

# 中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

## 高中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：高 中 組

作品名稱：九宮八卦

關 鍵 詞：排列組合、級數、對稱

編 號：040409

---

**學校名稱：**

國立屏東高級中學

**作者姓名：**

林昆餘

**指導老師：**

羅有成



# 九宮八卦

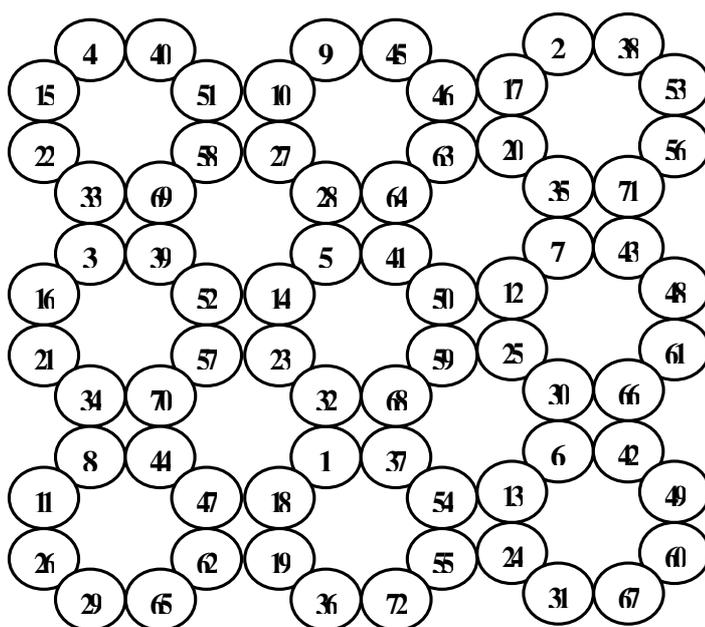
## 壹、摘要

從一份「發現」科學月刊中，一位宋朝數學家丁東易〈大衍索隱〉三卷中的下卷「九宮八卦綜成七十二數河洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」。依其規則創造、分析，探索出許多有趣的數學內涵及新奇發現，而瞭解到雖然外表看似神秘莫測，且距今兩千多年的【丁東易九宮八卦】，藉著數學的這把利刃，我們從中探究其內涵。創造出屬於自己的「九宮八卦圖」。

## 貳、研究動機

由遠哲科學教育基金會出版的「發現」科學月刊，其中第 36 期數學大俠秘笈五之「金庸武俠中的數學」單元（附錄一）非常地感興趣。內容提及：宋朝的一位數學家丁東易所寫的〈大衍索隱〉三卷的下卷「九宮八卦綜成七十二數河洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」。而秦九韶在〈數學九章〉的自序中云：「爰自河圖洛書闡發奧秘，八卦九疇錯綜精微，極而至于大衍皇極之用，而人事之變無不該，鬼神之情莫能隱。」因此，對「九宮八卦圖」的神秘面紗感到好奇，便提筆依規則嘗試作圖，於是寫出屬於自己的「九宮八卦圖」。

【丁東易的九宮八卦圖】



## 參、研究目的

藉著數學的探索及研究，揭開距今兩千多年的「九宮八卦圖」神秘面紗。將這外表看似深不可及的數學習題，利用紙筆的推演，回溯至宋朝的數學家丁東易〈大衍索隱〉三卷中的下卷「九宮八卦綜成七十二數河洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」。並加以延伸、推廣，分析探索出許多有趣的數學內涵及新奇之發現，繪製出形形色色、各式各樣的「九宮八卦圖」。

## 肆、研究設備及器材

紙、筆、電腦、人腦及參考書籍。

## 伍、研究過程

### 一. 規則定義

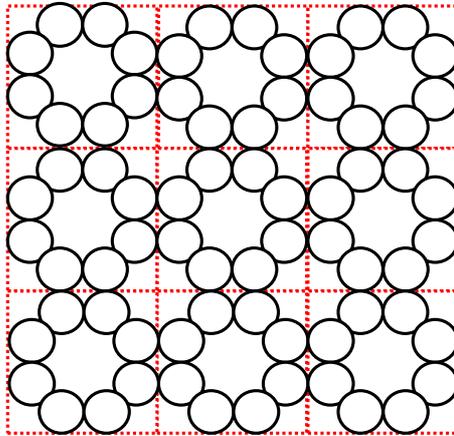
- (一) 「九宮八卦圖」= $\rightarrow$ 九宮：九宮格；八卦：由 8 個小圓圈擺成一個大圓的八卦圖形。
- (二) 「九宮八卦圖」是由 1 到 72 的連續 72 個數，放在九宮格中，每宮 8 個數，而由這 8 個數擺成八卦的圖形。條件是：每宮中 8 個數的和要相等；不但如此，中間形成的另外四個八卦中的 8 個數字和也要相等，皆等於 292。  
(如上一頁【丁東易的九宮八卦圖】)
- (三) 這個數 292，是 1 到 72 這 72 個數之和的九分之一。

$$\frac{(1+72)*72}{2} * \frac{1}{9} = 73*4 = 292$$

### 二. 研究流程

- (一) 由於「九宮八卦圖」是由 1 到 72 的連續 72 個數，放在九宮格中，每宮 8 個數，而由這 8 個數擺成八卦的圖形。條件是：每宮中 8 個數的和要相等。因此，我們先設法把 1 到 72 的連續 72 個數填入「九宮八卦圖」中，使得每個九宮方格中的 8 個數字和相等。再設法使中間行成的另外四個八卦圖形的 8 個數字和相等。

(二) 首先，先將問題簡化：我們把「九宮八卦圖」分成九宮方格。



(三) 我們用 1 到 9 的連續 9 個數字，使這九個數字在九宮方格中直、橫、斜（對角線）之數字和等於 15，即我們所熟知的 3\*3 階魔方陣（如下圖）。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(四) 以 3\*3 階魔方陣為藍圖，旋轉 90、180、270 度做出四個 3\*3 階旋轉魔方陣。以此四個魔方陣我們稱為「單位旋轉魔方陣」。

<b>&lt;A&gt;</b>	<b>&lt;B&gt;</b>	<b>&lt;C&gt;</b>	<b>&lt;D&gt;</b>																																				
<table border="1"> <tr><td>8</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td><td>2</td></tr> </table>	8	1	6	3	5	7	4	9	2	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> </table>	2	9	4	7	5	3	6	1	8	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> </table>	4	3	8	9	5	1	2	7	6	<table border="1"> <tr><td>6</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	6	7	2	1	5	9	8	3	4
8	1	6																																					
3	5	7																																					
4	9	2																																					
2	9	4																																					
7	5	3																																					
6	1	8																																					
4	3	8																																					
9	5	1																																					
2	7	6																																					
6	7	2																																					
1	5	9																																					
8	3	4																																					
(原方陣)	(旋轉 180 度)	(旋轉 90 度)	(旋轉 270 度)																																				

(五) 上述之四個單位旋轉魔方陣，分別是作為堆疊、填入先前(二)所區隔出的九宮方格中的架構，用意是：「九宮八卦圖」中規定每個方格中的 8 個數字和要相等。而我們用 3\*3 階魔方陣分別以旋轉 90、180、270 度後，四個單位旋轉魔方陣相對位置的數字和都會相等，如下面說明。

<b>&lt;A&gt;</b>	<b>&lt;B&gt;</b>	<b>&lt;C&gt;</b>	<b>&lt;D&gt;</b>																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td style="color: red;">8</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">6</td></tr> <tr><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">7</td></tr> <tr><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">9</td><td style="color: red;">2</td></tr> </table>	8	1	6	3	5	7	4	9	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">9</td><td style="color: red;">4</td></tr> <tr><td style="color: red;">7</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">3</td></tr> <tr><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">8</td></tr> </table>	2	9	4	7	5	3	6	1	8	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td style="color: red;">4</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">8</td></tr> <tr><td style="color: red;">9</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">1</td></tr> <tr><td style="color: red;">2</td><td style="color: red;">7</td><td style="color: red;">6</td></tr> </table>	4	3	8	9	5	1	2	7	6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 60px; height: 60px; text-align: center;"> <tr><td style="color: red;">6</td><td style="color: red;">7</td><td style="color: red;">2</td></tr> <tr><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: red;">9</td></tr> <tr><td style="color: red;">8</td><td style="color: red;">3</td><td style="color: red;">4</td></tr> </table>	6	7	2	1	5	9	8	3	4
8	1	6																																					
3	5	7																																					
4	9	2																																					
2	9	4																																					
7	5	3																																					
6	1	8																																					
4	3	8																																					
9	5	1																																					
2	7	6																																					
6	7	2																																					
1	5	9																																					
8	3	4																																					
(原方陣)	(旋轉 180 度)	(旋轉 90 度)	(旋轉 270 度)																																				

【Ex】

1.

$$\begin{aligned}
 & A_{11} + B_{11} + C_{11} + D_{11} \\
 &= 8 + 2 + 4 + 6 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & A_{21} + B_{21} + C_{21} + D_{21} \\
 &= 3 + 7 + 9 + 1 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & A_{31} + B_{31} + C_{31} + D_{31} \\
 &= 4 + 6 + 2 + 8 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 & A_{12} + B_{12} + C_{12} + D_{12} \\
 &= 1 + 9 + 3 + 7 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

5. ~依此類推~。

符號說明：

【 $X_{mn}$ 】

X：表 X 種類之單位方陣。

m：表方陣之第 m 列。

n：表方陣之第 n 行。

(六) 以四個單位旋轉魔方陣為基礎，做出包含 1 到 72 的八個「單位方陣」。

【Ex】

1.

<A>

8	1	6
3	5	7
4	9	2

+ 9\*0 =

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2.

<B>

2	9	4
7	5	3
6	1	8

+ 9\*1 =

11	18	13
16	14	12
15	10	17

3.

<C>

4	3	8
9	5	1
2	7	6

+ 9\*2 =

22	21	26
27	23	19
20	25	24

4.

<D>

6	7	2
1	5	9
8	3	4

+ 9\*3 =

33	34	29
28	32	36
35	30	31

5.

<A>

8	1	6
3	5	7
4	9	2

+ 9\*4 =

44	37	42
39	41	43
40	45	38

6.

<B>

2	9	4
7	5	3
6	1	8

+ 9\*5 =

47	54	49
52	50	48
51	46	53

7.

<C>

4	3	8
9	5	1
2	7	6

+ 9\*6 =

58	57	62
63	59	55
56	61	60

8.

