\frac{K_x}{3^x}$　　$B_x=\frac{K_x}{3^x}$　　$C_x=\frac{K_x-1}{3^x}$　　$D_x=\frac{K_x}{3^x}$

$n=x+1$時$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{x+1}=\dfrac{A_x+B_x+D_x}{3}=\dfrac{3K_x}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}}{3^{x+1}} & \text{成立} \\ B_{x+1}=\dfrac{B_x+C_x+A_x}{3}=\dfrac{3K_x-1}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}-1}{3^{x+1}} & \text{成立} \\ D_{x+1}\text{同}B_{x+1} & \\ C_{x+1}=\dfrac{B_x+C_x+D_x}{3}=\dfrac{3K_x-1}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}-1}{3^{x+1}} & \text{成立} \end{cases}$$

令$n=x$時　（x為偶數時）　成立

則$A_x=\frac{K_x}{3^x}$　　$B_x=\frac{K_x-1}{3^x}$　　$C_x=\frac{K_x-1}{3^x}$　　$D_x=\frac{K_x-1}{3^x}$

$n=x+1$時$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A_{x+1}=\dfrac{A_x+B_x+C_x}{3}=\dfrac{3K_x-2}{3^{x+1}}=\dfrac{3^x-2\cdot3^{x-2}-2\cdot3^{x-4}\cdots\cdots-2\cdot3^2-2}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}}{3^{x+1}} \\ B_{x+1}=\dfrac{B_x+A_x+D_x}{3}=\dfrac{3K_x-2}{3^{x+1}}=\dfrac{3^x-2\cdot3^{x-2}\cdots\cdots-2\cdot3^2-2}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}}{3^{x+1}} \\ D_{x+1}\text{同}B_{x+1} \\ C_{x+1}=\dfrac{B_x+C_x+D_x}{3}=\dfrac{3K_x-3}{3^{x+1}}=\dfrac{3^x-2\cdot3^{x-2}\cdots\cdots-2\cdot3^2-2-1}{3^{x+1}}=\dfrac{K_{x+1}-1}{3^{x+1}} \end{cases}$$

故得證

3. 正五邊形：

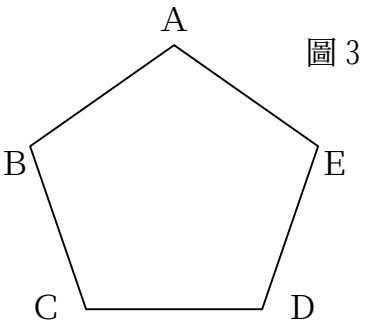


圖 3

表 2

	A	B	C	D	E
1 天後	1	1	0	0	1
2 天後	3	2	1	1	2
3 天後	7	6	4	4	6
4 天後	19	17	14	14	17
5 天後	53	50	45	45	50
6 天後	153	148	140	140	148
7 天後	449	441	428	428	441

(因為篇幅的關係，我們只列出 7 天後的機率)

表 2 為機率的分子部分，分母部分為3^n，有了四邊形公式的經驗，所以我們先將K_n寫成下列的形式:

$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$

接著要求出數列$\langle a_n \rangle$便容易許多（由$3 \times K_n - K_{n+1} = a_{n-1}$）如下表：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	2	4	6	10	16	26

觀察後不難發現$\langle a_n \rangle$之間的關係，於是可推得A_n

$A_n = \frac{K_n}{3^n}$　　其中$a_1 = a_2 = 2$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$　$n \geq 3$

然後同四邊形，已差值來推剩餘各點，得到以下公式

$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n}$　其中$b_1 = 0$，$b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$　$n \geq 2$

E_n同B_n

$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n}$　其中$c_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

D_n同C_n

證：$n=1$時　　$A_1=\frac{1}{3}=\frac{K_1}{3}$　$B_1=\frac{1}{3}=\frac{K_1-b_1}{3}$　$C_1=\frac{K_1-c_1}{3}$　D_1同C_1　E_1同B_1

$n=x$　時$A_x=\frac{K_x}{3^x}$　$B_x=\frac{K_x-b_x}{3^x}$　$C_x=\frac{K_x-c_x}{3^x}$　D_x同C_x　E_x同B_x

