中華民國第42屆中小學科學展覽會

∴∴ 作品說明書 ∴∴

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：怎麼“切”都行

關 鍵 詞：圓錐曲線、切 線

編　　號：040407

學校名稱：

國立宜蘭高級中學

作者姓名：

林品鴻、林郁智、李政寬、林珮瑜

指導老師：

莊信明、楊明雯

壹、摘要

在數學課本中，求圓錐曲線的切線是一個非常重要的課題。而課本在處理這個問題時，是將其概分為三部分(註 1)：曲線上、已知斜率及曲線外；關於第一部分，課本提供了一個切線公式(註 2)：

設 $P(x_0, y_0)$為圓錐曲線 $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$上一點，則過 $P(x_0, y_0)$的切線方程式為：

$$ax_0x+by_0y+c\frac{x_0y+y_0x}{2}+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f=0\text{------}(*)$$

若於曲線外，則沒有公式可用。本文成功地將(*)擴充到不論 P 是否在曲線上或曲線外，均可適用的公式。我們定為切線公式：

切線公式：

設 $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$ 過點 $P(x_0, y_0)$作圓錐曲線 $f(x,y)=0$之切線方程式滿足 $f(x_0,y_0)f(x,y)-T_f^{\,2}(x,y)=0$

其中 $T_f(x,y)=ax_0x+by_0y+c\frac{x_0y+y_0x}{2}+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f$

貳、動機

在某次的考試中，有道簡單的問題：過橢圓外一點做橢圓的切線，結果有同學做錯了，原因是這點恰好在橢圓長軸頂點的上方，利用點斜式解此切線方程式時只有一條切線，而正確的答案是兩條，沒有算出來的那條切線恰好是垂直於 x 軸的直線，關於這一點，老師是有點生氣，因為這是他強調過好幾次的事，居然還有人忘記。

參、目的

過圓曲線上一點做此圓錐曲線的切線，通常是逕直代入切線公式即可求得，但是對於圓錐曲線外的點，就沒有類似此種的公式，而是應用點斜式與判別式解出切線斜率，再由點斜式求得切線方程式。

本文的目的在企求對於圓錐曲線外的一點，求做此圓錐曲線的切線時，可否仿照此點為切點之情形，直接代入公式，也就是說：不論已知點是否在圓錐曲線上，我們均給予一切線公式。

肆、研究過程

我們知道圓錐曲線的理論是相當複雜的，但是圓是圓錐曲線之一，而處理圓畢竟比較簡單，只要掌握圓心與半徑就可以了，所以在經過各種試驗均失敗的情況下，我們決定從圓開始研究起。

在課本(註 3)上的例題，求圓：$x^2+y^2-4x+4y-2=0$的切線，使它通過定點 $A(4,2)$，課本提供了三種做法：利用判別式$\triangle\geq 0$、利用 $d=r$的條件、利用"斜率為已知"的切線公式。此處就以第一種做法約略述說如下：

因 $4^2+2^2-4\cdot 4+4\cdot 2-2=10>0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$，$\therefore$ A 在圓外。

(1)顯然 $x=4$不為切線。

(2)設切線 ℓ 的斜率為 m，則 $\ell: y-2=m(x-4)$，$\therefore y=m(x-4)+2$ 代入圓方程式後化簡得：

$$(1+m^2)x^2-4(2m^2-2m+1)x+(16m^2-32m+10)=0$$

判別式 $\triangle=0 \Rightarrow 4(2m^2-2m+1)^2-(1+m^2)(16m^2-32m+10)=0$

$$\Rightarrow (3m-1)(m+3)=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3} 或 -3$$

故 $\ell: x-3y+2=0$ 和 $\ell: 3x+y-14=0$

上述的處理方法是一個非常成熟的方法，要在其中得到任何突破性的想法是不可能的，因此我們完全放棄以上做法，改以各種異想天開的，勁爆的想法試著去突破，幾經失敗，最後我們從答案著手：

將兩切線方程式相乘 $(x-3y+2)(3x+y-14)=0$，展開得

$$3x^2-8xy-3y^2-8x+44y-28=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

另一方面，如果將 A 當做切點，那麼圓的切線方程式將為

$$4x+2y-2(x+4)+2(y+2)-2=0 \Rightarrow 2x+4y-6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

觀察(2)式與(3)式，似乎沒有任何關聯，我們試著將圓上的切點看成是圓外點的趨近，這時(2)應該是(3)式的兩切線的重疊；換句話說，(2)式應該要平方，所以

$$(2x+4y-6)^2=4x^2+16xy+16y^2-24x-48y+36=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

審視(2)式與(4)式到底之間有什麼關係呢？次數相同，所以相加或相減試試看！

$(2)+(4)$： $7x^2+8xy+13y^2-32x-4y+8=0$

$(2)-(4)$： $-x^2-24xy-19y^2+16x+88y-64=0$

這二式完全看不出有什麼名堂，再試試其他！

$2\times(2)+(4)$：$10x^2+10y^2-40x+40y-20=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

