

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：高 中 組

作品名稱：繃緊的神奇封閉曲線！

關 鍵 詞：環繞的、反射的、平滑的

編 號：040403

學校名稱：

國立內壢高級中學

作者姓名：

林聖傑、王耀霆、曾怡銘、黃明山

指導老師：

郭志輝、羅惠芳



壹、摘要

從此次的科展中，您將看到不同於以往圓及橢圓的作圖法，以及由新的作圖法衍生出一套有系統可推廣的數學架構，並能應用到實際生活上，例如：安全系統、防護罩、遠距傳聲。

貳、研究動機

傳統作圖：一線段

1. 一端固定於一定點：得圓
2. 二端固定於二定點：得橢圓

新構想做圖：一封閉無彈性線圈繞

1. 一定點：得圓
2. 二定點：得橢圓
3. 三定點以上：研究題材
4. 圓：得圓
5. 橢圓：得橢圓
6. 凸圖形：得凸圖形
7. 柱形：得橢圓曲面

參、研究目的

藉由新構想的作圖方式，找出規律及觀察其幾何性質與反射情況，且將結果應用於實際生活上，亦可研究衍生的題材，如線圈繞一凸圖形、柱形、球、橢圓球甚至改為正多面體。

肆、研究設備及器材

我們需要的設備以及器材，有 GSP 軟體、筆、圓規、直尺、木板、軟木片和封閉的線圈。

伍、研究過程或方法

一、一定點作圖：

取一根大頭釘，釘在木板上，再取一段封閉線圈(長度為 l)，套在大頭釘上，用筆尖把線圈繃緊，就可以畫出一個以大頭釘(F 點)為圓心，半徑 $r = \frac{l}{2}$ 之圓。並由定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

二、兩定點作圖：

取二根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在二根大頭釘(點 F_1 及 F_2)上，用筆尖把線圈繃緊($l > 2\overline{F_1F_2}$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是一個以點 F_1 及 F_2 為二焦點，長軸長度為 $l - \overline{F_1F_2}$ 之橢圓。並由兩定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

三、三定點作圖：

取三根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在三根大頭釘(點 F_1 、 F_2 及 F_3 形成一個邊長為 K 之正三角形)上，用筆尖把線圈繃緊($l > 3K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是「數個『橢圓之部分圖形』的組合」。並由三定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

四、四定點作圖：

取四根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在四根大頭釘(點 F_1 、 F_2 、 F_3 及 F_4 形成一個邊長為 K 之正四邊形)上，用筆尖把線圈繃緊($l > 4K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是「數個『橢圓之部分圖形』的組合」。並由四定點發光線作反射，觀察其反射狀況。

五、五定點作圖：

取五根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在五根大頭釘(點 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 及 F_5 形成一個邊長為 K 之正五邊形)上，用筆尖把線圈繃緊($l > 5K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是「數個『橢圓之部分圖形』的組合」。並由五定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

六、六定點作圖：

取六根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在六根大頭釘(點 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 、 F_5 及 F_6 形成一個邊長為 K 之正六邊形)上，用筆尖把線圈繃緊($l > 6K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是「數個『橢圓之部分圖形』的組合」。並由六定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

七、 n 定點作圖：

取 n 根大頭釘，釘在木板上，將此封閉線圈(長度為 l)套在 n 根大頭釘(點 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 F_n 形成一個邊長為 K 之正 n 邊形)上，用筆尖把線圈繃緊($l > nK$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是「數個『橢圓之部分圖形』的組合」。並由 n 定點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

八、繞任意 n 定點作圖：

狀況與正 n 邊形原理相同。

九、繞圓作圖：

取一個圓形板(週長為 K)，釘在木板上，將此線圈(長度為 l)套在此圓形板上，用筆尖把線圈繃緊($l > K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是一個圓。並由圓上任一點的切線方向發出光線作反射，觀察其反射狀況。

十、繞橢圓作圖：

取一個橢圓形板(週長為 K)，釘在木板上，將此線圈(長度為 l)套在此橢圓形板上，用筆尖把線圈繃緊($l > K$)，當筆尖在木板上移動，所畫出的封閉曲線就是一個橢圓。並由橢圓上任一點的切線方向發出光線作反射，觀察其反射狀況。

十一、繞凸圖形作圖：

得凸圖形，並由凸圖形任一點的切線方向發出光線作反射，觀察其反射狀況。

十二、繞任意圖形作圖：

得凸圖形。

十三、 繞柱形作圖：

線圈垂直柱形之中心軸，線圈長度 l ， $l >$ 柱形底面周長，所畫出的曲線為橢圓曲面部分圖形。並由柱形邊上任一點發出光線作反射，觀察其反射狀況。

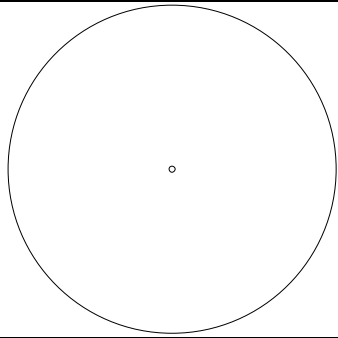
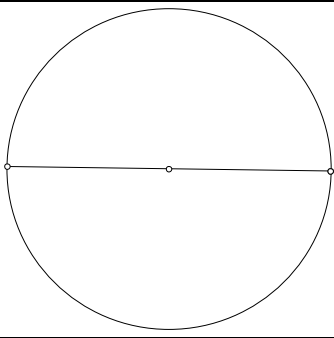
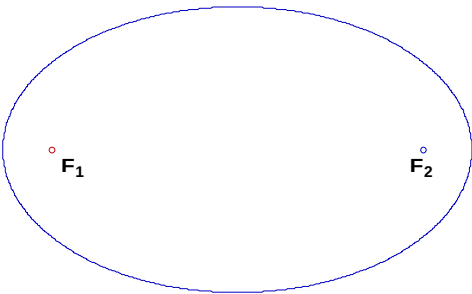
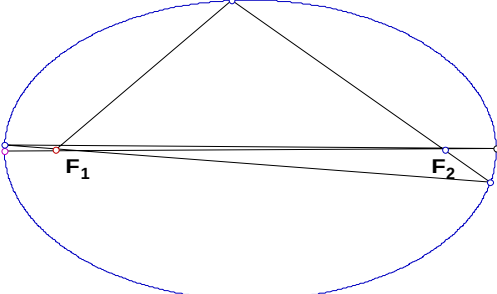
十四、 繞球作圖：

