中華民國第42屆中小學科學展覽會

:.: 作品說明書 :.:

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：Watson 猜想初等求解

關 鍵 詞：Watson、畢氏數的本原解

編　　號：040404

學校名稱：

國立新竹高級中學

作者姓名：

莊治耘

指導老師：

陳柏勳

科展：Watson 猜想初等求解

壹、內容摘要：

在研究過程中，我們找出了一種方法去解決尚待解決形如 $ax^4-by^2=k$ 的求解法，並且令人驚訝的，我們可以利用這個結果去處理尚未有初等證明的 watson 猜想，利用這種方法可以圓滿的解決 watson 猜想的一些棘手的問題，對於 $ax^4-by^2=k$ 我們先討論最簡單的形式：$x^2-2y^4=-1$ 我們先將 y 前的係數消去，在將另一邊的的變數配成畢氏數，利用連續兩次的畢氏數本原解，我們可以找到限制的條件，再利用佩爾方程找出變數間的關係，再使用同餘去分割方程去求解，即可找出解，將 watson 猜想化成形如 $ax^4-by^2=1$ 再利用上面所言同樣的手法，去處理即可求出 watson 猜想(求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2=K^2$ 的所有正整數的解)，而且我也利用同餘的方式去處理 watson 猜想 3 次方的推廣(求 $1^3+2^3+\cdots+N^3=K^3$ 的所有正整數的解)，並且也證明出解只有 1。

貳、研究動機：

在一歷屆科展網站中發現在還須解決的初等數學三十個問題中，找到一個關於給出 $x^2-2y^4=-1$ 此不定方程本原解的證明。我因此對這短小卻精悍的問題展開了高度興趣，而去研究。並進而利用它處理 Watson 猜想。

參、研究目的：

探討出：$ax^4-by^2=k$ 的求解法及應用及解決 Watson 猜想。

肆、研究器材：

紙、筆

伍、研究過程：

對於任何一個數學問題我們所須的基本認知是先降低其問題的難度在去討論其一般情

形，所以首先我們先算：$x^2-2y^4=-1$這最簡單的情形希望對於幫助我們求解一般性有所幫助。

一、求：$x^2-2y^4=-1$的正整數解。

將原式變化為：$2y^4=x^2+1$ ， 令$x=2c+1$代入得

$\Rightarrow y^4=c^2+(c+1)^2$ ---------(甲)式

根據(甲)式：$y^4=c^2+(c+1)^2$顯然為一組畢氏數

$\therefore$必存在一組本原解：

$\begin{cases} c=m^2-n^2 \\ c+1=2mn \\ y^2=m^2+n^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c=2mn \\ c+1=m^2-n^2 \\ y^2=m^2+n^2 \end{cases}$ 且(m,n)=1 ，u、v 必一奇一偶，m>n

將上面的兩個解分別帶入(甲)式：

1.可知 2mn- m^2 + n^2 =c+1-c=1-------(乙)式

2.可知 m^2 -n^2 -2mn= c+1-c=1------(丙)式

由 y^2 = m^2 +n^2 知顯然為一組畢氏數

$\therefore$必存在一組本原解：

$\begin{cases} m=2uv \\ n=u^2-v^2 \\ y=u^2+v^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m=u^2-v^2 \\ n=2uv \\ y=u^2+v^2 \end{cases}$ 且(u,v)=1 ，u、v 必一奇一偶，u>v

將上面的兩個解分別帶入(乙)式可得四種可能：

(一)：當 m=2uv n= u^2 -v^2 代入(2)式得：

$\Rightarrow (u^2-v^2)^2-4u^2v^2+2(u^2-v^2)2uv=1$

$\Rightarrow (u^2-v^2)^2-4uv(v^2-u^2+uv)=1$

$\Rightarrow (u^2-v^2+2uv)^2-1=8u^2v^2$

$\Rightarrow (u^2-v^2+2uv)^2-2(2uv)^2=1$

我們顯知此為佩爾方程`，所以我們易知以方程的最接近原點的自然數解為(3,2),(17,12)所以我們可知其所有解的形式為(3+$\sqrt{2}$)^{n}的係數。故我們令：

$$\begin{cases} u^2 - v^2 + 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

首先我們將 $2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ 展開得：

$\Rightarrow 2uv = C_1^n 3^{n-1} \times 2 + C_3^n 3^{n-3} \times 16.......$

$\Rightarrow uv = C_1^n 3^{n-1} + C_3^n 3^{n-3} \times 8.......$

因為 u、v 中必有一個為偶數，所以易知 n 必為偶數不可為奇數。且 u、v 中必有一數有因數 3。

將方程組 $\begin{cases} u^2 - v^2 + 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ 中