仔細觀察(5)式，發現恰好是圓方程式的 10 倍，而 10 又恰好是(1)式的值，這個結果非常有意義：如果將它寫成式子就是 $2\times(2)+(4)=(5)$。因為我們要找出的是(2)，所以將上式寫成 $2\times(2)=(5)-(4)$。因此只要令 $(5)-(4)$=0，即可得 $(2)=0$，再因式分解之，即可解出兩切線方程式。

這個發現，對我們來說是相當的意外，也許是巧合吧！因此我們又試了好幾個各種情形的切線，結果都一一適合。因此有理由相信這個結果是正確的。高興之餘，我們試著去證明，但不幸的是證明的困難度難以想像，所幸在大家通力合作下，鍥而不捨終於完成。

推論：自圓 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 外一點 $P(x_0,y_0)$ 作圓的切線，其兩切線方程式滿足

$$(x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f)(x^2+y^2+dx+ey+f)-\\(x_0x+y_0y+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f)^2=0$$

證明:

1.設圓方程式： $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

設切線 $L_1: y-y_0=m(x-x_0)$

$mx-mx_0+y_0=y$

將 $mx-mx_0+y_0=y$ 代入 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

得到: $x^2+(mx-mx_0+y_0)^2+dx+e(mx-mx_0+y_0)+f=0$

$\Rightarrow x^2+m^2x^2-m^2xx_0+mxy_0-m^2xx_0+m^2x_0{}^2-mx_0y_0+mxy_0-mx_0y_0+y_0{}^2+dx+emx$
$-emx_0+ey_0+f=0$

$\Rightarrow (1+m^2)x^2+xx_0(-2m^2)+m^2x_0{}^2+y_0{}^2+2mxy_0-2mx_0y_0+(d+em)x-emx_0+ey_0+f=0$

$\Rightarrow (1+m^2)x^2+(d+em+2my_0-2m^2x_0)x+(m^2x_0{}^2+y_0{}^2-2mx_0y_0-emx_0+ey_0+f)=0$

又 $D=b^2-4ac=0$ （因為是切線）

$\Rightarrow (d+em+2my_0-2m^2x_0)^2-4(1+m^2)(m^2x_0{}^2+y_0{}^2-2mx_0y_0-emx_0+ey_0+f)=0$

$\Rightarrow (4x_0{}^2+4dx_0-e^2+4f)m^2+(-2ed-4x_0-4dy_0-8x_0y_0)m+4y_0{}^2+4ey_0-d^2+4f=0$

兩根之和： $m_1+m_2=\dfrac{2ed+4x_0+4dy_0+8x_0y_0}{4x_0{}^2+4dx_0-e^2+4f}$

兩根之積： $m_1m_2=\dfrac{4y_0{}^2+4ey_0-d^2+4f}{4x_0{}^2+4dx_0-e^2+4f}$

以兩直線為： $y-y_0-m_1(x-x_0)=0$ 及 $y-y_0-m_2(x-x_0)=0$ 相乘

$$\Rightarrow (y-y_0)^2-(m_1+m_2)(x-x_0)(y-y_0)+(m_1m_2)(x-x_0)^2=0\Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ (a)$$

將兩根和及兩根積代入 (a) 式並去分母

此式之化簡極其複雜，為了方便計算起見，將原式之三項依次設為 A、B、C。

A= $(y-y_0)^2(4x_0{}^2+4dx_0-e^2+4f)$

B= $-(x-x_0)(y-y_0)(2ed+4ex_0+4dy_0+8x_0y_0)$

C= $(4y_0{}^2+4ey_0-d^2+4f)(x-x_0{}^2)$

分別展開得到：

$$\begin{aligned}A&=(y-y_0)^2(4x_0{}^2+4dx_0-e^2+4f)\\&=4x_0{}^2y^2+4dx_0y^2+y^2(4f-e^2)-8x_0{}^2y_0y-8dx_0y_0y+y_0y(2e^2-8f)\\&+4x_0{}^2y_0{}^2+4dx_0y_0{}^2+y_0{}^2(4f-e^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=-(x-x_0)(y-y_0)(2ed+4ex_0+4dy_0+8x_0y_0)\\&=2edx_0y+4ex_0{}^2y+4dx_0y_0y+8x_0{}^2y_0y+2edxy_0+4ex_0xy_0\\&+4dxy_0{}^2+8x_0xy_0{}^2-xy(2ed)-4ex_0xy-4dxy_0y-8x_0xy_0y\\&-2edx_0y_0-4ex_0{}^2y_0-4dx_0y_0{}^2-8x_0{}^2y_0{}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=(4y_0{}^2+4ey_0-d^2+4f)(x-x_0)^2\\&=4x^2y_0{}^2+4ex^2y_0+x^2(4f-d^2)-8x_0xy_0{}^2-8ex_0xy_0+x_0x(2d^2-8f)\\&+4x_0{}^2y_0{}^2+4ex_0{}^2y_0+x_0{}^2(4f-d^2)\end{aligned}$$