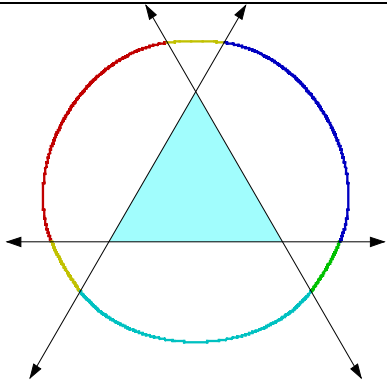
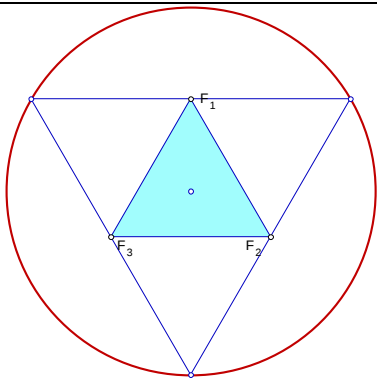
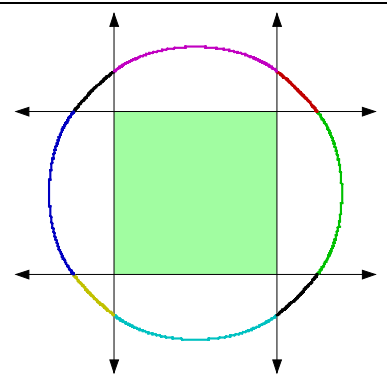
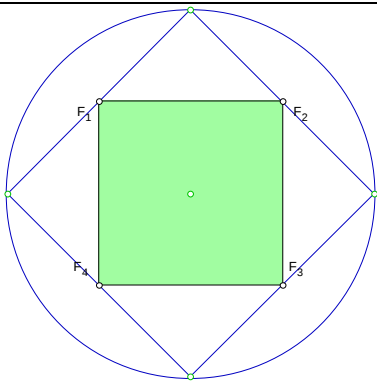
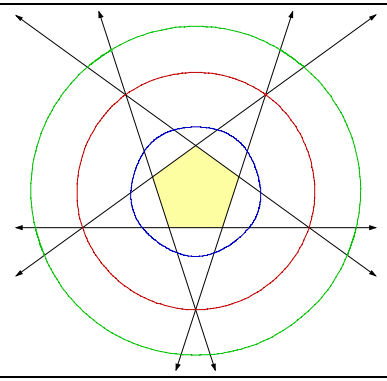
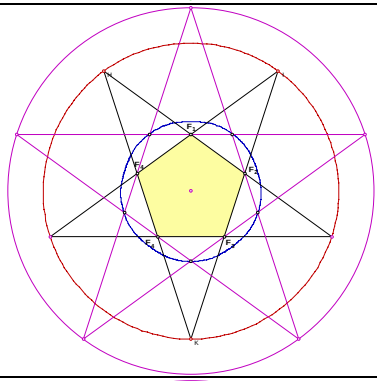
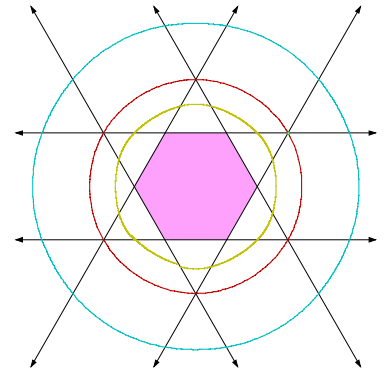
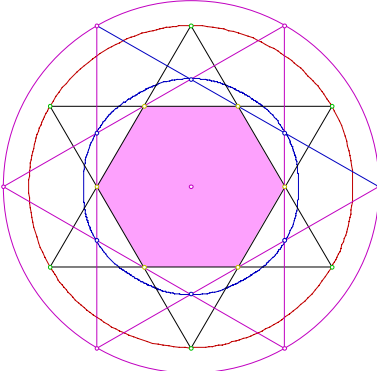
線圈要過球面的大圓方向，所得圖形為一球面，以小球切線方向發出光線作反射，觀察其反射狀況。

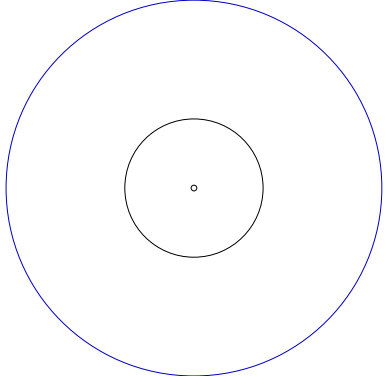
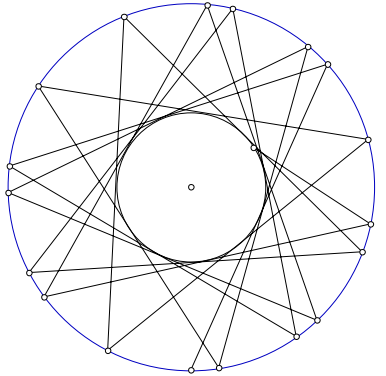
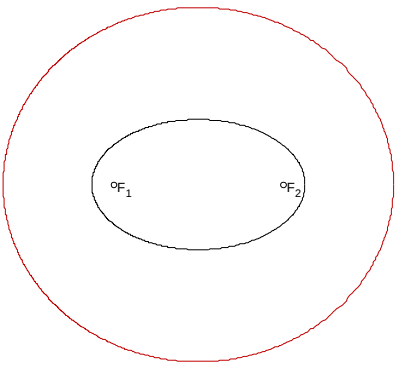
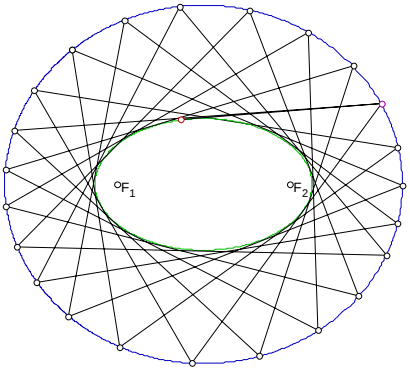
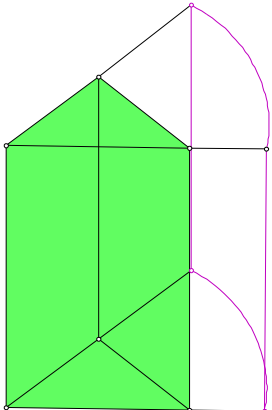
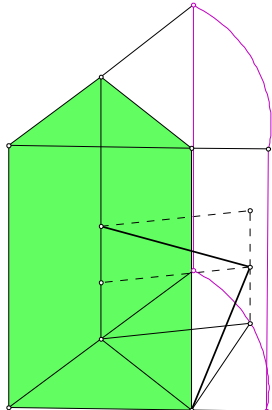
十五、 繞其他立體圖形：