$u = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}v}$ 代入另一式，整理得：

$\Rightarrow v^4 + [\dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}]v^2 - \dfrac{[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n]^2}{32} = 0$

由根與係數的關係知，上式為以 v^2 為變數的二次方程式

其兩根之積 $= \dfrac{[(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n]^2}{32}$

$\because$ n 為偶數則令 n=2p 代入上式得：

兩根積 $= \dfrac{36^p \times 32^p}{32}$，故易知 v 之質因數只可能有因數 3 或 2

又因為方程 $\begin{cases} u^2 - v^2 + 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ 2uv = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ 中

u、v 是對稱的，所以 u 質因數也可得只有因數 3 或 2 的結果。

我們再回到方程：$(u^2 - v^2 + 2uv)^2 - 2(2uv)^2 = 1$ 整理可得：

$\Rightarrow (u^2 - v^2 + 2uv + 1)(u^2 - v^2 + 2uv - 1) = 8(uv)^2$

$\because$ u、v 必一奇一偶

$\therefore (u^2 - v^2 + 2uv + 1, u^2 - v^2 + 2uv - 1) = 2$，及 $(u, v) = 1$

1、我們易知當 u、v 中任一個同時有質因數 2 及 3 時，則另一個必等於 1，

可易得，當 u=1 時，則 v=0 這組解。

2、我們可先令：$u=3^{a}$、$v=2^{b}$ (a、b 銜為正整數)

易知 $u^{2}-v^{2}+2uv-1$ 必無因數 3，且 $2|u^2-v^2+2uv+1$，$4|u^2-v^2+2uv-1$

故可列方程：$\begin{cases}3^{2a}-2^{2b}+2\times 3^{a}\times 2^{b}+1=2\times 3^{2a}\\ 3^{2a}-2^{2b}+2\times 3^{a}\times 2^{b}-1=4\times 2^{b}\end{cases}$

可易解得：(u , v)=(3 , 2)

3、我們可先令：$u=2^{a}$、$v=3^{b}$ (a、b 銜為正整數)

易知 $u^{2}-v^{2}+2uv+1$ 必無因數 3 且 $4|u^2-v^2+2uv+1$，$2|u^2-v^2+2uv-1$

故可列方程：$\begin{cases}2^{2a}-3^{2b}+2\times 2^{a}\times 3^{b}+1=4\times 2^{2a}\\ 2^{2a}-3^{2b}+2\times 2^{a}\times 3^{b}-1=2\times 3^{b}\end{cases}$

可得其無解。

(二)：當 $m=u^{2}-v^{2}$　$n=2uv$ 代入(乙)式得：

$\Rightarrow 2(u^{2}-v^{2})(2uv)-(u^{2}-v^{2})^{2}+(2uv)^{2}=1$

$\Rightarrow [(u^{2}-v^{2})-2uv]^{2}+1=8(uv)^{2}$

$\Theta\ (u^{2}-v^{2})-2uv$ 為奇數 $\therefore [(u^{2}-v^{2})-2uv]\equiv 1 \pmod 8$

所以無解。

(三)、將上面的兩個解分別帶入(丙)式：

1、當 $m=u^{2}-v^{2}$　$n=2uv$ 代入(丙)式：

$\Rightarrow (u^{2}-v^{2})^{2}-(2uv)^{2}-2uv(u^{2}-v^{2})=1$

$\Rightarrow (u^{2}-v^{2}-2uv)^{2}-1=8(uv)^{2}$

可易知這和(a.)中的佩爾方程類似，我以我們：

$$\begin{cases}u^{2}-v^{2}-2uv=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^{n}+(3-2\sqrt{2})^{n}}{2}\\ 2uv=\dfrac{(3+2\sqrt{2})^{n}-(3-2\sqrt{2})^{n}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

仿照上式，我們可易得：u、v 皆只可能有質因數 3 或 2

之後再仿照之前的方法可得只有(u , v)=(1 , 0)外無正整數解。

(四)、當 $m=2uv$　$n=u^2-v^2$ 代入(3)式得：

$\Rightarrow (2uv)^2-(u^2-v^2)^2-2(2uv)(u^2-v^2)=1$

$\Theta\ -(u^2-v^2)^2 \equiv -1 \bmod 4$ 所以無解

綜合以上結論知：$x^2-2y^4=-1$ 的正整數解僅有：(1,0)和(13 ,239)

