中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：鋪蓋之研究與探討

關 鍵 詞：缺陷線、特殊形、特特殊形

編　　號：040408

學校名稱：

國立鳳山高級中學

作者姓名：

陳信昌、劉家安、楊力瑋

指導老師：

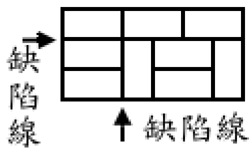
王啟聰、張淑娟

名稱：鋪蓋之研究與探討

內文：

壹、研究動機：

在 921 大地震時，我們發現牆壁上沿著磚塊出現了許多裂痕，這些裂痕有些會貫穿整面牆，有些則否(如圖一)，因此引起我們的好奇心，隨後在我們找尋資料的過程中發現，美國國際科展大會獎第四名(美國大學數學系特別獎)的作品〝磚塊堆疊問題之研究與探討〞中有討論用 1×2 磚塊填滿 m×n 矩形能排出無缺陷線圖形方法數之範圍，但未進一步討論用 1×2 磚塊填滿 m×n 矩形之所有方法數，因此，展開了我們一連串的研究之旅。



(圖一)

貳、研究目的：

一、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形的排法邏輯。

二、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形的排法數。

三、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形中單邊含缺陷線的排法邏輯。

四、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形中單邊含缺陷線的排法數。

五、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形中雙邊含缺陷線的排法邏輯。

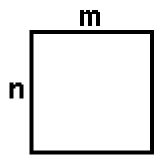
六、探討用 2×1 的矩形填滿 m×n 的矩形中雙邊含缺陷線的排法數。

七、利用 C 語言驗證排法數。

參、研究設備及器材：電腦、人腦、紙、筆。

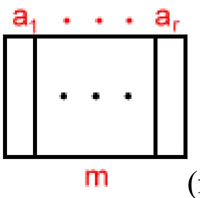
肆、名詞定義：

(一)、 $f_m(n)$ (m, n∈N)表示頂邊的長為 m, 旁邊的長為 n 的矩形(如圖 1.1), 以固定 2×1 的矩形填的總排法數。

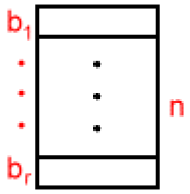


(圖 1.1)

(二)、整數拆解：即是將 m、n 拆解成數個整數相加(如圖 1.2, 圖 1.3)。



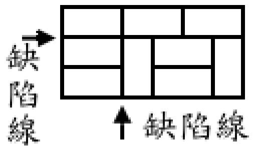
($m=a_1+a_2+\cdots+a_r$)



($n=b_1+b_2+\cdots+b_r$)

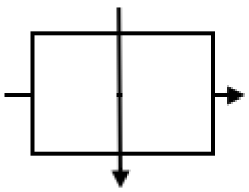
(圖 1.2) (圖 1.3)

(三)、缺陷線：可以從邊的任一點連到另一邊的一點, 所造成的線, 我們稱之為缺陷線。(如圖 1.4)



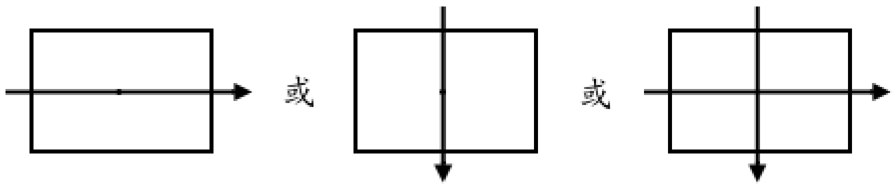
(圖 1.4)

(四)、 $k_m(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 的矩形中單邊不含缺陷線的總排法數, 我們令此圖形為特殊形(如圖 1.5)。



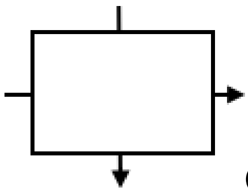
(圖 1.5)

(五)、 $g_m(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 矩形中雙邊至少含有一條缺陷線的總排法數(如圖 1.6)。



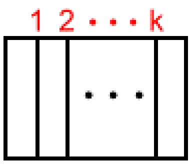
(圖 1.6)

(六)、 $h_m(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 的矩形中雙邊不含缺陷線的總排法數，我們令此圖形為特特殊形(如圖 1.7)。



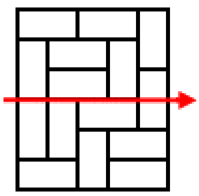
(圖 1.7)

(七)、 $p_m^k(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 的矩形中單邊恰有 k 條直線的總排法數，且另一邊不含缺陷線(如圖 1.8)。



(圖 1.8)

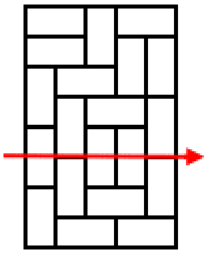
(八)、 $q_m(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 的矩形中，還原成 m×(n−2)及 m×2 時不會改變到倒數第三條橫線(如圖 1.9)。



(圖 1.9)

(九)、 $r_m(n)$ (m, n∈N)表示邊長為 m、n 的矩形中，還原成 m×(n−2)及 m×2 時會

改變到倒數第三條橫線(如圖 1.10)。



(圖 1.10)

伍、研究過程或方法：

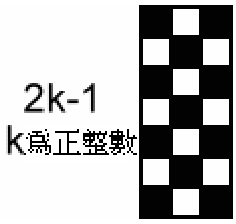
(引理)：

1、當 m、n 中有一為偶數時，其另一數可為任意的正整數。

2、當 m、n 中有一為奇數時，其另一數即為正偶數。

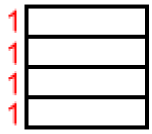
〔證明〕：∵ 一次拿必要拿走一黑一白，即 

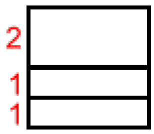
此圖形黑與白的個數無法相等，
所以 n 為奇數時無法完成。

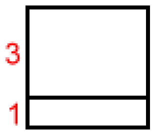


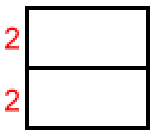
(一)排法邏輯：

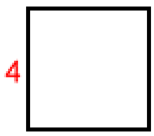
我們將全部的排法數，利用邊長整數拆解的手法，以求得所要之數。例：將 n 分拆成數個正整數之和，如下：當 n＝4 時，

4＝1＋1＋1＋1 …… 

＝2＋1＋1 …… 

＝3＋1 …… 

＝2＋2 …… 

＝4 …… 

證明 $f_m(n)$可以利用整數的拆解即可將全部的情況算到：

【證明】：

定義：文中 l_k 是第 k 條橫線存在的集合，l_k'是第 k 條橫線不存在的的集合。

$U=(l_{n-1})\cup(l_{n-1}')$

$=(l_{n-1})\cup(l_{n-1}'\cap U)$

$=(l_{n-1})\cup[l_{n-1}'\cap(l_{n-2}\cup(l_{n-2}'))$

$=(l_{n-1})\cup[(l_{n-1}'\cap l_{n-2})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2}')]$

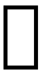
$=(l_{n-1})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2}'\cap U)$

$=(l_{n-1})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2})\cup[l_{n-1}'\cap l_{n-2}'\cap(l_{n-3}\cup l_{n-3}')]$

$\therefore U=(l_{n-1})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2})\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2}'\cap l_{n-3})\cup\cdots\cdots\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2}'\cap\cdots\cdots l_1)\cup(l_{n-1}'\cap l_{n-2}'\cap\cdots\cdots l_1')$　　故得證。

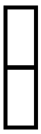
(二)、$f_1(n)=1$

(1)當 n＝2 時：



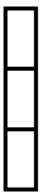
所以 $f_1(2)=1$

(2)當 n＝4 時



所以 $f_1(4)=1$

(3)當 n＝6



所以 $f_1(6)=1$

⋮

$\therefore f_1(n)=1$（$n=2r,\ r\in N$）

(三)、$f_2(n) = \sum \frac{(x_1+x_2+\Lambda\ \Lambda\ +x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\Lambda\ \Lambda\ x_n!} f_2(1)^{x_1} \times k_2(2)^{x_2} \times k_2(3)^{x_3} \times k_2(4)^{x_4} \times \Lambda\ \Lambda\ \times k_2(n)^{x_n}$

而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

1、

(1)$k_2(1)=1$

(2)$k_2(n)=0(n>1,\ n\in N)$

2、

(1)當 $n=1$ 時 $\Rightarrow 1=1$

所以 $f_2(1)=f_2(1)=1$。

(2)當 $n=2$ 時 $\Rightarrow 2=1+1$

$=2$

所以 $f_2(2)=f_2(1)^2+k_2(2)=2$。

(3)當 $n=3$ 時 $\Rightarrow 3=1+1+1$

$=2+1$

$=3$

所以 $f_2(3)=f_2(1)^3+\frac{2!}{1!}f_2(1)k_2(2)+k_2(3)=3$。

(4)當 $n=4$ 時 $\Rightarrow 4=1+1+1+1$

$=2+1+1$

$=3+1$

$=2+2$

$=4$

所以 $f_2(4)=f_2(1)^4+\frac{3!}{2!}f_2(1)^2k_2(2)+\frac{2!}{1!}f_2(1)k_2(3)+\frac{2!}{2!}k_2(2)^2+k_2(4)=5$。

(5)當 $n=5$ 時 $\Rightarrow 5=1+1+1+1+1$

$=2+1+1+1$

$=3+1+1$

$=4+1$

$=2+2+1$

$=3+2$

$=5$

所以 $f_2(5)=f_2(1)^4+\frac{4!}{3!}f_2(1)^3k_2(2)+\frac{3!}{2!}f_2(1)^2k_2(3)+\frac{2!}{1!}f_2(1)k_2(4)+\frac{3!}{2!}f_2(1)k_2(2)^2+$

$\frac{2!}{1!}k_2(2)k_3(3)+k_2(5)=8$。

令 $n=x_1$ 個 1，x_2 個 2，x_3 個 3，……，x_n 個 $(2r+1)$ 時，

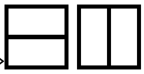
$$f_2(n)=\sum\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\cdots x_n!}f_2(1)^{x_1}\times k_2(2)^{x_2}\times k_2(3)^{x_3}\times k_2(4)^{x_4}\times\cdots\times k_2(n)^{x_n}$$

而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

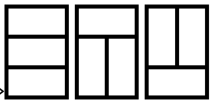
3、$f_2(n)$的另解

2X1 ⇒ 

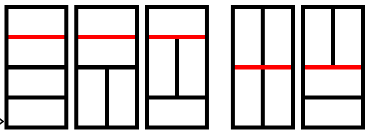
$\therefore f_2(1)=1$

2X2 ⇒ 

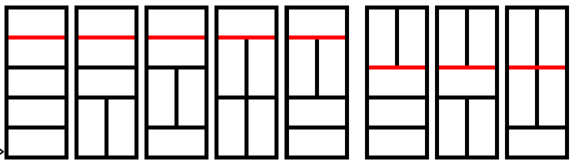
$\therefore f_2(2)=2$

2X3 ⇒ 

$\therefore f_2(3)=3$

2X4 ⇒ 

$\therefore f_2(4)=5$

2X5 ⇒ 

$\therefore f_2(5)=8$

發現：

$f_2(3)=f_2(2)+f_2(1)$

$f_2(4)=f_2(3)+f_2(2)$

$f_2(5)=f_2(4)+f_2(3)$

$$\therefore\begin{cases}a_n=a_{n-1}+a_{n-2} & ,n\geq 3\\ a_1=1,a_2=2\end{cases}$$

在這裡我們可以根據我們所看出來的關係式用【特徵方程式】來求出其通式：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad ,n \ge 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

$$x^2 = x+1$$

$$\therefore x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore f_2(n) = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \cdots\cdots\cdots \text{當 } n=1 \text{ 時} \\ \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \cdots\cdots\cdots \text{當 } n=2 \text{ 時} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

故 $f_2(n) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

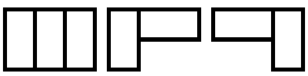
$$\Rightarrow f_2(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

(四)、$f_3(r) = \sum \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)!}{x_1! x_2! x_3! \cdots x_r!} f_3(1)^{x_1} \times k_3(2)^{x_2} \times k_3(3)^{x_3} \times k_3(4)^{x_4} \times \cdots \times k_3(r)^{x_r}$

，$n=2r$，而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+rx_r=r$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_r 為非負整數。

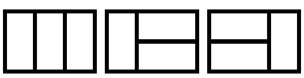
1、$k_3(r)$表示當 $3\times n$ 時所有特殊形的總排法數，$n=2r$，$r\in N$，$r\geqq 1$。

因為 m＝3 時，所以排法只有 3 種（如圖 3.1、圖 3.2、圖 3.3）。

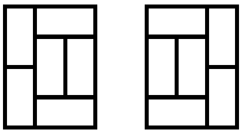


(圖 3.1)(圖 3.2)(圖 3.3)

當 n＝2 時，$k_3(1)=3$。

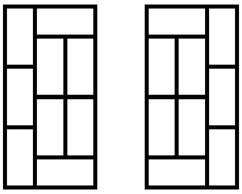


當 n＝4 時，因為(圖 3.1)的情況已被線所切，所以在當 n＞4 時無法存在,



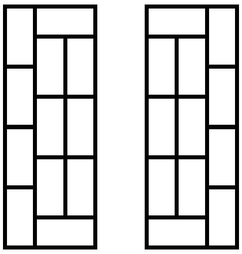
所以 $k_3(2)=2$。

當 $n=6$ 時



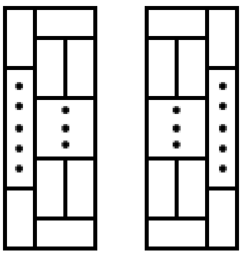
所以 $k_3(3)=2$。

當 $n=8$ 時



所以 $k_3(4)=2$。

當 $n=n$ 時



所以 $k_3(n)=2$。

2、

(1)當 $r=1$ 時 $\Rightarrow$ $1=1$

所以 $f_3(1)=f_3(1)=3$。

(2)當 $r=2$ 時 $\Rightarrow$ $2=1+1$

$=2$

所以 $f_3(2)=f_3(1)^2+k_3(2)=11$。

(3)當 r＝3 時 $\Rightarrow$ 3＝1＋1＋1

＝2＋1

＝3

所以 $f_3(3)=f_3(1)^3+\frac{2!}{1!}f_3(1)k_3(2)+k_3(3)=41$。

(4)當 r＝4 時 $\Rightarrow$ 4＝1＋1＋1＋1

＝2＋1＋1

＝3＋1

＝2＋2

＝4

所以 $f_3(4)f_3(1)^4+\frac{3!}{2!}f_3(1)^2k_3(2)+\frac{2!}{1!}f_3(1)k_3(3)+\frac{2!}{2!}k_3(2)^2+k_3(4)=153$。

(5)當 r＝5 時 $\Rightarrow$ 5＝1＋1＋1＋1＋1

＝2＋1＋1＋1

＝3＋1＋1

＝4＋1

＝2＋2＋1

＝3＋2

＝5

所以 $f_3(5)=f_3(1)^5+\frac{4!}{3!}f_3(1)^3k_3(2)+\frac{3!}{2!}f_3(1)^2k_3(3)+\frac{2!}{1!}f_3(1)k_3(4)+\frac{3!}{2!}f_3(1)k_3(2)^2+$

$\frac{2!}{1!}k_3(2)k_3(3)+k_3(5)=571$。

令 r＝x_1 個 1，x_2 個 2，x_3 個 3，……，x_r 個 r 時,

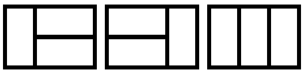
$$f_3(r)=\sum\frac{(x_1+x_2+\Lambda\Lambda+x_r)!}{x_1!x_2!x_3!\Lambda\Lambda x_r!}f_3(1)^{x_1}\times k_3(2)^{x_2}\times k_3(3)^{x_3}\times k_3(4)^{x_4}\times\Lambda\Lambda\times k_3(r)^{x_r}$$

，n＝2r(r∈N)，而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+rx_r=r$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_r 為非負整數。

3、$f_3(n)$的另解：

令 n＝2r(r∈N∪{0})，以 $f_3(n)$表示，且 $f_3(0)=1$。

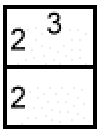
(1)