將 A、B、C 代回 (a)式

$$\begin{aligned}(a)\Rightarrow\ &8x_0xy_0y+4ex_0xy_0+4ex_0xy+(8f-2d^2)x_0x+4dx_0y_0y\\&+4dxy_0y+(8f-2e^2)y_0y+(d^2-4f)x_0{}^2+(d^2-4f)x^2+2edx_0y_0\\&+2edxy+(e^2-4f)y_0{}^2+(e^2-4f)y^2-4x^2y_0{}^2-4ex^2y_0-4x_0{}^2y^2\\&-4dx_0y^2-4dxy_0{}^2-2edxy_0-4ex_0{}^2y-2edx_0y=0--------(b)\end{aligned}$$

2.要將(b)化簡為推論中的式子很困難，所以反過來將

$$(x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f)(x^2+y^2+dx+ey+f)$$

$$-[x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f]^2=0$$ 展開

仿照上述方法令 $D=(x_0{}^2+y_0{}^2+dx_0+ey_0+f)(x^2+y^2+dx+ey+f)$

$$E=[x_0x+y_0y+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f]^2$$

展開 D，得

$$\begin{aligned}D&=8x_0xy_0y+4ex_0xy_0+4ex_0xy+8fx_0x+4dx_0y_0y+4dxy_0y+8fy_0y+d^2x_0{}^2\\&+d^2x^2+edx_0y_0+dexy+dex_0y_0+dexy+e^2y_0{}^2+e^2y^2\end{aligned}$$

展開 E，得

$$E=4x^2{y_0}^2+4ex^2y_0+4fx^2+4{x_0}^2y^2+4dx_0y^2+4fy^2+4dx{y_0}^2+2d^2x_0x$$
$$+2dexy_0+4e{x_0}^2y+2dex_0y+2e^2y_0y+4f{x_0}^2+4f{y_0}^2$$

$$\begin{aligned}\therefore D-E=\ &8x_0xy_0y+4ex_0xy_0+4ex_0xy+(8f-2d^2-2de)x_0x+4dx_0y_0y+4dxy_0y\\&+(8f-2e^2)y_0y+(d^2-4f){x_0}^2+(d^2-4f)x^2+2edx_0y_0+2edxy\\&+(e^2-4f){y_0}^2+(e^2-4f)y^2-4x^2{y_0}^2-4ex^2y_0-4{x_0}^2y^2-4dx_0y^2\\&-4dx{y_0}^2-2edxy_0-4e{x_0}^2y-2dex_0y=0\end{aligned}$$

由 1.和 2.，故推論成立。

因為圓的部分既然已成立，自然是要想辦法將此證明方法延伸到圓錐曲線的一般情形，不過在證明之前，為了敘述的方便起見，我們做以下之規定：

定義：設 $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$， $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$為圓錐曲線 $f(x,y)=0$同平面之任意點，則 $T_f(x,y)$=0 表 $ax_0x+by_0y+c\dfrac{x_0y+y_0x}{2}+d\dfrac{x+x_0}{2}+e\dfrac{y+y_0}{2}+f$=0

很顯然，$T_f(x,y)$=0 就是 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$關於圓錐曲線 $f(x,y)=0$ 之極線，而 P 在圓錐曲線 $f(x,y)=0$上時 $T_f(x,y)$=0 即表示過 P 且與 $f(x,y)=0$相切之切線方程式。

利用推論我們順利將它推廣到圓錐曲線。

定理 1：設 $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$
自圓錐曲線 $f(x,y)=0$外一點 $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)$作 $f(x,y)=0$之切線；切線方程式滿足 $f(x_0,y_0)f(x,y)-{T_f}^2(x,y)=0$

證明:

1.先導出若切線存在，則此兩切線方程式之乘積。

圓錐曲線：$ax^2+by+cxy+dx+ey+f=0$

設其切線為：$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y=y_0+mx-mx_0$
將 y 代入圓錐曲線中

$$\Rightarrow ax^2+c(mx-mx_0+y_0)^2+bx(mx-mx_0+y_0)+dx+e(mx-mx_0+y_0)+f=0$$

$$\Rightarrow ax^2+bm^2x^2-bm^2xx_0+bmxy_0-bm^2xx_0+bm^2{x_0}^2-bmx_0y_0+bmxy_0-bmx_0y_0+b{y_0}^2$$
$$+cmx^2-cmxx_0+cxy_0+dx+emx-emx_0+ey_0+f=0$$

$$\Rightarrow (a+bm^2+cm)x^2+(-2bm^2x_0+2bmy_0-cmx_0+cy_0+d+em)x$$
$$+(bm^2{x_0}^2+b{y_0}^2-2bmx_0y_0-emx_0+ey_0+f)=0$$