QED

做到這我們不禁有一些想法，如果我們要將此方程推廣的話，那勢必會遇到像是：$y^4=(ax)^2+(bx)^2+(cx)^2$ 的方程它們的式子右邊的等式最少可拆成超過兩個的平方項，如此一來對於使用畢氏數本原解的方式，似乎是行不通的，但數學通常是有類比性的，如果我們可以將畢式數的方程式之本原解找出，那麼我們就可以研究出解出：$ax^2-by^4=-k$ 此類類似於佩爾方程的方法。幸運的是此類畢氏數方程之本原解早已有人對一般解做研究了，並且得到了所有解的方程式，因此我把它做為處理我所研究方程：$ax^2-by^4=-k$ 的引理。

[引理一]：$x^2+y^2+z^2=w^2$ 的所有本原解

$$\begin{cases} x = 2ca \\ y = 2bc \\ z = -a^2-b^2+c^2 \\ w = a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$ z 為奇數且(x , y , z)=1

[引理二]：$w^2+x^2+y^2+z^2=v^2$ 的所有本原解

$$\begin{cases} w = 2ad \\ x = 2bd \\ y = 2cd \\ z = -a^2-b^2-c^2+d^2 \\ v = a^2+b^2+c^2+d \end{cases}$$ z 為奇數且(x , y , z , w)=1

至於到更多項也是依此類推，但似乎在作此題只須用到最多四項，似乎與一個整數可表為四個平方數之和有關，但因有我們有無窮多項的解，所以並不詳加探討，而我們掌握了這項新的武器時，我們就用來處理數學中尚未有初等證明的：

二. Watson 猜想：求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+N^2=K^2$ 之所有正整數解。

將此一方程化為 $\dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}=\mathrm{K}^2$

可分成四類來討論：

一、N，N+1，2N+1 皆不為完全平方數時：

由輾轉相除法易知 N，N+1，2N+1，三數兩兩互質

要使已知方程有解必要讓 N，N+1，2N+1 可整除 6,

但因 N，N+1，2N+1，三數兩兩互質

易知互乘之數必不為完全平方數。

∴當 N，N+1，2N+1 皆不為完全平方數時，原式無解。

二、N，N+1，2N+1 恰有一個為完全平方數時：

可再細分三類：

(一)、當 $N=Z^2$ 時：

(N+1，2N+1)=1

$\Rightarrow$ 存在 $A\in N$，使得 $(N+1)(2N+1)=6A^2$ ………..(1)

∵2 N+1 為奇數

$\Rightarrow\begin{cases}N+1=2B^2\\2N+1=3C^2\end{cases}$ 在和 N=a^2 解聯立：

$\Rightarrow (2N+1)^2-4N(N+1)=9C^4-8AB^2=19C^4-8(AB)^2=1$

mod(9)易知 AB=9k±1

1、首先討論 9k+1 的情形：

將 9k+1 代入方程 $9C^4-8(AB)^2=1$ 可得：

$\Rightarrow C^4=72k^2+16k+1=(8k+1)^2+(2k)^2+(2k)^2$

利用已知的引理一，我們可得方程：

$$\begin{cases}8k+1=-a^2-b^2+c^2---(1)\\2k=2ac--(2)\\2k=2bc--(3)\\C^2=a^2+b^2+c^2--(4)\end{cases}$$

由(2)、(3)兩式易知 b=a

再由 $C^2=a^2+b^2+c^2$ 和已知的引理一知 a、b、c 必有兩個為偶

有 $8k+1=-a^2-b^2+c^2 \mod(4)$易知：a、b 必為偶數，c 為奇數

再由(4)式 $C^2=a^2+b^2+c^2$ 和已知的引理得：

$$\begin{cases} a = 2xy \\ b = 2xz \\ c = -x^2 - y^2 + z^2 \\ C = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

$\because$ b=a　　$\therefore$ y=z　由(1)、(2)可得：$8ac+1=-a^2-b^2+c^2$

$\Rightarrow 8bc+1=-2b^2+c^2$

上面之等式組代入(5)可得：

$\Rightarrow (x^2-2z^2-4xz+1)(x^2-2z^2-4xz-1)=72(xz)^2$ ---(6)

$\Rightarrow (x^2-2z^2-4xz)^2-2(6xz)^2=1$

[法一]這和之前所作的佩爾方程是一樣的，故我們可直接得：

$$\begin{cases} x^2 - 2z^2 - 4xz = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ 6xz = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