∴ 3×2 有 3 種排法；

即 $f_3(2)=3$。

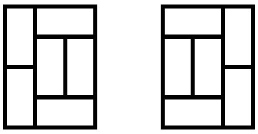
(2)



當 $r=2$(即 $n=4$)時，上面 3×2 的矩形有 $f_3(2)$種排法；

下面 3×2 的矩形有 3 種排法；

∴$f_3(2)\times3=9$ 種排法。

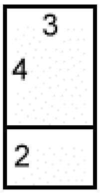


但在此圖形中，會出現我們所定義為“特殊形”的存在，

因此還要再加上兩種（即上圖兩種）⇒稱為直跨“2k”

故 $f_3(4)=3f_3(2)+2=11$ 種。

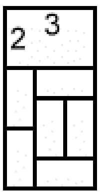
(3)



當 $r=3$(即 $n=6$)時，上面 3×4 的矩形有 $f_3(4)$種排法；

下面 3×2 的矩形有 3 種排法；

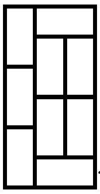
∴有 $f_3(4)\times3=33$ 種排法。



當“直跨 2r”出現時，上面 3×2 的矩形有 $f_3(2)$種排法；

下面 3×4 的矩形有 2 種排法；

∴有 $f_3(2)\times2=6$ 種排法。



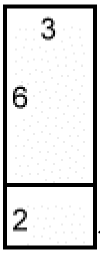
當“直跨 3r”出現時，上面 3×0 的矩形有 $f_3(0)$種排法；

下面 3×6 的矩形有 2 種排法；

∴有 $f_3(0)×2＝2$ 種排法。

故 $f_3(6)＝3 f_3(4)＋2 f_3(2)＋2f_3(0)＝41$ 種。

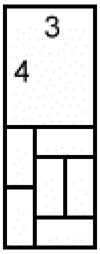
(4)



當 r＝4(即 n＝8)時，上面 3×6 的矩形有 $f_3(6)$種排法；

下面 3×2 的矩形有 3 種排法；

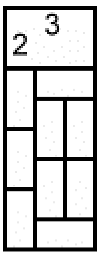
∴有 $f_3(6)×3＝123$。



當“直跨 2r”出現，上面 3×4 的矩形有 $f_3(4)$種排法；

下面 3×4 的矩形有 2 種排法；

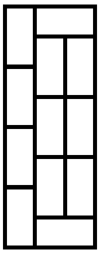
∴有 $f_3(4)×2＝22$ 種。



當“直跨 3r”出現，上面 3×2 的矩形有 $f_3(2)$種排法；

下面 3×6 的矩形有 2 種排法；

∴有 $f_3(2)\times 2=6$ 種。



當“直跨 4r”出現，上面 3×0 的矩形有 $f_3(0)$種排法；

下面 3×8 的矩形有 2 種排法；

∴有 $f_3(0)\times 2=2$ 種。

故 $f_3(8)=3\,f_3(6)+2\,f_3(4)+2\,f_3(2)+2\,f_3(0)=153$ 種。

(5)

由(1)、(2)、(3)、(4)可知

$f_3(n)=3\,f_3(n-2)+2\,f_3(n-4)+2\,f_3(n-6)+\cdots\cdots+2\,f_3(2)+2\,f_3(0)$

可以不難發現當第一式減掉第二式時，可以得到另外一個關係式：(如下)

$$\begin{cases} f_3(n)=3\,f_3(n-2)+2(f_3(n-4)+f_3(n-6)+\cdots\cdots+f_3(2)+1) & \text{—①} \\ f_3(n-2)=3\,f_3(n-4)+2(f_3(n-6)+f_3(n-8)+\cdots\cdots+f_3(2)+1) & \text{—②} \end{cases}$$

①－② => $f_3(n)=4\,f_3(n-2)-f_3(n-4)$

利用已知的關係式，依照 2×n 的方法，利用【特徵方程式】來求出通式：

$x^2=4x-1$

$\therefore x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

$\therefore f_3(r)=4\alpha_1(2+\sqrt{3})^r-\alpha_2(2-\sqrt{3})^r$

$$\begin{cases} 4\alpha_1(2+\sqrt{3})^0-\alpha_2(2-\sqrt{3})^0=1\cdots\cdots\cdots \text{當 } r=0 \\ 4\alpha_1(2+\sqrt{3})^1-\alpha_2(2-\sqrt{3})^1=3\cdots\cdots\cdots \text{當 } r=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\frac{\sqrt{3}+3}{24},\ \alpha_2=\frac{\sqrt{3}-3}{6}$$

$$f_3(n)=f_3(2r)=4\times\frac{\sqrt{3}+3}{24}(2+\sqrt{3})^r-\frac{\sqrt{3}-3}{6}\ (2-\sqrt{3})^r$$

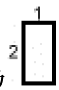
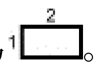
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}[(1+\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})^r-(1-\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})^r]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})^r-(1-\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})^r]$$

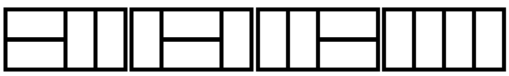
(五)、$f_4(n)=\sum\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\cdots x_n!}f_4(1)^{x_1}\times k_4(2)^{x_2}\times k_4(3)^{x_3}\times k_4(4)^{x_4}\times\cdots\times k_4(n)^{x_n}$

而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

1、$k_4(n)$表示當 4×n 時所有特殊形的總排法數，但當 4×n 的時候會有不同的特殊形的排法，所以我們就將之分為〝2〞，〝2 以外的正偶數〞和〝1 以外的正奇數〞，所以由特殊形之探討之後，即分為：

註：文中出現直的視為，橫的視為。

(1)當 n＝2 時比較特殊：

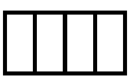


共有四種

(2)當 n＞2 以上時，所有情況可以分成兩大部分探討，一為當 n 為偶數時，另一為當 n 為奇數時：

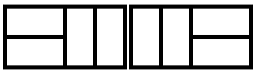
ㄅ、n 為偶數時：

(ㄅ)

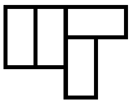


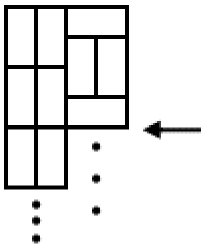
必定會被橫切，所以當 n＞2 時，此種類圖形不可能再出現。

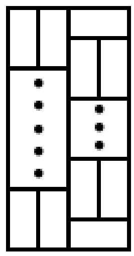
(ㄆ)



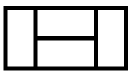
可視為一種圖形，只是對稱。(以下此段以右上圖為例）為了不使這一個圖形能被橫切，即在原圖中有橫跨處的下面那塊轉 90°，變成直的，然後再依序填滿所剩空間（如圖 4.1）。但原本就是直的那一邊一定要繼續放直的，如果橫擺的話可能會被橫切，因為左邊只能擺直的否則無法造成偶數個排列或者被橫切，所以只能繼續放直的（如圖 4.2）。考慮轉動過的那邊，不可以放直的之後，插入一個橫的方塊，不然的話，顯然會與另一邊形成可橫切，若沒有形成可橫切，必定會無法用原始完成全部所剩的空間。所以只要在最後時右邊加入一個橫的變會造成特殊形（如圖 4.3）。


（圖 4.1）

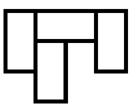

（圖 4.2）

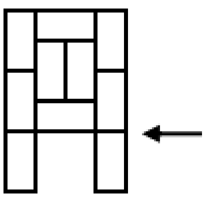

（圖 4.3）

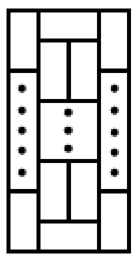
(ㄇ)



此種圖形要不能被橫切，必須與上一種情況相同，先轉原圖之處的下面那塊轉 90°，變成直的，然後再依序填滿所剩空間（如圖 4.4）。考慮中間那兩排，不可以插入一個橫的方塊，否則的話，必定會與旁邊兩排形成可橫切之圖形（如圖 4.5）。所以只要在最後時中間加入一個橫的變會造成特殊形（如圖 4.6）。

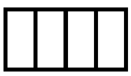

（圖 4.4）


（圖 4.5）


（圖 4.6）

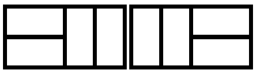
ㄆ、n 為奇數時：

(ㄅ)

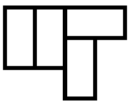


必定會有橫切的情形發生，所以並不會出現此類圖形。

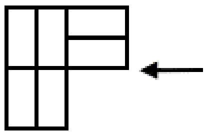
(ㄆ)



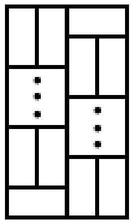
可視為一種圖形，只是為對稱。(以下此段以上圖為例) 為了不使這一個圖形能被橫切，即在原圖中有橫切之處的下面那塊轉 90°，變成直的，然後再依序填滿所剩空間 (如圖 4.7)。考慮原有橫切那邊，不可以有一個橫的方塊未轉成直的方塊，因為若不轉的話，一定會與另一邊形成可橫切的圖形 (如圖 4.8)。若不是此情況，最後必定無法拼排完畢。還有原本全都是直的那邊，一定要在為後才能出現橫的，若在中間出現，會有橫切的圖形會出現 (如圖 4.9)。



(圖 4.7)

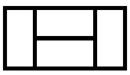


(圖 4.8)

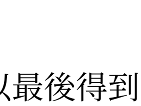


(圖 4.9)

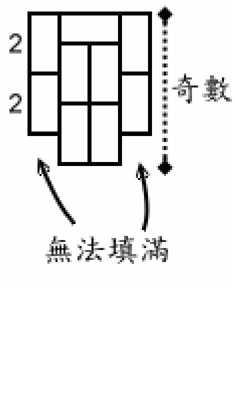
(ㄇ)



一樣跟上一種方法相同，先轉原圖之處的下面那塊轉 90°，變成直的，然後再依序填滿所剩空間 (如圖 4.10)。但是考慮其中兩排若轉成直的，則分散在兩排旁的方塊，底下部份就無法被 2×1 的方塊填滿了(因為此時的 n 為奇數)。所以此圖亦不可能在此情況出現 (如圖 4.11)。



(圖 4.10)



(圖 4.11)

(3)所以最後得到的特殊形個數為：

ㄅ、$k_4(2)=4$

ㄆ、$k_4(2r+2)=3$ ， $r\in N$

ㄇ、$k_4(2r+1)=2$

2、

(1)當 $n=1$ 時 $\Rightarrow$ $1=1$

所以 $f_4(1)=f_4(1)=1$。

(2)當 $n=2$ 時 $\Rightarrow$ $2=1+1$

$=2$

所以 $f_4(2)=f_4(1)^2+k_4(2)=5$。

(3)當 $n=3$ 時 $\Rightarrow$ $3=1+1+1$

$=2+1$

$=3$

所以 $f_4(3)=f_4(1)^3+\frac{2!}{1!}f_4(1)k_4(2)+k_4(3)=11$。

(4)當 $n=4$ 時 $\Rightarrow$ $4=1+1+1+1$

$=2+1+1$

$=3+1$

$=2+2$

$=4$

所以 $f_4(4)=f_4(1)^4+\frac{3!}{2!}f_4(1)^2k_4(2)+\frac{2!}{1!}f_4(1)k_4(3)+\frac{2!}{2!}k_4(2)^2+k_4(4)=36$。

(5)當 $n=5$ 時 $\Rightarrow$ $5=1+1+1+1+1$

$=2+1+1+1$

$=3+1+1$

$=4+1$

$=2+2+1$

$=3+2$

$=5$

所以 $f_4(5)=f_4(1)^5+\frac{4!}{3!}f_4(1)^3k_4(2)+\frac{3!}{2!}f_4(1)^2k_4(3)+\frac{2!}{1!}f_4(1)k_4(4)+\frac{3!}{2!}f_4(1)k_4(2)^2+\frac{2!}{1!}k_4(2)k_3(3)+k_4(5)=95$。

令 $n=x_1$ 個 1，x_2 個 2，x_3 個 3，……，x_n 個$(2r+1)$時,

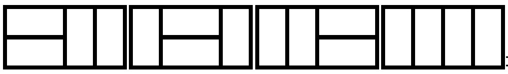
$$f_4(n)=\sum\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\cdots x_n!}\,f_4(1)^{x_1}\times k_4(2)^{x_2}\times k_4(3)^{x_3}\times k_4(4)^{x_4}\times\cdots\times k_4(n)^{x_n}$$

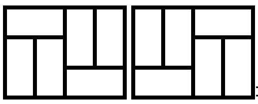
而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

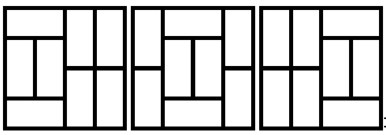
3、 $f_4(n)$的另解：

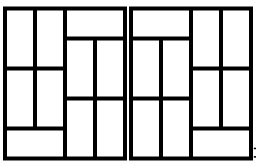
(1)我們先利用特殊形的個數，來推得 4×n 的總排法數：(以下即是)

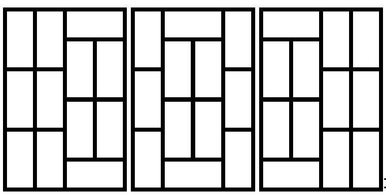
4×1：⇒1 種

4×2：⇒4 種

4×3：⇒2 種

4×4：⇒3 種

4×5：⇒2 種

4×6：⇒3 種

⇒特殊形的規律：

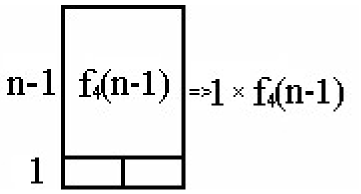
當 n≥3 時

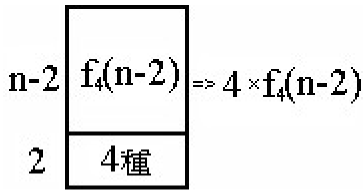
$n=2r$（$r\in N$）…3 種

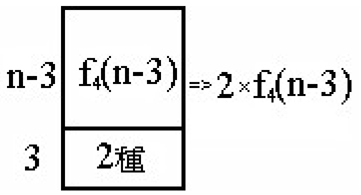
$n=2r-1$（$r\in N$）…2 種

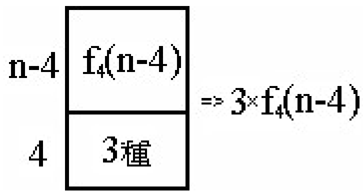
(2)推廣

ㄅ、當 $n=2r$（$r\in N\cap\{0\}$）時









故 $f_4(n)=f_4(n-1)+4f_4(n-2)+2\,f_4(n-3)+3\,f_4(n-4)+\cdots\cdots+2\,f_4(1)+3\,f_4(0)$

※n 為偶數，∴$n-m$（$m=1,2,3,\ \cdots\cdots,\infty$）為偶數時，前係數為 3（即 m 為偶數）

奇數時，前係數為 2（即 m 為奇數）

故⇒ $f_4(n)=f_4(n-1)+4\,f_4(n-2)+2\,(f_4(n-3)+f_4(n-5)+\cdots\cdots+f_4(1))+3\,(f_4(n-4)+f_4(n-6)+\cdots\cdots+f_4(0))$ －①

$f_4(n-2)=f_4(n-3)+4\,f_4(n-4)+2\,(f_4(n-5)+f_4(n-7)+\cdots\cdots+f_4(1))+3\,(f_4(n-6)+f_4(n-8)+\cdots\cdots+f_4(0))$ －②

①－②⇒ $f_4(n)-f_4(n-2)=f_4(n-4)+4\,f_4(n-2)+f_4(n-3)-f_4(n-4)$

$\Rightarrow f_4(n)=f_4(n-1)+5\,f_4(n-2)+f_4(n-3)-f_4(n-4)$

ㄆ、當 $n=2r-1$（$r\in N$）時

$f_4(n)=f_4(n-1)+4\,f_4(n-2)+2\,f_4(n-3)+3\,f_4(n-4)+\cdots\cdots+3\,f_4(1)+2\,f_4(0)$