則$n=x+1$時

$$A_{x+1}=\frac{A_x+B_x+E_x}{3}$$

$$=\frac{3K_x-2b_x}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3K_x-a_x}{3^{x+1}}=\frac{a_1\cdot 3^x-a_2\cdot 3^{x-2}-a_3\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-1}\cdot 3-a_x}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}}{3^{x+1}}$$

$$B_{x+1}=\frac{A_x+B_x+C_x}{3}$$

$$=\frac{3K_x-b_x-c_x}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3K_x-\frac{a_x+a_{x+2}}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3K_x-a_x-\frac{a_{x+1}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{a_1\cdot 3^x-a_2\cdot 3^{x-2}-a_3\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-1}\cdot 3^1-a_x-\frac{a_{x+1}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-b_{x+1}}{3^{x+1}}$$

$$C_{x+1}=\frac{B_x+C_x+D_x}{3}$$

$$=\frac{3K_x-b_x-2c_x}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3K_x-a_x-a_{x+1}-\frac{a_x}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{a_1\cdot 3^x-a_2\cdot 3^{x-2}-a_3\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-1}\cdot 3^1-a_x-\frac{2a_{x+1}+a_x}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{K_{x+1}-\frac{a_{x+1}+a_{x+2}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-\frac{a_{x+3}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-c_{x+1}}{3^{x+1}}$$

D_{x+1}同C_{x+1}　E_{x+1}同B_{x+1}　　故得證

4. 正六邊形

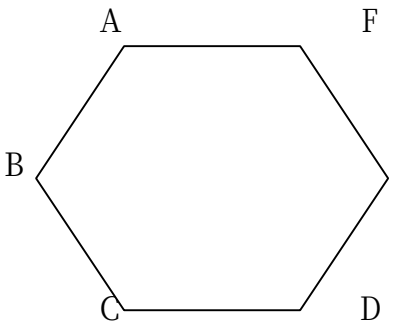


圖 4

表 3

	A	B	F	C	E	D
1 天後	1	1	1	0	0	0
2 天後	3	2	2	1	1	0
3 天後	7	6	6	3	3	2
4 天後	19	16	16	11	11	8
5 天後	51	46	46	35	35	30
6 天後	143	132	132	111	111	100
7 天後	407	386	386	343	343	322

(因為篇幅的關係，我們只列出 7 天後的機率)

表 3 為機率的分子部分，分母部分為3^n，有以上兩公式的經驗，我們很快就歸納出以下的公式：

$$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} - a_3 \cdot 3^{n-5} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$$

$$A_n = \frac{K_n}{3^n} \qquad \text{其中} \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 2 \quad a_n = 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-1} \quad n \geq 3$$

$$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n} \qquad \text{其中} \quad b_1 = 0 \quad b_n = \frac{a_{n-1}}{2} \quad n \geq 2$$

F_n 同 B_n

$$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n} \qquad \text{其中} \quad c_n = 2^{n-1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

E_n 同 C_n

$$D_n = \frac{K_n - b_{n+2}}{3^n}$$

證：$n=1$時　$A_1=\frac{1}{3}=\frac{K_1}{3^1}$　$B_1=F_1=\frac{1}{3^1}=\frac{K_1-b_1}{3^1}$

$$C_1=E_1=\frac{0}{3^1}=\frac{K_1-c_1}{3^1}\quad D_1=\frac{0}{3^1}=\frac{K_1-b_3}{3^1}\quad \text{成立}$$

令$n=x$時　成立$\Rightarrow$　$A_x=\frac{K_x}{3^x}$　$B_x=F_x=\frac{K_x-b_x}{3^x}$

$$C_x=E_x=\frac{K_x-c_x}{3^x}\quad D_x=\frac{K_x-b_{x+2}}{3^x}$$

則$n=x+1$時$\Rightarrow$

$$A_{x+1}=\frac{A_x+B_x+F_x}{3}$$

$$=\frac{3K_x-2b_x}{3^{x+1}}=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_1\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-2\cdot\frac{a_{x-1}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}}{3^{x+1}}$$

$$B_{x+1}=\frac{A_x+B_x+C_x}{3}$$

$$=\frac{3K_x-b_x-c_x}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-\frac{a_{x-1}}{2}-\frac{a_{x-1}-a_x}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-a_{x-1}\cdot 3^0-\frac{a_x}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-b_{x+1}}{3^{x+1}}$$

F_{x+1}同B_{x+1}

$$C_{x+1}=\frac{B_{x+1}+C_{x+1}+D_{x+1}}{3}$$

$$=\frac{3K_x-b_x-c_x-b_{x+2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-\frac{a_{x-1}}{2}-\frac{a_{x-1}+a_x}{2}-\frac{a_{x+1}}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-a_{x-1}\cdot 3^0-\frac{a_x+a_{x+1}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-c_{x+1}}{3^{x+1}}$$

E_{x+1}同C_{x+1}

$$D_{x+1}=\frac{C_{x+1}+D_{x+1}+E_{x+1}}{3}$$

$$=\frac{3K_x-b_{x+2}-2c_x}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-\frac{a_{x+1}}{2}-2\cdot\frac{a_{x-1}+a_x}{2}}{3^{x+1}}$$

$$=\frac{3^x-a_1\cdot 3^{x-2}-a_2\cdot 3^{x-3}\cdots\cdots-a_{x-2}\cdot 3^1-a_{x-1}\cdot 3^0-\frac{2a_x+a_{x+1}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-\frac{a_{x+2}}{2}}{3^{x+1}}=\frac{K_{x+1}-b_{x+3}}{3^{x+1}}$$