如正 n 面體，正在研究中。

陸、研究結果：詳細說明於附件一、附件二

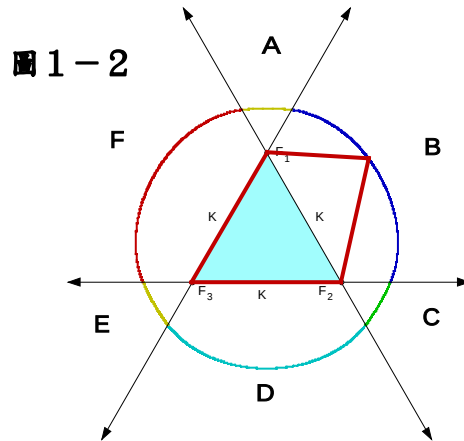
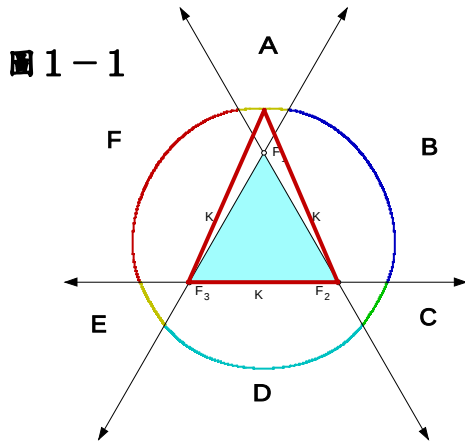
	圖 形	反 射
一 點		
二 點		

三 點	 A diagram showing three circles of equal radius intersecting at a central point. The regions of the circles are colored: red (top-left), blue (top-right), and cyan (bottom). A cyan triangle is inscribed within the intersection, with its vertices at the centers of the three circles. Three lines with arrows at their ends pass through the vertices of the triangle, representing the lines of symmetry.	 A diagram showing a circle with a red circumference. Inside, a blue triangle is inscribed. The medians of the triangle are drawn and labeled F_1, F_2, and F_3 at their intersection point, which is the centroid. A small cyan circle is centered at this intersection point.
四 點	 A diagram showing four circles of equal radius intersecting at a central point. The regions are colored: red (top), blue (bottom), yellow (left), and green (right). A green square is inscribed within the intersection, with its vertices at the centers of the four circles. Four lines with arrows at their ends pass through the vertices of the square, representing the lines of symmetry.	 A diagram showing a circle with a blue circumference. Inside, a green square is inscribed. The diagonals of the square are drawn and labeled F_1, F_2, F_3, and F_4 at their intersection point, which is the center of the square. A small green circle is centered at this intersection point.
五 點	 A diagram showing five concentric circles of different radii. The innermost region is colored yellow and contains a yellow pentagon. The other regions are colored: red (middle), blue (outer), and green (outermost). Five lines with arrows at their ends pass through the vertices of the pentagon, representing the lines of symmetry.	 A diagram showing a circle with a red circumference. Inside, a yellow pentagon is inscribed. The diagonals of the pentagon are drawn and labeled F_1, F_2, F_3, F_4, and F_5 at their intersection point, which is the center of the pentagon. A small yellow circle is centered at this intersection point.
六 點	 A diagram showing six concentric circles of different radii. The innermost region is colored magenta and contains a magenta hexagon. The other regions are colored: red (middle), blue (outer), and cyan (outermost). Six lines with arrows at their ends pass through the vertices of the hexagon, representing the lines of symmetry.	 A diagram showing a circle with a red circumference. Inside, a magenta hexagon is inscribed. The diagonals of the hexagon are drawn and labeled F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, and F_6 at their intersection point, which is the center of the hexagon. A small magenta circle is centered at this intersection point.

圓		
橢圓 圓		
柱 形		

附件一：圖形結果

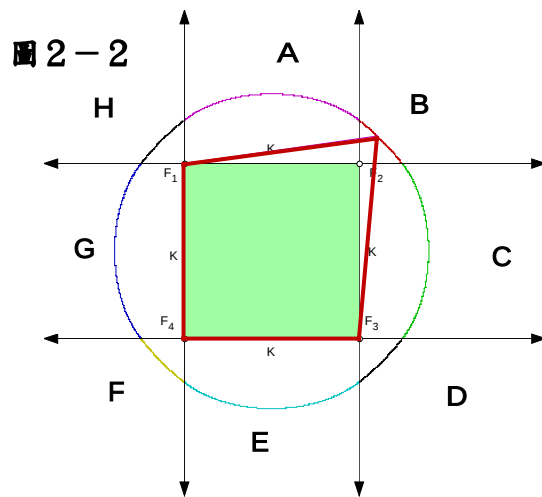
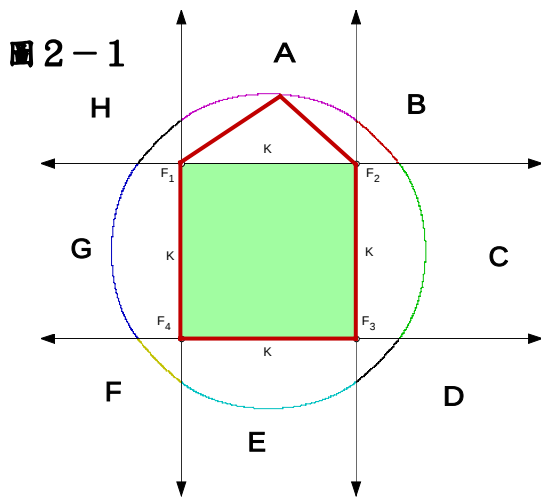
- 1、線圈繞一點得圓。
- 2、線圈繞兩點得橢圓。
- 3、當大頭釘的數目為三，線圈長為 l 時：圖形如下



A、C、E 三區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - K$ ，分別以 (F_2, F_3) 、 (F_3, F_1) 、 (F_1, F_2) 為焦點。如圖 1 - 1。

B、D、F 三區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 2K$ ，分別以 (F_1, F_2) 、 (F_2, F_3) 、 (F_3, F_1) 為焦點。如圖 1 - 2。

- 4、當大頭釘的數目為四，線圈長為 l 時：圖形如下



A、C、E、G 四區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 3K$ ，分別以 (F_1, F_2) 、 (F_2, F_3) 、 (F_3, F_4) 、 (F_4, F_1) 為焦點。如圖 2 - 1。

B、D、F、H 四區所得曲線為橢圓之部分，長軸是長度為 $l - 2K$ ，分別以 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_1) 、 (F_4, F_2) 為焦點。如圖 2 - 2。