※n 為奇數，$\therefore n-q$（$q=1,2,3,\ \cdots\cdots,\infty$）為偶數時，前係數為 2（即 q 為奇數）

奇數時，前係數為 3（即 q 為偶數）

故$\Rightarrow f_4(n)=f_4(n-1)+4\,f_4(n-2)+2$（$f_4(n-3)+f_4(n-5)+\cdots\cdots+f_4(0)$）$+3$（$f_4(n-4)+4_4(n-6)+\cdots\cdots+f_4(1)$）$-③$

$f_4(n-2)=f_4(n-3)+4\,f_4(n-4)+2$（$f_4(n-5)+f_4(n-7)+\cdots\cdots+f_4(0)$）$+3$（$f_4(n-6)+f_4(n-8)+\cdots\cdots+f_4(1)$）$-④$

③－④$\Rightarrow f_4(n)-f_4(n-2)=f_4(n-1)+4\,f_4(n-2)+f_4(n-3)-f_4(n-4)$

$\Rightarrow f_4(n)=f_4(n-1)+5\,f_4(n-2)+f_4(n-3)-f_4(n-4)$

同“ ㄅ、當 $n=2r$（$r\in N\cup\{0\}$）時 ”

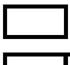
∴規律$\Rightarrow f_4(n)=f_4(n-1)+5\,f_4(n-2)+f_4(n-3)-f_4(n-4)$（$n\geqq 4$）

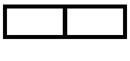
（且已求出 $f_4(0)=1,\ f_4(1)=1,\ f_4(2)=5,\ f_4(3)=11$）

p.s. 由於通式無法由特徵方程式中得出(因為計算非常的繁雜)，所以無法表現出來，只能以關係式來表真，但是我們還是利用了 Mathematica 4 來跑出我們所要的解。(請見附錄 1)

(六)、由於我們的各個公式中，都有 $f_m(1)$或 $f_m(2)$，所以在此我們先探討第一項的關係：

1、當 $m\in 2k(k\in N\cup\{0\})$：

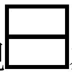
(1)當 $m=2$，$f_2(1)\Rightarrow 2\times 1$ 

(2)當 $m=4$，$f_4(1)\Rightarrow 4\times 1$ 

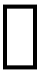
(3)當 m＝6，$f_6(1) \Rightarrow 6\times1$ 

由以上的各種情況可以得知，不管 m 為任何的偶數，則排法永遠必為一種，故在此，僅需要對奇數加以討論即可。

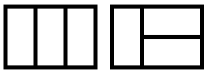
2、當 $m \in 2k+1(k \in N\cup\{0\})$：

在此視為一元素，視為另一元素，

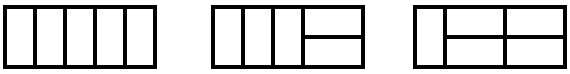
再將此兩種元素重新排列組合而成新的圖形。

(1)當 m＝1，$f_1(2) \Rightarrow 1\times2$  $\Rightarrow f_1(2)=1$。

在此加以分類：

(2)當 m＝3，$f_3(2) \Rightarrow 3\times2 \Rightarrow$ 

1 種　$\frac{2!}{1!1!}$種$\Rightarrow f_3(2)=3$。

(3)當 m＝5，$f_5(2) \Rightarrow 5\times2 \Rightarrow$ 

1 種　$\frac{4!}{1!3!}$種　$\frac{3!}{2!1!}$種

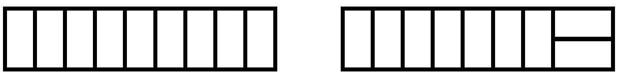
$\Rightarrow f_5(2)=8$。

(4)當 m＝7，$f_7(2) \Rightarrow 7\times2 \Rightarrow$ 

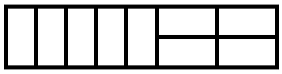
1 種　$\frac{6!}{1!5!}$種

$\frac{5!}{2!3!}$種　$\frac{4!}{3!1!}$種

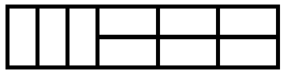
$\Rightarrow f_7(2)=21$。

(5)當 m＝9，$f_9(2) \Rightarrow 9\times2\Rightarrow$ 

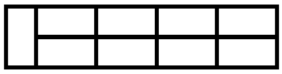
1 種　$\frac{8!}{1!7!}$種



$\frac{7!}{2!5!}$ 種



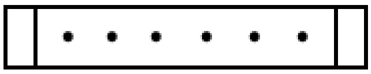
$\frac{6!}{3!3!}$ 種



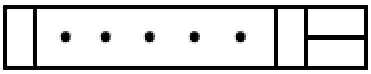
$\frac{5!}{4!1!}$ 種

$\Rightarrow f_9(2)=55$。

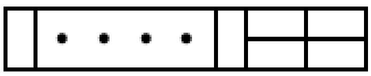
(6)當 $m=m$，$f_m(2) \Rightarrow m\times 2(m=2r-1$，$r\in N)$



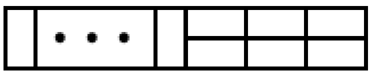
$\Rightarrow 1$ 種



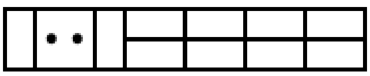
$\Rightarrow \frac{(m-1)!}{1!(m-2)!}$ 種



$\Rightarrow \frac{(m-2)!}{2!(m-4)!}$ 種

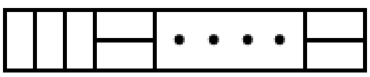


$\Rightarrow \frac{(m-3)!}{3!(m-6)!}$ 種

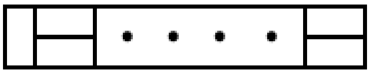


$\Rightarrow \frac{(m-4)!}{4!(m-8)!}$ 種

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$



$\Rightarrow \frac{\left(\frac{m+3}{2}\right)!}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!3!}$ 種



$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{m+1}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!1!}\text{種}$$

最後綜合上面所討論的，推廣可以得到一個結論，為：

(7)$f_m(1)=1$，$m=2r(r\in N)$。

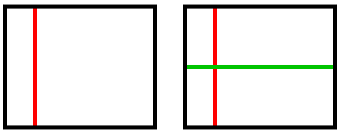
(8)$f_m(2)=1+\sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m-r)!}{r!(m-2r)!}$ ， $m=2r-1(r\in N)$。

因為當 $m\geq 5$ 時，會有 $h_m(n)$的圖形出現，亦會有 $g_m(n)$的圖形，所以我們分成兩大類來討論，即

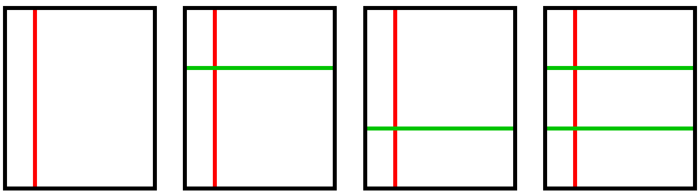
$f_m(n)=g_m(n)+h_m(n)$

(七)、$g_m(n)$的探討(即雙邊至少有一條缺陷線存在的情形)：

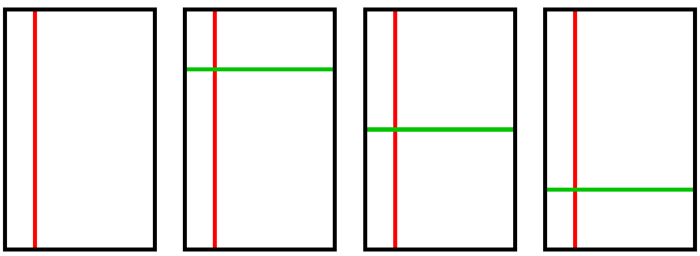
1、第一條直線存在：

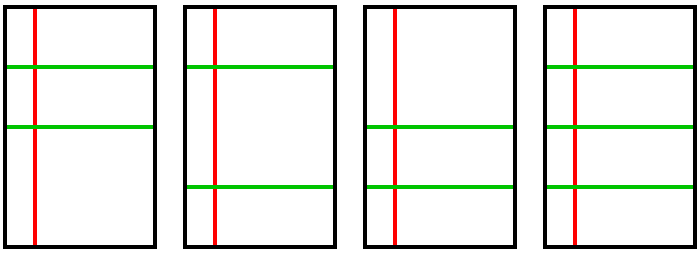


$$\underbrace{f_1(4)f_4(4)}_{\text{(左圖)}}-\underbrace{f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)}_{\text{(右圖)}}$$



$f_1(6)f_4(6)-[f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4)+f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2)]+f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)$





$f_1(8)f_4(8)-[f_1(2)f_4(2)f_1(6)f_4(6)+f_1(4)f_4(4)f_1(4)f_4(4)+f_1(6)f_4(6)f_1(2)f_4(2)]+$
$[f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4)+f_1(2)f_4(2)f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2)+$
$f_1(4)f_4(4)f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)]-f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)\ f_1(2)f_4(2)f_1(2)f_4(2)$

依照這個方法一直做下去可以推得下列的一般式

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_4(x_1)f_4(x_2)f_4(x_3)\ldots\ldots f_4(x_{\frac{n}{2}})$$

且 $x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$f_m(0)=1$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4\ldots\ldots x_{\frac{n}{2}}$ 均為非負整數，且 q 是當 x_i 為最正整數時的 i，i 為最大的值

由以上的情況可以得知，利用線來切割成不同的圖形，再加以計算其排法數，再利用一些組合的觀念，再把它拼湊出來，接著以下均利用上面的邏輯推導、計算，就可以把 m×n 中至少有一條線貫穿的排法數給求出來。

2、第二條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\ldots\ldots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

此時的 q 與先前的條件相同，以下亦如此。

3、第三條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_4(x_1)f_4(x_2)f_4(x_3)\ldots\ldots f_4(x_{\frac{n}{2}})$$

4、第四條直線存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\ldots\ldots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

5、第一、二條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\ldots\ldots f_3(x_{\frac{n}{2}})$

6、第一、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

7、第一、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\ldots\ldots f_3(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

8、第二、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

9、第二、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

10、第三、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_3(x_1)f_3(x_2)f_3(x_3)\ldots\ldots f_3(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

11、第一、二、三條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})\ f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$$

12、第一、二、四條直線同時存在的通式：

$$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$$

$f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$

13、第一、三、四條直線同時存在的通式：

$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})$

$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})\, f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$

14、第二、三、四條直線同時存在的通式：

$\sum -(-1)^q f_2(x_1)f_2(x_2)f_2(x_3)\ldots\ldots f_2(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$

$f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})\, f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$

15、第一、二、三、四條直線同時存在的通式：

$\sum -(-1)^q f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})f_1(x_1)f_1(x_2)$

$f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})\, f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})\, f_1(x_1)f_1(x_2)f_1(x_3)\ldots\ldots f_1(x_{\frac{n}{2}})$

16、將以上的公式整理之後即得出：n(至少一條直線存在)－n(至少兩條直線存在)＋n(至少三條直線存在)－n(至少四條直線存在)。

17、

(1)但當 m 為奇數，總公式：$\sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\ldots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})$

$f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_3}(x_1)f_{k_3}(x_2)\ldots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\ldots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$；

$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$；

k_1、k_2、k_3……、k_m，x_1、x_2、x_3、……、$x_{\frac{n}{2}}$ 均為非負整數；

$k_i \in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

(2)m 為偶數時，總公式為：$\sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\ldots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})$

$f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_3}(x_1)f_{k_3}(x_2)\ldots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\ldots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$

ㄅ、n 為偶數時：

(ㄅ)$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$⋯⋯、$k_m$ 至少有一為奇數，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、⋯⋯、$x_{\frac{n}{2}}$ 均為偶數，$k_i\in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

(ㄆ)$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$⋯⋯、$k_m$ 均為偶數時，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、⋯⋯、$x_{\frac{n}{2}}$ 屬於正整數，

$k_i\in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

ㄆ、n 為奇數時：

$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$⋯⋯、$k_m$ 均為偶數時，

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、⋯⋯、$x_{\frac{n}{2}}$ 屬於正整數

$k_i\in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

以上幾個討論出來的是 m×n 中至少有一條缺陷線存在的排法數，但在 m×n 中還可能出現雙邊均無法破線的特特殊形，所以令特特殊圖形的總排法數為 $h_m(n)$，所以 m×n 的總排法數為上面的一、二項公式加上 $h_m(n)$。

(八)、$h_m(n)$的探討：

1、我們將 $h_m(n)$分成三大類的總合：

(1)恰有線的總排法數再加上 m×2 的的圖形，然後利用旋轉的方式來將線阻擋

，即可成為特特殊形的一種，且我們令此圖形的總排法數為 $p_m^k(n)$。

(2)利用 m×(n－2)的特特殊形的總排法數，再加上 m×2 的圖形，然後一樣利旋轉的方法來將線阻擋，亦即形成了另一種特特殊形，我們令此圖形的總排法數為 $q_m(n)$。

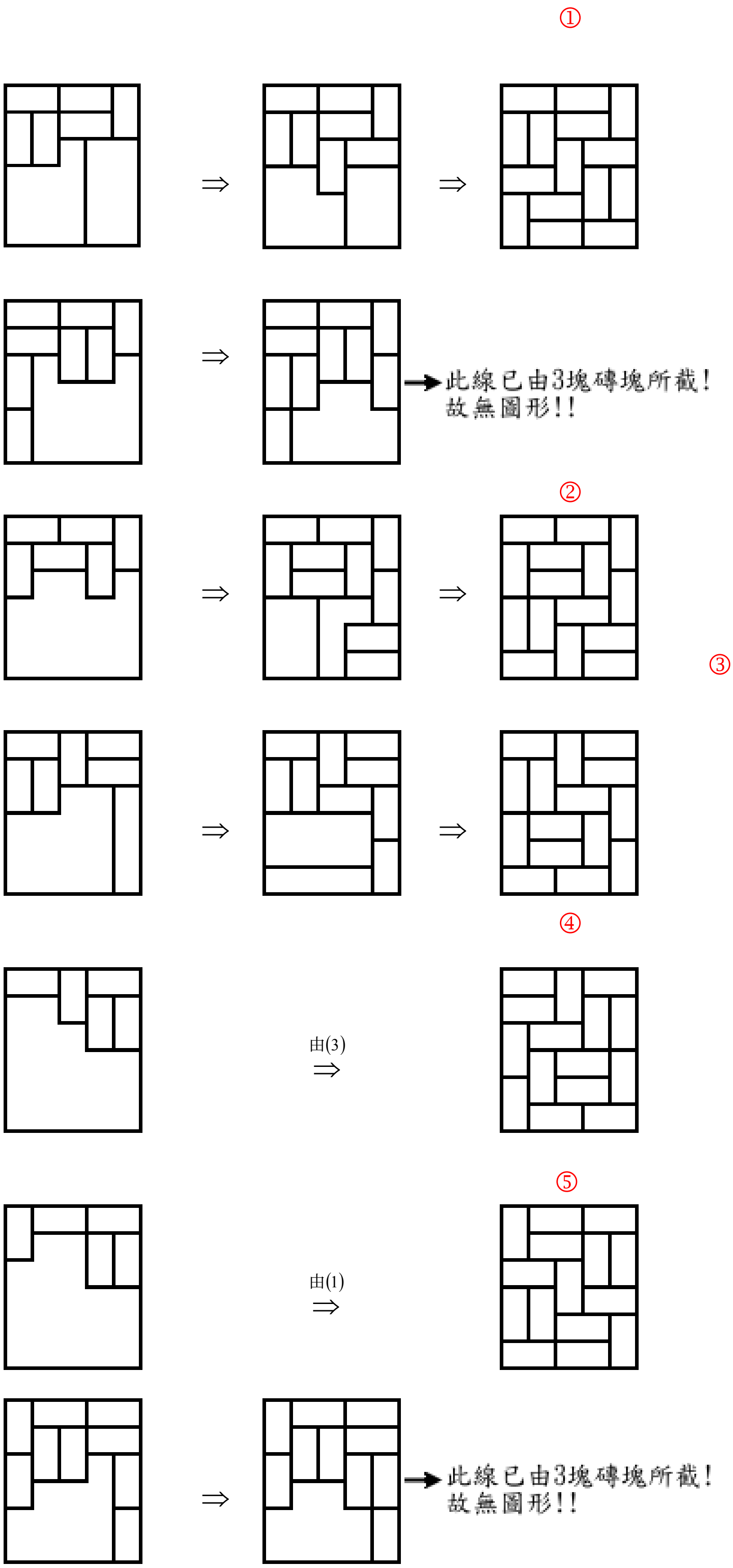
(3)最後再加上以上兩種沒有算到的特特殊形，我們令此種圖形為特特特殊形，並且令此圖形的總排法數為 $r_m(n)$。