故得證

從以上公式不難端倪出有些許規律存在，於是我們便藉此先猜測正 m 邊形應該是有通式存在，正如正四、五、六邊形般。

第二節 移動於正m邊形時各點與原點機率相關性之探討

在上節中，我們對於各點之機率通式皆假設為$\frac{K_n - x_n}{3^n}$，K_n則同上節中所敘述之格式（$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} - a_3 \cdot 3^{n-5} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2}$），現在，我們將探討各點機率中與$A_n$之差值“ x_n ”。

定義：逆時針方向與原出發點A相距一單位長（一邊長）之點為B,而B_n為n天後移動到B點的機率，至於順時針方向距出發點A一單位長之點，則稱為B'，以此類推。

由第一節的假設二中，“ 狗狗所有移動可能的機率相等（移動到相鄰兩點及不動皆為$\frac{1}{3}$） ”，我們可以得到$A_{n+1} = \frac{A_n + B_n + B'_n}{3}$，以此類推便可推導出所有$x_n$之值。

b_n ： $A_{n+1} = \frac{A_n + B_n + B'_n}{3}$

$$\Rightarrow \frac{K_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\frac{K_n}{3^n} + \frac{K_n - b_n}{3^n} + \frac{K_n - b_n}{3^n}}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \times b_n = 3 \times K_n - K_{n+1}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$$

c_n ： $B_{n+1} = \frac{A_n + B_n + C_n}{3}$

$$\Rightarrow \frac{K_{n+1} - b_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\frac{K_n}{3^n} + \frac{K_n - b_n}{3^n} + \frac{K_n - c_n}{3^n}}{3}$$

$$\Rightarrow c_n = 3 \times K_n - K_{n+1} - b_n + b_{n+1}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

d_n ： $C_{n+1} = \frac{B_n + C_n + D_n}{3}$

$$\Rightarrow \frac{K_{n+1} - c_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\frac{K_n - b_n}{3^n} + \frac{K_n - c_n}{3^n} + \frac{K_n - d_n}{3^n}}{3}$$

$$\Rightarrow d_n = 3 \times K_n - K_{n+1} - b_n - c_n + c_{n+1}$$

$$\Rightarrow d_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{a_n + a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{a_{n+1}}{2}$$

即$d_n = b_{n+2}$　　至此與第一章推導出的公式完全相同

e_n ： $D_{n+1} = \dfrac{C_n + D_n + E_n}{3}$

$$\Rightarrow \frac{K_{n+1} - d_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\dfrac{K_n - c_n}{3^n} + \dfrac{K_n - d_n}{3^n} + \dfrac{K_n - e_n}{3^n}}{3}$$

$$\Rightarrow e_n = 3 \times K_n - K_{n+1} - c_n - d_n + d_{n+1}$$

$$\Rightarrow e_n = a_{n-1} - \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+2}}{2} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1} - a_n + a_{n-1}}{2}$$

f_n ： $E_{n+1} = \dfrac{D_n + E_n + F_n}{3}$

$$\Rightarrow \frac{K_{n+1} - e_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\dfrac{K_n - d_n}{3^n} + \dfrac{K_n - e_n}{3^n} + \dfrac{K_n - f_n}{3^n}}{3}$$

$$\Rightarrow f_n = 3 \times K_n - K_{n+1} - d_n - e_n + e_{n+1}$$

$$\Rightarrow f_n = a_{n-1} - \frac{a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+2} - a_{n+1} - a_n + a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n}{2}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{a_{n+3} - 2 \times a_{n+2} - a_{n+1} + 2 \times a_n + a_{n-1}}{2}$$

到此為止發現繼續推下去應該只會漸趨複雜而毫無意義，所以應該是沒有辦法建立出一套完整的系統，但是由前項繼續推下去必然可行，經由化簡可得到 $z_n = a_{n-1} - x_n - y_n - y_{n-1}$，雖然無法找到通式，但是仍可以繼續推下去，對於欲求出正 m 邊形移動機率通式的我們，無疑是進了一大步。

第三節 推廣至正 m 邊形

從第一節中可看出公式大概的形式，從第二節中又能夠推到不限距離外的點，現在剩下最大的問題便是K_n的求法，又在第一節中猜測其由3^n與a_n所組成，所以只要找出a_n的通式便能夠推廣至正 m 邊形，首先我們將四邊形的公式亦改寫為由a_n組成，如下（符號定義同第一節）：

正四邊形：$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} - a_3 \cdot 3^{n-5} - \Lambda - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$

$$A_n = \frac{K_n}{3^n} \qquad \text{其中} \; a_1 = 2 \quad a_2 = 0 \quad a_n = a_{n-2} \qquad n \geq 3$$

$$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n} \qquad b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$$

$$D_n = B_n$$

$$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n} \qquad c_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$$