又 $D=b^2-4ac=0$ （因為是切線）

故 $(-2bm^2x_0+2bmy_0-cmx_0+cy_0+d+em)^2$

$$-4(a+bm^2+cm)(bm^2{x_0}^2+b{y_0}^2-2bmx_0y_0-emx_0+ey_0+f)=0$$

$$\Rightarrow (4b^2m^4+c^2m^2+4bcm^3){x_0}^2$$

$$+[{y_0}^2(4b^2m^2+c^2+4bcm)+d^2+e^2m^2+2dem+y_0(4bdm+2cd+4bem^2+2cem)]$$

$$+x_0(-4bm^2-2cm)\left[y_0(2bm+c)+(d+em)\right]x_0y_0(-8b^2m^3-4bcm^2-4bcm^2-2c^2m)$$

$$+x_0(-4bdm^2-4bem^3-2cdm-2cem^2)+\left[-4af+x_0y_0(8abm)+y_0(-4ae)+x_0(4em)+\right.$$

$$\left.{y_0}^2(-4bm)+x(-4bm)\right]+-4cfm+x_0y_0(8bcm^2)+y_0(-4cem)+x_0(4cem^2)+{y_0}^2(-4bcm)+{x_0}^2(-4bcm^3)$$

$$\Rightarrow (c^2{x_0}^2-4ab{x_0}^2+e^2-4bf+2cex_0-4bdx_0)m^2+(4bdy_0-2c^2x_0y_0-2cdx_0-2cey_0+$$
$$2de+8abx_0y_0+4aex_0-4cf)m+(c^2{y_0}^2+2cdy_0+d^2-4ab{y_0}^2-4aey_0-4af)=0$$

兩根和： $m_1+m_2=\dfrac{-(4bdy_0-2c^2x_0y_0-2cdx_0-2cey_0+2de+8abx_0y_0+4aex_0-4cf)}{c^2{x_0}^2-4ab{x_0}^2+e^2-4bf+2cex_0-4bdx_0}$

兩根積： $m_1m_2=\dfrac{(c^2{y_0}^2+2cdy_0+d^2-4ab{y_0}^2-4aey_0-4af)}{c^2{x_0}^2-4ab{x_0}^2+e^2-4bf+2cex_0-4bdx_0}$

以兩直線為: $y-y_0-m_1(x-x_0)=0$及$y-y_0-m_2(x-x_0)=0$相乘

$$\Rightarrow (y-y_0)^2-(m_1+m_2)(x-x_0)(y-y_0)+(m_1m_2)(x-x_0)^2=0$$

代入並去分母 $\Rightarrow (y-y_0)^2(c^2{x_0}^2-4ab{x_0}^2+e^2-4bf+2cex_0-4bdx_0)$

$$+(x-x_0)(y-y_0)(4bdy_0-2c^2x_0y_0-2cdx_0-2cey_0+2de+8abx_0y_0+4aex_0-4cf)$$
$$+(x-x_0)^2(c^2{y_0}^2+2cdy_0+d^2-4ab{y_0}^2-4aey_0-4af)$$