<D>

6	7	2
1	5	9
8	3	4

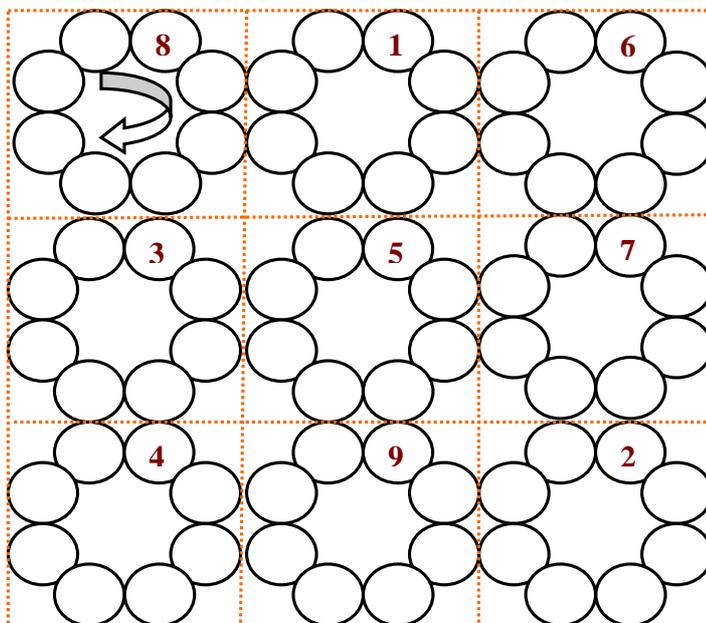
+ 9\*7 =

69	70	65
64	68	72
71	66	67

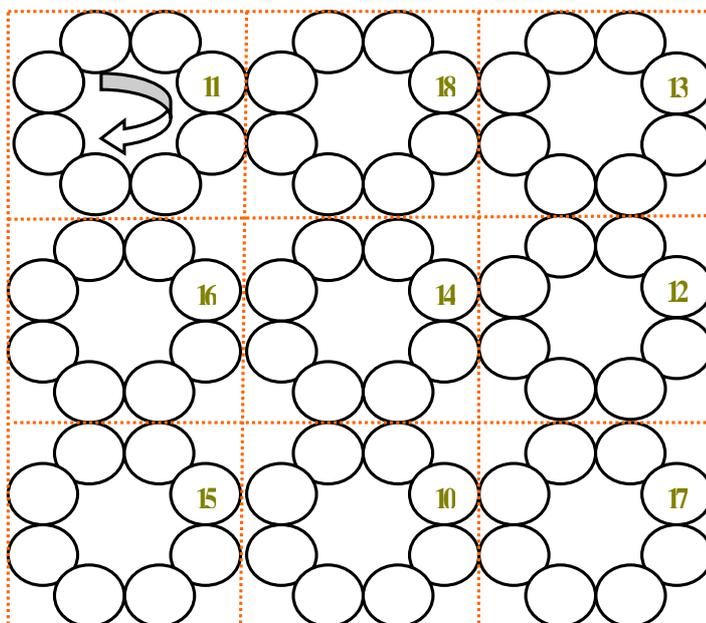
(七) 以此八個「九宮八卦圖」之單位方陣為依據，依順時針方向分別依序填入九宮方格之各相對位置中。

【Ex】

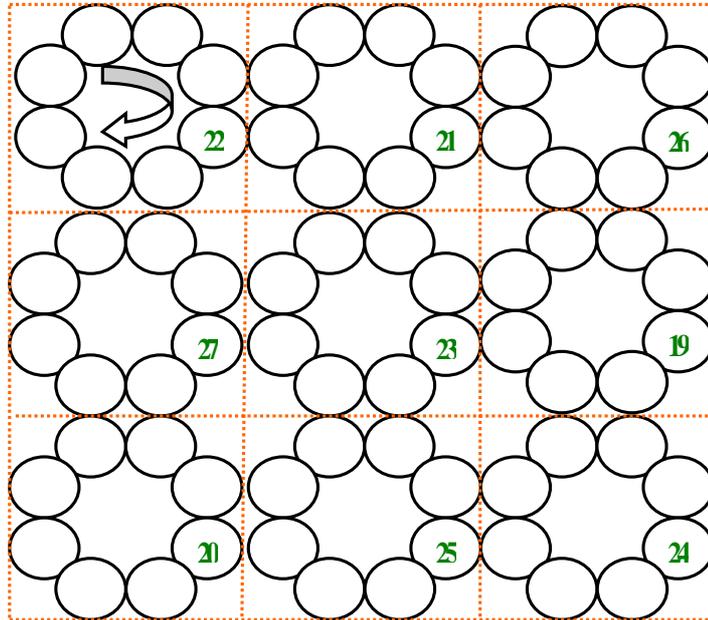
1.



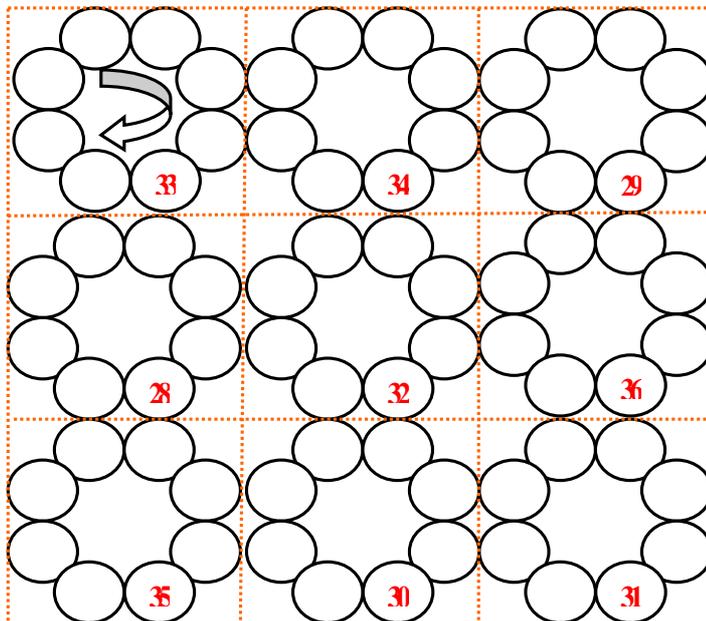
2.



3.

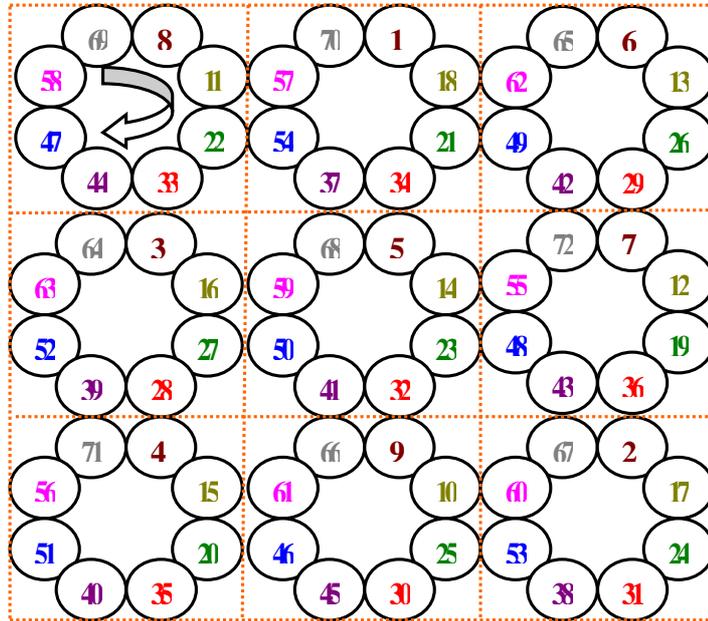


4.

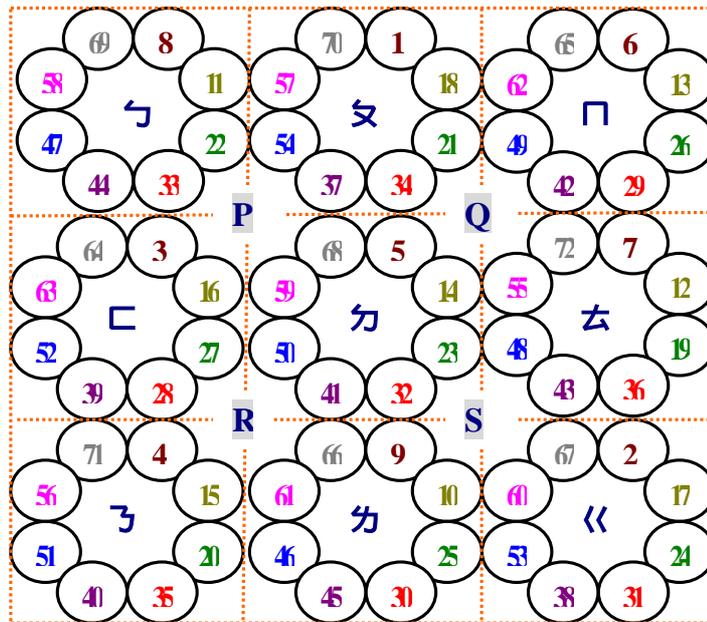


5. ~依此類推~。

6. 得到完整的「九宮八卦圖」(下圖分別以顏色表示各宮之相對位置)



(八) 承(五)(六)(七)之方式, 得知九宮方格之每一宮內的八個數字和皆等於 292。



【Ex】

$$\langle \text{勺} \rangle 8+11+22+33+44+47+58+69=292$$

$$\langle \text{爻} \rangle 1+18+21+34+37+54+57+70=292$$

$$\langle \text{冂} \rangle 6+13+26+29+42+49+62+65=292$$

$$\langle \text{匚} \rangle 3+16+27+28+39+52+63+64=292$$

$$\langle \text{勹} \rangle 5+14+23+32+41+50+59+68=292$$

$$\langle \text{去} \rangle 7+12+19+36+43+48+55+72=292$$

$$\langle \text{勹} \rangle 4+15+20+35+40+51+56+71=292$$

$$\langle \text{勹} \rangle 9+10+25+30+45+46+61+66=292$$

$$\langle \text{ㄨ} \rangle 2+17+24+31+38+53+60+67=292$$

符號說明：

$\langle X \rangle 1+2+\sim+\sim$

X：表第 X 宮。

$1+2+\sim+\sim$ ：表第 X 宮內之數字和。

(九) 依「九宮八卦圖」規則規定：每宮中八個數字和都要相等。不但如此，中間形成的另外四個八卦中的八個數字和也要相等。檢查上圖由單位方陣所組成之「九宮八卦圖」其中間形成的四個八卦八個數字和是否等於 292？

【Ex】(承上圖)

1.  $\langle P \rangle 54+37+68+59+15+3+33+22=292$

2.  $\langle Q \rangle 49+42+72+55+14+5+34+21=292$

3.  $\langle R \rangle 50+41+66+61+15+4+28+27=292$

4.  $\langle S \rangle 48+43+67+60+10+9+32+23=292$

符號說明：

$\langle X \rangle 1+2+\sim+\sim$

X：表第 X 宮。

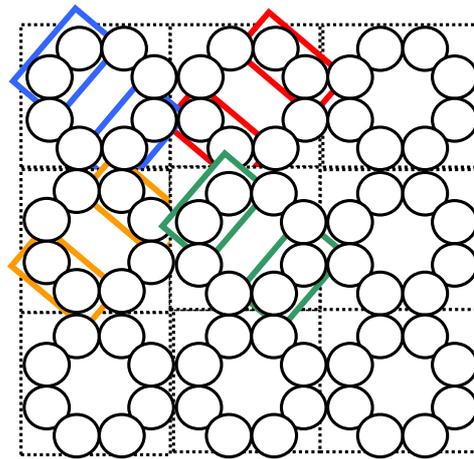
$1+2+\sim+\sim$ ：表第 X 宮內之數字和。

(十) 承(八)(九), 得知中間形成的另外四個八卦中的 8 個數字和亦等於 292。因此, 創造出屬於自己的「九宮八卦圖」。

(十一) 承(十)此結果是以 3\*3 階魔方陣為藍圖, 旋轉 90、180、270 度製作出四個 3\*3 階單位旋轉魔方陣。再依此單位旋轉魔方陣為藍圖, 製作出「九宮八卦圖」單位方陣。以此八個「九宮八卦圖」之單位方陣為依據, 依順時針方向分別依序填入九宮方格之各相對位置中, 所獲得的結果。