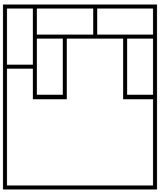
以下將會一一的討論。

2、看過建中黃偉烈所作的論文中，得知 5×6 是(一奇一偶的邊長)最小的特特殊形，6×8 是(兩邊長均為偶數)最小的特特殊圖形。

【引理】：$h_5(6)=6$

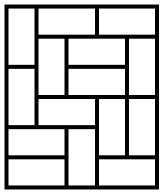
【證明】：


①
⇒
⇒
⇒
此線已由3塊磚塊所截！
故無圖形！！
②
⇒
⇒
③
⇒
⇒
④
由(3)
⇒
⑤
由(1)
⇒
⇒
此線已由3塊磚塊所截！
故無圖形！！



由(2)
⇒

⑥



故得證：$h_5(6)=6$

3、 $p_m^k(n)$ 在這之中我們發現了只要將 m 分成三類就可以把這一類的排法數全部解決：

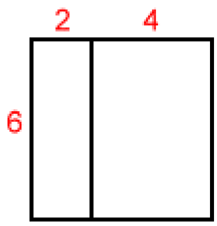
(1)將 m 拆解成全部均為偶數的

(2)將 m 拆解成其中至少有一為奇數的

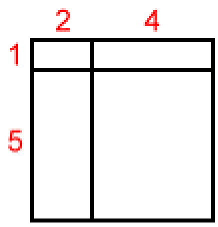
(3)將 m 拆解成全部均為奇數的

(1)現在先以比較簡單的圖形來推算：

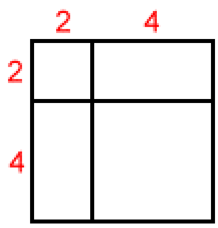
ㄅ、6×6 的圖形：



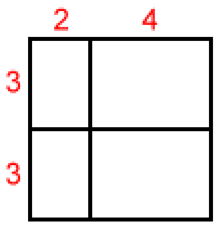
$\{[f_2(6)]-[f_1(6)f_1(6)]\}\times\{[f_4(6)]-[f_1(6)f_3(6)+f_2(6)f_2(6)+f_3(6)f_1(6)]+[f_1(6)f_1(6)f_2(6)+f_1(6)f_2(6)f_1(6)+f_2(6)f_1(6)f_1(6)]-[f_1(6)f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}$



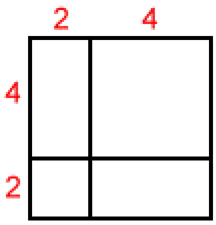
$\{[f_2(1)f_2(5)]\}\times\{[f_4(1)f_4(5)]-[f_2(1)f_2(5)f_2(1)f_2(5)]\}$



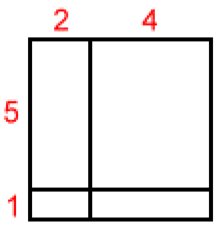
$\{[f_2(2)f_2(4)]-[f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)]\}\times\{[f_4(2)f_4(4)]-[f_1(2)f_1(4)f_3(2)f_3(4)+f_2(2)f_2(2)f_2(4)f_2(4)+f_3(2)f_3(4)f_1(2)f_1(4)]+[f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)+f_1(2)f_1(4)\ f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)+f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)]-f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)\ f_1(4)\}\}$



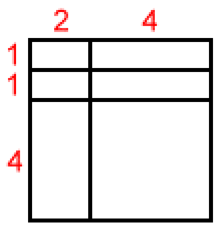
$\{[f_2(3)f_2(3)]\}\times\{[f_4(3)f_4(3)]-[f_2(3)f_2(3)f_2(3)f_2(3)]\}$



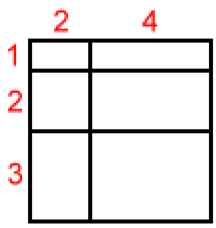
$\{[f_2(4)f_2(2)]-[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\}\times\{[f_4(4)f_4(2)]-[f_1(4)f_1(2)f_3(4)f_3(2)+f_2(4)f_2(2)f_2(4)f_2(2)+f_3(4)f_3(2)f_1(4)f_1(2)]+[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)+f_1(4)f_1(2)\ f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)+f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]-[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)\ f_1(2)]\}$



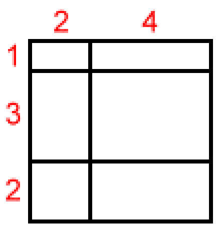
$\{[f_2(5)f_2(1)]\}\times\{[f_4(5)f_4(1)]-[f_2(5)f_2(1)f_2(5)f_2(1)]\}$



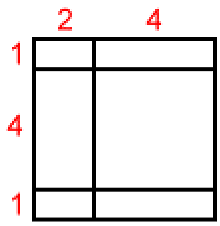
$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(4)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(4)]-[f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)]\}$



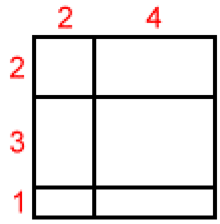
$\{[f_2(1)f_2(2)f_2(3)]\}\times\{[f_4(1)f_4(2)f_4(3)]-[f_2(1)f_2(2)f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3)]\}$



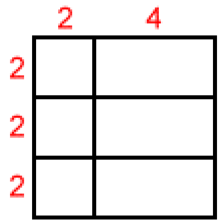
$\{[f_2(1)f_2(3)f_2(2)]\}\times\{[f_4(1)f_4(3)f_4(2)]-[f_2(1)f_2(3)f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2)]\}$



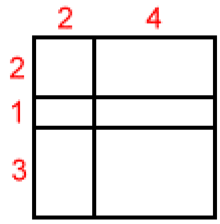
$\{[f_2(1)f_2(4)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(4)f_4(1)]-[f_2(1)f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1)]\}$



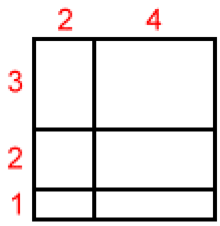
$\{[f_2(2)f_2(3)f_2(1)]\}\times\{[f_4(2)f_4(3)f_4(1)]-[f_2(2)f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3)f_2(1)]\}$



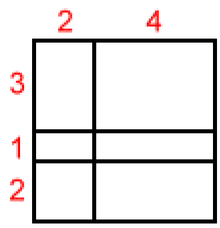
$\{[f_2(2)f_2(2)f_2(2)]-[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}\times\{[f_4(2)f_4(2)f_4(2)]-[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_3(2)f_3(2)f_3(2)+f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)+f_3(2)f_3(2)f_3(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]+[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)+f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)+f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]-[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)\ f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$



$\{[f_2(2)f_2(1)f_2(3)]\}\times\{[f_4(2)f_4(1)f_4(3)]-[f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2)f_2(1)f_2(3)]\}$

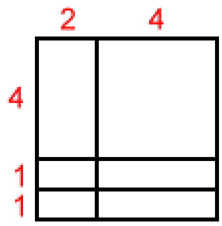


$\{[f_2(3)f_2(2)f_2(1)]\}\times\{[f_4(3)f_4(2)f_4(1)]-[f_2(3)f_2(2)f_2(1)f_2(3)f_2(2)f_2(1)]\}$

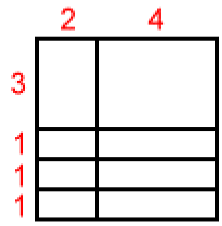


$\{[f_2(3)f_2(1)f_2(2)]\}\times\{[f_4(3)f_4(1)f_4(2)]-[f_2(3)f_2(1)f_2(2)f_2(3)f_2(1)$

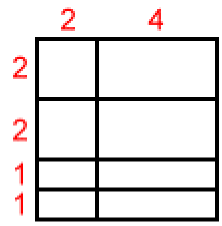
$f_2(2)]\}$



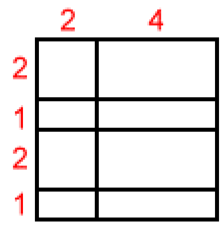
$\{[f_2(4)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(4)f_4(1)f_4(1)]-[f_2(4)f_2(1)f_2(1)f_2(4)f_2(1)f_2(1)]\}$



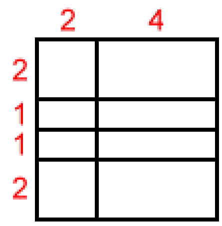
$\{[f_2(3)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(3)f_4(1)f_4(1)f_4(1)]-[f_2(3)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(3)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}$



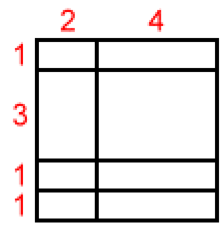
$\{[f_2(2)f_2(2)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(2)f_4(2)f_4(1)f_4(1)]-[f_2(2)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(2)f_2(1)f_2(1)]\}$



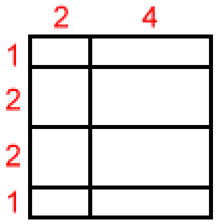
$\{[f_2(2)f_2(1)f_2(2)f_2(1)]\}\times\{[f_4(2)f_4(1)f_4(2)f_4(1)]-[f_2(2)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(2)f_2(1)]\}$



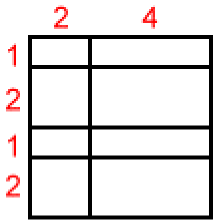
$\{[f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(2)]\}\times\{[f_4(2)f_4(1)f_4(1)f_4(2)]-[f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(2)]\}$



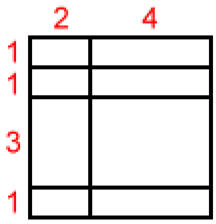
$\{[f_2(1)f_2(3)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(3)f_4(1)f_4(1)]-[f_2(1)f_2(3)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(3)f_2(1)f_2(1)]\}$



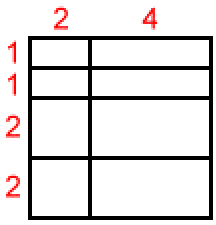
$\{[f_2(1)f_2(2)f_2(2)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(2)f_4(2)f_4(1)]-[f_2(1)f_2(2)f_2(2)f_2(1)$
$f_2(1)f_2(2)f_2(2)f_2(1)]\}$



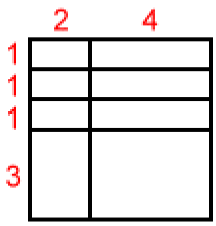
$\{[f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(2)]\}\times\{[f_4(1)f_4(2)f_4(1)f_4(2)]-[f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(2)$
$f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(2)]\}$



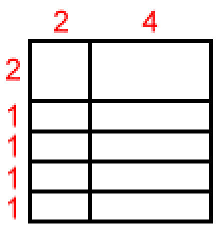
$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(3)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(3)f_4(1)]-[f_2(1)f_2(1)f_2(3)f_2(1)$
$f_2(1)f_2(1)f_2(3)f_2(1)]\}$



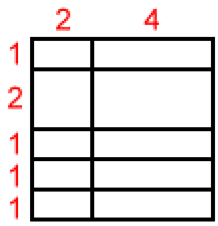
$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(2)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(2)f_4(2)]-[f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(2)$
$f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(2)]\}$



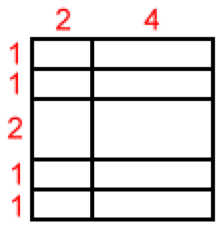
$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(3)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(3)]-[f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(3)$
$f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(3)]\}$



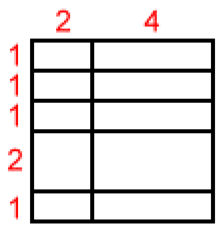
$\{[f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(2)f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(1)]-[f_2(2)f_2(1)$
$f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}$



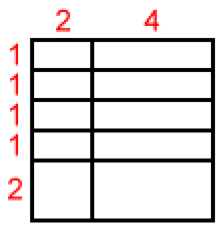
$\{[f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(2)f_4(1)f_4(1)f_4(1)]－[f_2(1)f_2(2)$ $f_2(1)\ f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}$



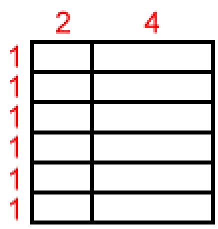
$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(2)f_4(1)f_4(1)]－[f_2(1)f_2(1)$ $f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)]\}$



$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(2)f_4(1)]－[f_2(1)f_2(1)$ $f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)]\}$



$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(2)]－[f_2(1)f_2(1)$ $f_2(1)f_2(1)f_2(2)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(2)]\}$



$\{[f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)f_2(1)]\}\times\{[f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(1)f_4(1)]\}$

ㄆ、依照以上的排法邏輯[(全部的情況)－(至少有一條橫線)＋(至少有兩條橫線)－(至少有三條橫線)＋……]繼續算下去的話，就可以推廣，推廣之後可以得到通式：但是此時得到的通式只適用於 6×6 中恰有第二條線的而已，所以在試了不少個之後發現其中只要控制住 m 值，就可以將圖形中不管恰有幾條線時的排法數一一求出，所以修改之後得到的通式為：

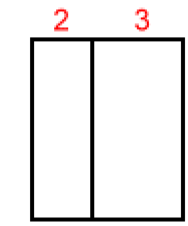
$$\prod\left(\sum -(-1)^n \prod_{i,j,r=1}^{n} f_{b_r^i}(x_j)\right) \quad , \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = n$$

(ㄅ) x_j 均為偶數時， $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i) = m$ 且 $b_r^i \in$ 正偶數 $\cup \{0\}$

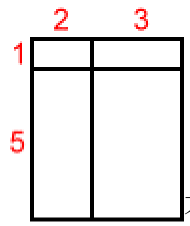
(ㄆ) x_j 中至少有一為奇數時， $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i) = m$ 且 $b_r^i \in \mathrm{N} \cup \{0\}$

(2)我們一樣拿較簡單的來說明，然後再來推廣：

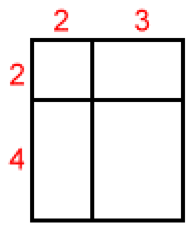
ㄅ、5×6 的圖形：



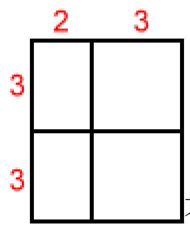
$\{[f_2(6)]-[f_1(6)f_1(6)]\}\times\{[f_3(6)]-[f_2(6)f_1(6)+f_1(6)f_2(6)]+[f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}$



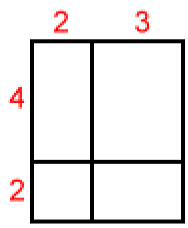
不合



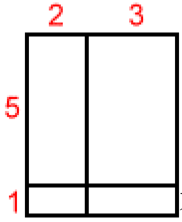
$\{[f_2(2)f_2(4)]-[f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)]\}\times\{[f_3(2)f_3(4)]-[f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)+f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)]+[f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)]\}$



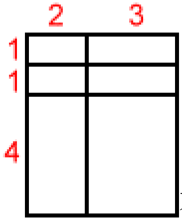
不合



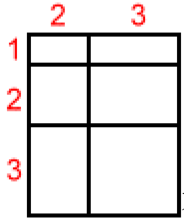
$\{[f_2(4)f_2(2)]+[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]\}\times\{[f_3(4)f_3(2)]-[f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)+f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)+[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]]$