此式之化簡極其複雜，為了方便計算起見，將此式之三項依次設為 A、B、C。

即 A= $(y-y_0)^2(c^2{x_0}^2-4ab{x_0}^2+e^2-4bf+2cex_0-4bdx_0)$

B= $(x-x_0)(y-y_0)(4bdy_0-2c^2x_0y_0-2cdx_0-2cey_0+2de+8abx_0y_0)$

C= $(x-x_0)^2(c^2{y_0}^2+2cdy_0+d^2-4ab{y_0}^2-4aey_0-4af)$

$$
\begin{aligned}
A &= (y-y_0)^2[-4bf+e^2+{x_0}^2(-4ab+c^2)+x_0(2ce-4bd)] \\
&= (y^2-2y_0y+{y_0}^2)[(-4bf+e^2)+{x_0}^2(c^2-4ab)+x_0(2ce-4bd)] \\
&= y^2(e^2-4bf)+{x_0}^2y^2(c^2-4ab)+x_0y^2(2ce-4bd) \\
&\quad +(-2)(e^2-4bf)y_0y+(-2)(c^2-4ab){x_0}^2y_0y+(-2)(2ce-4bd)x_0y_0y \\
&\quad +{y_0}^2(e^2-4bf)+{x_0}^2{y_0}^2(c^2-4ab)+x_0{y_0}^2(2ce-4bd)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= (x-x_0)(y-y_0)[x_0y_0(-8ab-2c^2)+x_0(4ae-2cd)+y_0(4bd-2ce)+(2de-4cf)] \\
&= (xy+x_0y_0-x_0y-xy_0)[(2de-4cf)+x_0(4ae-2cd)+y_0(4bd-2ce)+x_0y_0(8ab-2c^2)] \\
&= xy(2de-4cf)+x_0xy(4ae-2cd)+xy_0y(4bd-2ce) \\
&\quad +x_0xy_0y(8ab-2c^2)+x_0y_0(2de-4cf)+{x_0}^2y_0(4ae-2cd) \\
&\quad +x_0{y_0}^2(4bd-2ce)+{x_0}^2{y_0}^2(8ab-2c^2)+(4cf-2de)(x_0y) \\
&\quad +{x_0}^2y(2cd-4ae)+x_0y_0y(2ce-4bd)+{x_0}^2y_0y(2c^2-8ae) \\
&\quad +xy_0(4cf-2de)+x_0xy_0(2cd-4ae)+x{y_0}^2(2ce-4bd) \\
&\quad +x_0x{y_0}^2(2c^2-8ab)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= (x-x_0)^2(d^2+c^2{y_0}^2-4ab{y_0}^2-4aey_0+2cdy_0-4af) \\
&= (x^2-2x_0x+{x_0}^2)[(d^2-4af)+y_0(2cd-4ae)+{y_0}^2(c^2-4ab)] \\
&= x^2(d^2-4af)+x^2y_0(2cd-4ae)+x^2{y_0}^2(c^2-4ab) \\
&\quad +(-2)(d^2-4af)(x_0x)+(-2)(2cd-4ae)(x_0xy_0) \\
&\quad +(-2)(c^2-4ab)(x_0x{y_0}^2)+{x_0}^2(d^2-4af)+{x_0}^2y_0(2cd-4ae)+{x_0}^2{y_0}^2(c^2-4ab) \\
&= d^2x^2-4afx^2+2cdx^2y_0-4aex^2y_0+c^2x^2{y_0}^2-4abx^2{y_0}^2 \\
&\quad -2d^2x_0x+8afx_0x-4cdx_0xy_0+8aex_0xy_0-2c^2x_0x{y_0}^2+8abx_0x{y_0}^2 \\
&\quad +d^2{x_0}^2-4af{x_0}^2+2cd{x_0}^2y_0-4ae{x_0}^2y_0+c^2{x_0}^2{y_0}^2-4ab{x_0}^2{y_0}^2
\end{aligned}
$$

將 A、B、C 代回原式

$$
\begin{aligned}
&\text{得}\, x_0xy_0y(8ab-2c^2)+x_0x(8af-2d^2)+y_0y(8bf-2e^2) \\
&\quad +{x_0}^2y^2(c^2-4ab)+x^2{y_0}^2(c^2-4ab)+{x_0}^2y(2cd-4ae) \\
&\quad +x^2y_0(2cd-4ae)+x_0xy_0(4ae-2cd)+x_0xy(4ae-2cd) \\
&\quad +x_0y_0y(4bd-2ce)+xy_0y(4bd-2ce)+x_0y^2(2ce-4bd) \\
&\quad +x{y_0}^2(2ce-4bd)+x_0y_0(2de-4cf)+xy(2de-4cf)+x_0y(4cf-2de) \\
&\quad +xy_0(4cf-2de)+x^2(d^2-4af)+{x_0}^2(d^2-4af)+{y_0}^2(e^2-4bf) \\
&\quad +y^2(e^2-4bf)=0
\end{aligned}
$$

2.另一方面將 $f(x_0,y_0)f(x,y)-{T_f}^2(x,y)=0$ 展開

$$f(x_0,y_0)f(x,y)-T_f^{\,2}(x,y)=(ax_0^{\,2}+by_0^{\,2}+cx_0y_0+dx_0+ey_0+f)(ax^2+by^2$$
$$+cxy+dx+ey+f)-[ax_0x+by_0y+\frac{c}{2}(x_0y+xy_0)+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f]^2=0$$

（i） $(ax_0^{\,2}+by_0^{\,2}+cx_0y_0+dx_0+ey_0+f)(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f)$

$$\Rightarrow a^2x_0^{\,2}x^2+abx_0^{\,2}y_0+acx_0^{\,2}xy+adx_0^{\,2}x+aex_0^{\,2}y+afx_0^{\,2}$$
$$+abx^2y_0^{\,2}+b^2y_0^{\,2}y^2+bcxyy_0^{\,2}+bdxy_0^{\,2}+beyy_0^{\,2}+bfy_0^{\,2}+acx_0x^2y_0$$
$$+bcx_0y_0y^2+c^2x_0xy_0y+cdx_0xy_0+cex_0y_0y+cfx_0y_0+adx_0x^2$$
$$+bdx_0y^2+cdx_0xy+d^2x_0x+dex_0y+dfx_0+aex^2y_0+bey_0y^2+cexy_0y$$
$$+dexy_0+e^2y_0y+efy_0+afx^2+bfy^2+cfxy+dfx+efy+f^2$$

$$=x_0xy_0y(c^2)+x_0x(d^2)+y_0y(e^2)+x_0^{\,2}y^2(ab)+x^2y_0^{\,2}(ab)+x_0^{\,2}y(ae)+x^2y_0(ae)$$
$$+x_0xy_0(cd)+x_0xy(cd)+x_0y_0y(ce)+xy_0y(ce)+x_0y^2(bd)+xy_0^{\,2}(bd)+x_0y_0(cf)$$
$$+xy(cf)+x_0y(de)+xy_0(de)+x^2(af)+x_0^{\,2}(af)+y_0^{\,2}(bf)+y^2(bf)$$