首先我們 $6xz = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ 展開得：

$\Rightarrow 6xz = C_1^n 3^{n-1} \times 2 + C_3^n 3^{n-3} \times 16.......$

$\Rightarrow 3xz = C_1^n 3^{n-1} + C_3^n 3^{n-3} \times 8.......$

由上式可知，當 n=1 時則可得 x=1、z=1，但代入方程：

$\Rightarrow (x^2-2z^2-4xz+1)(x^2-2z^2-4xz-1)=72(xz)^2$ ---(6)知其不滿足

當 n>1 時，我們可知 x 或 z 中有一個是 3 的倍數因為 u、v 中必有一個為偶數，所以易知 n 必為偶數不可為奇數。

再令 $x = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{12\sqrt{2}z}$，n=2p 代入得：

$$2z^4 + [\frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{3\sqrt{2}} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}] - \frac{36^p 32^p}{288} = 0$$

兩根積$=\dfrac{36^p \times 32^p}{566}$，故易知 z 之質因數只可能有因數 3 或 2

同理亦可得 x 之質因數只可能有因數 3 或 2

(1).當 x、z 任一個同時有 3 和 2 的因數，由於(x,z)=1 我們可知另一個則為 1，

如此將 1 代入後可得有解(x,z)=(1,0)

(2).令 $x=3^a$， $z=2^b$

方程$(x^2-2z^2-4xz+1)(x^2-2z^2-4xz-1)=72(xz)^2$中當 a>2 則

等號左邊沒有一因數 9，但右邊確為 9 的倍數，故無解。

當 a=1，代入方程易知無整數解 z。

(3).令 $z=3^a$， $x=2^b$

可仿上易知無解。

[法二]：我們由之前的方程知：$x^2-2z^2=c$　xz=b　b、c 為自然數

將此二式相減可得：

$x^2-2z^2-xz=c-b$

$\Rightarrow$(x-2z)(x+z)= c-b

又由輾轉相除法知：(x-2z , x+z)=(3z , x+z)

又因如果(3z , x+z)的公因數有任何 z 的任何因數會使得 z、x 有公

因數與引理的 (x , z)=1 矛盾 $\therefore$(x-2z , x+z)=3 但 x、y 不可以同

是 3 的因數，因為有公因數 3 的話會使(x , z)=3 與(x , z)=1 矛盾

所以可知：(x , 3)=1、(z , 3)=1

由(6)式：$(x^2-2z^2-4xz+1)(x^2-2z^2-4xz-1)=72(xz)^2 \bmod(9)$

可知其無解，所以要左右兩邊皆等於 0，可解得：(x , z)=(1 , 0)

代回$\begin{cases} a=2xy \\ b=2xz \\ c=-x^2-y^2+z^2 \\ C=x^2+y^2+z^2 \end{cases}$及$\begin{cases} 8k+1=-a^2-b^2+c^2---(1) \\ 2k=2ac--(2) \\ 2k=2bc--(3) \\ C^2=a^2+b^2+c^2--(4) \end{cases}$

後可得：N=1

2、討論 9k-1 的情形：

將 AB =9k-1 代入方程 $9C^4-8(AB)^2=1$ 可得：

$\Rightarrow C^4=72k^2-16k+1=(8k-1)^2+(2k)^2+(2k)^2$

利用已知的引理：我們可知此形此方程的解為：

$$\begin{cases} 8k-1=-a^2-b^2+c^2---(1) \\ 2k=2ac--(2) \\ 2k=2bc--(3) \\ C^2=a^2+b^2+c^2--(4) \end{cases}$$

由(1)式：$8k-1=-a^2-b^2+c^2 \bmod(8)$易知：a、b、c 三者中必兩奇一偶

在(4)式：$C^2=-a^2-b^2+c^2 \bmod(8)$易知：a、b、c 三者中必兩偶一奇

$\therefore$ 此方程無正整數解

(二)、當 $N+1=Z^2$ 時

(N+1，2N+1) =1

∴必有$(N)(2N+1)=6a^2$ ………..(1)(且 $a\in N$)

∵2 N+1 為奇數　　　∴只有一種可能：

當$\begin{cases} N=2q \\ 2N+1=3p \end{cases}$　消去 N$\Rightarrow$3p-4q=1 $\begin{cases} q=2+3t \\ p=3+4t \end{cases}$