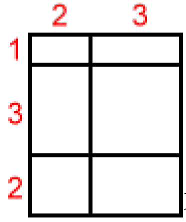
不合



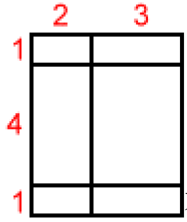
不合



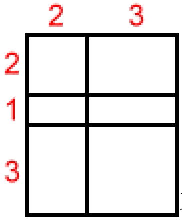
不合



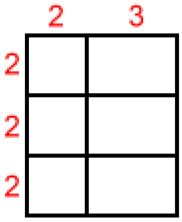
不合



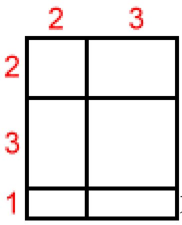
不合



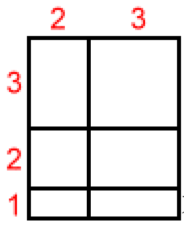
不合



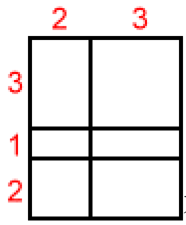
$\{[f_2(2)f_2(2)f_2(2)]-[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]f_1(2)f_1(2)\}\{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)]-[f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)+f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)]+[f_1(2)f_1(2)f(2)f(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$



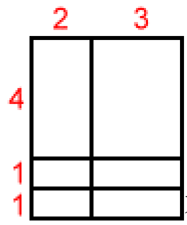
不合



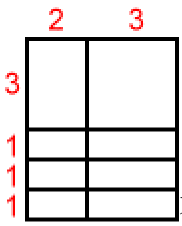
不合



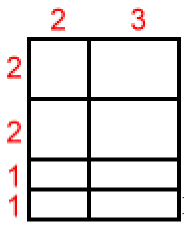
不合



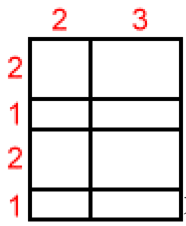
不合



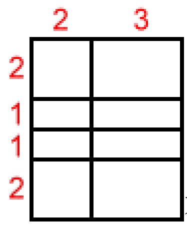
不合



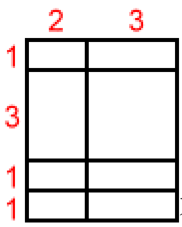
不合



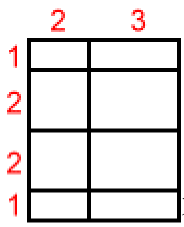
不合



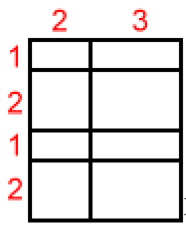
不合



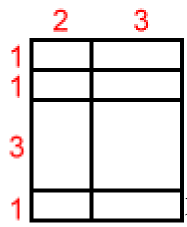
不合



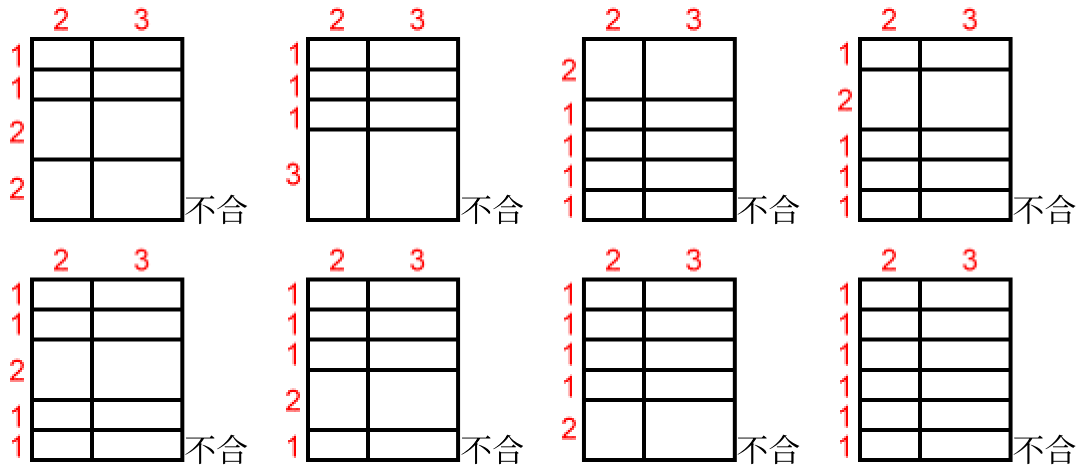
不合



不合



不合



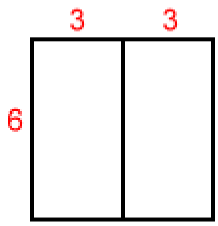
經過以上的計算之後，發現還是可以利用排容原理[(全部的情況)－(至少有一條橫線)＋(至少有兩條橫線)－(至少有三條橫線)＋……]來算出全部的排法數，最後推廣可以得到我們要的通式，不過現在所推出來通式只適用於將 5×6 的總排法數中恰有第二直條線的排法數，但是我們為了要推廣到 m×n，所以在多試了幾個類似的圖形之後，發現 m 還是可以利用拆解的手法來推得當有 k 條直線存在的時候，所以我們就利用了一樣的手法將公式推廣得到：

$$\prod\left(\sum -(-1)^n \prod_{i,j,r=1}^{n} f_{b_r^i}(x_j)\right) \quad , \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = n$$ x_j 均為偶數

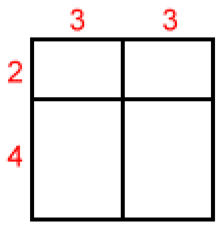
$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$ 正偶數 $\cup \{0\}$，a_i 中必須有一奇一偶

(3)現在還是一樣拿 6×6 的圖形來說明，且這次是算恰有第三條直線存在的總排法數，然後再推廣：

ㄅ、6×6 之圖形：

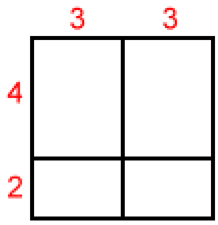


$\{[f_3(6)]-[f_2(6)f_1(6)+f_1(6)f_2(6)]+[f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}\times\{[f_3(6)]-[f_2(6)f_1(6)+f_1(6)f_2(6)]+[f_1(6)f_1(6)f_1(6)]\}$

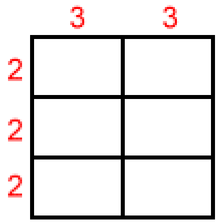


$\{[f_3(2)f_3(4)]-[f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)+f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)]+[f_1(2)f_1(4)$

$f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_2(4)]\}\times\{[f_3(2)f_3(4)]-[f_2(2)f_2(4)f_1(2)f_1(4)+f_1(2)f_1(4)f_2(2)f_2(4)]+[f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)\ f_1(2)f_2(4)]\}$



$\{[f_3(4)f_3(2)]-[f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)+f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)+[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)]]\times\{[f_3(4)f_3(2)]-[f_2(4)f_2(2)f_1(4)f_1(2)+f_1(4)f_1(2)f_2(4)f_2(2)+[f_1(4)f_1(2)f_1(4)f_1(2)f_1(4)\ f_1(2)]]$



$\{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)]-[f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)+f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)]+[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}\times\{[f_3(2)f_3(2)f_3(2)]-[f_2(2)f_2(2)f_2(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)+f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_2(2)f_2(2)f_2(2)]+[f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)f_1(2)]\}$

ㄆ、經過此邏輯推算[(全部的情況)－(至少有一條橫線)＋(至少有兩條橫線)－(至少有三條橫線)＋……]之後，可以得到我們想要的公式，但是我們要的是當有 k 條直線存在的通式，所以再經過我們調整之後，推廣可得：

$$\prod\left(\sum-(-1)^{n}\prod_{i,j,r=1}^{n} f_{b_r^i}(x_j)\right) \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = n \quad x_j \text{ 均為偶數}$$

$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$ ，$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$ 正整數 $\cup \{0\}$，a_i 中必須均為奇數

(4)綜合(1)、(2)、(3)全部的情況，我們發現可以綜合成一個公式：

$$\prod\left(\sum-(-1)^{n}\prod_{i,j,r=1}^{n} f_{b_r^i}(x_j)\right) \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = n$$

ㄅ、

(ㄅ) x_j 均為偶數時，$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i) = m$ 且 $b_r^i \in$ 正偶數 $\cup \{0\}$

(ㄆ) x_j 中至少有一為奇數時，$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i) = m$ 且 $b_r^i \in \mathrm{N} \cup \{0\}$

ㄆ、

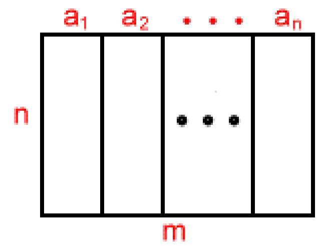
$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$ 正偶數 $\cup \{0\}$，a_i 中必須有一奇一偶

ㄇ、

$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$ 正整數 $\cup \{0\}$，a_i 中必須均為奇數

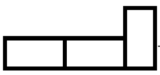
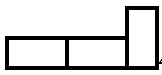
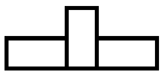
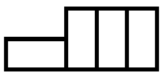
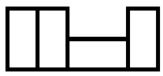
而 a_i 為 m 的分拆元素：

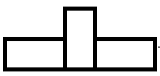
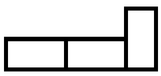
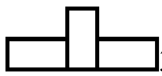
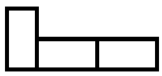
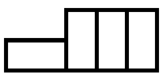
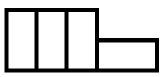
例：

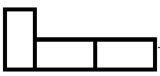
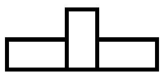
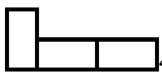
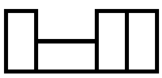
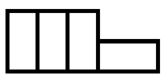


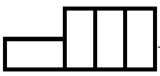
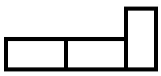
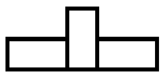
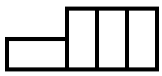
4、先討論 5×n 中特特殊形接 5×2 的總排法數與邏輯：

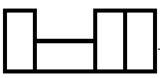
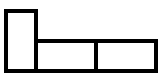
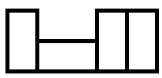
(1)先來討論特特殊形的部分：

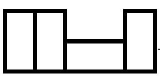
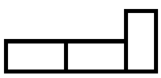
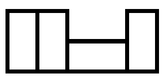
可接 7 個：4 個；1 個；1 個；1 個。

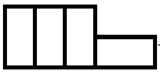
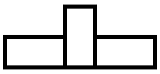
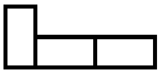
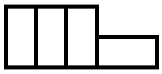
可接 7 個：1 個；3 個；1 個；1 個；1 個。

可接 7 個　：1 個；4 個；1 個；1 個。

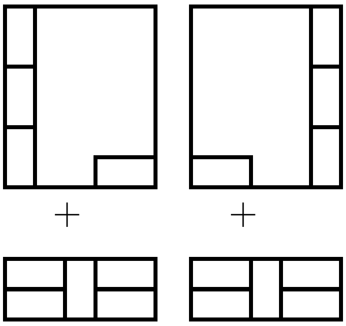
可接 3 個：1 個；1 個；1 個。

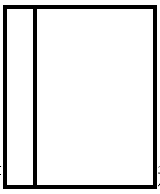
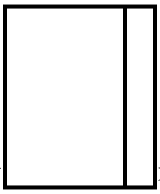
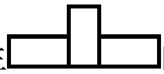
可接 2 個：1 個；1 個。

可接 2 個：1 個；1 個。

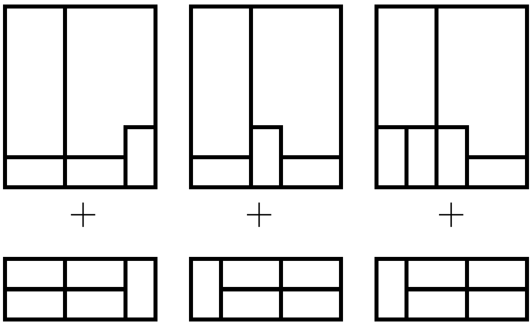
可接 3 個：1 個；1 個；1 個。

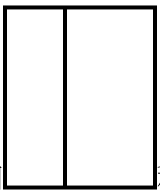
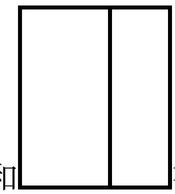
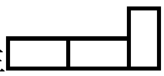
(2)恰有第 1,4 線的情況：

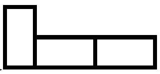


可得知若和有 x 個，就產生的底 x 個。

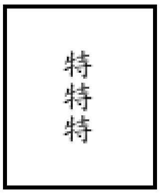
(3)恰有第 2,3 線的情況：

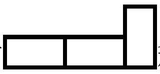
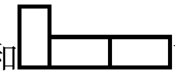


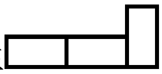
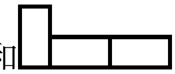
可得知和有 y 個，就產生$\frac{y}{2}$ 個,

及$\frac{y}{2}$ 個。

(4)特特特：

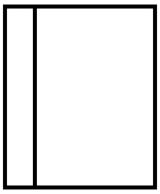
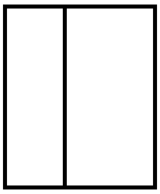
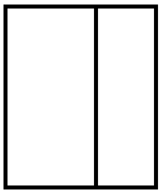


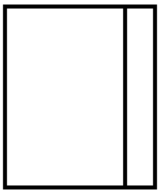
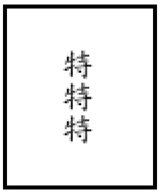
；只有

和

兩種底，且兩種互為左右相反之圖形；

可得知若特特特殊形有 z 個，就產生

$\frac{z}{2}$ 個和

$\frac{z}{2}$ 個。

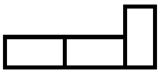
(5)統合

ㄅ、∵依我們之前所做過的問題，先用 5×6 的特特，來推得 5×8 的特特總數：

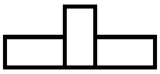
 11 個； 21 個； 21 個；

 11 個；

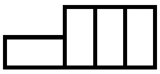
2 個。

⇒ ∴5×8 中，：$\underline{4\times2+1\times2+}$　$\underline{21}$　＋　$\underline{1}$　＝32

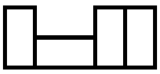
特特　恰有 2,3 線　特特特

：$\underline{1\times2+1\times2+3\times2+}$　$\underline{22}$　＝32

特特　恰有 1,4 線

：$\underline{1\times2+1\times2}$＝4

特特

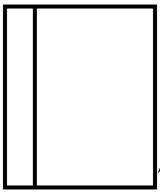
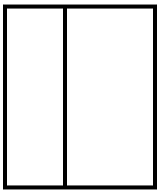
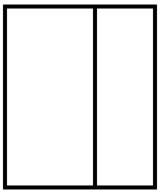
：$\underline{1\times2}$　＝2

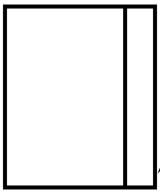
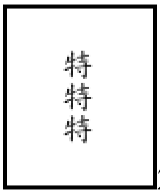
特特

∴5×8 共有 32×2＋32＋4×2＋2×2＝108 種

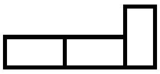
ㄆ、5×10：

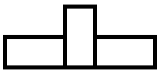
由之前所做過的研究：

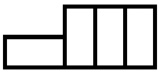
79 個；147 個；147 個；

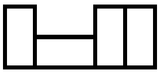
79 個；

26 種。

∴：$\underbrace{32\times4+32\times1+2\times1+4\times1}_{\text{特特}}+\underbrace{147}_{\text{恰有 2,3 線}}+\underbrace{13}_{\text{特特特}}=326$

：$\underbrace{32\times1+32\times1+32\times3+4\times1+4\times1}_{\text{特特}}+\underbrace{158}_{\text{恰有 1,4 線}}=326$