（ii） $T_f^{\,2}(x,y)=[ax_0x+by_0y+\frac{c}{2}(x_0y+xy_0)+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+f]^2$

$$=[a^2x_0^{\,2}x^2+\frac{ac}{2}x_0^{\,2}xy+\frac{ac}{2}x_0x^2y_0+abx_0xy_0y+\frac{ad}{2}x_0x^2+\frac{ad}{2}x_0^{\,2}x$$
$$+\frac{ae}{2}x_0xy_0+\frac{ae}{2}x_0xy+afx_0x]+[\frac{ac}{2}x_0^{\,2}xy+\frac{ac}{2}x_0x^2y_0+\frac{c^2}{4}x_0^{\,2}y^2$$
$$+\frac{c^2}{4}(2x_0xy_0y)+\frac{c^2}{4}x^2y_0^{\,2}+\frac{bc}{2}x_0y_0^{\,2}y+\frac{bc}{2}x_0y_0y^2+\frac{cd}{4}x_0xy+\frac{cd}{4}x_0^{\,2}y$$
$$+\frac{cd}{4}x^2y_0+\frac{cd}{4}x_0xy_0+\frac{ce}{4}x_0y_0y+\frac{ce}{4}x_0y^2+\frac{ce}{4}xy_0^{\,2}+\frac{ce}{4}xy_0y+\frac{cf}{2}x_0y$$
$$+\frac{cf}{2}xy_0]+[abx_0xy_0y+\frac{bc}{2}x_0y_0y^2+\frac{bc}{2}xyy_0^{\,2}+b^2y_0^{\,2}y^2+\frac{bd}{2}xy_0y$$
$$+\frac{bd}{2}x_0y_0y+\frac{be}{2}y_0^{\,2}y+\frac{be}{2}y_0y^2+bfy_0y]+[\frac{ad}{2}x_0^{\,2}x+\frac{ad}{2}x_0x^2+\frac{cd}{4}x_0^{\,2}y$$
$$+\frac{cd}{4}x_0xy_0+\frac{cd}{4}x_0xy+\frac{cd}{4}x^2y_0+\frac{bd}{2}x_0y_0y+\frac{bd}{2}xy_0y+\frac{d^2}{4}x^2+\frac{d^2}{4}(2x_0x)$$
$$+\frac{d^2}{4}x_0^{\,2}+\frac{de}{4}x_0y_0+\frac{de}{4}x_0y+\frac{de}{4}xy_0+\frac{de}{4}xy+\frac{df}{2}x_0+\frac{df}{2}x]+[\frac{ae}{2}x_0xy_0$$
$$+\frac{ae}{2}x_0xy+\frac{ce}{4}x_0y_0y+\frac{ce}{4}xy_0^{\,2}+\frac{ce}{4}x_0y^2+\frac{ce}{4}xy_0y+\frac{be}{2}y_0y^2+\frac{be}{2}y_0^{\,2}y$$
$$+\frac{de}{4}xy_0+\frac{de}{4}xy+\frac{de}{4}x_0y_0+\frac{de}{4}x_0y+\frac{e^2}{4}y_0^{\,2}+\frac{e^2}{4}(2y_0y)+\frac{e^2}{4}y^2+\frac{ef}{2}y_0$$
$$+\frac{ef}{2}y]+[afx_0x+\frac{cf}{2}x_0y+\frac{cf}{2}xy_0+bfy_0y+\frac{df}{2}x+\frac{df}{2}x_0+\frac{ef}{2}y_0+\frac{ef}{2}y+f^2]$$