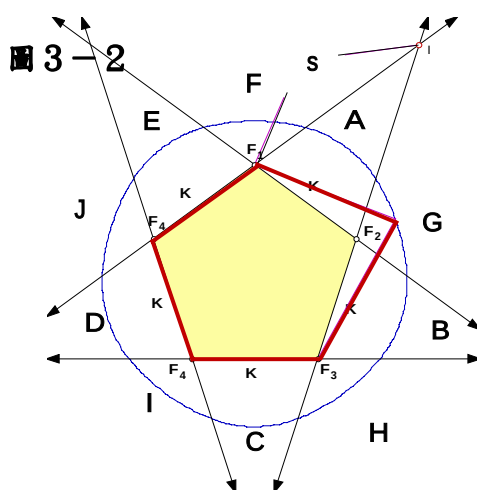
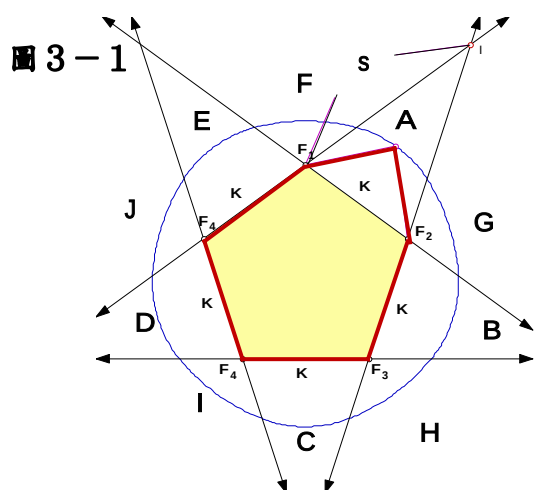
當大頭釘數目超過五時，線圈長度會影響圖形之類型結果
5、6 為三類，7、8 為五類，9、10 為七類。

5、當大頭釘的數目為五線圈長為 l 時：

所得曲線依線圈長度分為：第一類 $5K < l < 4K + 2S$

第二類 $l = 4K + 2S$

第三類 $l > 4K + 2S$



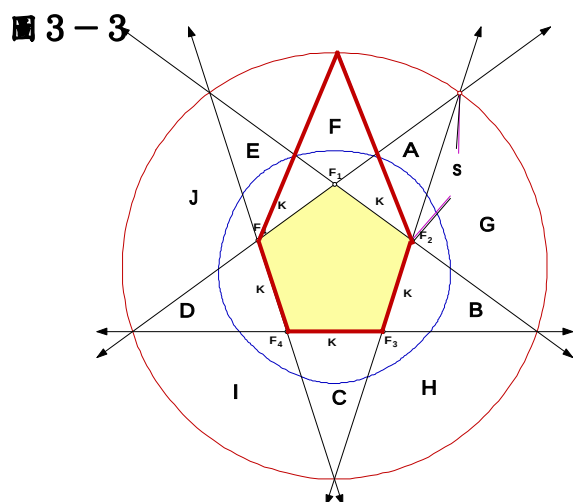
第一類圖形結果：線圈長度 $5K < l < 4K + 2S$ 時圖形如下

第一類圖形說明：

A、B、C、D、E 五區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 4K$ ，分別以 (F_1, F_2) 、 (F_2, F_3) 、 (F_3, F_4) 、 (F_4, F_5) 、 (F_5, F_1) 為焦點。如圖 3 - 1。

F、G、H、I、J 五區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 3K$ ，分別以 (F_2, F_5) 、 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_5) 、 (F_1, F_4) 為焦點。如圖 3 - 2。

第二類圖形結果：線圈長度 $l = 4K + 2S$ 時圖形如下



第二類圖形說明：

F、G、H、I、J 五區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 3K$ ，分別以 (F_2, F_5) 、 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_5) 、 (F_1, F_4) 為焦點。如圖 3 - 3。

第三類圖形結果：線圈長度 $l > 4K + 2S$ 時圖形如下

圖 3-4

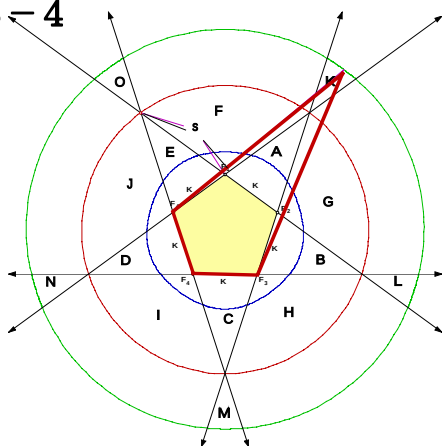
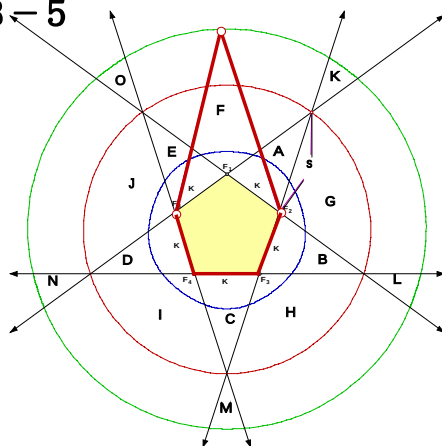


圖 3-5



第三類圖形說明：

K、L、M、N、O 五區所得曲線為一橢圓之部分，長軸長度為 $l - 2K$ ，分別以 (F_3, F_5) 、 (F_1, F_4) 、 (F_2, F_5) 、 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 為焦點之橢圓。如圖 3 - 4。

F、G、H、I、J 五區所得曲線為一橢圓之部分，長軸長度為 $l - 3K$ ，分別以 (F_2, F_5) 、 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_5) 、 (F_1, F_4) 為焦點之橢圓。如圖 3 - 5。