### 【證明】

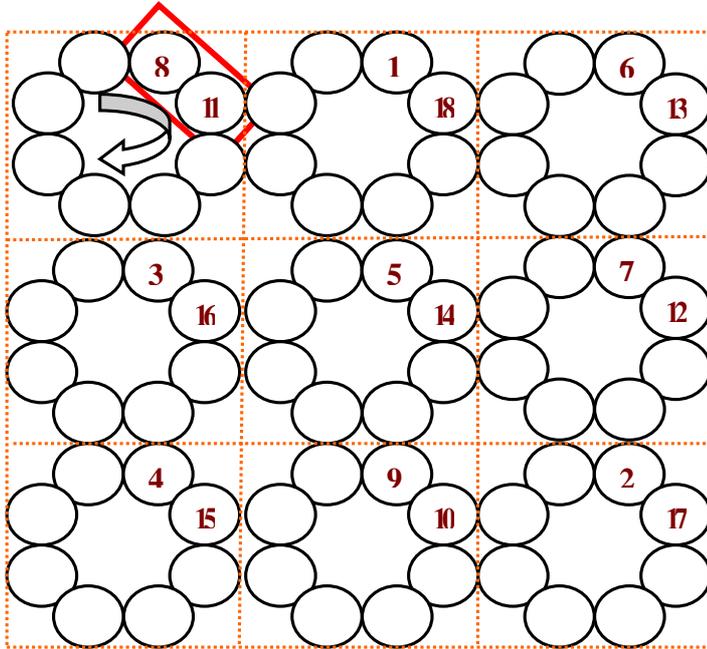
1. 由於「九宮八卦圖」是由 1 到 72 的連續 72 個數字, 放入九宮方格中, 每宮 8 個數, 而由這 8 個數擺成八卦的圖形。條件是, 每宮中 8 個數的和要相等。不但如此, 中間的另外四個八卦的 8 個數字和也要相等, 皆等於 292。我們以「九宮八卦圖」之單位方陣為依據, 分別依序填入九宮方格之各相對位置中。因此, 「九宮八卦圖」之九宮方格中, 每宮擺成八卦圖形之 8 個數字和皆相等, 等於 292。於是, 初步完成「九宮八卦圖」的雛形。
2. 而要使中間形成的八卦之 8 個數字和也等於 292, 則與九宮方格內數字相關位置有著密切關係。以下我們以圖說明「九宮八卦圖」的結構分析, 說明中間形成的另外四個八卦圖與九宮方格中每一組的關係。



3. 以順時針方向依序填入九宮方格之各相對位置，使每組（小框框所圍成之數字和）相對的數字和皆相等。（下圖以顏色作為每組填入數字之區別）

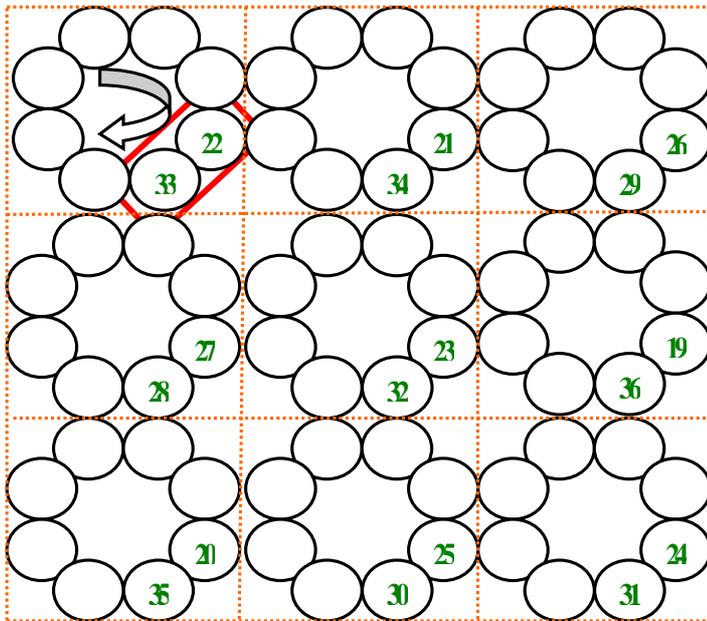
【EX】

(1)



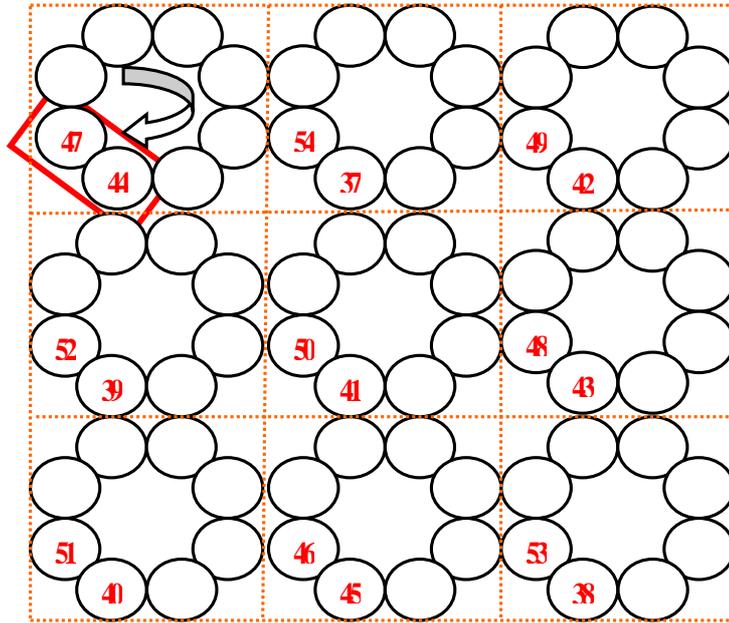
< ex >  $8+11=1+18=6+13=3+16=5+14=7+12=4+15=9+10=2+17=19$

(2)



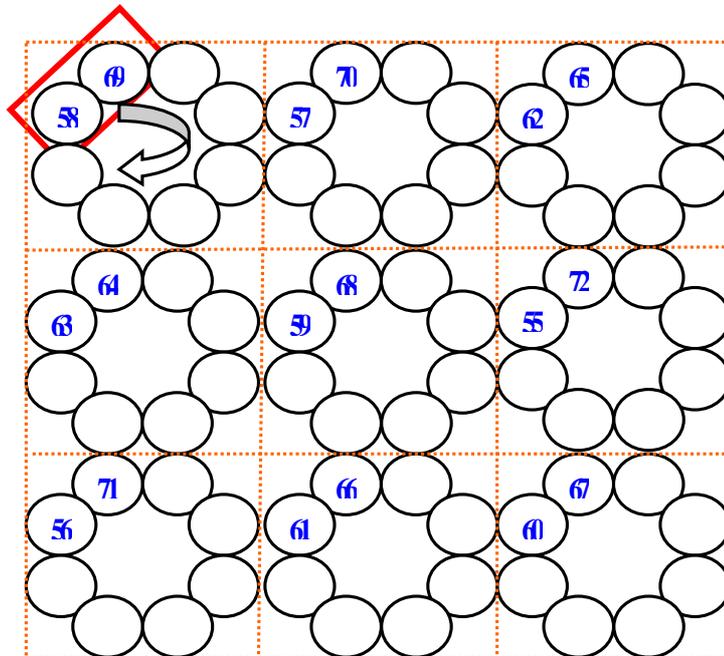
< ex >  $22+33=21+34=26+29=27+28=23+32=19+36=20+35=25+30=24+31=55$

(3)



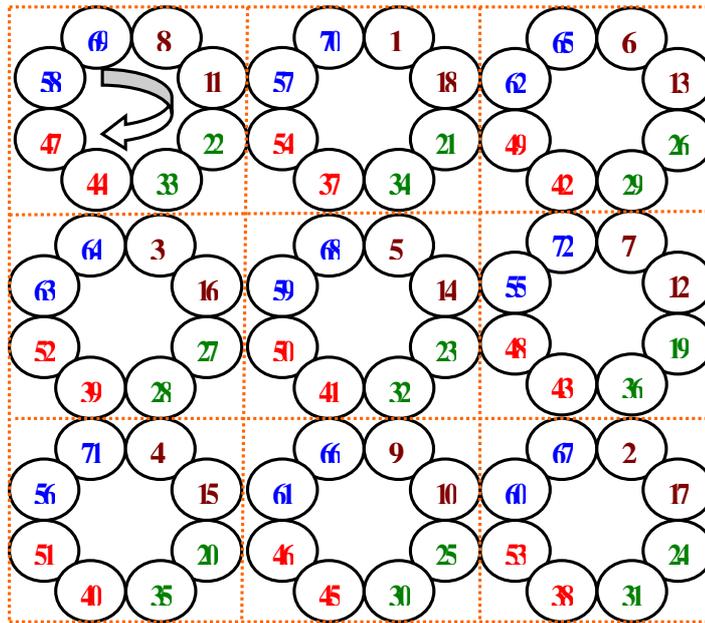
< ex >  $47+44=54+37=49+42=52+39=50+41=48+43=51+40=46+45=53+38=91$

(4)



< ex >  $69+58=70+57=65+62=64+63=68+59=72+55=71+56=66+61=67+60=127$

(5) 完成圖



< ex > 九宮方格中，每宮之數字和等於上述每宮中之任四組數字和：

$$19+55+91+127=292$$

4. 承第 2、3 點，中間形成的另外四個八卦由於分別包含不同四組之數字和（以下用表格分別表示出四組數字的類型及明細）。所以，我們以順時針方向填入九宮方格各相對位置中的排列方式，使中間形成的四個八卦數字和也等於 292。因此，創造出屬於自己的「九宮八卦圖」。四種類型分析如下：

(1) 【類型一】：每組的兩兩數字和等於 19

組別	ㄅ	ㄆ	ㄇ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ
數字	1 18	2 17	3 16	4 15	5 14	6 13	7 12	8 11	9 10

(2) 【類型二】：每組的兩兩數字和等於 55

組別	ㄅ	ㄆ	ㄇ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ	ㄏ
數字	19 36	20 35	21 34	22 33	23 32	24 31	25 30	26 29	27 28

(3) 【類型三】：每組的兩兩數字和等於 91

組別	ㄒ	ㄓ	ㄔ	ㄕ	ㄖ	ㄗ	ㄘ	ㄙ	ㄚ
數字	37 54	38 53	39 52	40 51	41 50	42 49	43 48	44 47	45 46

(5) 【類型四】：每組的兩兩數字和等於 127

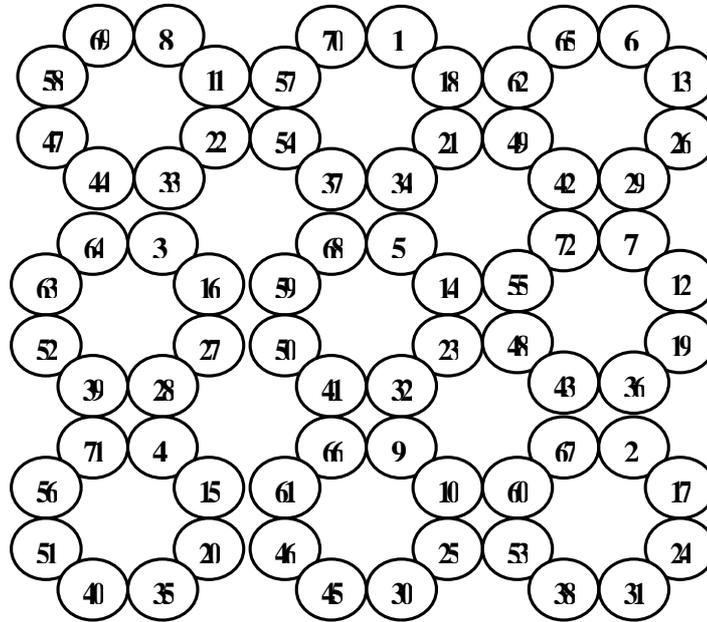
組別	ㄝ	ㄞ	ㄟ	ㄠ	ㄡ	ㄢ	ㄣ	ㄤ	ㄥ
數字	55 72	56 71	57 70	58 69	59 68	60 67	61 66	62 65	63 64

### 5. 【結論】：

其實每宮只要包含不同四種類型之各一組數字(四種類型之數字和等於 292)，再搭配相對位置的排列。如此，即可使「九宮八卦圖」中，每宮 8 個數字和皆等於 292。因而創造出「九宮八卦圖」。而以此方式創造而成的「九宮八卦圖」蘊含了許多秘密。