$$\therefore (ax_0{}^2+by_0{}^2+cx_0y_0+dx_0+ey_0+f)(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f)-T_f{}^2(x,y)=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [x_0xy_0y(2ab-\frac{c^2}{2})+x_0x(2af-\frac{d^2}{2})+y_0y(2bf-\frac{e^2}{2})+x_0{}^2y^2(\frac{c^2}{4}-ab)\\
&+x^2y_0{}^2(\frac{c^2}{4}-ab)+x_0{}^2y(\frac{cd}{2}-ae)+x^2y_0(\frac{cd}{2}-ae)+x_0xy_0(ae-\frac{cd}{2})\\
&+x_0xy(ae-\frac{cd}{2})+x_0y_0y(bd-\frac{ce}{2})+xy_0y(bd-\frac{ce}{2})+x_0y^2(\frac{ce}{2}-bd)\\
&+xy_0{}^2(\frac{ce}{2}-bd)+x_0y_0(\frac{de}{2}-cf)+xy(\frac{de}{2}-cf)+x_0y(cf-\frac{de}{2})+xy_0(cf-\frac{de}{2})\\
&+x^2(\frac{d^2}{4}-af)+x_0{}^2(\frac{d^2}{4}-af)+y_0{}^2(\frac{e^2}{4}-bf)+y^2(\frac{e^2}{4}-bf)]=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x_0xy_0y(8ab-2c^2)+x_0x(8af-2d^2)+y_0y(8bf-2e^2)\\
&+x_0{}^2y^2(c^2-4ab)+x^2y_0{}^2(c^2-4ab)+x_0{}^2y(2cd-4ae)+x^2y_0(2cd-4ae)\\
&+x_0xy_0(4ae-2cd)+x_0xy(4ae-2cd)+x_0y_0y(4bd-2ce)+xy_0y(4bd-2ce)\\
&+x_0y^2(2ce-4bd)+xy_0{}^2(2ce-4bd)+x_0y_0(2de-4cf)+xy(2de-4cf)\\
&+x_0y(4cf-2de)+xy_0(4cf-2de)+x^2(d^2-4af)+x_0{}^2(d^2-4af)\\
&+y_0{}^2(e^2-4bf)+y^2(e^2-4bf)=0----------(***)
\end{aligned}$$

由 1.和 2.可得(**)=(***)故定理 1 成立

接著我們就以課本(註 4)習題上的一道題目來作例子：

例題一：有一圓錐曲線，其方程式為：$x^2-2y^2+4x+4y-26=0$，

1. 試求過點$(4,3)$的切線方程式
2. 試求過點$(-6,2)$的切線方程式

解法一：利用課本的方法

1. 將$(4,3)$代入$x^2-2y^2+4x+4y-26=0$
   得$16-18+16+12-26=0$
   $\therefore (4,3)$為切點
   $\therefore$切線為$4x-6y+4\dfrac{x+4}{2}+4\dfrac{y+3}{2}-26=0$
   $\Rightarrow 6x-4y-12=0$
   $\Rightarrow 3x-2y+6=0$
   故切線為$3x-2y-6=0$
2. 將$(-6,2)$代入$x^2-2y^2+4x+4y-26=0$
   得$36-8-24+8-26=14$
   $\therefore (-6,2)$不為切點
   設切線 t 之斜率為 m