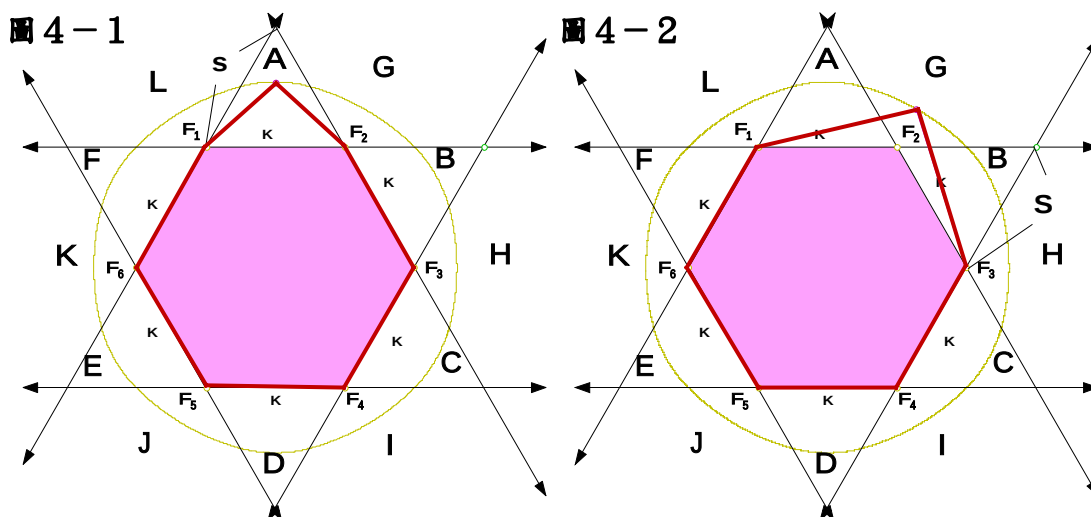
6、當大頭釘的數目為六，線圈長為 l 時：

所得曲線依線圈長度分為：第一類 $6K < l < 5K + 2S$

第二類 $l = 5K + 2S$

第三類 $l > 5K + 2S$

第一類圖形結果：線圈長度 $6K < l < 5K + 2S$ 時圖形如下



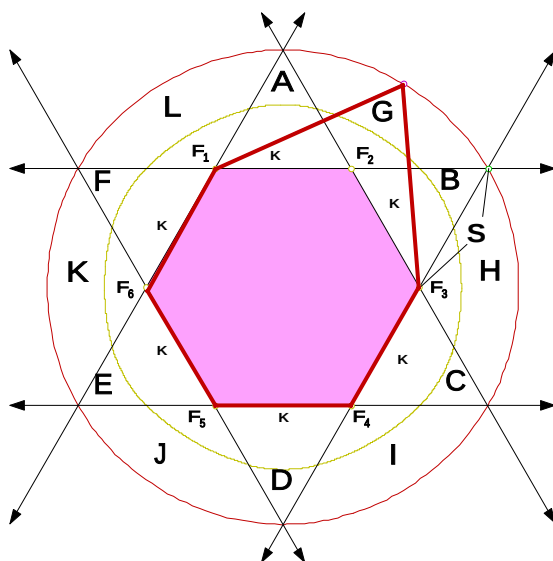
第一類圖形說明：

A、B、C、D、E、F 六區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 5K$ ，分別以 (F_1, F_2) 、 (F_2, F_3) 、 (F_3, F_4) 、 (F_4, F_5) 、 (F_5, F_6) 、 (F_6, F_1) 為焦點。如圖 4 - 1。

G、H、I、J、K、L 六區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 4K$ ，分別以 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_5) 、 (F_4, F_6) 、 (F_5, F_1) 、 (F_6, F_2) 為焦點。如圖 4 - 2。

第二區圖形結果：線圈長度 $l = 5K + 2S$ 時圖形如下

圖 4-3



第二類圖形說明：

G、H、I、J、K、L 六區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 4K$ ，分別以 (F_1, F_3) 、 (F_2, F_4) 、 (F_3, F_5) 、 (F_4, F_6) 、 (F_5, F_1) 、 (F_6, F_2) 為焦點。如圖 4 - 3。

第三類圖形結果：線圈長度 $l > 5K + 2S$ 時圖形如下

圖 4-4

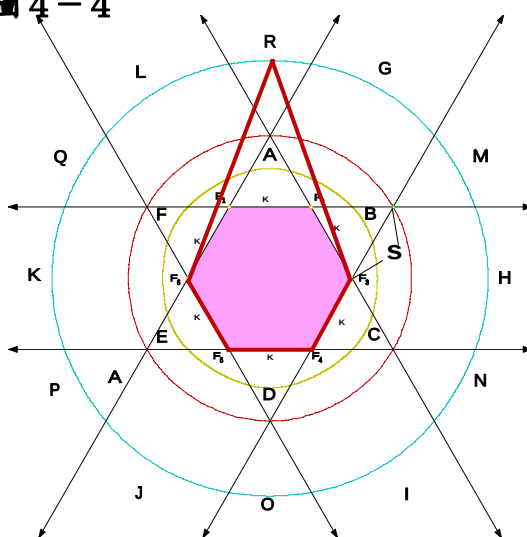
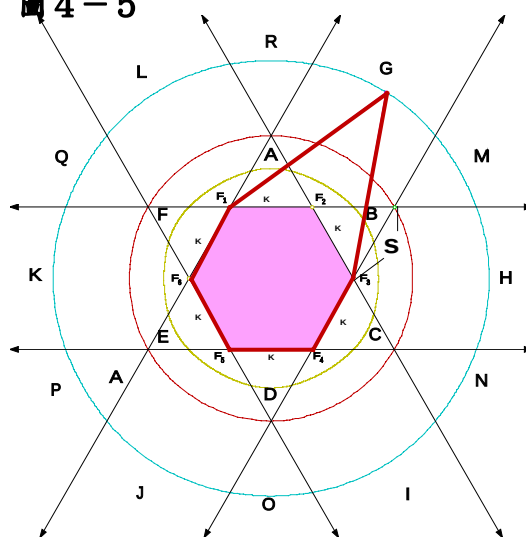


圖 4-5



第三類圖形說明：

M、N、O、P、Q、R 六區所得曲線為橢圓之部分，長軸長度為 $l - 3K$ ，分別以 (F_1, F_4) 、 (F_2, F_5) 、 (F_3, F_6) 、 (F_4, F_1) 、 (F_5, F_2) 、 (F_6, F_3) 為焦點。如圖 4 - 4。

分別以 (F_1, F_3) , (F_2, F_4) , (F_3, F_5) , (F_4, F_6) , (F_5, F_1) , (F_6, F_2) 為焦點。

7、繞圓得圓

所得曲線依線圈長度分為 $2\left[\frac{k+1}{2}\right]-1(k \geq 3)$ 類，所得的曲線與 3、4、5、6 邊形之形式皆相同。

詳細證明於參考資料 1

11、繞柱形為橢圓曲面：將平面狀況沿平面法線延伸得曲面。

一、反射圖形：

<1>若線圈長度和三角形周長的比值介於1到 $\frac{3}{4}$ 之間，則反射情況將趨近或等於一個正三角形。

<2>若線圈長度和三角形周長的比值等於 $\frac{3}{4}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 60° 時，則反射圖形為一最大正三角形且**反射一次完成**；若不為 60° ，則圖形經數次反射結果與<1>相同。

圖一

軌跡1

The diagram illustrates a geometric construction. A large red circle is inscribed within an equilateral triangle. The vertices of this triangle are labeled F_1 , F_2 , and F_3 . Inside the red circle, a smaller, light blue equilateral triangle is inscribed, with its vertices on the sides of the larger triangle. A small black dot is located at the center of the red circle, representing the locus of a point.

2、線圈繞四邊形(如圖二)

<1>若線圈長度和四邊形周長的比值介於1到 **圖二**

$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ 之間，則反射情況將趨近或等於一個正四邊形。

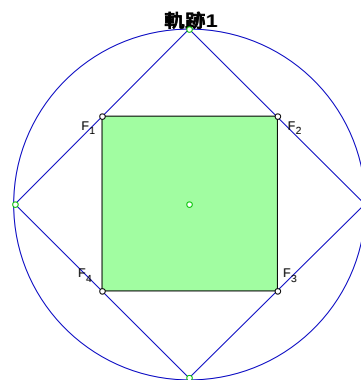
<2>若線圈長度和四邊形周長的比值等於

$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 45°

時，則反射圖形為一最大正四邊形且**反射一次完成**；若不為 45° ，則圖形經數次反射結果與<1>相同。

<3>若線圈長度和圖形周長的比值大於

$\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ ，則圖形為無規則的反射。



3、線圈繞五邊形(如圖三)