(十一) 「九宮八卦圖」完成圖。

【個人的九宮八卦】

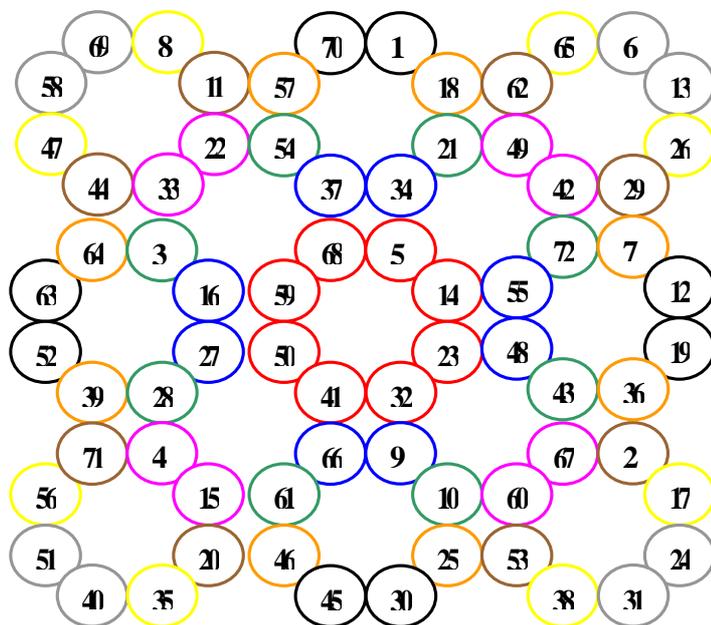


三. 「九宮八卦圖」之探索與發現

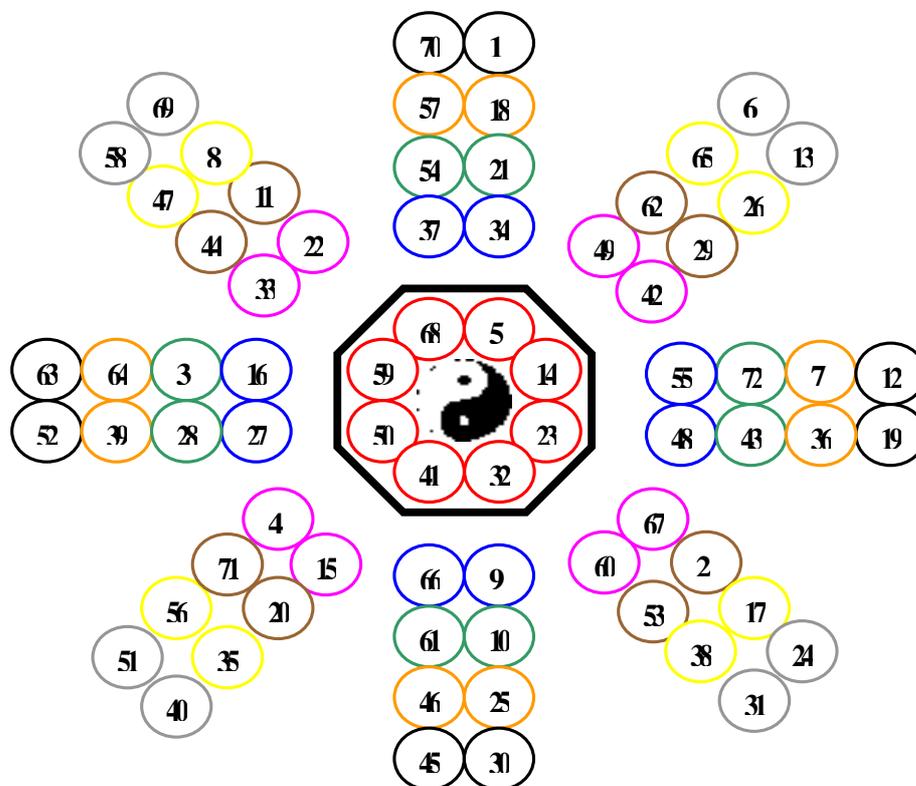
由於我們的「九宮八卦圖」是以 3\*3 階魔方陣為藍圖，旋轉 90、180、270 度設計四個 3\*3 階單位旋轉魔方陣。再依此單位旋轉魔方陣為藍圖，製作出「九宮八卦圖」之單位方陣。再以此八個「九宮八卦圖」單位方陣為基礎，順時針方向分別依序填入九宮方格之各相對位置中，創造出的「九宮八卦圖」。從中可以發現其中蘊含了許多的秘密：

- (一) 符合了易經八卦圖形。我們所創造的「九宮八卦圖」依四面八方「對稱原則」所成的 8 個數字和亦等於「九宮八卦圖」之規則的和，為 292。(下圖以顏色作區分，並加以變形與易經八卦圖形作對照及說明)使得我們所創造的「九宮八卦圖」更成為名副其實的「九宮八卦圖」。

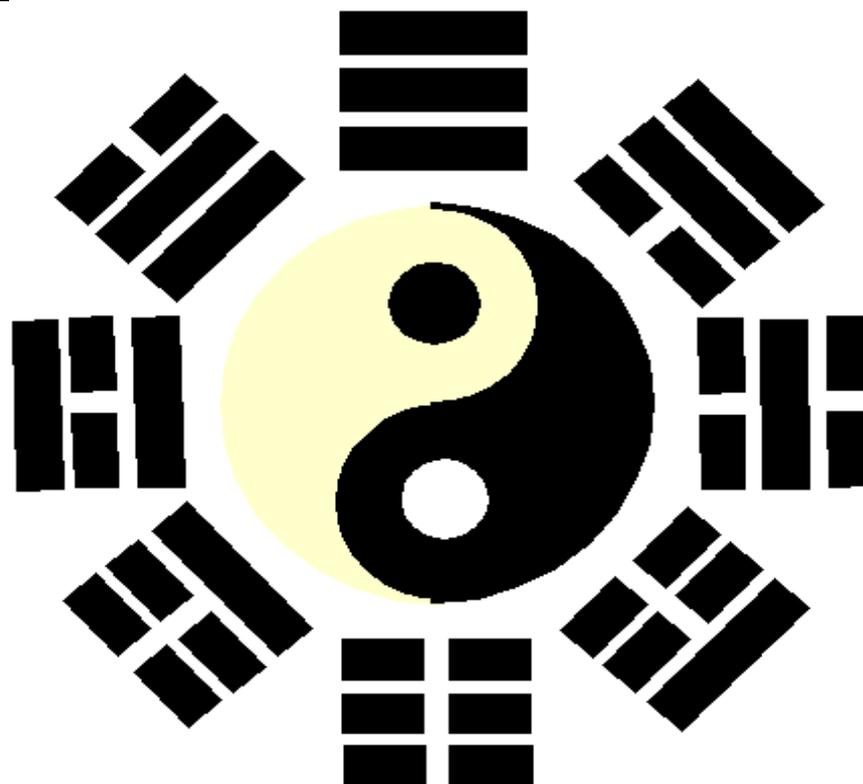
【變形前「九宮八卦圖」】



【變形後「九宮八卦圖」】



【易經八卦圖】



【Ex】(承上圖)