代入 N=2q 可得：N=6t+4=3(2t+1)+1

∵ $N+1=Z^2$，且 N=6t+4=3(2t+1)+1

∴ $Z^2=3(2t+1)+2$

由於完全平方數 mod3 必餘 1 或 0 但等號右邊卻餘 2,故矛盾無解。

(三)：$2N+1=Z^2$ 時

輾轉相除由法易知 N+1，N，兩兩互質

∴必有$(N)(N+1)=6a^2$ ………..(1)(且 $a\in N$)

1：$\begin{cases} N+1=2b^2 \\ N=3c^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 3c^2+1=2b^2$

完全平方數 mod3 必餘 1 或 0

等號左邊 mod(3)餘 1，但右邊餘 2 或 0，故矛盾無解。

2：$\begin{cases} N+1=3b^2 \\ N=2c^2 \end{cases}$ $\therefore$ N+1 為奇數$\Rightarrow$b 為奇數

$\because$N 為偶數$\therefore$N+1 為奇數$\Rightarrow$b 為奇數

由 $N+1=3b^2 \Rightarrow$ c 為奇數

由$\begin{cases} N=2c^2 \\ 2N+1=Z^2 \end{cases}$消去 N 得

$\Rightarrow 4c^2+1=Z^2$ Θ c 為奇數

完全平方數 mod8 必餘 1 或 0

等號右邊餘 5，但左邊餘 1，故矛盾無解。

三：當 N，N+1，2N+1 恰有兩個為完全平方數時：

會有三種可能：

$\because$由輾轉相除法易知 N，N+1，2N+1，三數兩兩互質

因此當：

(一)$\dfrac{N+1}{6}$ = a^2 且 N=b^2 則 N+1=6 a^2

$\Rightarrow$N=6 a^2 -1$\therefore$6 a^2 -1=b^2 (且 b$\in$N)

由 mod3 知完全平方數餘數為 0 or 1

但是上式 0-1=0 or 1(mod3) -----導致矛盾

0-1=0 or 1(mod3) -----導致矛盾 ∴無解

(二)$\dfrac{2N+1}{6}$= a^2 則 2N+1=6 a^2

$\Rightarrow$2N=6 a^2 -1，在由假設可得

$\begin{cases} N=b^2 \\ N+1=c^2 \end{cases}$

∴6 a^2 -1=2b^2 (且 b$\in$N) 由 mod4 知完全平方數餘數為 0 or 1

$a^2 \equiv 0,1(\bmod 4)$

$\Rightarrow 6a^2 \equiv 0,2(\bmod 4)$

$\Rightarrow 6a^2 - 1 \equiv 3,1 (\bmod 4)$

但 $2b^2 \equiv 0,2 (\bmod 4)$　　∴無解

(三)、當 $\dfrac{N}{6} = A^2$ 則 $N=6A^2$

有：$\begin{cases} N+1 = B^2 \\ 2N+1 = C^2 \end{cases}$

$\Rightarrow (2N+1)^2 - 4N(N+1) = C^4 - 24(AB)^2 = 1$

$\Rightarrow C^4 = 1 + 24(AB)^2 = (4AB)^2 + (2AB)^2 + (2AB)^2 + 1$

由引理可知公式解：

$$\begin{cases} 4AB = 2ab ------(1) \\ 2AB = 2ac ------(2) \\ 2AB = 2ad ------(3) \\ 1 = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - (4) \\ C^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (5) \end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)可知：b=2c=2d

由(4)式：$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1 \bmod (4)$易知 a 為奇數 c、b、d 為偶數

再由(5)式可知利用引理可知公式解：

$$\begin{cases} a = w^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ b = 2wx \\ c = 2wy \\ d = 2wz \\ C = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$　代入(5)式整理可得：

$\Rightarrow (-6y^2 + w^2)^2 - 24(yw)^2 = 1$

$\Rightarrow w^4 - 12w^2y^2 + 36y^4 - 24w^2y^2 = 1$

$\Rightarrow w^4 - 1 = 36y^2(w^2 - 1)$可分兩種可能：

1、當 $w \neq 1$ 時：

$w^2 + 1 = 36y^2$　$\Rightarrow (6y-w)(w+6y) = 1$　易知無解

2、當 w=1 時：

可得：(w , y)=(1 , 1)　代回後可得：N=24

四：當 N，N+1，2N+1 皆為完全平方數時：

及 $N=a^2$ 但是 $a^2 \le N+1 \le (a+1)^2$

∴N+1 不可能為完全平方數時

∴與 N，N+1，2N+1 皆為完全平方數矛盾 故無解

Last：綜合以上結論知 $1^2+2^2+3^2 \ldots\ldots\ldots+N^2=K^2$ 僅有 N=1 or 24 這兩組正整數解。

綜合以上結論知此不定方程僅有解：1、24

至於 24 這個解還有[法二]：

當 $\frac{N}{6}=a^2$ 則 $N=6a^2$

$\Rightarrow 2N+1=12a^2+1$

$\Rightarrow N+1=6a^2+1$

$\therefore \begin{cases} 12a^2+1=b^2 \\ 6a^2+1=c^2 \end{cases}$) 由 mod3 可知 b , c 有四種可能