<1>若線圈長度和五邊形周長的比值介於1到 **圖三**

$\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ 之間，則反射情況將趨近或等於一個正五邊形。

<2>若線圈長度和五邊形周長的比值等於

$\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 36°

時，則圖形反射為一最大正五邊形；若不為 36° ，則圖形經數次反射結果與<1>相同。

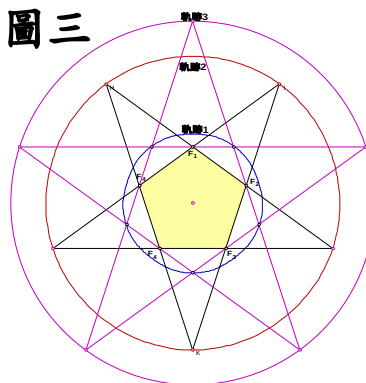
<3>若線圈長度和五邊形周長的比值介於 $\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ 到 $\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ 之間，反射情況為無規則的反射。

<4>若線圈長度和五邊形周長的比值等於 $\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ ，且發射沿著圖形的延長線時，則圖形反射為一最小正五芒星且**反射一次完成**；若不發射沿著圖形的延長線，則圖形經數次反射反射情況將趨近或等於一個正五芒星。

<5>若線圈長度和五邊形周長的比值介於 $\frac{5+\sqrt{5}}{5}$ 到 $\frac{6+\sqrt{5}}{5}$ 之間，則圖形反射情況將趨近或等於一個正五芒星。

<6>若線圈長度和五邊形周長的比值等於 $\frac{6+\sqrt{5}}{5}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 36° 時，則圖形反射為一最大正五芒星且**反射一次完成**；若不為 36° ，則圖形經數次反射結果與<5>相同。

<7>若線圈長度和五邊形周長的比值大於 $\frac{6+\sqrt{5}}{5}$ ，則圖形為無規則的反射。



4、線圈繞六邊形(如圖四)

<1>若線圈長度和六邊形周長的比值介於1到

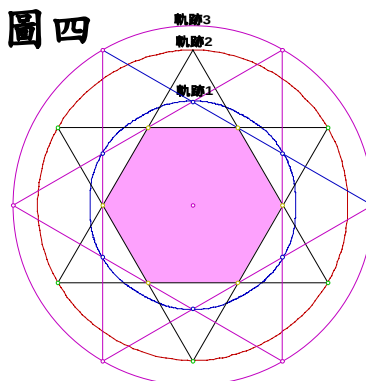
$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ 之間，則反射情況將趨近或等於一個正六邊形。

<2>若線圈長度和六邊形周長的比值等於

$\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 30°

時，則圖形反射為一最大正六邊形且**反射一次完成**；若不為 30° ，則圖形經數次反射結果與<1>相同。

圖四



<3>若線圈長度和六邊形周長的比值介於 $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ 到 $\frac{7}{6}$ 之間，反射情況為無規則的反射。

<4>若線圈長度和六邊形周長的比值等於 $\frac{7}{6}$ ，且發射沿著圖形的延長線時，則圖形反射為一最小正三角形且**反射一次完成**；若不發射沿著圖形的延長線，則圖形經數次反射情況將趨近或等於一個正三角形。

P.S 只有正六邊型的反射非六芒星，其餘n-5之正n邊形皆可得n芒星

<5>若線圈長度和六邊形周長的比值介於 $\frac{7}{6}$ 到 $\frac{15+2\sqrt{3}}{18}$ 之間，則圖形反射情況將趨近或等於一個正三角形。

<6>若線圈長度和六邊形周長的比值等於 $\frac{15+2\sqrt{3}}{18}$ ，且發射角度和圖形的邊夾 30° 時，則圖形反射為一最大正三角形且**反射一次完成**；若不為 30° ，則圖形經數次反射結果與<5>相同。

<7>若線圈長度和六邊形周長的比值大於 $\frac{15+2\sqrt{3}}{18}$ ，則圖形為無規則的反射。

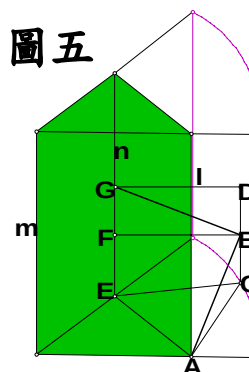
5、線圈繞圓之反射：不過圓形內部。

6、線圈繞橢圓之反射：不過橢圓內部。

7、線圈繞凸圖形之反射：必不過凸圖形內部，詳細說明於附件二之附註。

- 8、線圈繞柱形之反射：三角柱三邊為 l 、 m 、 n ，由 l 上任一點A向曲面發射交於B。又 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 的反射為 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BF}$ 、 $\overrightarrow{CB}$ 的反射為 $\overrightarrow{BD}$ ，B為 $\overrightarrow{CD}$ 中點。
 $\therefore \overrightarrow{AB}$ 反射為 $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BG}$ ，G點在M上。
 如圖五

圖五



二、反射圖形之公式：

- 1、反射圖形為最大正 n 邊形與大頭釘所成正 n 邊形之關係：

A、正三角形的反射圖形：(如圖六)

設三角形之邊長為 K

$$\angle A'AB = \frac{360^\circ}{2 \times 3}$$

三角形之周長為 $3K$

$$\overline{A'A} = \overline{A'B} = \overline{AM} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3} = \frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3}$$

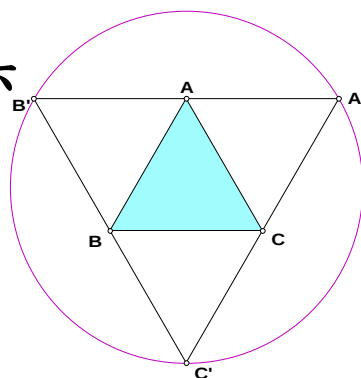
總線圈長度為

$$\overline{A'A} + \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = (3-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{線圈長度}}{\text{三角形周長}} = \frac{(3-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3} \right)}{3K}$$

$$= \frac{(3-1) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3}}{3}$$

圖六



B、正四邊形的反射圖形：(如圖七)

設四邊形之邊長為 K

$$\angle A'AB = \frac{360^\circ}{2 \times 4}$$

四邊形之周長為 $4K$

$$\overline{A'A} = \overline{A'B} = \overline{AM} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4} = \frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4}$$