與第一節中之公式比較，發現b_n的確也是 n 為奇數時等於 0，n 為偶數時等於 1，至於c_n則是恆等於 1，與之前的公式完全相同。

所以，剩下的問題就只有a_n了，我們從四邊形開始一一將各公式中的a_n列出，在從中比較觀察。

四邊形：$a_1 = 2 \quad a_2 = 0 \quad a_n = a_{n-2} \qquad n \geq 3$

五邊形：$a_1 = a_2 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3$

六邊形：$a_1 = 2 \quad a_2 = 2 \quad a_n = 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-1} \quad n \geq 3$

（從$m = 7$開始的公式在第一章沒導過，所以a_n的值須重導，導法與第一節相同。）

七邊形：

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
K_n	1	3	7	19	51	141	395	1123	3229	9373	27413	80653
$a_n(3 \cdot K_{n+1} - K_{n+2})$	2	2	6	12	28	62	140	314	706	1586		

我們發現有這樣的規律$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} \qquad n \geq 3$

八邊形：

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
K_n	1	3	7	19	51	141	393	1109	3157	9063	26203	76231
$a_n(3 \cdot K_{n+1} - K_{n+2})$	2	2	6	12	30	70	170	408	986	2378		

關於這個我們就完全看不透了……，難道前面幾個出現的規律全都是巧合！？基於研究的精神，我們繼續計算更多的數據

九邊形：

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
K_n	1	3	7	19	51	141	393	1107	3141	8973	25785	74493
$a_n(3\cdot K_{n+1}-K_{n+2})$	2	2	6	12	30	72	180	450	1134	2862		

十邊形：

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$	$n=11$	$n=12$
K_n	1	3	7	19	51	141	393	1107	3139	8955	25675	73945
$a_n(3\cdot K_{n+1}-K_{n+2})$	2	2	6	12	30	72	182	462	1190	3080		

這些似乎都沒有固定的規律，或著是規律太複雜，以致於無法找出，所以我們朝另一個方向想，就是看看不同形狀中的a_n是否互相有關聯，如下表：

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
四邊形	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0
五邊形	2	2	4	6	10	16	26	42	68	110
六邊形	2	2	6	10	22	42	86	170	342	682
七邊形	2	2	6	12	28	62	140	314	706	1586
八邊形	2	2	6	12	30	70	170	408	986	2378
九邊形	2	2	6	12	30	72	180	450	1134	2862
十邊形	2	2	6	12	30	72	182	462	1190	3080

發現的特點有四個：

1. a_1全都相等，五邊形後的a_2都相等，六邊形後的a_3都相等，以此類推。
2. 四邊形的a_2加 2 等於五邊形的a_2，五邊形的a_3加 2 等於六邊形的a_3，六邊形的a_4加 2 等於七邊形的a_4，以此類推。
3. 四邊形的a_3加 2 等於五邊形的a_3，五邊形的a_4加 4 等於六邊形的a_4，六邊形的a_5加 6 等於七邊形的a_5，七邊形的a_6加 8 等於八邊形的a_6，以此類推。
4. 四邊形的a_4加2×3等於五邊形的a_4，五邊形的a_5加3×4等於六邊形的a_5，六邊形的a_6加4×5等於七邊形的a_6，七邊形的a_7加5×6等於八邊形的a_7，以此類推。

雖然有這四個小小的關係存在，但仍不足以推至 m 邊形的a_n，這是比較遺憾的一點，所以我們猜想也許不能夠以純代數來找出其間的關係，於是便再找尋另外的做法。

第二章　矩陣及馬可夫鍊的應用

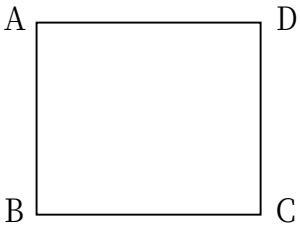
第一節　改用矩陣處理

在第一章中，我們以純粹的代數推導，似乎無法找到完整的通式來推廣至 m 邊形，但是我們定義每一項都是由相鄰兩點的前一項和自己的前一項相加除以三而來（如：$B_{n+1}=\frac{A_n+B_n+C_n}{3}$），看看形式，用矩陣來表達似乎較容易：

$$[B_{n+1}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_n\\B_n\\C_n\end{bmatrix}$$

將各點都表示成如此，便能夠以一式表示：

正四邊形（其中 A_n 表示 n 天後 A 點狗數的期望值）：



$$\begin{bmatrix}A_{n+1}\\B_{n+1}\\C_{n+1}\\D_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}A_n\\B_n\\C_n\\D_n\end{bmatrix}$$