1. $\begin{cases} c=3m+1 \\ b=3n+1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} c=3m-1 \\ b=3n-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} c=3m-1 \\ b=3n+1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} c=3m+1 \\ b=3n-1 \end{cases}$

1.：$\begin{cases} c=3m+1 \\ b=3n+1 \end{cases}$ 代入(1) (2) 化簡可得

$\begin{cases} 3m^2+2m=4a^2 \\ 3n^2+2n=2a^3 \end{cases}$ 由這兩個方程式易知：m , n 皆為偶數

由上式易得：$(m-n)[3(m+n)+2]=2a^2$

∵任何的整數皆可表為 2^k p (p∈奇數) (k∈N) ∴$a=2^k p$

∵m-n 為偶數且 3(m+n)+2 亦也又 3(m+n)+2 必不為 p^2 or 2^{2k} 完全平方數

∴經由上面的限制，故只有兩種分解法：

(1)$\begin{cases} m-n=2^{2(i-j)}t \\ 3(m+n)+2=2^{2j-1}p^2 \end{cases}$ (j , t ∈N) 經化簡得

$\Rightarrow 3(n+2^{2k-2j-1}d)=(2^{2j}p^2-1)$ ∵ n 為偶數 ∴$n+2^{2k-2j-1}d$ 必為偶數

但 $2^{2j}p^2-1$ 為奇數 為了要有解：$n+2^{2k-2j-1}=1$ ∴2^{2j} $p^2-1=3$

解得 j=1, p=1　代回：3(m+n)+2=2　矛盾　　　無解

(2) $\begin{cases} m-n=2^{2(i-j)-1}t \\ 3(m+n)+2=2^{2j}p^2 \end{cases}$　(j , t$\in$N) 經化簡得

$\Rightarrow 2^{2j-1}$ p^2 -1=3(2^{2k-2j}t+n)Θ n 為偶數　$\therefore 2^{2k-2j}$t+n 必為偶數

但 $2^{2j-1}p^2$ -1 為奇數為了要有解：2^{2k-2j} t+n =1$\therefore 2^{2j-1}$ p^2 -1=3

無解

2.：$\begin{cases} c=3m-1 \\ b=3n-1 \end{cases}$　代入(1) (2) 化簡可

$\begin{cases} 3m^2-2m=4a^2 \\ 3n^2-2n=2a^3 \end{cases}$　由這兩個方程式易知：m , n 皆為偶數

由上式易得：(m-n)[3(m+n)-2]= 2a^2

$\because$任何的整數皆可表為 2^k p (p$\in$奇數) (k$\in$N)　$\therefore$a= 2^k p

m-n 為偶數且 3(m+n)+2 亦也又 3(m+n)+2 必不為 p^2 or 2^{2k} 完全平方數$\therefore$經由上面的限制，故只有兩種分解法：

(1) $\begin{cases} m-n=2^{2(i-j)-1}t \\ 3(m+n)-2=2^{2j}p^2 \end{cases}$　(j , t$\in$N) 經化簡得

$\Rightarrow$ 3(n+$2^{2k-2j-1}$ t)=(2^{2j} p^2 +1)　$\because$ n 為偶數　$\therefore$n+$2^{2k-2j-1}$ t 必為偶數，但 2^{2j} p^2 +1 為奇數

為了要有解：n+$2^{2k-2j-1}$t=1　$\therefore 2^{2j}$ p^2 +1=3　　無解

(2) $\begin{cases} m-n=2^{2(i-j)}t \\ 3(m+n)-2=2^{2j-1}p^2 \end{cases}$　(j$\in$N) 經化簡得

$\Rightarrow 2^{2j-1}$ p^2 +1=3(2^{2k-2j}t+n)

$\because$ n 為偶數　$\therefore 2^{2k-2j}$t+n 必為偶數, 但 2^{2j-1} p^2 +1 為奇數　　　為了要有解：(2^{2k-2j}t+n)=1　$\therefore 2^{2j-1}$ p^2 +1=3　解得 j=1, p=1 代回得 3(m+n)=2　矛盾　$\because$ (m.n$\in$N)無解