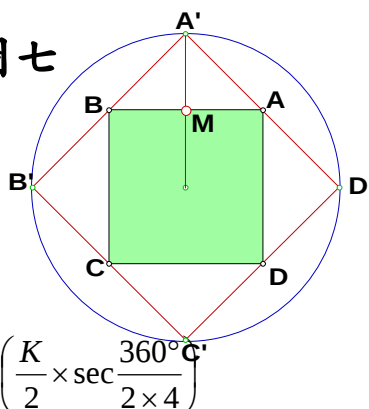
總線圈長度為

$$\overline{A'A} + \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = (4-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{線圈長度}}{\text{四邊形周長}} = \frac{(4-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4} \right)}{4K}$$

$$= \frac{(4-1) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4}}{4}$$

圖七



C、正五邊形的反射圖形：

同理可證

D、正 n 邊形的反射圖形：

設 n 邊形之邊長為 K

$$\angle A''AB = \frac{360^\circ}{2 \times n}$$

則 n 邊形之周長為 nK

總線圈長度為

$$(n-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \right)$$

其中 $(n-1)$ 是因為，

若用正三角形作反射則線圈長須為

$$(3-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 3} \right) ;$$

若用正四邊形作反射則線圈長須為

$$(4-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 4} \right) ;$$

用正五邊形作反射則線圈長須為

$$(5-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \right) ;$$

因此當正 n 邊形時，所反射出最大的正 n 邊形，則線圈長須為

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\text{總線圈長度}}{n\text{邊形周長}} &= \frac{(n-1)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \right)}{nK} \\ &= \frac{(n-1) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n}}{n} \end{aligned}$$

2、所反射圖形為最大正 n 芒星與大頭釘所成正 n 邊形之關係：

A、正五邊形的反射圖形：(如圖八)

設五邊型之一邊邊長為 K

$$\angle A'OA'' = \frac{360^\circ}{5} = \angle A'AM = \frac{360^\circ}{2 \times 5}$$

則五邊形周長為 $5K$

$$\overline{A'A} = \overline{A'B} = \overline{AM} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} = \frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5}$$

$$\begin{aligned} \overline{A''A'} = \overline{A'E'} = \overline{A'A} \times \sec \frac{360^\circ}{5} \\ = \frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \sec \frac{360^\circ}{5} \end{aligned}$$

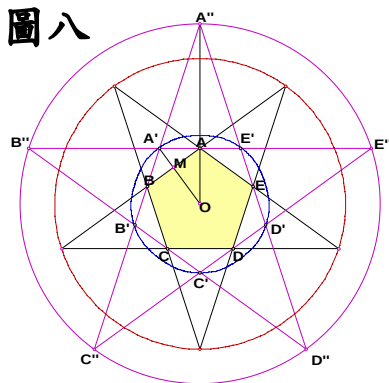
總線圈長度為

$$\overline{A'A'} + \overline{A'E'} + \overline{A'A} + \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

$$= (5-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \sec \frac{360^\circ}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{總線圈長度}}{\text{五邊形周長}} = \frac{(5-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \sec \frac{360^\circ}{5} \right)}{5K}$$

圖八



$$= \frac{(5-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \sec \frac{360^\circ}{5}}{5}$$

$$= \frac{(5-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \left(1 + \sec \frac{360^\circ}{5}\right)}{5}$$

B、正六邊形的反射圖形：(如圖九)

設六邊形之邊長為 K

$$\angle A''A'A = \frac{360^\circ}{6}, \angle A'AM = \frac{360^\circ}{2 \times 6}$$

則六邊形周長為 $6K$

$$\overline{A'A} = \overline{F'F} = \overline{AM} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6}$$

$$\overline{A''A'} = \overline{A''F'} = \frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \times \sec \frac{360^\circ}{6}$$

總線圈長度為

$$\overline{A'A'} + \overline{A'F'} + \overline{A'A} + \overline{F'F} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF}$$

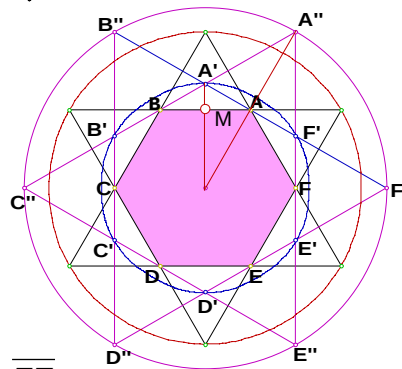
$$= (6-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \times \sec \frac{360^\circ}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{總線圈長度}}{\text{六邊形周長}} = \frac{(6-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \times \sec \frac{360^\circ}{6} \right)}{6K}$$

$$= \frac{(6-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \times \sec \frac{360^\circ}{6}}{6}$$

$$= \frac{(6-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \left(1 + \sec \frac{360^\circ}{6}\right)}{6}$$

圖九



C、正七邊形的反射圖形

同理可證

D、正 n 邊形的反射圖形

我們經過歸納、整理，得下列之公式：

設正 n 邊型之邊長為 K

$$\angle A''A'A = \frac{360^\circ}{n}, \angle A'AF = \frac{360^\circ}{2 \times n}$$

則正 n 邊形周長為 nK

總線圈長度為

$$(n-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \times \sec \frac{360^\circ}{n} \right)$$

其中 $(n-2)$ 是因為，

若用正五邊形作反射則線圈長須為

$$(5-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 5} \times \sec \frac{360^\circ}{5} \right);$$

用正六邊形作反射則線圈長須為

$$(6-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 6} \times \sec \frac{360^\circ}{6} \right);$$

同理，正七邊形之線圈長須為

$$(7-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 7} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times 7} \times \sec \frac{360^\circ}{7} \right);$$

因此當正 n 邊形時，所反射出最大的正 n 芒星，則線圈長須為

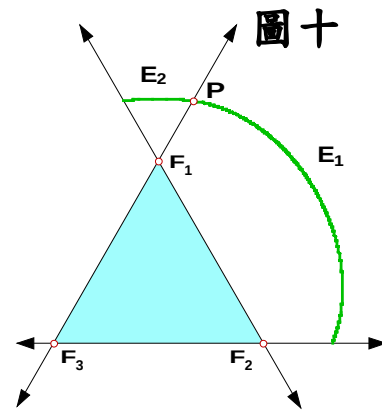
$$\begin{aligned} (n-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \times \sec \frac{360^\circ}{n} \right) \\ \Rightarrow \frac{\text{總線圈長度}}{n\text{邊形週長}} &= \frac{(n-2)K + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \right) + 2 \times \left(\frac{K}{2} \times \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \times \sec \frac{360^\circ}{n} \right)}{(n-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \times \sec \frac{360^\circ}{n}} \\ &= \frac{nK}{n} \\ &= \frac{(n-2) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \left(1 + \sec \frac{360^\circ}{n} \right)}{n} \end{aligned}$$

附註：

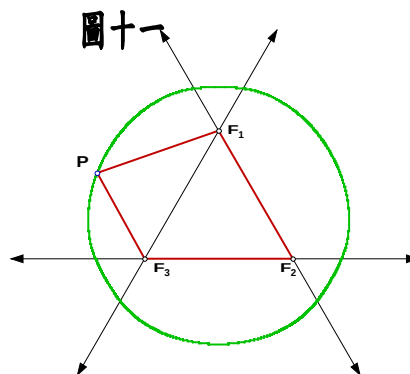
引理一：以封閉線圈(長 $l >$ 三角形周長)繞三角形所得曲線無折點。

Pf：可能產生折點位置如圖十之 P 點位置，故檢查 P 點是否為折點。

1. 以 F_1 、 F_2 為焦點，長軸為 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 作橢圓 E_1
以 F_2 、 F_3 為焦點，長軸為 $\overline{PF_2} + \overline{PF_3}$ 作橢圓 E_2
2. 過 P 作 E_1 之切線 L_1
過 P 作 E_2 之切線 L_2
3. (i). 由 F_1 向 P 發射，路徑為 $\overline{F_1P}$ ，反射得 $\overline{PF_2}$
(ii). 由 F_3 向 P 發射，路徑為 $\overline{F_3P}$ ，反射得 $\overline{PF_2}$
4. 由(i). (ii). 知入射反射路徑皆相同，故 P 在 E_1 之切線 L_1 ，與 P 在 E_2 之切線 L_2 重合 $\therefore L_1 = L_2$
故 P 非折點
5. 同理，任意相鄰兩區之邊界交點皆非折點。