若反覆代換（馬可夫鍊）則可得到以下結果：

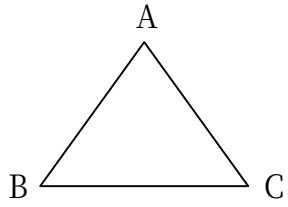
$$\begin{bmatrix}A_n\\B_n\\C_n\\D_n\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\Lambda\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}}_{\text{n 個}}\times\begin{bmatrix}A_0\\B_0\\C_0\\D_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^n\times\begin{bmatrix}A_0\\B_0\\C_0\\D_0\end{bmatrix}$$

其中 A_0 即為 A 點原有狗數（0 天後），所以當 A_0 等於 1，B_0、C_0、D_0 皆為 0 時，便與第一章中的公式有完全相同的結果。

同理，我們亦可推到各正 m 邊形中：

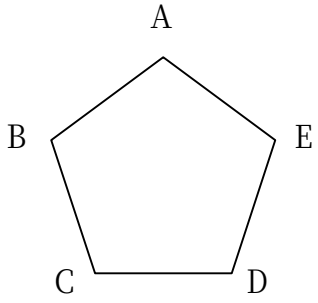
1. 正三角形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$



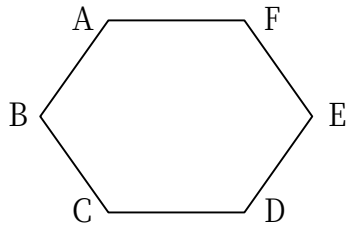
2. 正五邊形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ E_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$



3. 正六邊形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$



藉著馬可夫推移矩陣，如此便可以輕易表示出 n 天後各點的狗數期望值。

第二節　矩陣應用到小道路地圖

在上節中用矩陣的方式處理正 m 邊形變的容易許多，所以我們就推廣到小道路地圖（虛擬）：

假設一：狗狗必停留於頂點（或路口）上，不停留於邊上。

假設二：狗狗所有移動可能的機率相等（移動到相鄰點及不動皆相等）。

假設三：狗狗一天最多移動一次（一段路）。

定義：n 表日數 A_n 表 n 日後 A 點狗數期望值，A_0 表 A 點原有狗數。

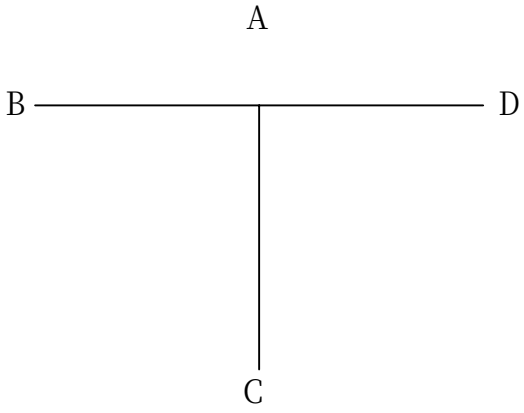
台東市區圖中可能的街道圖形配合上節的運算方法：

1.

A ——————————— B

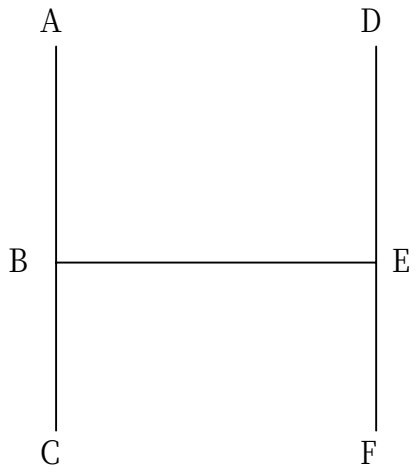
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$$

2.



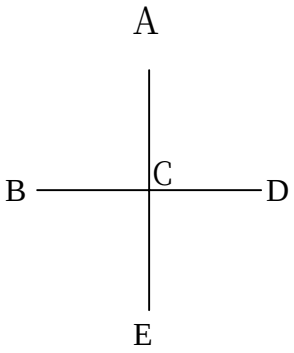
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$

3.



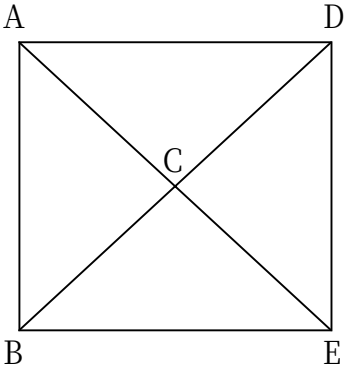
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

4.



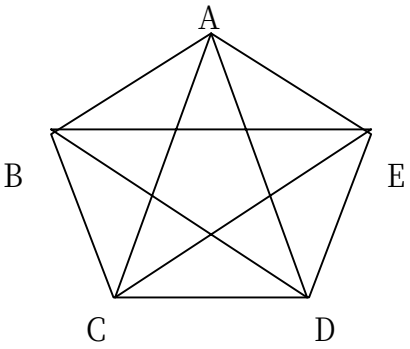
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \end{bmatrix}$$

5.