1. 紅色所形成的 8 個數字和：

$$68+5+14+23+32+41+50+59=292$$

2. 藍色所形成的 8 個數字和：

$$37+34+55+48+9+66+27+16=292$$

3. 綠色所形成的 8 個數字和：

$$54+21+72+43+10+61+28+3=292$$

4. 粉紅色所形成的 8 個數字和：

$$49+42+67+60+15+4+33+22=292$$

5. 橘色所形成的 8 個數字和：

$$57+18+7+36+25+46+39+64=292$$

6. 咖啡色所形成的 8 個數字和：

$$62+29+2+53+20+71+44+11=292$$

7. 黃色所形成的 8 個數字和：

$$65+26+17+38+35+56+47+8=292$$

8. 黑色所形成的 8 個數字和：

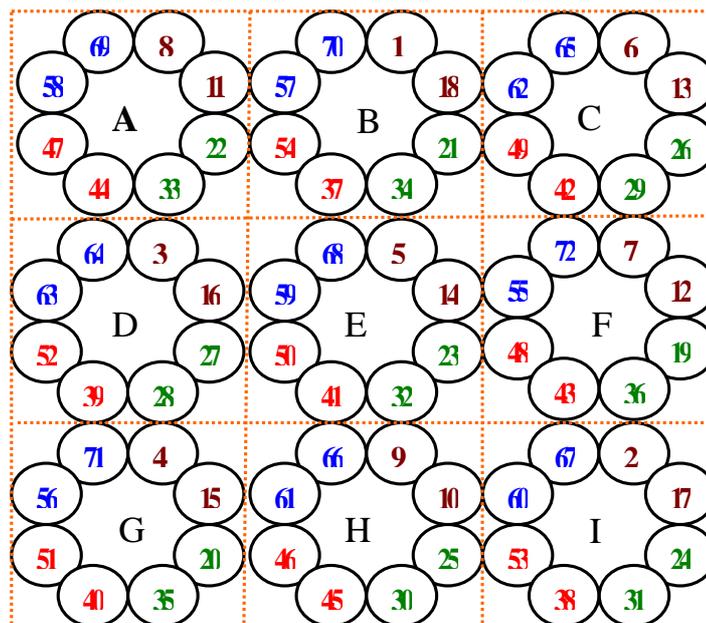
$$70+1+12+19+45+30+63+52=292$$

9. 灰色所形成的 8 個數字和：

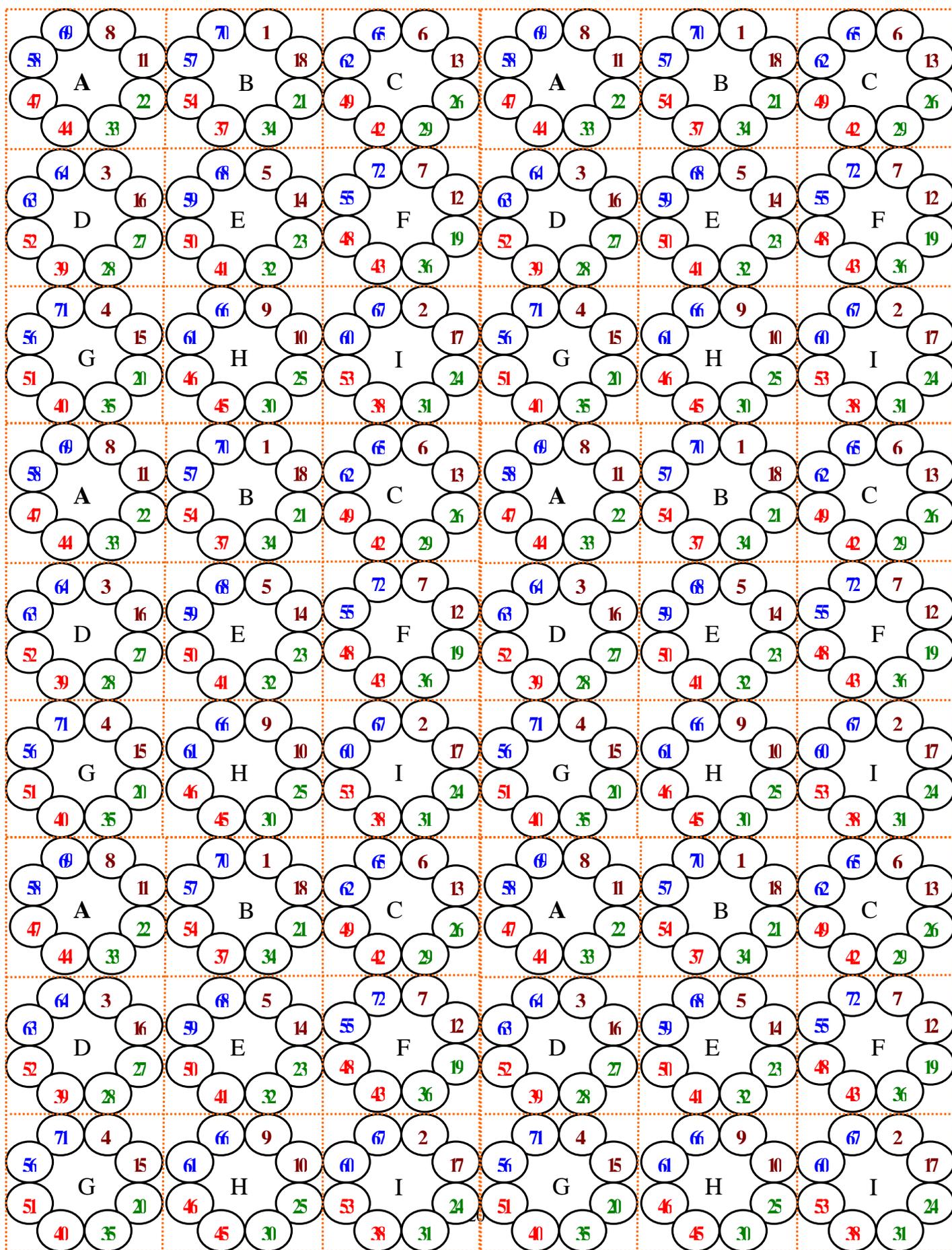
$$6+13+24+31+51+40+58+69=292$$

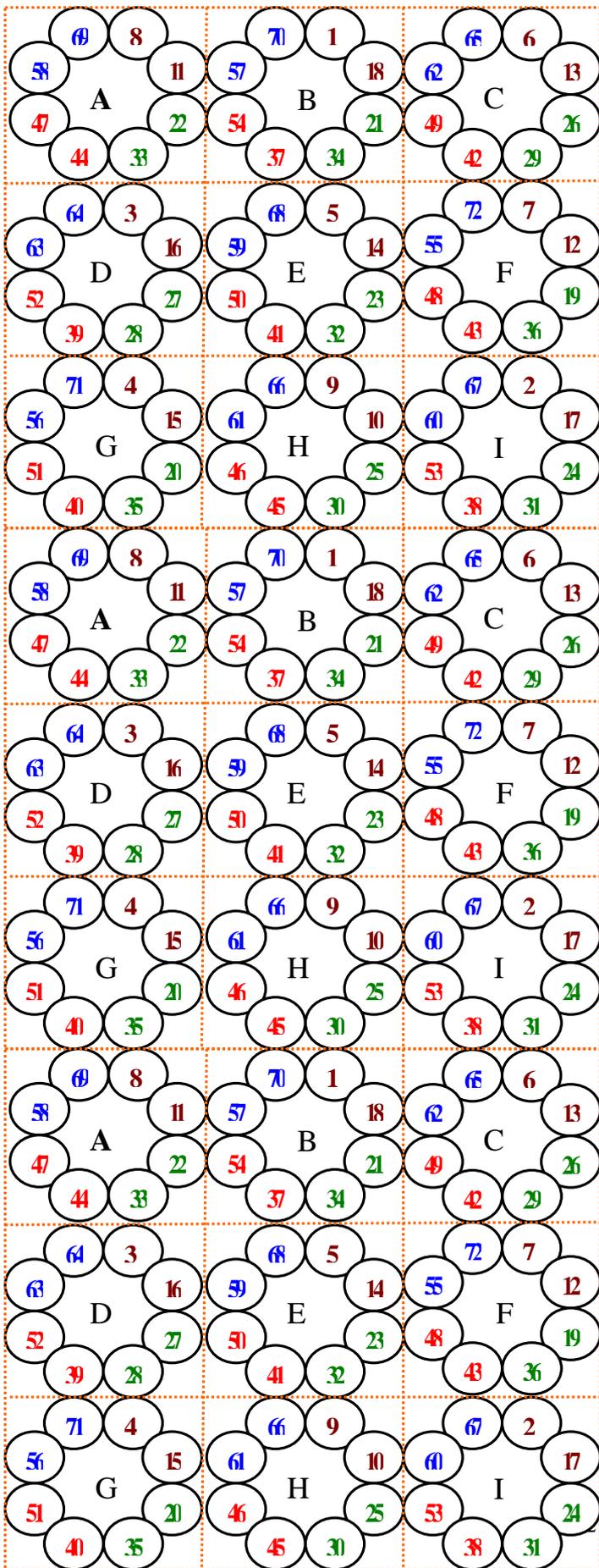
(二) 將我們所創造的「九宮八卦圖」分割成九宮方格(我們加以編號作為排列之識別, 以下為分割圖形), 並以「九宮八卦圖」為基本單位, 以連接九宮方格的方式創造出「九宮八卦方陣圖」(附圖於下頁)。如此, 只要在「九宮八卦方陣圖」中任意圍成九宮方格, 即成為另一個「九宮八卦圖」(其中任意圍成的九宮方格必須包含 A、B、C、D、E、F、G、H、I 之單位方格的識別編號)。

【分割圖形】



## 【九宮八卦方陣圖】





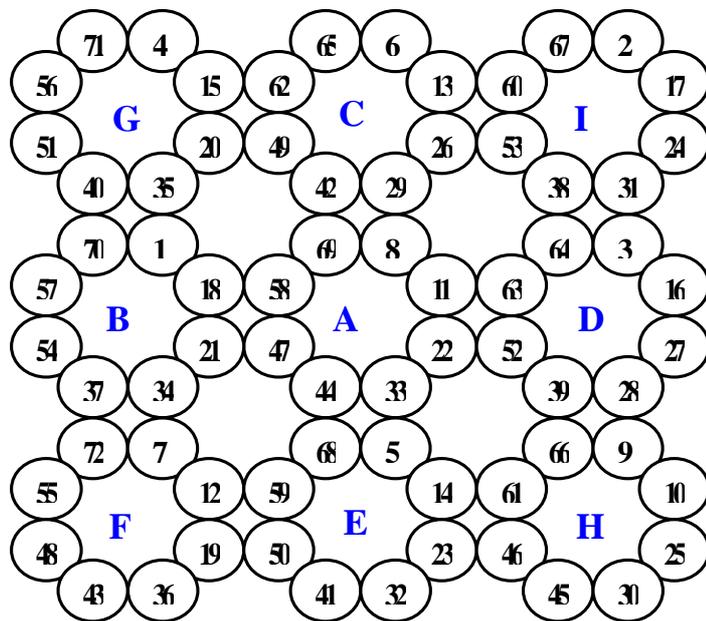
(三) 九宮八卦圖之總數：將我們所創造的「九宮八卦圖」分割為九宮方格，加上英文代號作為識別，並以單位方格為基礎，再作任意順序之排列為原圖形結構，如此即形成新的「九宮八卦圖」。依此方法，由於「九宮八卦圖」之每單位方格可以有九種方格選擇；又因為對稱重複，故再除以 4。所以，我們可以創作出：

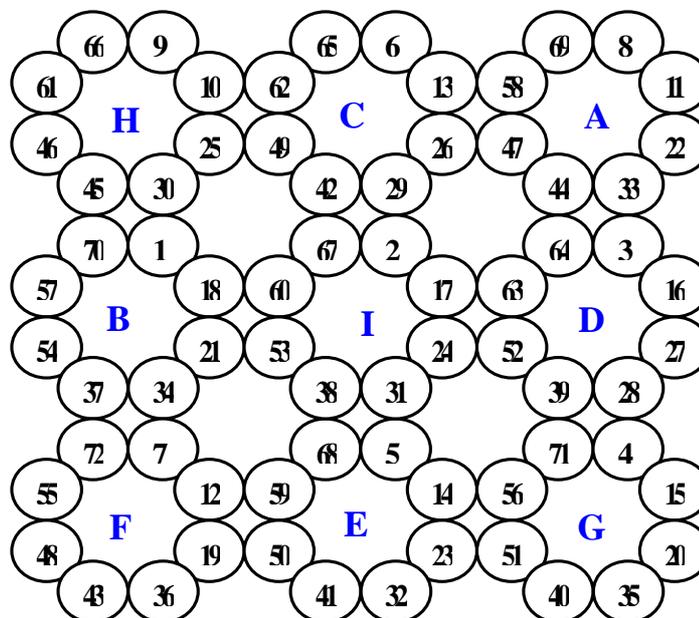
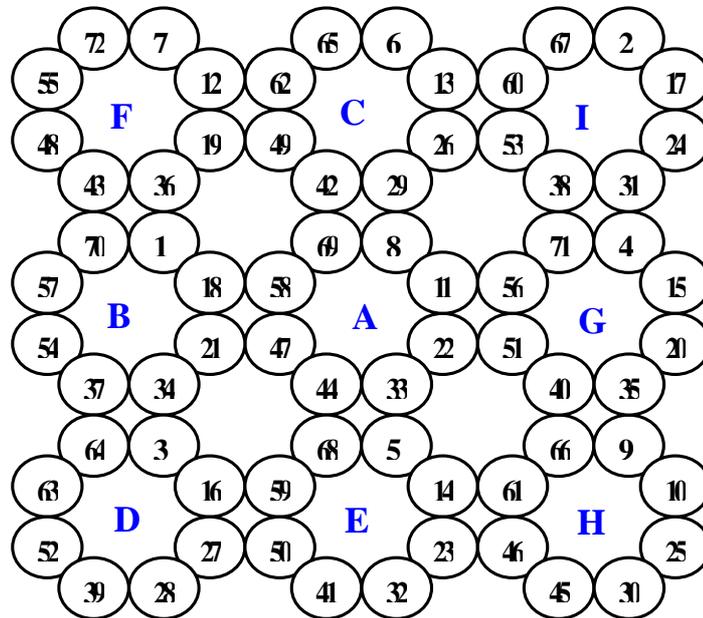
$$\frac{(9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{4} = 9! / 4 = 90720 \text{ 個「九宮八卦圖」。}$$

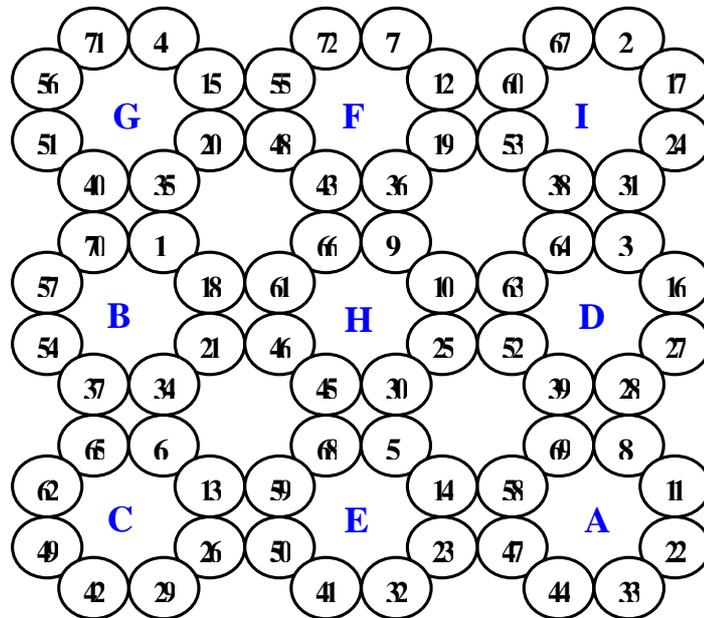
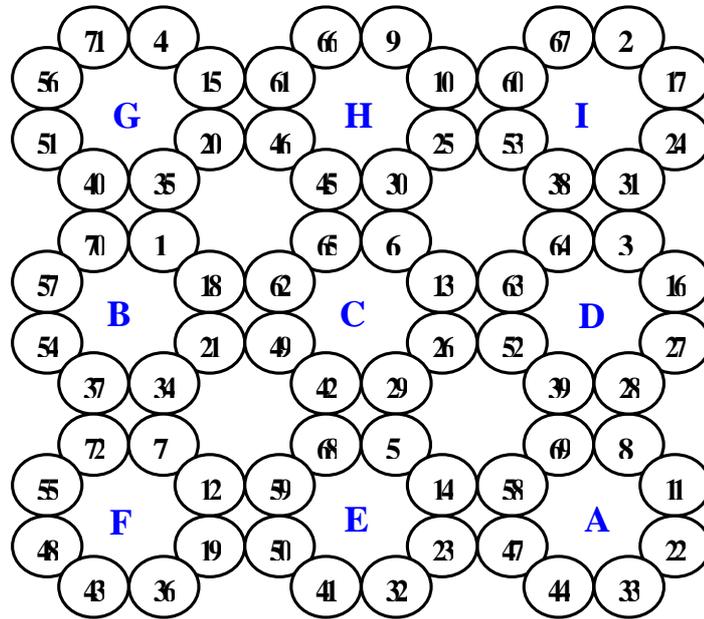
(四) 此外，每組數字和皆相同，若以組為單位，則由於每組有九種位置可以選擇；而每一組又由兩個數字所組成，再乘以 2；且每一宮需有四組，四次乘方；又因為對稱重複，故再除以 4。所以，我們可以再創作出：

$$\frac{[(9! \times 2!)]}{4}^4 \text{ 個「九宮八卦圖」。}$$

(以下舉出幾個不同型式的「九宮八卦圖」作為說明)