3.：$\begin{cases} c=3m-1 \\ b=3n+1 \end{cases}$　代入(1) (2) 化簡可得

$\begin{cases}3m^2-2m=4a^2\\3n^2+2n=2a^3\end{cases}$　　由這兩個方程式易知：m , n 皆為偶數

由上式易得：(m+n)[3(m-n)-2]= 2a ^{2}

∵任何的整數皆可表為 2 ^{k} p (p∈奇數) (k∈N)　　∴a= 2 ^{k} p

∵m-n 為偶數且 3(m-n)+2 亦也又 3(m-n)+2 必不為 p ^{2} or 2 ^{2k} 完全平方數∴經由上面的限制，故只有兩種分解法：

(1) $\begin{cases}m+n=2^{2(i-j)-1}t\\3(m-n)-2=2^{2j}p^2\end{cases}$　　(j , t∈N) 經化簡得

⇒3(2 $^{2k-2j-1}$ t-n)=2 ^{2j} p ^{2} +1 ∵ n 為偶數 ∴2 $^{2k-2j}$ t+n 必為偶數，但 2 $^{2j-1}$ p ^{2} +1 為奇數　為了要有解：故 2 $^{2k-2j-1}$ t-n =1

∴2 ^{2j} p ^{2} +1=3　　無解

(2) $\begin{cases}m+n=2^{2(i-j)}t\\3(m-n)-2=2^{2j-1}p^2\end{cases}$　　(j , t∈N) 經化簡得

⇒3(2 $^{2(k-j)}$ t-n)=2 $^{2j=1}$ p ^{2} +1

∵ n 為偶數 ∴2 $^{2(k-j)}$ t-n 必為偶數，但 2 $^{2j=1}$ p ^{2} +1 為奇數　為了要有解：故 2 $^{2(k-j)}$ t-n=1　∴2 $^{2j=1}$ p ^{2} +1=3　解得 j=1, p=1 代回

3(m-n)=4　矛盾　　無解

4.∵ $\begin{cases}c=3m+1\\b=3n-1\end{cases}$　　代入(1) (2) 化簡可得

$\begin{cases}3m^2+2m=4a^2\\3n^2-2n=2a^3\end{cases}$　　由這兩個方程式易知：m , n 皆為偶數

由上式易得：(m+n)[3(m-n)+2]= 2a ^{2}

∵任何的整數皆可表為 2 ^{k} p (p∈奇數) (k∈N)　　∴a= 2 ^{k} p

∵m-n 為偶數且 3(m-n)+2 亦也又 3(m-n)+2 必不為 p ^{2} or 2 ^{2k} 完全平方數∴經由上面的限制，故只有兩種分解法：

(1) $\begin{cases}m+n=2^{2(i-j)-1}t\\3(m-n)+2=2^{2j}p^2\end{cases}$　　(j∈N) 經化簡得

$\Rightarrow 3(2^{2k-2j-1}$-n)=$2^{2j}$ p^2-1

∵ n 為偶數 ∴$2^{2k-2j-1}$-n 必為偶數，但 2^{2j} p^2-1 為奇數

為了要有解：故 $2^{2k-2j-1}$-n =1∴ 2^{2j} p^2-1=3

解得 j=1, p=1 代回 3(m-n)+2=4 矛盾 無解

(2)$\begin{cases} m+n=2^{2(i-j)}t \\ 3(m-n)+2=2^{2j-1}p^2 \end{cases}$ (j ,t$\in$N) 經化簡得

$\Rightarrow 3(2^{2(k-j)}$t-n)=$2^{2j=1}$$p^2$-1 ∵ n 為偶數

∴$2^{2(k-j)}$t-n 必為偶數，但 $2^{2j=1}$$p^2$+1 為奇數 為了要有解：故 $2^{2(k-j)}$t-n=1

∴ $2^{2j=1}$ p^2 +1=3 解得 j=1，p=1 代回：3(m-n)+2=2 $\Rightarrow$ m=n 代入：(m+n)[3(m-n)+2]=2a^2

$\Rightarrow a^2$=2m 再代回 3m^2+2m=4a^2 $\Rightarrow$ 3m^2+2m=8m

解之，得 m=2 or 0(不合)