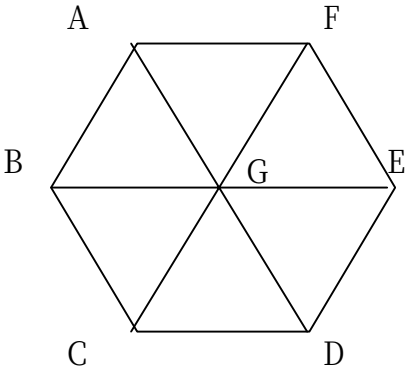
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \end{bmatrix}$$

6.



$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \end{bmatrix}$$

7.



$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \end{bmatrix}$$

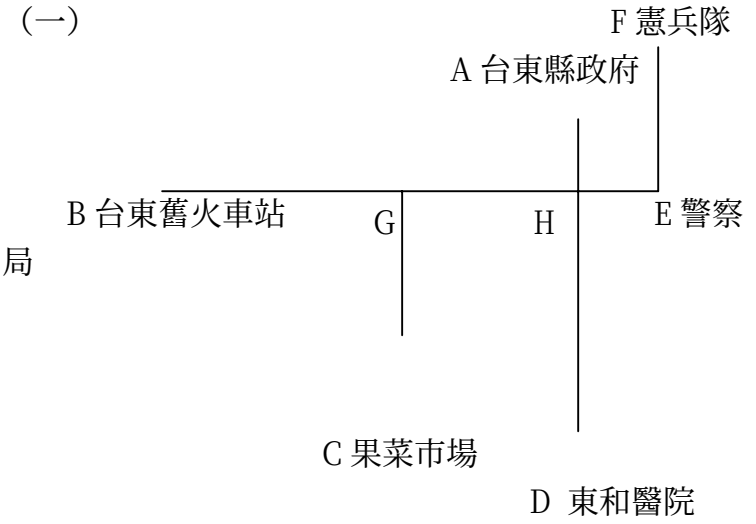
如此對於我們要推展到整個台東市地圖已進步不少！

第三章　台東市街道圖

有了矩陣的方便處理後，我們便往最終目的構想，但是一此處理整個台東市區圖示在太過於龐大以及複雜，所以我們如同第二章第二節般以分解小區塊的方法下手：

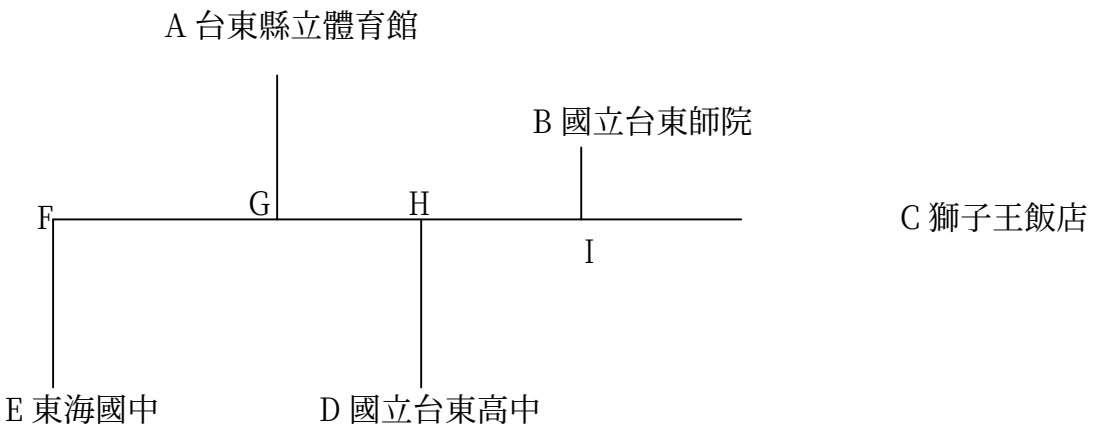
（定義與假設皆與第二章第二節相同）

（一）



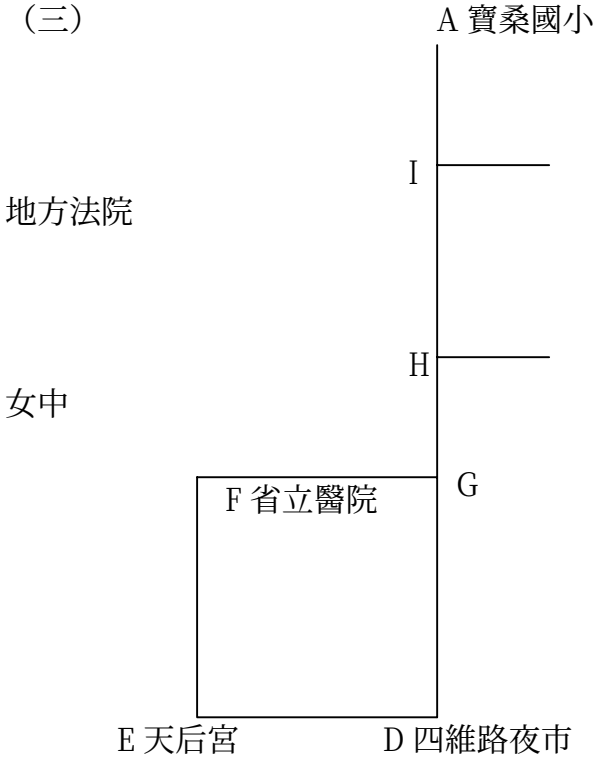
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \end{bmatrix}$$

（二）



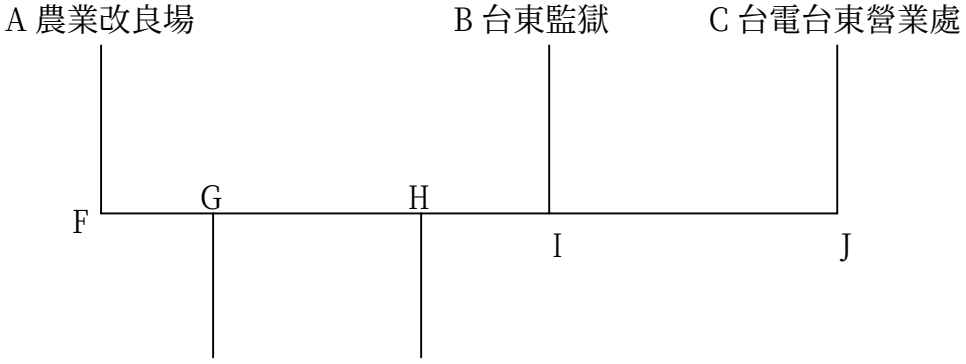