：$\underbrace{32\times1+32\times1+4\times1}_{\text{特特}}=68$

：$\underbrace{32\times1+2\times1}_{\text{特特}}=34$

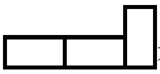
∴5×10 共有 326×2＋326×1＋68×2＋34×2＝1182 種

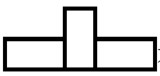
(6)結論：

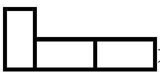
由 5×n 最前面的三項來找初步的規則：

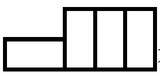
5×6：6 個　　　　5×8：108 個　　　　5×10：1182 個

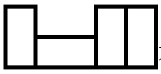
∴5×(n-2)：

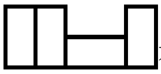
定義：有 $D_5^1(n-2)$ 種

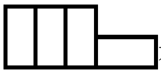
有 $D_5^2(n-2)$ 種

有 $D_5^3(n-2)$ 種

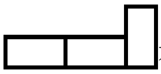
有 $D_5^4(n-2)$ 種

有 $D_5^5(n-2)$ 種

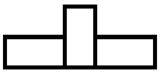
有 $D_5^6(n-2)$ 種

有 $D_5^7(n-2)$ 種

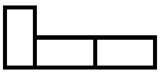
⇒可推導出 5×n 的遞迴關係式：

有 $4D_5^1(n-2)+D_5^2(n-2)+D_5^4(n-2)+D_5^6(n-2)$

$$+\frac{5\times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2}+\frac{5\times n\text{中特特特}}{2}\text{種}$$

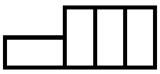


有 $[D_5^1(n-2)+3D_5^2(n-2)+D_5^3(n-2)+D_5^4(n-2)+D_5^7(n-2)]$＋ $(5\times n\text{中恰有}1,4\text{線})$種

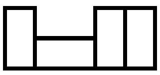


有 $D_5^2(n-2)+4D_5^3(n-2)+D_5^5(n-2)+D_5^7(n-2)$

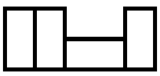
$$+\frac{5\times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2}+\frac{5\times n\text{中特特特}}{2}\text{種}$$



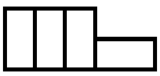
有 $D_5^1(n-2)+D_5^2(n-2)+D_5^4(n-2)$ 種



有 $D_5^3(n-2)+D_5^5(n-2)$ 種



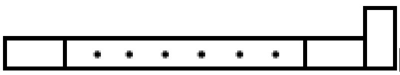
有 $D_5^1(n-2)+D_5^6(n-2)$ 種



有 $D_5^2(n-2)+D_5^3(n-2)+D_5^7(n-2)$ 種

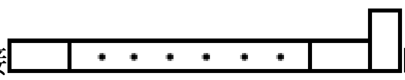
(7)依照以上的排法邏輯，推廣可得 m×n 的特特：

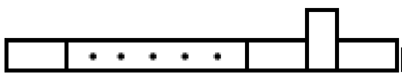
先討論 m＝2k＋1(k∈N∪{0})：

先用的圖形底下接(2k+1)×2 討論：

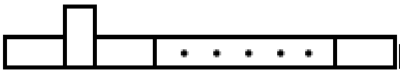
分成恰有一個直的磚塊、恰有三個直的磚塊、…、恰有(2k－1)個直的磚塊

ㄅ、恰有一個直的磚塊：

當底下接時，有 $f_{2k}(2)$-1 種排法；

時，有 $f_{2(k-1)}(2)$-1 種排法；

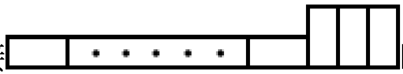
…

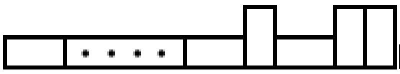
時，有 $f_2(2)-1$ 種排法。

∴恰有一個直的磚塊共有 $\sum_{a=1}^{k}[f_{2a}(2)-1]$ 種排法；

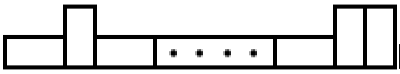
ㄆ、恰有三個直的磚塊：

(ㄅ)固定最右邊為兩塊直的磚塊：

當底下接時，有 $f_{2(k-1)}(2)-1$ 種排法；

時，有 $f_{2(k-2)}(2)-1$ 種排法；

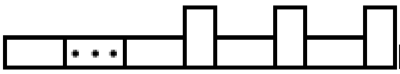
…

時，有 $f_2(2)-1$ 種排法；

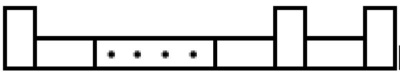
∴共有 $\sum_{a=1}^{k-1}[f_{2a}(2)-1]$ 種排法。

(ㄆ)固定最右邊為一塊直的磚塊：

當底下接時，有 $f_2(2)f_{2(k-2)}(2)-1$ 種排法；

時，有 $f_2(2)f_{2(k-3)}(2)-1$ 種排法；

…

時，有 $f_2(2)f_0(2)-1$ 種排法；

∴共有 $\sum_{a=0}^{k-2}[f_2(2)f_{2a}(2)-1]$ 種排法。

(ㄇ)固定最右邊為直的磚塊，(剩下兩塊直的磚塊任意排)：

∴當最右邊為一塊直的磚塊時，共有

$\sum_{a=1}^{k-1}[f_{2a}(2)-1]+\sum_{b=0}^{k-2}\{\sum_{c=0}^{b}[f_{2(k-1-b)}(2)f_{2c}(2)-1]\}$ 種排法。

(ㄈ)統合：

當底下接，固定最右邊為一橫緊接一直，而剩下左邊兩塊直的磚塊任意排時，依前面的排法邏輯，共有

$$\sum_{a=1}^{k-2}[f_{2a}(2)-1]+\sum_{b=0}^{k-3}\{\sum_{c=0}^{b}[f_{2(k-2-b)}(2)f_{2c}(2)-1]\}$$ 種排法

∴由此可知，當最右邊的排不斷往左移，可求出恰有三個直的磚塊共有

$$\sum_{a=1}^{k-1}\{\sum_{b=1}^{a}(f_{2b}(2)-1)+\sum_{c=0}^{a-1}[\sum_{d=0}^{c}(f_{2(k-1-c)}(2)f_{2d}(2)-1)]\}$$ 種排法。

ㄇ、恰有五個直的磚塊：

依照前面所用的手法，可求出恰有五個直的磚塊共有

$$\sum_{a=1}^{k-2}\{\sum_{b=1}^{a}\{\sum_{c=1}^{b}[f_{2c}(2)-1]+\sum_{d=0}^{b-1}\{\sum_{e=0}^{d}[f_{2(k-2-d)}(2)f_{2e}(2)-1]\}+\sum_{f=0}^{a-1}\{\sum_{g=0}^{f}\{\sum_{h=0}^{g}\{\sum_{i=0}^{h}[f_{2(k-3-f)}(2)f_{2(g-h)}(2)f_{2i}(2)-1]\}\}\}\}\}$$

種排法。

ㄈ、恰有七個直的磚塊：

依照前面所用的手法，可求出恰有七個直的磚塊共有

$$\sum_{a=1}^{k-3}\{\sum_{b=1}^{a}\{\sum_{c=1}^{b}\{\sum_{d=1}^{c}[f_{2d}(2)-1]+\sum_{e=0}^{c-1}\{\sum_{f=0}^{e}[f_{2(k-3-e)}(2)f_{2f}(2)-1]\}\}$$

$$+\sum_{g=0}^{b-1}\{\sum_{h=0}^{g}\{\sum_{i=0}^{h}\{\sum_{j=0}^{i}[f_{2(k-4-g)}(2)f_{2(h-i)}(2)f_{2j}(2)-1]\}\}\}\}$$

$$+\sum_{l=0}^{a-1}\{\sum_{m=0}^{l}\{\sum_{n=0}^{m}\{\sum_{o=0}^{n}\{\sum_{p=o}^{o}\{\sum_{q=0}^{p}[f_{2(k-5-l)}(2)f_{2(m-n)}(2)f_{2(o-p)}(2)f_{2q}(2)-1]\}\}\}\}\}\}$$

ㄉ、推廣到恰有(2r－1)個直的磚塊：

$$\sum_{s_1=1}^{k+1-r}\{\sum_{s_2=1}^{s_1}\{\sum_{s_3=1}^{s_2}.....\{\sum_{s_r=1}^{s_{r-1}}[f_{2s_r}(2)-1]+\sum_{s_{r+1}=0}^{s_{r-1}-1}\{\sum_{s_{r+2}=0}^{s_{r+1}}[f_{2(k+1-r-s_{r+1})}(2)f_{2s_{r+2}}(2)-1]\}\}$$

$$+\sum_{s_{r+3}=0}^{s_{r-2}-1}\{\sum_{s_{r+4}=0}^{s_{r+3}}\{\sum_{s_{r+5}=0}^{s_{r+4}}\{\sum_{s_{r+6}=0}^{s_{r+5}}[f_{2(k-r-s_{r+3})}(2)f_{2(s_{r+4}-s_{r+5})}(2)f_{2s_{r+6}}(2)-1]\}\}\}\}+.........$$

$$+\sum_{s_{r^2-2r+3}=0}^{s_1-1}\{\sum_{s_{r^2-2r+4}=0}^{s_{r^2-2r+3}}\{.........\{\sum_{s_{r^2}=0}^{s_{r^2-1}}[f_{2(k+3-2r-s_{r^2-2r+3})}(2)f_{2(s_{r^2-2r+4}-s_{r^2-2r+5})}(2)....f_{2s_{r^2}}(2)-1\}\}...\}\}$$

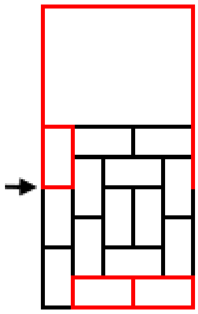
根據前面的四項，我們可以發現規律

以此種排法邏輯，慢慢類推下去，可求得總接法數，即特特接出的新特特殊形的總數；包括上面特特圖形的其他的底，以及用偶數 2n×2 所接出的圖形，就可以求得 m×n 中，特特底下接 m×2，接出新的特特殊形的通解。

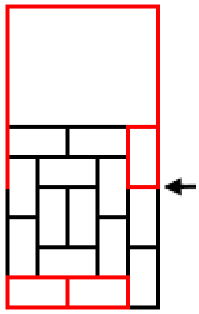
5、5×n 特特特

(1)在 5☓n 特特特的底主要有 2 種

我們再將底部縮小成下面 2 圖：

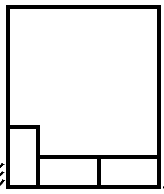


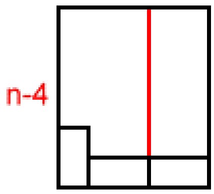
(圖 1)

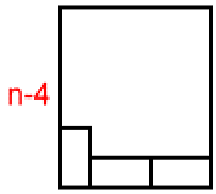


(圖 2)

因為底部固定，所以先把下面 2 塊橫的往上移，形成新的圖形會較好討論。
由於(圖 1)(圖 2)為對稱，所以以下部分以(圖 1)來討論：

此圖為新的圖形，只要再討論其內部線的分部即可。

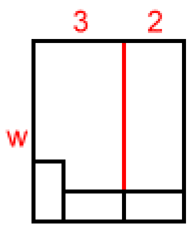
∴$r_5(n)$ ＝× 

2 ＋×2 

＋ $r_5(n-2)$

(2)暫定分為 3 部分來討論：

ㄅ、即在 5×n 中，設高為 w，恰有第 3 條線的所有排法數



首先以 3×w 內部有幾條線來看，

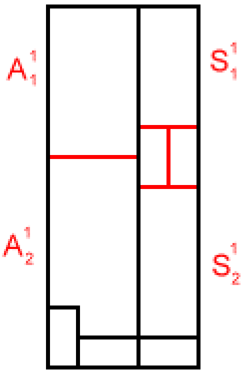
定義：設可有 i 條線，$(1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$， $i \in N)$

從上而下可以分第 1 塊、第 2 塊、…、第(i＋1)塊。

即在 3×w 的 w＝ $A_1^i + A_2^i + \cdots + A_{i+1}^i$ ；

且 w≥4, $\begin{cases} A_1^i = S_1^i + 1, 1 \le i \le \dfrac{w-2}{2}, i \in N \\ A_j^i = S_j^i + 2, 1 < i < \dfrac{w-2}{2}, 2 \le j \le i, i.j \in N \\ A_1^i = S_{i+1}^i + 1, 1 \le i \le \dfrac{w-2}{2}, i \in N \end{cases}$

(ㄅ)當恰有 1 條線時：

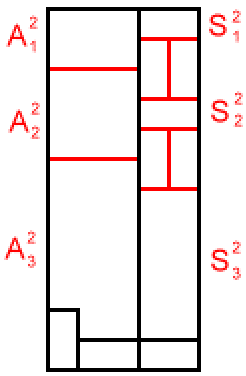


左邊為 $\{k_3(A_1^1)\times 1-(k_3(A_1^1)-1)\times 1\}$；

右邊為 $\{f_2(S_1^1)f_2(S_2^1-1)\}$；

即 $\{k_3(A_1^1)\times 1-(k_3(A_1^1)-1)\times 1\}\{f_2(S_1^1)f_2(S_2^1-1)\}$。

(ㄆ)當恰有 2 條線時：

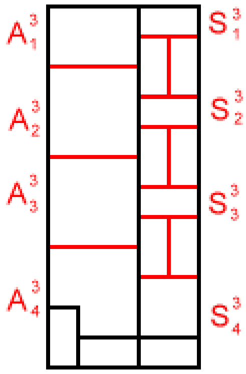


左邊為 $\{k_3(A_1^2)k_3(A_2^2)\times 1-(k_3(A_1^2)-1)(k_3(A_2^2)-1)\times 1\}$；

右邊為 $\{f_2(S_1^2)f_2(S_2^2)f_2(S_3^2-1)\}$；

即 $\{k_3(A_1^2)k_3(A_2^2)\times 1-(k_3(A_1^2)-1)(k_3(A_2^2)-1)\times 1\}\{f_2(S_1^2)f_2(S_2^2)f_2(S_3^2-1)\}$。

(ㄇ)當恰有 3 條線時：



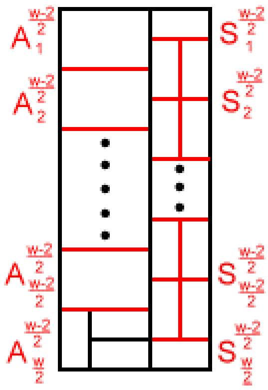
左邊為 $\{k_3(A_1^3)k_3(A_2^3)k_3(A_3^3)\times 1-(k_3(A_1^3)-1)(k_3(A_2^3)-1)(k_3(A_3^3)-1)\times 1\}$；

右邊為 $\{f_2(S_1^3)f_2(S_2^3)f_2(S_3^3)f_2(S_4^3-1)\}$；

即 $\{k_3(A_1^3)k_3(A_2^3)k_3(A_3^3)\times 1-(k_3(A_1^3)-1)(k_3(A_2^3)-1)(k_3(A_3^3)-1)\times 1\}$ X

$\{f_2(S_1^3)f_2(S_2^3)f_2(S_3^3)f_2(S_4^3-1)\}$。

(ㄈ)由此推廣至 $\frac{w-2}{2}$ 條線：



左邊為

$$\left\{k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}})k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}})\Lambda\ k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})\times 1-\left(k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\left(k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\Lambda\left(k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\times 1\right\};$$

右邊為 $\left\{f_2(S_1^{\frac{w-2}{2}})\Lambda\ f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})f_2(S_{\frac{w}{2}}^{\frac{w-2}{2}}-1)\right\}$；

即

$$\left\{k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}})k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}})\Lambda\ k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})\times 1-\left(k_3(A_1^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\left(k_3(A_2^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\Lambda\ \left(k_3(A_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})-1\right)\times 1\right\}$$

$$\left\{f_2(S_1^{\frac{w-2}{2}})\Lambda\ f_2(S_{\frac{w-2}{2}}^{\frac{w-2}{2}})f_2(S_{\frac{w}{2}}^{\frac{w-2}{2}}-1)\right\}。$$

∴公式：$=\sum_{k=1}^{\frac{w-2}{2}}\left\{\left[\prod_{j=1}^{k}k_3(A_j^k)-\prod_{j=1}^{k}\left(k_3(A_j^k)-1\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{k}f_2(S_j^k)\right]f_2(S_{k+!}^k-1)\right\}$

w=n-4 代入，再乘以 2(因為左右對稱)

即$2\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}}\left\{\left[\prod_{j=1}^{k}k_3(A_j^k)-\prod_{j=1}^{k}\left(k_3(A_j^k)-1\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{k}f_2(S_j^k)\right]f_2(S_{k+1}^k-1)\right\}$