## 陸、研究結果

### 一. 「九宮八卦圖」之延伸及推廣

- (一) 由第伍大點之二的(十一)【證明】 < Page-11 > 的內容得知：每宮只要包含不同四種類型之各一組數字(四種類型之數字和等於 292)，再搭配相對位置的排列。如此，即可使「九宮八卦圖」中，每宮中之 8 個數字和皆等於 292。因而創造出「九宮八卦圖」。
- (二) 根據上述，我們可以將 1 到 72 個數字加以分組，分為四種類型，(四種類型之數字和等於 292)，再搭配相對位置的排列，即可創造出新的「九宮八卦圖」。因為每種類型皆有 9 組數字，而一個完整的「九宮八卦圖」是由四種類型的數字排列而成。所以，我們以 4 及 9 的的倍數加以分類及延伸，創造新的「九宮八卦圖」。

#### 【Ex】

##### 1. 類型一

【A】	01	02	03	04	05	06	07	08	09
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
【B】	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
【C】	37	38	39	40	41	42	43	44	45
	46	47	48	49	50	51	52	53	54
【D】	55	56	57	58	59	60	61	62	63
	64	65	66	67	68	69	70	71	72

- (1) 一個完整的「九宮八卦圖」是由四種類型的數字排列而成。所以，我們將【A】至【D】的四類，互相搭配，使兩兩類型為一組，再將一組倒轉排列。雖然，合併後只剩兩種類型，但每一種類型皆有 18 組數字。所以，再將合併後的類型任取出 9 組數字。如此，即可組成「九宮八卦圖」所需之四種類型的數字。(以下我們以【A】【C】、【B】【D】為一組，加以舉例說明)

< ex > 分類及倒轉排列：

【A】	01	02	03	04	05	06	07	08	09
【C】	54	53	52	51	50	49	48	47	46
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	45	44	43	42	41	40	39	38	37

(【A】【C】之上下兩兩的數字和皆等於 55 )

【B】	19	20	21	22	23	24	25	26	27
【D】	72	71	70	69	68	67	66	65	64
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	63	62	61	60	59	58	57	56	55

(【B】【D】之上下兩兩的數字和皆等於 91 )

(2)【A】【C】、【B】【D】兩兩合併後形成 18 組數字，再將其中任意取出 9 組數字為同一類型。如此，即可構成「九宮八卦圖」所需之四種類型的數字。以下我們舉例說明：

< ex > 對半分開：

【A'】	01	02	03	04	05	06	07	08	09
	54	53	52	51	50	49	48	47	46

(上下兩兩的數字和皆等於 55)

【B'】	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	45	44	43	42	41	40	39	38	37

(上下兩兩的數字和皆等於 55)

【C'】	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	72	71	70	69	68	67	66	65	64

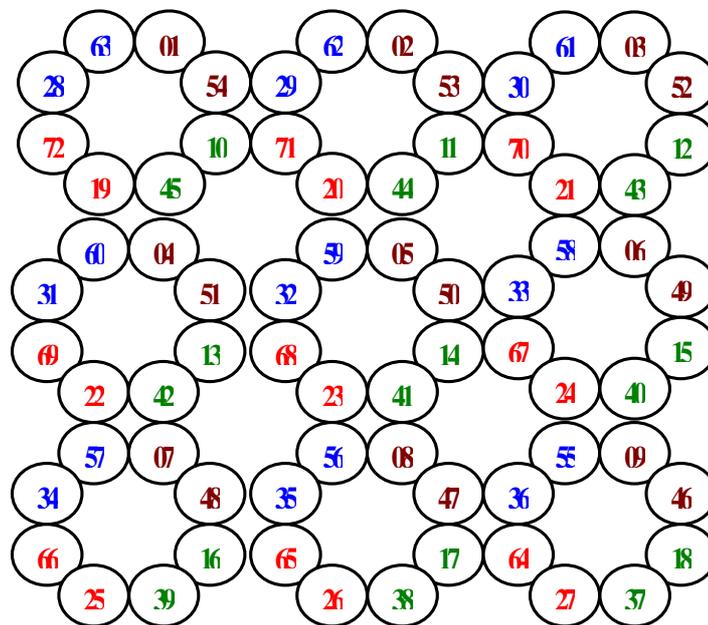
(上下兩兩的數字和皆等於 91)

【D'】	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	63	62	61	60	59	58	57	56	55

(上下兩兩的數字和皆等於 91)

- (3) 由上述之分析，可得到一個完整的「九宮八卦圖」材料庫：四種類型的數字（四種類型之數字和為【A'】+【B'】+【C'】+【D'】=55+55+91+91=292）。如此，搭配相對位置排列，即能創造出新的「九宮八卦圖」。

**【新創的九宮八卦圖】**



- (4) 依照此種方法，兩兩類型為一組之組合，即可有

$$C_2^4 C_2^2 / 2! = \frac{4 * 3 * 2 * 1}{(2! * 2!) * 2!} = 3 \text{ 種的新式「九宮八卦圖」。}$$

## 2. 類型二

【A】 01 02 03 04 05 06 07 08 09  
【B】 10 11 12 13 14 15 16 17 18  
【C】 19 20 21 22 23 24 25 26 27  
【D】 28 29 30 31 32 33 34 35 36  
【E】 37 38 39 40 41 42 43 44 45  
【F】 46 47 48 49 50 51 52 53 54  
【G】 55 56 57 58 59 60 61 62 63  
【H】 64 65 66 67 68 69 70 71 72

(1) 一個完整的「九宮八卦圖」是由四種不同類型的數字排列而成。所以，我們將【A】至【H】八種類型數字，以任意搭配，使其兩兩類型為一組，再加上兩兩類型之任一組倒轉排列，即可組合成「九宮八卦圖」所需之四種類型的數字。(以下我們以【A】【E】、【B】【G】、【C】【H】、【D】【F】為一組，舉例說明)

< ex > 分類及倒轉排列：

【A】 01 02 03 04 05 06 07 08 09  
【E】 45 44 43 42 41 40 39 38 37

(【A】【E】之上下兩兩的數字和皆等於 46 )

【B】 10 11 12 13 14 15 16 17 18  
【G】 63 62 61 60 59 58 57 56 55

(【B】【G】之上下兩兩的數字和皆等於 73 )

【C】 19 20 21 22 23 24 25 26 27  
【H】 72 71 70 69 68 67 66 65 64

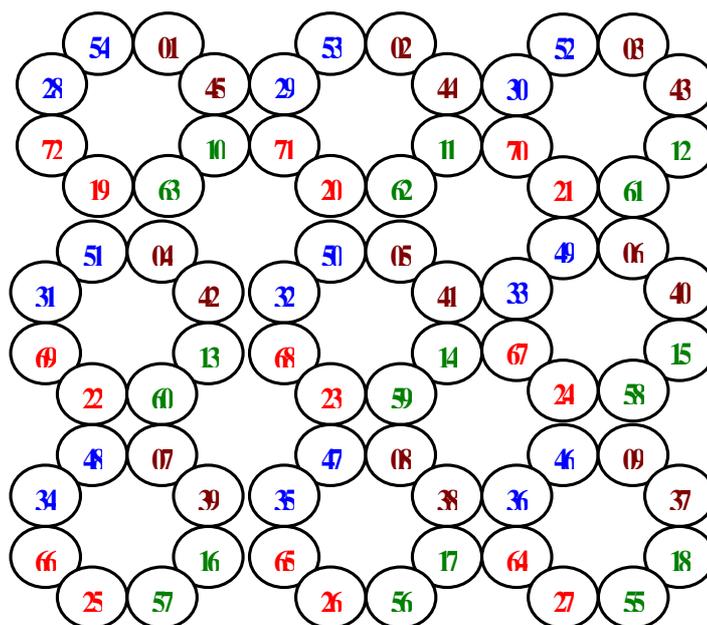
(【C】【H】之上下兩兩的數字和皆等於 91 )

【D】 28 29 30 31 32 33 34 35 36  
【F】 54 53 52 51 50 49 48 47 46

(【D】【F】之上下兩兩的數字和皆等於 82 )

- (2) 由上述之分析，即可再得到一個完整「九宮八卦圖」的材料庫，四種類型的數字（四種類型之數字和等於  $46+73+91+82=292$ ）。如此，再搭配相對位置排列，即可創造出新的「九宮八卦圖」。

**【新創的九宮八卦圖】**



- (3) 依照此種方法，兩兩類型為一組之組合，即可有

$$C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2 / 4! = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(2! * 2! * 2! * 2!) * 4!} = 105$$

種的新式「九宮八卦圖」。

### 3. 類型三

【A】	01	09	17	25	33	41	49	57	65
【B】	02	10	18	26	34	42	50	58	66
【C】	03	11	19	27	35	43	51	59	67
【D】	04	12	20	28	36	44	52	60	68
【E】	05	13	21	29	37	45	53	61	69
【F】	06	14	22	30	38	46	54	62	70
【G】	07	15	23	31	39	47	55	63	71
【H】	08	16	24	32	40	48	56	64	72

(1) 一個完整的「九宮八卦圖」是由不同的四種類型數字排列而成。所以，我們將【A】至【H】八種類型數字，以任意搭配，使兩兩類型為一組，再加上兩兩類型之任一組倒轉排列，即可組合成「九宮八卦圖」所需之四種類型的數字。以下我們以【A】【E】、【B】【G】、【C】【H】、【D】【F】為一組，舉例說明：

< ex > 分類及倒轉排列：

【A】	01	09	17	25	33	41	49	57	65
【E】	69	61	53	45	37	29	21	13	05

(【A】【E】之上下兩兩的數字和皆等於 70)

【B】	02	10	18	26	34	42	50	58	66
【G】	71	63	55	47	39	31	23	15	07

(【B】【G】之上下兩兩的數字和皆等於 73)