$\therefore t: y-2=m(x+6)$

$\Rightarrow y=mx+6m+2$

代入圓錐曲線

$\therefore x^2-2[mx+(6m+2)]^2+4x+4[mx+(6m+2)]-26=0$

$\Rightarrow x^2-2[m^2x^2+2m(6m+2)x+(6m+2)^2]+4x+4mx+4(6m+2)-26=0$

$\Rightarrow (1-2m^2)x^2-(24m^2+8m-4-4m)x+(-72m^2-48m-8+24m+8-26)=0$

$\Rightarrow (1-2m^2)x^2-4(6m^2+m-1)x-(72m^2+24+26)=0$

$\Delta=0$

$\therefore [4(6m^2+m-1)]^2+4(1-2m^2)(72m^2+24+26)=0$

$\Rightarrow 12m^2-8m-15=0$

$\Rightarrow m=\dfrac{3}{2}\vee-\dfrac{5}{6}$

$\therefore t: y=\dfrac{3}{2}x+11$與$y=-\dfrac{5}{6}x-3$

即二切線為$3x-2y+22=0$與$5x+6y+18=0$

解法二：1. 同上

2. 由定理一：$-14(x^2-2y^2+4x+4y-26)-(4x+2y+34)^2=0$

$\Rightarrow 14x^2-28y^2+56x-364+16x^2+16xy+4y^2+136x+136y+1156=0$

$\Rightarrow 15x^2+8xy-12y^2+164x+96y+396=0$

$\Rightarrow (3x-2y+22)(5x+6y+18)=0$

故得二切線$3x-2y+22=0$與$5x+6y+18=0$

比較例題一的二做法，課本提供的方法顯然複雜許多。若使用定理一來解，則簡單許多，同樣再舉一例題，也是課本習題(同註 4)的一個題目，來當作例子：

例題二：有一圓錐曲線，其方程式為：$4x^2+y^2+8x-4y-8=0$

1. 試求過點$(-1,-2)$的切線方程式
2. 試求過點$(1,5)$的切線方程式

解法一：利用課本的方法

1. 將$(-1,-2)$代入$4x^2+y^2+8x-4y-8=0$，得

$4+4-8+8-8=0$

$\therefore (-1,-2)$為切點

$\therefore$切線為$-4x-2y+8\dfrac{x-1}{2}-4\dfrac{y-2}{2}-8=0$

$\Rightarrow y+2=0$

2. 將$(1,5)$代入得$4+25+8-20-8=9>0$

$\therefore (1,5)$在橢圓外

(1)$x=1$時

$4+y^2+8-4y-8=0$

$\Rightarrow y^2-4x+4=0$

$\Rightarrow y-2$ 有唯一解

$\therefore x=1$為一切線

(2)設切線 t 之斜率為 m

則$t: y-5=m(x-1)$

$\Rightarrow y=mx+(5-m)$

代入橢圓： $4x^2+[mx+(5-m)]^2+8x-4[mx+(5-m)]-8=0$

$\Rightarrow 4x^2+[m^2x^2+2m(5-m)x+(5-m)^2]+8x-4mx-4(5-m)-8=0$

$\Rightarrow (4+m^2)x^2+2(-m^2+5m+4-2m)x+(m^2-10m+25-20+4m-8)=0$

$\Rightarrow (m^2+4)x^2-2(m^2-3m-4)x+(m^2-6m-3)=0$

$\Delta=0$

$\therefore [2(m^2-3m-4)]^2-4(m^2+4)(m^2+4)(m^2-6m-3)=0$

$\Rightarrow (m^4-6m^3+m^2+24m+16)-(m^4-6m^3+m^2-24m-12)=0$

$\Rightarrow 48m+28=0$

$\Rightarrow m=-\dfrac{7}{12}$

得 $y=\dfrac{7}{12}x+\dfrac{67}{12}$

$\Rightarrow 7x+12y-67=0$

故二切線為 $7x+12y-67=0$ 與 $x=1$

解法二：1. 同上

2. 由定理一：

$3(4x^2+y^2+8x-4y-8)-(4x+5y+8\dfrac{x+1}{2}-4\dfrac{y+5}{2}-8)^2=0$

$\Rightarrow 36x^2+9y^2+72x-36y-72-(8x+3y-14)^2=0$

$\Rightarrow 7x^2+12xy-74x-12y+67=0$

$\Rightarrow (x-1)(7x+12y-67)=0$

故二切線為 $7x+12y-67=0$ 與 $x=1$

比較兩種解法，可見利用定理一來解切線問題比利用判別式簡潔很多。尤其是關於 x-1=0 這條切線如果用判別式是無法順利解出的。必須在假設切線斜率為 m 之前先行處理，就這一點而言，是我們學生們最容易忘記的，但是利用定理一則無此顧慮。

伍、結論

1. 觀察定理 2，當點 P 在圓錐曲線上時，此時

，原式變成 $0-(ax_0x+by_0y+c\dfrac{x_0y+y_0x}{2}+d\dfrac{x+x_0}{2}+e\dfrac{y+y_0}{2}+f)^2=0$

此即一般所用的公式 $ax_0x+by_0y+c\frac{x_0y+y_0x}{2}+d\frac{x+x_0}{2}+e\frac{y+y_0}{2}+f=0$

所以不論點 P 點在圓錐曲線上或是在圓錐曲線外，定理 2 都是成立的，因此，我們成功的將切線推廣公式擴充為：

定理 2:切線定理

設 $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$ 過點 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 作圓錐曲線 $f(x,y)=0$ 之切線方程式滿足 $f(x_0,y_0)f(x,y)-T_f{}^2(x,y)=0$

其中 $T_f(x,y)=0$ 表 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ 關於圓錐曲線 $f(x,y)=0$ 的極線

2.觀察此切線定理的形式， $f(x_0,y_0)$ 為一常數，而 $T_f(x,y)=0$ 為直線方程式，

也就是所謂的對於點 P 的極線，所以切線定理可以看成是圓錐曲線與極線的圓錐曲線系其退化成二直線時。所以我們一直試圖用此角度去處理此切線定理，非常可惜與無奈，我們無法去證明這個想法是正確的，只好留待日後閒暇時繼續努力。

陸、討論

比較此兩種做法，我們可以發現：

1.傳統解法原理簡單易懂，但是計算過程較為複雜，利用定理 2，計算則較為簡單。

2.傳統解法必須先處理過已知點且垂直於 x 軸之直線是否為切線，較易疏忽，利用定理 2，則無此顧忌。

3.利用定理 2 雖然必須使用因式分解，不過雙十字交乘法的因式分解，國中時代皆已學過，並不會造成負擔。

柒、參考資料

註 1：參考書目 1：page210~217

註 2：參考書目 3：page116~117

註 3：同註 1

註 4：同註 2

參考書目：

1.數學第三冊(南一書局：九十年修訂版)

2.數學第四冊(南一書局：九十年修訂版)

3.理科數學(上)(國立編譯館八十八年第十四版)