ㄆ、即 5×(n-4)特特底的個數：

$\Rightarrow D_5^3(n-4)$

ㄇ、r_5(n－2)

所以 r_5(n)＝(A)＋(B)＋(C)

$\Rightarrow r_5(n)=2\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}}\left\{\left[\prod_{j=1}^{k}k_3(A_j^k)-\prod_{j=1}^{k}\left(k_3(A_j^k)-1\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{k}f_2(S_j^k)\right]f_2(S_{k+1}^k-1)\right\}+$

$D_5^3(n-4)+r_5(n-2)$

6、例：當 m＝5 時，我們將 5×n 分成三種情況的總和：

(1)5×n 裡面恰有一條直線接上 5×2 的總圖形數，在這裡我們嘗試利用正面的方式，求出總排法數。

(2)特特殊形接上 5×2 的總排法數。

(3)特特特殊形。

現在就逐一來討論：

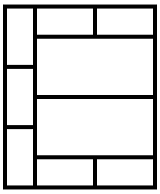
(1)5×8 的情況：

ㄅ、第一條直線存在情況(同第四條直線存在的情況)：

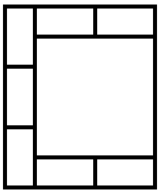
經我們把全部的情況列出，可以得到一些特徵—也就是 6 可以分成兩個奇數和數個偶數之和，而其中的偶數(也就是 4×n，n∈偶數)裡面，為了要避免破線，所

以必須放入特殊形來擋住缺陷線，以下即為我們所討論的過程：

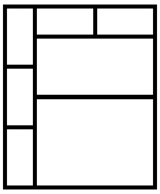
1＋⋯＋1⇒剩 4　4＝2＋2 ⇒1＋2＋2＋1 共 $k_4(1)\times\{1\times k_4(2)+1\times k_4(2)-1\times 1\}\times k_4(1)$＝7 種



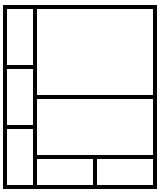
＝4　⇒1＋4＋1　共 $k_4(1)\times 1\times k_4(1)$＝1 種



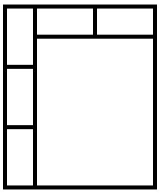
1＋⋯＋3⇒剩 2　2＝2　⇒1＋2＋3　共 $k_4(1)\times 1\times k_4(3)$＝2 種



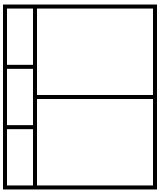
3＋⋯＋1⇒剩 2　2＝2　⇒3＋2＋1　共 $k_4(3)\times 1\times k_4(1)$＝2 種



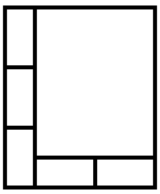
1＋5⇒剩 0　不合，為 0 種



3＋3⇒剩 0　不合，為 0 種



5＋1⇒剩 0　不合，為 0 種



以上是 5×6 中有第一條直線的總排法數，但是與我們所要求的還有一些多的，所以還必須把它加以去除，以算出我們想要的最後總排法數。而使得 5×2 不可以接的只有與最下層的排法有關，所以當最底下的矩形的端邊大於 1 時，則需扣除此種情形。

1＋⋯＋3⇒剩 2　2＝2　　⇒1＋2＋3　共$\frac{1}{2}k_4(1)\times1\times k_4(3)$＝1 種不合

所以能成為 5×8 的特特殊圖形的有 11 個。

∴能成為 5×8 的特特殊圖形且恰有第一條與第四條直線的圖形一共有 22 種。

所以依照上面的情況來推廣可得：

$$k_4(x_1)k_4(x_2)\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(a_i)\times\left[\sum-(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(r_i)}\right]-$$

$$\frac{1}{2}k_4(x_1)k_4(x_2)\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(a_i)\times\left[\sum-(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(r_i)}\right]$$

x_1+x_2＝2、4、6…n－2 $\wedge x_1$、$x_2\in$奇數$\wedge$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}=n-x_1-x_2$ $\wedge$

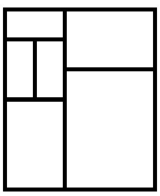
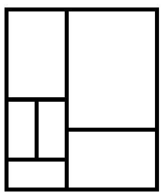
$x_1+x_2=n$ 時，均為 0 種$\wedge r_1$、r_2、r_3、⋯、$r_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\in a_1$、$a_2$、$a_3$、⋯、$a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}$，

後面的 $x_2\neq1$ 的奇數。

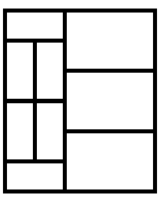
ㄆ、第二條直線存在情況(同第三條直線存在的情況)：

如果要利用有第一條直線的討論方法，將會很麻煩，所以現在改用有橫線的情況來討論。

恰有一條橫線：2〔$f_2(1)f_2(3)+f_2(3)f_2(1)$〕－$f_2(1)f_2(1)$＝11

恰有兩條橫線：｛〔$k_3(2)+k_3(2)$〕－1｝｛2〔$f_2(1)f_2(0)f_2(1)$〕｝＝10



∴共有 21 種

∴能成為 5×8 的特特殊圖形且恰有第二條與第三條直線的圖形一共有 42 種

令 $A_1^i = S_1^i + 1$，$A_2^i = S_2^i + 2$，$A_3^i = S_3^i + 2$，……，$A_n^i = S_n^i + 2 \quad i \geq 3$

$$G(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ (S_1^i + 1)(S_2^i + 1) - 1 & i \geq 3, i \in N \\ T(i) & i = 2 \end{cases}$$

$$T(i) = k^{i-1} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_{i-1} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \ldots\ldots A_{n_{i-1}} + (-1) k^{i-2} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_{i-2} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \ldots\ldots A_{n_{i-2}} + (-1)^2$$

$$k^{i-3} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_{i-3} \leq i} A_{n_1} A_{n_2} A_{n_3} \ldots\ldots A_{n_{i-3}} + \cdots + (-1)^{i-2} k \sum_{1 \leq n_1 \leq i} A_{n_1} + (-1)^{i-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} \sum_{\substack{S_1^I + S_2^I + S_{1+I}^I = n-2-2i \\ S_2^I, S_3^I, \ldots\ldots S_I^I \in \{1,2,\ldots n-2-2i\}}} G(i)\{2 f_i(S_1^i) f_i(S_2^i) \ldots\ldots f_i(S_{1+i}^i) - f_i(S_1^i) f_i(S_2^i) \ldots\ldots f_i(S_{1+i}^i - 2)\}$$

(2)特特殊形接 5×2 的情況：$q_5(n)$＝

$$4D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^6(n-2) + \frac{5 \times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2} + \frac{5 \times n\text{中特特特}}{2} +$$

$$[D_5^1(n-2) + 3D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^7(n-2)] + (5 \times n\text{中恰有}1,4\text{線}) +$$

$$D_5^2(n-2) + 4D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^7(n-2) + \frac{5 \times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2} + \frac{5 \times n\text{中特特特}}{2} +$$

$$D_5^1(n-2) + D_5^2(n-2) + D_5^4(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^5(n-2) + D_5^1(n-2) + D_5^6(n-2) +$$

$$D_5^2(n-2) + D_5^3(n-2) + D_5^7(n-2)$$

(3)特特殊形：$r_5(n) = 2\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}} \left\{ \left[\prod_{j=1}^{k} k_3(A_j^k) - \prod_{j=1}^{k} \left(k_3(A_j^k) - 1\right) \right] \left[\prod_{j=1}^{k} f_2(S_j^k) \right] f_2(S_{k+1}^k - 1) \right\} +$

$D_5^3(n-4) + r_5(n-2)$

(4)所以 $f_5(n) = \sum (-1)^q \sum f_{k_1}(x_1) f_{k_1}(x_2) \ldots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_2}(x_1) f_{k_2}(x_2) \ldots$

$f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_3}(x_1) f_{k_3}(x_2) \ldots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}}) f_{k_m}(x_1) f_{k_m}(x_2) \ldots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}}) +$

$$2k_4(x_1)k_4(x_2)\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(a_i)\times[\sum-(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(r_i)}]-$$

$$k_4(x_1)k_4(x_2)\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(a_i)\times[\sum-(-1)^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\frac{1}{\prod_{i=1}^{\frac{n-x_1-x_2}{2}}k_4(r_i)}]+$$

$$2\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}}\sum_{\substack{S_1^I+S_2^I+S_{1+I}^I=n-2-2i\\ S_2^I,S_3^I,\ldots\ldots S_I^I\in\{1,2,\ldots n-2-2i\}}}G(i)\{2f_i(S_1^i)f_i(S_2^i)\ldots\ldots\ldots f_i(S_{1+i}^i)-f_i(S_1^i)f_i(S_2^i)\ldots\ldots\ldots\ldots f_i(S_{1+i}^i-2)\}$$

$$+4D_5^1(n-2)+D_5^2(n-2)+D_5^4(n-2)+D_5^6(n-2)+\frac{5\times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2}+\frac{5\times n\text{中特特特}}{2}+$$

$$[D_5^1(n-2)+3D_5^2(n-2)+D_5^3(n-2)+D_5^4(n-2)+D_5^7(n-2)]+(5\times n\text{中恰有}1,4\text{線})+$$

$$D_5^2(n-2)+4D_5^3(n-2)+D_5^5(n-2)+D_5^7(n-2)+\frac{5\times n\text{中恰有}2,3\text{線}}{2}+\frac{5\times n\text{中特特特}}{2}+$$

$$D_5^1(n-2)+D_5^2(n-2)+D_5^4(n-2)+D_5^3(n-2)+D_5^5(n-2)+D_5^1(n-2)+D_5^6(n-2)+$$

$$D_5^2(n-2)+D_5^3(n-2)+D_5^7(n-2)+$$

$$2\sum_{k=1}^{\frac{n-6}{2}}\left\{\left[\prod_{j=1}^{k}k_3(A_j^k)-\prod_{j=1}^{k}\left(k_3(A_j^k)-1\right)\right]\left[\prod_{j=1}^{k}f_2(S_j^k)\right]f_2(S_{k+1}^k-1)\right\}+D_5^3(n-4)+r_5(n-2)$$

$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=5$，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$

k_1、k_2、k_3……、k_m，x_1、x_2、x_3、……、$x_{\frac{n}{2}}$ 均為非負整數，

$k_i\in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

$x_1+x_2=2$、4、6…$n-2$ $\wedge x_1$、$x_2\in$奇數$\wedge$ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}=n-x_1-x_2$ $\wedge$

$x_1+x_2=n$ 時，均為 0 種$\wedge r_1$、r_2、r_3、…、$r_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}\in a_1$、$a_2$、$a_3$、…、$a_{\frac{n-x_1-x_2}{2}}$，

後面的 $x_2\neq 1$ 的奇數。

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+a_{\frac{n-1}{2}}=n-1$，

$$G(i)=\begin{cases}1, i=1\\(S_1^i+1)(S_2^i+1)-1, i\geq 3, i\in N\\T(i), i=2\end{cases}$$

陸、結論：

一、$f_1(n)=1$，($n=2r$，$r\in N$)

二、$f_2(n)=\sum\frac{(x_1+x_2+\Lambda\Lambda+x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\Lambda\Lambda x_n!}f_2(1)^{x_1}\times k_2(2)^{x_2}\times k_2(3)^{x_3}\times k_2(4)^{x_4}\times\Lambda\Lambda\times k_2(n)^{x_n}$

而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

三、$f_3(r)=\sum\frac{(x_1+x_2+\Lambda\Lambda+x_r)!}{x_1!x_2!x_3!\Lambda\Lambda x_r!}f_3(1)^{x_1}\times k_3(2)^{x_2}\times k_3(3)^{x_3}\times k_3(4)^{x_4}\times\Lambda\Lambda\times k_3(r)^{x_r}$

，$n=2r$，而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+rx_r=r$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_r 為非負整數。

且 $k_3(n)(n\in 2k(k\in N\{0\}))$：

1、$k_3(2)=3$。

2、$k_3(n)=2$，$n\geq 4$。

四、$f_4(n)=\sum\frac{(x_1+x_2+\Lambda\Lambda+x_n)!}{x_1!x_2!x_3!\Lambda\Lambda x_n!}f_4(1)^{x_1}\times k_4(2)^{x_2}\times k_4(3)^{x_3}\times k_4(4)^{x_4}\times\Lambda\Lambda\times k_4(n)^{x_n}$

而 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots\cdots+nx_n=n$，且 x_1，x_2，x_3，……，x_n 為非負整數。

且 $k_4(n)$ $(n\in 2k(k\in N\{0\}))$：

1、$k_4(2)=4$。

2、$k_4(2k+2)=3$，$k\in N$。

3、$k_4(2k+1)=2$，$k\in N$。

五、$g_m(n)$(至少有一條缺陷線的總排法數)：

(一)m 為奇數時：

$g_m(n)=\sum(-1)^q\sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\ldots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_3}(x_1)$

$f_{k_3}(x_2)\ldots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\ldots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$

$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$

k_1、k_2、k_3……、k_m，x_1、x_2、x_3、……、$x_{\frac{n}{2}}$均為非負整數，

$k_i \in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

(二)m 為偶數時：

$$g_m(n)=\sum(-1)^q\sum f_{k_1}(x_1)f_{k_1}(x_2)\ldots f_{k_1}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_2}(x_1)f_{k_2}(x_2)\ldots f_{k_2}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_3}(x_1)$$

$$f_{k_3}(x_2)\ldots f_{k_3}(x_{\frac{n}{2}})f_{k_m}(x_1)f_{k_m}(x_2)\ldots f_{k_m}(x_{\frac{n}{2}})$$

1、n 為偶數時：

(1) $k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$……、$k_m$至少有一為奇數

，$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、……、$x_{\frac{n}{2}}$均為偶數，$k_i \in N$ 時，

$i=q$，i 為最大的值。

(2) $k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$……、$k_m$均為偶數時

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、……、$x_{\frac{n}{2}}$屬於正整數，$k_i \in N$ 時，

$i=q$，i 為最大的值。

2、n 為奇數時：

$k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_m=m$，$k_1$、$k_2$、$k_3$……、$k_m$均為偶數時，

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_{\frac{n}{2}}=n$，$x_1$、$x_2$、$x_3$、……、$x_{\frac{n}{2}}$屬於正整數，

$k_i \in N$ 時，$i=q$，i 為最大的值。

六、$f_m(n)=g_m(n)+h_m(n)$ $(m\geq 5)$

$h_m(n)=p_m(n)+q_m(n)+r_m(n)$：

(一) 恰有 k 條線存在的總排法數：

$$\prod\left(\sum-(-1)^n\prod_{i,j,r=1}^{n} f_{b_r^i}(x_j)\right) \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = n$$

1、

(1) x_j 均為偶數時，$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i)=m$ 且 $b_r^i \in$ 正偶數 $\cup \{0\}$

(2)x_j中至少有一為奇數時，$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n} b_r^i) = m$ 且 $b_r^i \in N \cup \{0\}$

2、

$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$正偶數$\cup \{0\}$，a_i中必須有一奇一偶

3、

$\sum_{r=1}^{n} b_r^i = a_i$，$\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 且 $b_r^i \in$正整數$\cup \{0\}$，a_i中必須均為奇數

柒、未來發展方向：

(一)、利用 a×b 的矩形填滿 m×n 的矩形的總排法數。
(二)、利用固定的長方體填滿 m×n×q 的長方體的排法邏輯。
(三)、利用固定的長方體填滿 m×n×q 的長方體的總排法數。
(四)、利用 a×b×c 的長方體填滿 m×n×q 的長方體的排法邏輯。
(五)、利用 a×b×c 的長方體填滿 m×n×q 的長方體的總排法數。

捌、參考資料：

(一)、周明憲　著/C 語言演算法徹底入門
(二)、施威銘　著/C 語言學習實務
(三)、黃偉烈　著/磚塊堆疊問題之研究與探討
(四)、洪維思　著/Mathematica4.0/初版/台北市/碁峰資訊股份有限公司/672 頁/ 2001 年