【C】	03	11	19	27	35	43	51	59	67
【H】	72	64	56	48	40	32	24	16	08

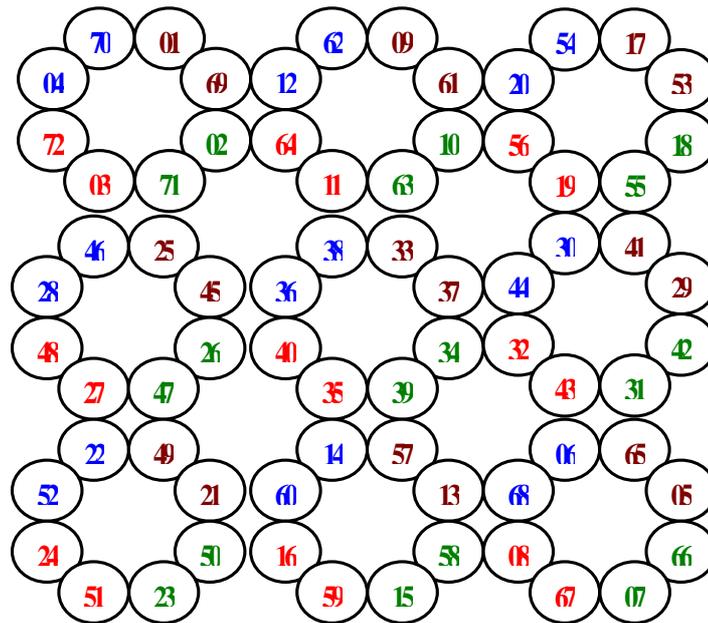
(【C】【H】之上下兩兩的數字和皆等於 75)

【D】	04	12	20	28	36	44	52	60	68
【F】	70	62	54	46	38	30	22	14	06

(【D】【F】之上下兩兩的數字和皆等於 74)

- (2) 由上述之分析，即可再得到一個完整「九宮八卦圖」的材料庫，四種類型的數字（四種類型之數字和等於  $70+73+75+74=292$ ）。如此，再搭配相對位置排列，即創造出新的「九宮八卦圖」。

### 【新創的九宮八卦圖】



- (3) 依照此種方法，兩兩類型為一組之組合，即可有

$$C_2^8 C_2^6 C_2^4 C_2^2 / 4! = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1}{(2! * 2! * 2! * 2!) * 4!} = 105$$

種的新式「九宮八卦圖」。

- (三) 上述新創的九宮八卦圖皆符合文中第五大點之三「九宮八卦圖」之探索與發現中所提及的（一）（二）（三）與（四）之性質，< Page-16 >。

## 二. 圖形變換之延伸及推廣

- (一) 承第五大點二之(十一)【證明】<Page-11>的內容得知：其實每宮只要包含了四種類型之各一組數字(四種類型之數字和等於292)，再搭配相對位置的排列。如此，即可使「九宮八卦圖」中，每宮中之八個數字和皆等於292。因而創造出「九宮八卦圖」。依照這種方法，再承第五大點三之(二)及(三)<Page-19>，我們可以把圖形作變換，將「九宮八卦圖」作圖形變換之延伸及推廣。(以下舉幾個例子作說明)

【Ex】

1. 用1到48的連續48個數，填入圖形中(在下一頁)，使每8個數字所圍成的圖形之數字和等於：

$$\frac{(1+48)*48}{2} * \frac{1}{6} = 196$$

分組內容：

【A】 01 02 03 04 05 06  
12 11 10 09 08 07

(上下兩兩的數字和皆等於13)

【B】 13 14 15 16 17 18  
24 23 22 21 20 19

(上下兩兩的數字和皆等於37)

【C】 25 26 27 28 29 30  
36 35 34 33 32 31

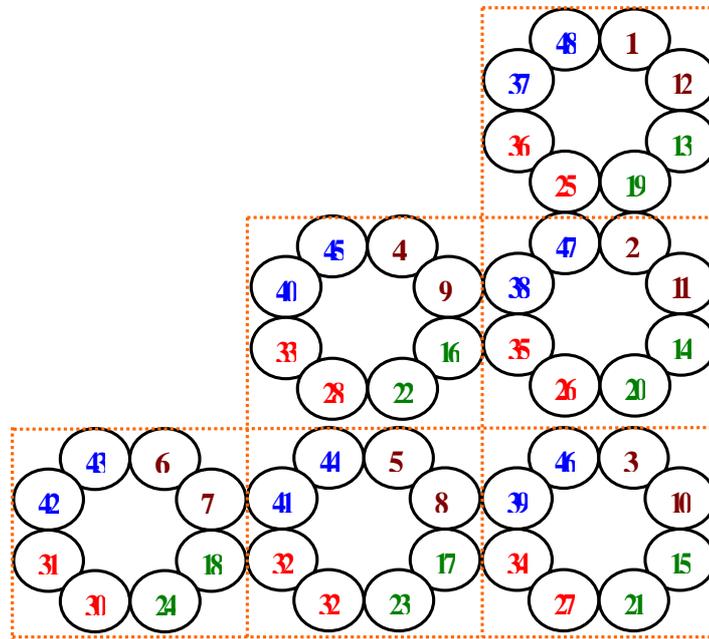
(上下兩兩的數字和皆等於61)

【D】 37 38 39 40 41 42  
48 47 46 45 44 43

(上下兩兩的數字和皆等於85)

$$\text{【A】} + \text{【B】} + \text{【C】} + \text{【D】} = 13 + 37 + 61 + 85 = 196$$

**【完成圖】**



2. 用 1 到 56 的連續 56 個數填入圖形中 (在下一頁), 使每 8 個數字所圍成的圖形之數字和等於 :

$$\frac{(1 + 56) * 56}{2} * \frac{1}{7} = 228$$

分組內容 :

- 【A】** 01 02 03 04 05 06 07  
14 13 12 11 10 09 08

(上下兩兩的數字和皆等於 15)

- 【B】** 15 16 17 18 19 20 21  
28 27 26 25 24 23 22

(上下兩兩的數字和皆等於 43)

【C】 29 30 31 32 33 34 35  
 42 41 40 39 38 37 36

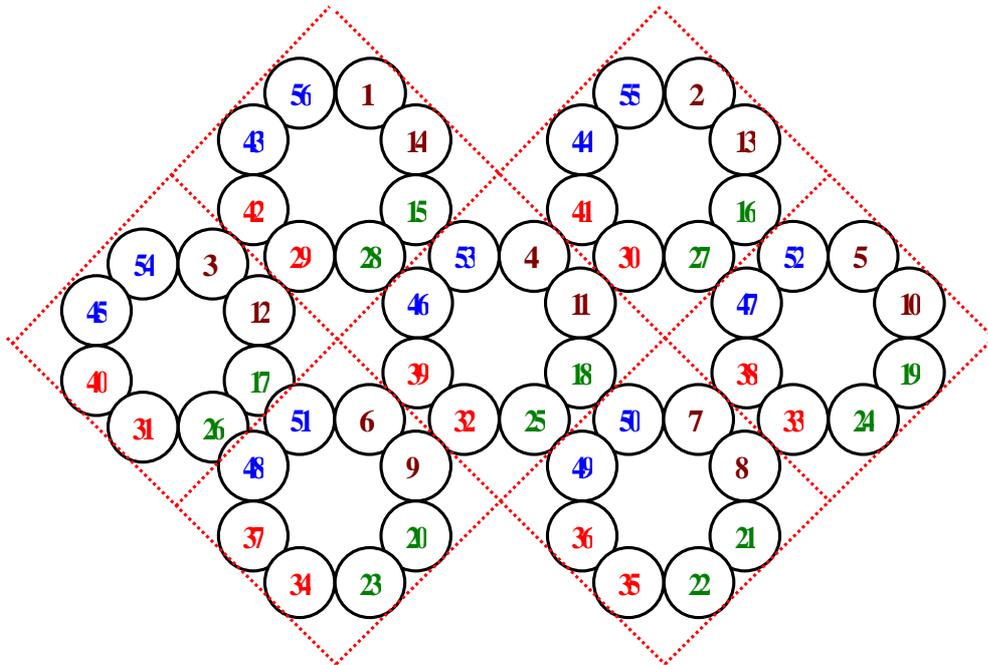
(上下兩兩的數字和皆等於 71)

【D】 43 44 45 46 47 48 49  
 56 55 54 53 52 51 50

(上下兩兩的數字和皆等於 99)

$$\text{【A】} + \text{【B】} + \text{【C】} + \text{【D】} = 15 + 43 + 71 + 99 = 228$$

【完成圖】



3. ~ 依此方式推廣及延伸 ~

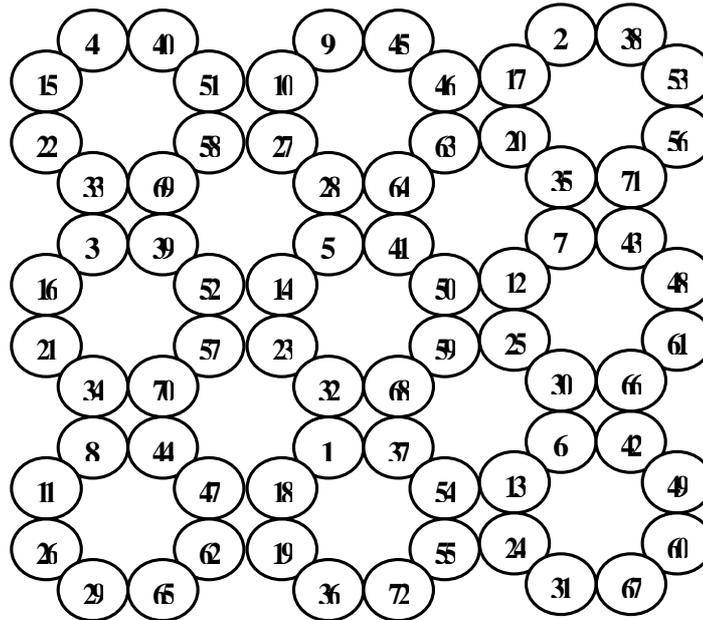
(二) 由上述舉例說明得知：我們可以將宋朝的數學家丁東易所寫的〈大衍索隱〉三卷中的下卷「九宮八卦綜成七十二數河洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」，加以延伸與推廣，創造出形形色色、各式各樣的「八卦幾何圖形圖」(八卦：由 8 個小圓圈擺成一個大圓的八卦圖形)。使距今兩千多年的【丁東易九宮八卦】不再只侷限於九宮格中，而是推廣至「八卦幾何圖形圖」。