∴將 m=2 代回 c=3m+1 , b=3n-1 得 c=7，b=5

再代回 N=6 a^2-1=b^2

∴N=24

三.對於我們所導出關於解決：ax^4-by^2=k 方法似乎得到了一些證實作到這，自然想作推廣當

$1^3+2^3+3^3$………N^3=K^3的解

首先：將 $1^3+2^3+3^3$………N^3=$[\frac{n(n+1)}{2}]^2$

$\therefore$ 原式即為：$[\frac{n(n+1)}{2}]^2$=K^3 $\Rightarrow$ $\frac{n(n+1)}{2}$=$K^{\frac{3}{2}}$ Θ $\frac{n(n+1)}{2}\in$N

$\therefore$ K=p^2 代回整理得：n(n+1)=2p^3 $\Rightarrow$ $(2n+1)^2$=8 p^3+1

$\Rightarrow$ $(2n+1)^2$=(2p+1)(4p^2-2p+1) $\therefore$ 2n+1=t(2p+1) t$\in$N or $\frac{a}{b}$ (a , b)=1

(一). t$\in$N 則：

$$\begin{cases} 2n+1=t(2p+1) \\ 2n+1=\dfrac{4p^2-2p+1}{t} \end{cases}$$

$\Rightarrow t^2 = 2p - 2 + \dfrac{3}{2p+1}$ 　 Θ 　 $t \in N$ 　 $\therefore \dfrac{3}{2p+1} \in N$

故 2p+1=1 or 　2p+1=3 　負不合 　$\therefore$ p=0 or 1 　0 不合

(二).$t = \dfrac{a}{b}$ 　(a , b)=1 　a , b$\in$N

$2n+1 = \dfrac{a}{b}(2p+1)$

$2n+1 = \dfrac{b}{a}\,\dfrac{4p^2 - 2p + 1}{t}$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{4p^2 - 2p + 1}{2p+1}$ 　易知(2p+1 , $4p^2$ -2p+1)=3，所以我們分二種討論：

1. (2p+1 , $4p^2$ -2p+1)=3：

則我們可以令：$4p^2 - 2p + 1 = 3a^2$ 　及 $2p+1 = 3b^2$

我們由上式易知在此解集合中 p 不可能為：0 或 1

$\therefore$ 我們改令 p=k+2，代入 $4p^2 - 2p + 1 = 3a^2$ 　及 $2p+1 = 3b^2$ 中得：

$$\begin{cases} 2k+3 = 3b^2 ----(1) \\ 4(k+2)^2 - 2(k+2) + 1 = 3a^2 ----(2) \end{cases}$$

由(1)式易知為了使方程有解，所以只能令 k=3m

但由 k=3m 這一推論中,

代入(2)式，得：$4(3m+2)^2 - 2(3m+2) + 1 = 3a^2$ ----(2)

用 mod(3)易知無解。

2. (2p+1 , $4p^2$ -2p+1)=1：

(a , b)=1 故有此不定方程最小本原解：

$a^2 = 4p^2 - 2p + 1$ 　$b^2 = 2p + 1$

但是 $\because (2p-1)^2 < 4p^2 - 2p + 1 < (2p)^2$ 　故無解!!!

綜合以上結論 $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots\ldots\ldots N^3 = [\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$ 只有 1 個正整數解，即 n=1。

QED

陸、科展結論：

我們已給出方程：$ax^4-by^2=k$ 的解出他的解的一種方法：

一、

(一)、先將 x^4 項的係數 a，利用同於將之消至為 1。

(二)、再將變化後的方程：$x^4=by^2+cy+d$，的右方配成最少的完全平方和的和。

(三)、在用所舉的引理做根解的處理。

(四)、最後所得方程利用佩爾方程找出變數可能有的質因數組合再用方程之後的關係即可求出解。以上就是處理 $ax^4-by^2=k$ 此不定方程的方式 。

二、且我也給出 waton 猜想($1^3+2^3+\cdots+N^3=K^3$)的解 N=1 或 24

三、3 次推廣($1^3+2^3+\cdots+N^3=K^3$)的解 N=1。

柒、未來展望：

一、希望能將 waton 猜想推至 $1^n+2^n+\cdots+N^n=K^n$。

二、在做 $ax^4-by^2=k$ 此不定方程中，我發現至多僅須四個完全平方式之和即可表現。

三、能否有固定的方式將：$ax^4-by^2=k$ 此不定方程中在步驟 2 中配成最少的完全平方數中有固定的手段。

捌.參考用書：

一、算數(許志農)

二、不定方程(凡異出版社)

三、歷屆科展

四、中國初等數學研究(河南教育)