玖、其他：

(一)、全部的圖形總數程式碼：

```
#include <conio.h>
#include <iostream.h>
#include <stdio.h>
#include <iomanip.h>

//#define DEBUG      //if defined then won't show ways of filling grid
                     //if not define then woll show ways of filling grid
```

```
long quantity=0;
int max_x;
int max_y;
int grid[100][100]={0};

void fill_grid(int x,int y,int direction,int level);
void print_grid(void);

void main(void)
{
    cout << "Input length of the grid : ";
    cin >> max_y;

    cout << "Input width of the grid : ";
    cin >> max_x;

    for(int a=0;a<max_x;a++)
        for(int b=0;b<max_y;b++)
            grid[a][b]=0;

    fill_grid(0,0,0,1);

   cout << endl << "----------------------------- reult ----------------------------" <<   endl;
    cout << "There are " << quantity << " ways to fill the grid.";
    getch();
}

void fill_grid(int x,int y,int direction,int level)
{
    if(x<max_x) {
        if(grid[x][y]==0) {   //current location is empty
            if(direction==0) {   //horizental fill
                if(x+1<max_x && grid[x+1][y]==0) {   //if have enough space
                    grid[x][y]=level;   //fill data
                    grid[x+1][y]=level;

                    fill_grid(x+2,y,0,level+1);   //continue filling
```

```
                        grid[x][y]=0;    //reset data
                        grid[x+1][y]=0;
                    }
                    fill_grid(x,y,1,level);
                }else if(direction==1) {    //vertical fill
                    if(y+1<max_y && grid[x][y+1]==0) {    //if have enough space
                        grid[x][y]=level;    //fill data
                        grid[x][y+1]=level;

                        fill_grid(x+1,y,0,level+1);    //continue filling

                        grid[x][y]=0;    //reset data
                        grid[x][y+1]=0;
                    }
                }    //if(direction==0)
            }else {
                fill_grid(x+1,y,0,level);    //continue filling
            }    //if(grid[x][y]==0)
        }else {
            if(y==max_y-1) {    //have filled to the last space.find a way to fill

                quantity++;
                #ifndef DEBUG
                clrscr();
                cout << endl << "---------------------------- " << quantity << "th way
--------------------------" << endl;
                print_grid();
                cout << "press any key to view next..." << endl;
                getch();
                #endif
            }else
                fill_grid(0,y+1,0,level);
        }    //if(x<max_x)
    }

    void print_grid(void)
    {
        for(int a=0;a<max_y;a++)
```

```
        {
            for(int b=0;b<max_x;b++)
            {
                textbackground(grid[b][a]%7+1);
                cprintf("    ");
            }
            cout << endl;
        }
        textbackground(8);
    }
```

(二)、有缺陷線的總圖形排法數程式碼：

```
{\rtf1\ansi\ansicpg950\deff0\deflang1033\deflangfe1028{\fonttbl{\f0\fnil\fcharset136
  \'b7\'73\'b2\'d3\'a9\'fa\'c5\'e9;}{\f1\fmodern\fprq6\fcharset136
  \'b7\'73\'b2\'d3\'a9\'fa\'c5\'e9;}}
  \viewkind4\uc1\pard\lang1028\f0\fs20 #include <conio.h>\par
  #include <iostream.h>\par
  #include <stdio.h>\par
  #include <iomanip.h>\par
  #include <ctype.h>\par
  #include <time.h>\par
  #include <dos.h>\par
  \par
  double quantity=0;\par
  int max_x;\par
  int max_y;\par
  int grid[100][100]=\{0\};\par
  char view_grid;\par
  \par
  void fill_grid(int x,int y,int direction,int level);\par
  void print_grid(void);\par
  int check_row(int row);    //return 1 if line is broken\par
  int check_column(int column);    //return 1 if line is broken\par
  \par
  void main(void)\par
  \{\par
  \tab char re_use,count_time;\par
  \tab time_t start,end;\par
```

```
\par
\tab do\{\par
\tab\tab clrscr();\par
\par
\tab\tab cout << "Input length of the grid : ";\par
\tab\tab cin >> max_y;\par
\par
\tab\tab cout << "Input width of the grid : ";\par
\tab\tab cin >> max_x;\par
\par
\tab\tab cout << "Show Grid ? (Y/N) : ";\par
\tab\tab cin >> view_grid;\par
\tab\tab view_grid=toupper(view_grid);\par
\par
\tab\tab if(view_grid!='Y')\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab cout << "Count Time ? (Y/N) : ";\par
\tab\tab\tab cin >> count_time;\par
\tab\tab\tab count_time=toupper(count_time);\par
\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab for(int a=0;a<max_x;a++)\par
\tab\tab\tab for(int b=0;b<max_y;b++)\par
\tab\tab\tab\tab grid[a][b]=0;\par
\tab\tab quantity=0;\par
\par
\tab\tab start=time(NULL);\par
\tab\tab fill_grid(0,0,0,1);\par
\tab\tab end=time(NULL);\par
\par
\tab\tab cout << endl << "------------------------------ reult ----------------------------" <<
endl;\par
\tab\tab cout << "There are " << quantity << " ways to fill the grid." << endl << endl;\par
\par
\tab\tab if(count_time=='Y')\par
\tab\tab\tab cout << "Time used : " << end-start << " Seconds." <<endl;\par
\par
\tab\tab cout << "Find another grid ? (Y/N) : ";\par
```

```
\tab\tab cin >> re_use;\par
\tab\tab re_use=toupper(re_use);\par
\tab\}while(re_use=='Y');\par
\}\par
\par
void fill_grid(int x,int y,int direction,int level)\par
\{\par
\tab if(x<max_x) \{\par
\tab\tab if(grid[x][y]==0) \{    //current location is empty\par
\tab\tab\tab if(check_row(y)!=0) \{\par
\tab\tab\tab\tab if(direction==0) \{    //horizental fill\par
\tab\tab\tab\tab\tab if(x+1<max_x && grid[x+1][y]==0) \{    //if have enough space\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=level;    //fill data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x+1][y]=level;\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x+2,y,0,level+1);    //continue filling\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=0;    //reset data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x+1][y]=0;\par
\tab\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x,y,1,level);\par
\tab\tab\tab\tab\}else if(direction==1) \{    //vertical fill\par
\tab\tab\tab\tab\tab if(y+1<max_y && grid[x][y+1]==0) \{    //if have enough space\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=level;    //fill data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y+1]=level;\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab fill_grid(x+1,y,0,level+1);    //continue filling\par
\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y]=0;    //reset data\par
\tab\tab\tab\tab\tab\tab grid[x][y+1]=0;\par
\tab\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\tab\}    //if(direction==0)\par
\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\}else \{\par
\tab\tab\tab fill_grid(x+1,y,0,level);    //continue filling\par
\tab\tab\}    //if(grid[x][y]==0)\par
\tab\}else \{\par
\tab\tab if(y==max_y-1) \{    //have filled to the last space.find a way to fill\par
```

```
\par
\tab\tab\tab if(check_row(y)==0)\par
\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab return;\par
\tab\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab\tab for(int a=1;a<max_x;a++)\par
\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab if(check_column(a)==0)\par
\tab\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab\tab return;\par
\tab\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\tab\}\par
\par
\tab\tab\tab quantity++;\par
\par
\tab\tab\tab if(view_grid=='Y')\par
\tab\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab\tab clrscr();\par
\tab\tab\tab\tab cout << endl << "---------------------------- " << quantity << "th way
--------------------------" << endl;\par
\tab\tab\tab\tab print_grid();\par
\tab\tab\tab\tab cout << "press any key to view next..." << endl;\par
\tab\tab\tab\tab getch();\par
\tab\tab\tab\}\par
\tab\tab\}else \{\par
\tab\tab\tab fill_grid(0,y+1,0,level);\par
\tab\tab\}\par
\tab\}    //if(x<max_x)\par
\}\par
\par
int check_row(int row)\par
\{\par
\tab for(int a=0;a<max_x;a++)\par
\tab\tab if(grid[a][row-1]==grid[a][row])\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab return 1;\par
\tab\tab\}\par
```

```
\tab return 0;\par
\}\par
\par
int check_column(int column)\par
\{\par
\tab for(int a=0;a<max_y;a++)\par
\tab\tab if(grid[column-1][a]==grid[column][a])\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab return 1;\par
\tab\tab\}\par
\tab return 0;\par
\}\par
\par
void print_grid(void)\par
\{\par
\tab for(int a=0;a<max_y;a++)\par
\tab\{\par
\tab\tab for(int b=0;b<max_x;b++)\par
\tab\tab\{\par
\tab\tab\tab textbackground(grid[b][a]%7+1);\par
\tab\tab\tab cprintf("    ");\par
\tab\tab\}\par
\tab\tab cout << endl;\par
\tab\}\par
\tab textbackground(8);\par
\}\par
\f1\par
}
```

拾、附錄：

一、

$$a \to 1 + \left(-\left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}} \right) \right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}} \right)^2 - 5\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}} \right)^2 \right) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}\right)\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)-$$

$$\Bigg(\Bigg(-\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(-\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left.\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\right)$$

$$\left(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$\left.5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\right.\right.$$

$$\left.5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$\left.\left.5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)\right)-$$

$$\left(\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\Bigg(-\bigg(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2+\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\Bigg)\Bigg)$$

$$-\Bigg(-\bigg(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)\Bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2-$$

$$5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\Bigg)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-5+\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\bigg(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\Bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\Bigg)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\Bigg(\bigg(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\Bigg)\Bigg)+$$

$$\Bigg(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}\Bigg)$$

$$\Bigg(-\bigg(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\Bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-11+\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\Bigg(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}\Bigg)$$

$$\Bigg(-\Bigg(-\bigg(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\Bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\Bigg)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)$$

$$\left(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\right.\right.$$

$$\left.5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\right.\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)+$$

$$5\left(-\frac{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}}{5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}}+\right.$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(-\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)\Bigg)-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\right.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-5$$

$$\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-$$

$$5 \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}} \; (\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3)) +$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}} \; (-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3 +$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3)))) +$$

$$\frac{1}{5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}} \; (\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$(((-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right) - 5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right))) \Big/$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right) - (((-(\frac{\sqrt{29}}{2} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)$$

$$-\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-\right.\right.$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\Bigg)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)$$

$$-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\right.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\right.$$

$$\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\Bigg)\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\Bigg(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}$$

$$\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\Bigg)$$

$$\Bigg(-\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\Bigg(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

$$b\to\frac{-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}}{5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}}-$$

$$\left(\left(\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right)\right)-\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)$$

$$\left(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)-$$

$$\frac{1}{5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}}$$

$$\left(\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$\left.\left.5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\right)\right/$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)-$$

$$\left(\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-\right.\right.\right.$$

$$\left.5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$\left.\left.5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$\left(-\left(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left.\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\right)$$

$$\left(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\right.\right.$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\Bigg)\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(\Bigg(\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(\Bigg(-\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\Bigg(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}+$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{2}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^{3}-$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\Bigg)\Bigg) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg) +$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left.\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

$$c\to-\Bigg(\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right) -$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)\Bigg) \Big/$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\right.$$

$$\left.\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)+\Bigg(\Bigg(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\ \left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\ \left(-5+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\Bigg)\Bigg)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\Bigg(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-$$

$$5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\Bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\ \left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\Bigg(-\left(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\ \left(-11+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\ \Big/$$

$$\left(\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)\right.$$

$$\left(-\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2-\right.\right.\right.$$

$$\left.5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)-$$

$$\left.\left.5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^2\right)\right)\right)$$

$$\left(-\left(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left.\left(\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)+$$

$$\left(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\left(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)}\right)$$

$$\left(-\left(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)\right.$$

$$\left(5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3-5\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\left.\left.\left.\left(-\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)^3\right)\right)\right)\right),$$

$$d \to -\Bigg(-\Bigg(-\bigg(-\bigg(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg(-5+\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\bigg)\bigg)\Bigg)$$

$$\bigg(-\bigg(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg(\bigg(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\bigg)\bigg)+$$

$$\bigg(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}+\frac{5}{2}\sqrt{29\bigg(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)\bigg(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\bigg)}\bigg)$$

$$\bigg(-\bigg(-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\bigg)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg(-11+\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^3\bigg)\bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg/$$

$$\Bigg(-\Bigg(-\bigg(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)$$

$$\bigg(5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2-5\bigg(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}\bigg)^2\bigg)-5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

$$\{-(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}})^2+(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^2\}$$

$$\{-(-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})$$

$$(5(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3-5(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}((\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}})^3-(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3)),$$

$$(-\frac{145}{4}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{5}{4}\sqrt{29(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})}+\frac{5}{2}\sqrt{29(\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2})(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})})$$

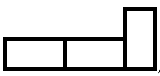
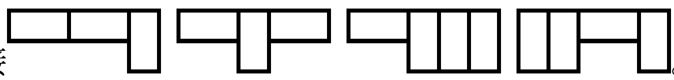
$$-(\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})$$

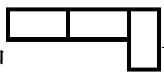
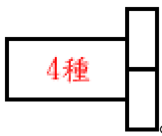
$$(5(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3-5(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3)-$$

$$5\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}}(-(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{29}}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}})^3+$$

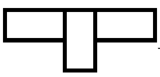
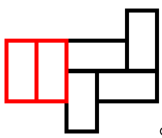
$$(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{29}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}})^3)))$$

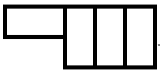
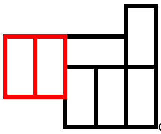
二、

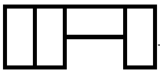
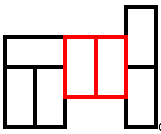
底下可接。

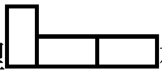
其中可與上面轉成 $k_4(2)$有 4 種,

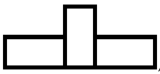
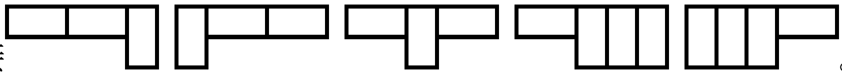
。

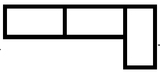
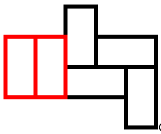
可與上面轉成 1 種,。

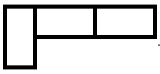
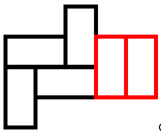
可與上面轉成 1 種，。

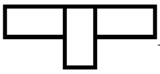
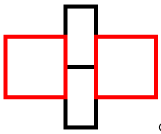
可與上面轉成 1 種，。

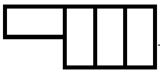
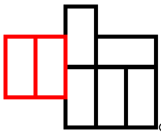
∴可以接 7 種，同理亦是 7 種。

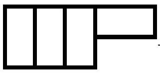
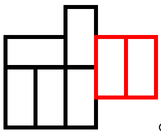
底下可接。

其中可與上面轉成 1 種，。

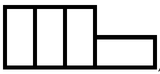
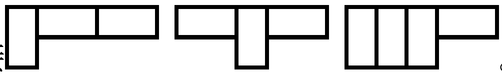
可與上面轉成 1 種，。

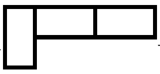
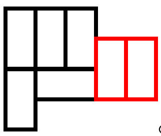
可與上面轉成 3 種，。

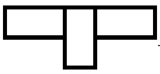
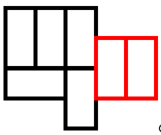
可與上面轉成 1 種，。

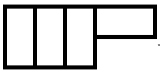
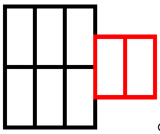
可與上面轉成 1 種，。

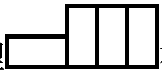
∴可以接 7 種。

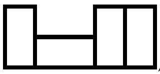
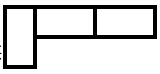
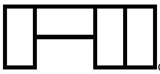
底下可接。

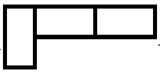
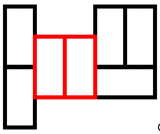
其中可與上面轉成 1 種，。

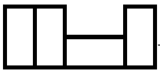
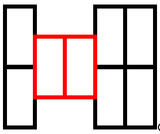
可與上面轉成 1 種，。

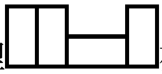
可與上面轉成 1 種，。

∴可以接 3 種，同理亦是 3 種。

底下可接 。

其中可與上面轉成 1 種，。

可與上面轉成 1 種，。

∴可以接 2 種，同理亦是 2 種。