## 柒、討論

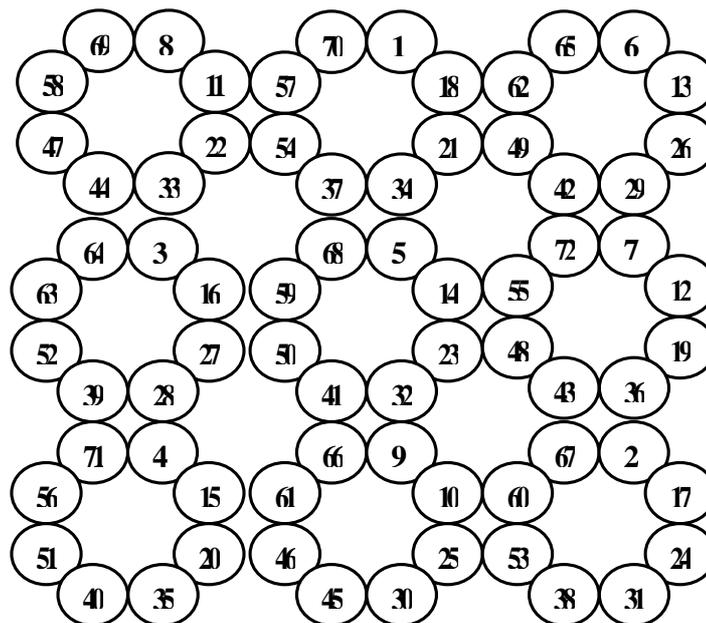
### 一. 【個人的九宮八卦圖】 V.S. 【丁東易的九宮八卦圖】

(一) 【個人的九宮八卦圖】 V.S. 【丁東易的九宮八卦圖】之比較：

【丁東易的九宮八卦圖】



【個人的九宮八卦圖】

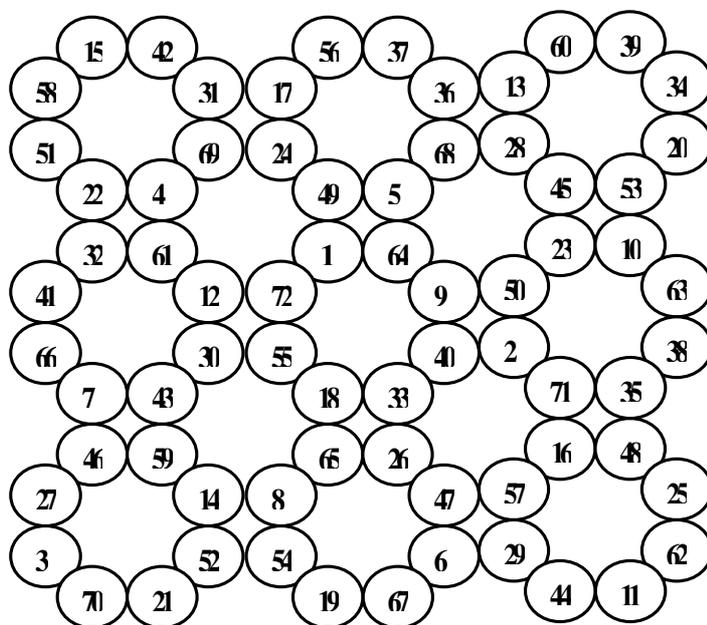


(二) 經發現宋朝數學家丁東易所寫的〈大衍索隱〉三卷中的下卷「九宮八卦綜成七十二數河洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」，與我們所創作之九宮八卦圖有異曲同工之妙。數學家丁東易所寫的【丁東易的九宮八卦圖】與我們所創作的【個人的九宮八卦圖】只有在方位及位置上的不同。因此，在我們所創作的「九宮八卦圖」內，內文第伍大點之三的(四)〈Page-21〉 $[(9! * 2!) / 4]^4$ 種的「九宮八卦圖」內包含了數學家丁東易所寫的「九宮八卦圖」。

(三) 數學家丁東易大師所寫的「九宮八卦圖」中，亦有我們在文中第伍大點之三「九宮八卦圖」之探索與發現中所提及的(二)與(三)之性質，〈Page-19〉。然而，數學家丁東易大師所寫的「九宮八卦圖」中卻沒有我們文中第伍大點之三的(一)所談的性質，〈Page-16〉。

## 二. 【洪上清的九宮八卦圖】之分析與比較

### (一) 【洪上清的九宮八卦圖】



(二) 洪上清同學 (參見附錄一) 的「九宮八卦圖」是以每兩數字為一組，將 1 到 72 的連續 72 個數字分成 36 組，並且使每組之數字和皆等於 73。再創造出【洪上清的九宮八卦圖】。

1 至 72 的個數字總和

$$\frac{72 * (1 + 72)}{2} = 2628$$

以兩兩為一組分成 36 組

$$\frac{72 * (1 + 72)}{2} / 36 = 73$$

分組內容：

組別	A	B	C	D	E	F	G	H	I
數字	1 72	2 71	3 70	4 69	5 68	6 67	7 66	8 65	9 64
組別	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
數字	10 63	11 62	12 61	13 60	14 59	15 58	16 57	17 56	18 55
組別	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
數字	19 54	20 53	21 52	22 51	23 50	24 49	25 48	26 47	27 46
組別	BB	CC	DD	EE	FF	GG	HH	II	JJ
數字	28 45	29 44	30 43	31 42	32 41	33 40	34 39	35 38	36 37

【註】每組之數字和皆相等，皆等於 73。



(3) 分組方式：

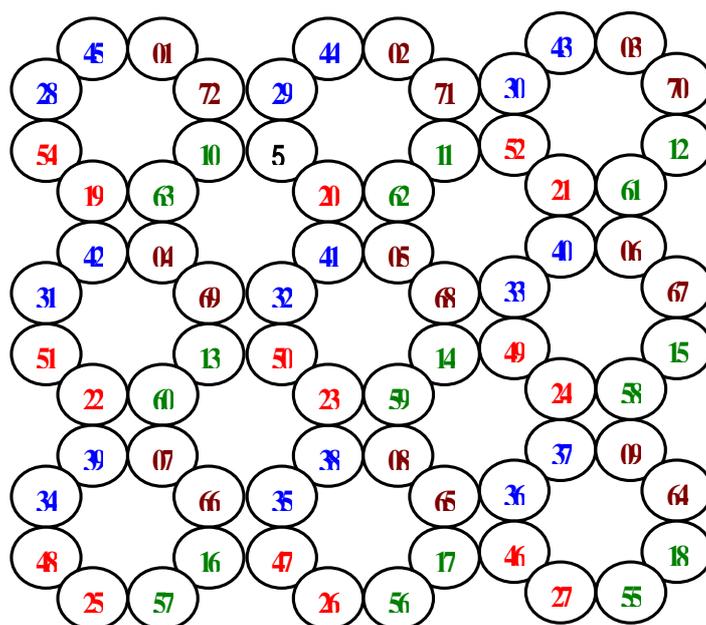
- 洪上清同學的「九宮八卦圖」則是將每一組分為兩兩相加之數字和等於 73，共 36 組，再由 36 組中任意挑出四組數字，組成九宮八卦之一宮，使每宮內之 8 個數字和等於  $73+73+73+73=292$ 。
- 我們所創作的【個人的九宮八卦圖】V.S.【洪上清的九宮八卦圖】之排列方式皆事先將數字分組，但分組方式及性質有所不同：我們所創作的「九宮八卦圖」是將數字組成成四大類，分別是數字和為 19、數字和為 55、數字和為 91、數字和為 127，共四大類。由此四大類分別挑出一組，組成九宮八卦之一宮 8 數，使每一宮內之 8 個數字和等於  $19+55+91+127=292$ 。

(3)「九宮八卦圖」之延伸：

- 在我們所創作出的「個人的九宮八卦圖」中，沒有包含洪上清同學的「九宮八卦圖」。而洪上清同學的「九宮八卦圖」也未包含我們所創作出的「個人的九宮八卦圖」。
- 在我們所創作出的「個人的九宮八卦圖」中，洪上清同學的「九宮八卦圖」並沒有我們文中第五大點之三「九宮八卦圖」之探索與發現所談的（一）之性質，< Page-16 >。

承上述，若將【洪上清同學的九宮八卦圖】依我們所製作的方式製圖：即以洪上清的分組分式，再將此分成四種類型，依順時針方向分別依序填入九宮方格之各相對位置中。如此，則此「九宮八卦圖」就有我們文中第五大點之三「九宮八卦圖」之探索與發現所談的（一）之性質，< Page-16 >。

【分組後之洪上清同學的九宮八卦圖】



## 2. 【相同點】

(1) 排列方式：

- 我們所創作的【個人的九宮八卦圖】V.S.【洪上清的九宮八卦圖】之排列方式皆事先分組，再以每組為單位，依組所在的相對位置，加以填入九宮格內，創造出新式的「九宮八卦圖」。
  
- 洪上清同學的「九宮八卦圖」中，亦有我們在文中第五大點之三「九宮八卦圖」之探索與發現中所提及的（二）、（三）與（四）之性質 < Page-19 >：即以「九宮八卦圖」為基本單位，再以連接九宮格的方式創造出「九宮八卦方陣圖」。如此，只要在「九宮八卦方陣圖」中任意畫個九宮方格，即成為新的「九宮八卦圖」。或將九宮方格任意打散，再作任意順序之排列為原圖形結構。如此即形成新的「九宮八卦圖」。

## 捌、 結論

### 一. 研究方面：

透過「九宮八卦圖」的分析及研究發現：要能創造出「九宮八卦圖」著重點在於數字的組合關係，與每一宮及中間另外形成的四個八卦圖的位置結構。而利用 3\*3 階魔方陣旋轉 90、180、270 度後之相對位置數字和相等的性質，而創造出「九宮八卦圖」。

### 二. 延伸方面：

由於「九宮八卦圖」每一宮是由四種類型數字組合排列而成。因此，由 1 到 72 的連續 72 個數字中，作出不同方式的排列組合，排列出「九宮八卦圖」所需的四種類型之數字組合，將「九宮八卦圖」的創作延伸出更多的形式。

### 三. 推廣方面：

我們將「九宮八卦圖」的圖形不再只侷限於九宮格中，而是將其推廣至各式形形色色的幾何圖形，我們稱它為「八卦幾何圖形圖」。

## 玖、 參考資料

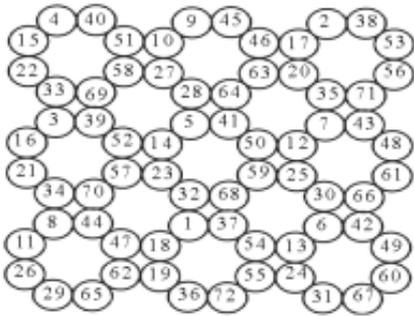
- 一. 黃敏晃，1999 年 8 月，數學大俠秘笈五之「金庸武俠中的數學」，發現科學月刊，第 36 期，遠哲科學教育基金會出版。(http://www.ytlee.org.tw/ytlee2-1/ytlee2-1-36.asp)

## < 附錄一 >

### 壹、數學大俠秘笈五之「金庸武俠中的數學」內文

#### 【丁東易的九宮八卦】

黃敏晃

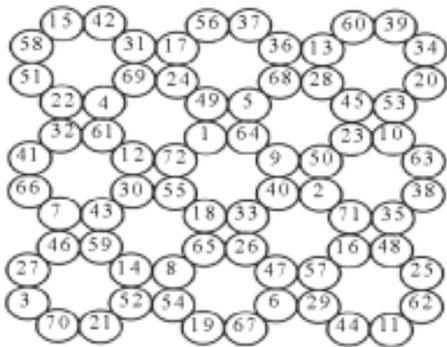


其實，九宮八卦之名稱，來自宋朝另一位數學家丁東易所寫的大衍索隱三卷中的下卷，其中有一個圖和楊輝的「連環」一樣。但丁東易稱之為「九宮八卦綜成七十二數合洛書圖」，簡稱「九宮八卦圖」。這段文字前面的圖就是丁東易書上的九宮八卦了。讀者可以檢查一下，它和楊輝的九宮八卦是否不一樣？至於金庸武俠小說中，黃蓉在沙上畫出來的九宮八卦，到底是哪一個？則只有金庸大俠心中明白啦！

九宮八卦是由 1 到 72 的連續 72 個數，放在九宮格中，每宮 8 個數，而這 8 個數擺成圖圈的八卦形狀。條件是，每格中 8 個數的和，應該相等；不但如此，中間形成的另 4 個八卦（即 8 個數形成的圖圈）中 8 個數也要相等，都等於 292。

這個數 292 是 1 到 72 這 72 個數之和的九分之一： $[1 + 2 + 3 + \dots + 72] \div 9 = (1+72)/2 \times 72/9 = 73 \times 4 = 292$ 。

#### 【洪上清的九宮八卦】



九宮八卦，並不如我國古代數學家想的那麼神祕（有些數學家認為數學是上天透過河圖洛書而暗示了天機，譬如說秦九韶在數書九章的自序中說：「爰自河圖洛書闡發秘奧，八卦九疇錯綜精微，極而至于大衍皇極之用，而人事之變無不該，鬼神之情莫能隱。」不是像他們所想的是上天設計好了放在那裡，讓數學家「妙手偶得」，而是我們可以先努力製造出來的。上面所給的九宮八卦，就是現在

還在高中念書的洪上清同學的作品。至於他如何製造，讓他自己寫文章告訴讀者吧！

作者為台大數學系教授

### **(第三名)**

1. 創意十足，頗具中國特色，實作真實，且具一般化原則
2. 創意佳，發展性強，吸引人作品的表達，作品的原創性都值得讚美。