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

（三）



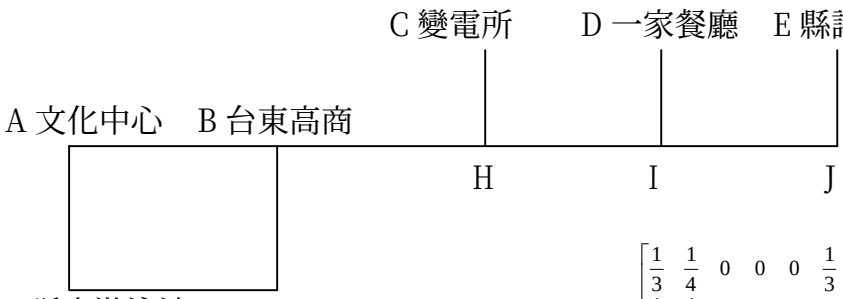
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

（四）



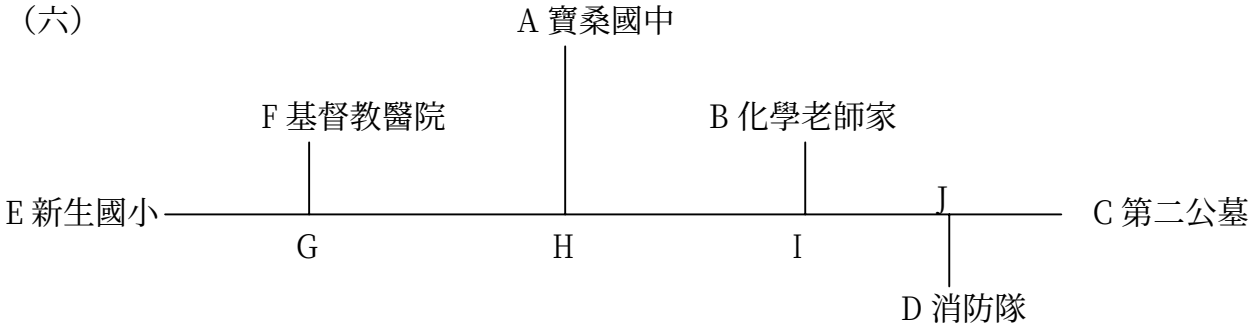
$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \\ I_n \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \\ I_0 \\ J_0 \end{bmatrix}$$

（五）



$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \\ I_n \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \\ I_0 \\ J_0 \end{bmatrix}$$

（六）



$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \\ G_n \\ H_n \\ I_n \\ J_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \\ G_0 \\ H_0 \\ I_0 \\ J_0 \end{bmatrix}$$

至此是已將整個市區圖的大馬路都分的差不多了，但是要能夠將整個台東市所有道路計算表達出來，還是非得要靠電腦軟體才行，目前我們仍在嘗試改進中，希望能夠將整個台東市表示成以上公式的類型，並藉由軟體計算，能夠迅速有效的求得狗兒的期望值。

陸、 研究結果

一、 移動至各點之機率：

（一） 三角形中：$A_n = B_n = C_n = \frac{1}{3}$

（二） 四邊形中：$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$

$A_n = \frac{K_n}{3^n}$ $a_1 = 2$ $a_2 = 0$ $a_n = a_{n-2}$ $n \geq 3$

$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n}$ $b_1 = 0$， $b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ $n \geq 2$

D_n 同 B_n

$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n}$ $c_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

（三） 五邊形中：$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$

$A_n = \frac{K_n}{3^n}$ $a_1 = a_2 = 2$， $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $n \geq 3$

$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n}$ $b_1 = 0$， $b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ $n \geq 2$

E_n 同 B_n

$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n}$ $c_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{2}$

D_n 同 C_n

（四） 六邊形中：$K_n = 3^{n-1} - a_1 \cdot 3^{n-3} - a_2 \cdot 3^{n-4} - a_3 \cdot 3^{n-5} \cdots\cdots - a_{n-3} \cdot 3^1 - a_{n-2} \cdot 3^0$

$A_n = \frac{K_n}{3^n}$ 其中 $a_1 = 2$ $a_2 = 2$ $a_n = 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-1}$ $n \geq 3$

$B_n = \frac{K_n - b_n}{3^n}$ 其中 $b_1 = 0$ $b_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ $n \geq 2$

F_n 同 B_n

$C_n = \frac{K_n - c_n}{3^n}$ 其中 $c_n = 2^{n-1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$

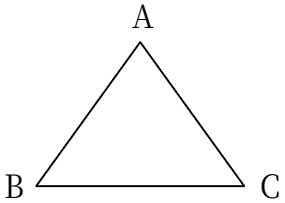
E_n 同 C_n

$D_n = \frac{K_n - b_{n+2}}{3^n}$

二、　可以矩陣推至正m邊形之機率期望值計算方法：

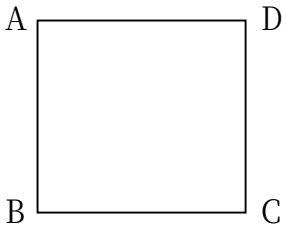
（一）　正三角形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$



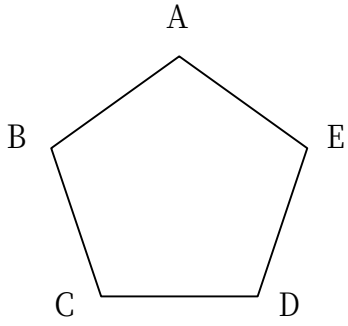
（二）　正四邊形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$



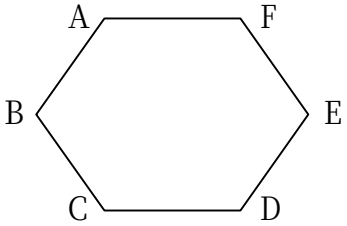
（三）　正五邊形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ E_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$



（四）　正六邊形：

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \\ E_n \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \\ E_0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$



可不斷推廣下去。

柒、 討論

在第一章第一節中，我們發現一狗於邊數少的正m邊形中移動好像可以用通式表示其機率，但是經過後來的一些數據探討，卻又似乎沒有規律，為什麼會這樣呢？在第一章第三節，我們發現了一些不同邊數的a_n間的關係，再加上同邊數的a_n間的關係（目前推到正七邊形），便能將正m邊形的$a_1 \sim a_7$及邊數小於等於七的正m邊形之a_n全部求出，巧的是能求出的界線都是七，也許就是因為邊數夠少才產生的巧合公式，也有可能是邊數大於七的情況公式會過於複雜，目前最重要的目標就是將a_n的通式完整求出，而改用矩陣方面（第二、三章）只要會使用矩陣計算工具就沒問題了。

捌、 結論

這份作品中，由於討論情形過多，所以我們限制許多範圍，僅研究一般解且以初等的方式證明，因而使得圖形較為簡化，如果能繼續推得a_n通式而得到 m 邊形並輔以電腦程式運算其矩陣過程，相信在馬可夫鏈的部分能更快速的運算結果，並且未來將狗可能的行動方式、行動距離列入考慮，將其運用至實際地圖上，相信能使這份作品更加完美，日後我們必會朝這些方面研究、改進。

玖、 參考資料及其他

作者	書名	版次	出版地	出版社	頁數	出版年
◎余文卿、李白飛	數學甲上冊	第一版	台灣台北	龍騰文化事業公司	220 頁	民國九十年