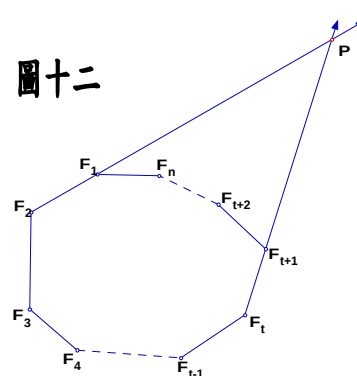
推論一： F_1 、 F_2 、 F_3 、 P 、 F_1 為線圈所在位置
由 F_3 射向 P ，則反射必過 F_2 且不會通
過三角形內部，故以此方式發射後其
反射路徑皆不過三角形內部。如圖十



引理二：已足夠長之封閉線圈繞任意 n 邊形所得曲線亦無折點，且反射必不過 n 邊形內部。

pf：

- (1) F_1 、 F_{t+1} 為焦點， $\overline{PF_1} + \overline{PF_{t+1}}$ 為長軸長，作橢圓 E_1
(2) F_1 、 F_t 為焦點， $\overline{PF_1} + \overline{PF_t}$ 為長軸作橢圓 E_2
- 過 P 作 E_1 之切線 L_1
過 P 作 E_2 之切線 L_2
- (i). 由 F_1 向 P 發射，路徑為 $\overline{F_1P}$ ，反射得 $\overline{PF_1}$
(ii). 由 F_3 向 P 發射，路徑為 $\overline{F_{t+1}P}$ ，反射得 $\overline{PF_1}$
- 由 (i). (ii). 知入射反射路徑皆相同，故 P 在 E_1 上之切線 L_1 ，與 P 在 E_2 上之切線 L_2 重合 $\therefore$
 $L_1 = L_2$ 故 P 非折點
- 同理，任意相鄰兩區之邊界交點皆非折點
如圖十二



推論二： F_1 、 F_2 、 、 、 F_t 、 F_{t+1} 、 P 、 F_1 為線圈所在位置由 F_1 射向 P ，則反射必過 F_{t+1} 且不會通過 n 邊形內部，故以此方式發射後其反射路徑皆不過 n 邊形內部。

引理三：以封閉線圈繞凸圖形，所得曲線必為凸圖形。且沿切線方向反射路徑必不過凸圖形內部。

Pf: 一足夠定長之線圈繞凸圖形所得曲線 S ，圖十三
將凸圖形邊界分為 2^n 等份，其等分點為

$P_1 P_2 \dots P_{2^n}$

另 $A_n = \{ P_1 P_2 \dots P_{2^n} \}$

且要求 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots \subseteq A_n$

令 S_n 為繞 A_n 邊形所得軌跡， S_{n+1} 內部範圍必大於 S_n

故當 $n \rightarrow \infty$ ， S_n 越來越靠近 S

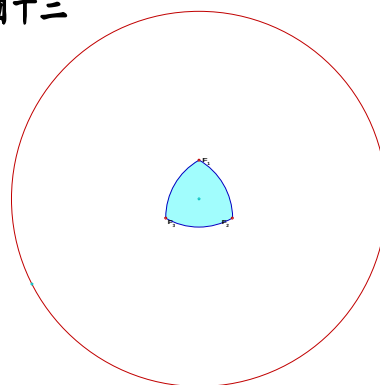
由引理一、二

S_n 為無折點之凸圖形

且 S_n 為外圍反射軌跡亦不會過 2^n 邊形內部

當 $n \rightarrow \infty$ ， $S_n \rightarrow S$

故凸圖形沿切線方向向 S 反射亦不會過凸圖形內部。如圖十三



柒、討論

1. 當大頭釘的數目為一時：所得為圓，反射後通過圓心之直線。
2. 當大頭釘的數目為二時：所得為橢圓，反射數次後趨近通過兩焦點之直線。
3. 當大頭釘的數目為三時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類只有一區，有 6 個。若線圈長與三角形周長之比值為 $\frac{4}{3}$ ，經數次反射後軌跡趨近於一正三角形。
4. 當大頭釘的數目為四時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類只有一區，有 8 個。若線圈長與四邊形周長之比值為 $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ ，經數次反射後軌跡趨近於一正四邊形。
5. 當大頭釘的數目為五時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類有三區，各為 10、5、10 個。依線圈長與五邊形周長之比值之不同，經數次反射後軌跡趨近於一正五邊形或正五芒星。
6. 當大頭釘的數目為六時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類有三區，各為 12、6、12 個。依線圈長與六邊形周長之比值之不同，經數次反射後軌跡趨近於一正六邊形或正三角形。
7. 當大頭釘的數目為七時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類有五區，各為 14、7、14、7、14 個。依線圈長與七邊形周長之比值之不同，經數次反射後軌跡趨近於一正七邊形或正七芒星。
8. 當大頭釘的數目為 n 時：所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類有 $2\left[\frac{k+1}{2}\right]-1(k \geq 3)$ 區。
9. 當以封閉線圈繞圓所得曲線亦為一圓。因線圈長與圓周長比值不同反射後得不同數目之芒星軌跡。
10. 當以封閉線圈繞橢圓所得曲線亦為一橢圓。反射軌跡亦不通過原橢圓之內部。
11. 當以封閉線圈繞凸圖形所得曲線亦為一凸圖形。
12. 當以封閉線圈繞柱形所得曲線亦為一橢圓曲面。
13. 當以封閉線圈繞球所得曲線亦為一球。

捌、結論

- 一、當大頭釘的數目為 n 時，以封閉的線圈繞大頭釘作圖，所得的圖形為數個橢圓的組合，而此些橢圓數恰巧等於大頭釘數的整數倍，而且其類型數與橢圓數目，與大頭釘的數目有規則在，其規則為：當大頭釘的數目為 a_k 時，其所得到的橢圓數目，依線圈的長度分類有

$$2\left[\frac{k+1}{2}\right]-1(k \geq 3) \text{ 個。P.S: } ([\] \text{ 為高斯符號})$$

二、由 n 邊形頂點發射向此類曲線，依線圈長度範圍經數次反射可得穩定之正 n 邊形或正 n 芒星，且由 n 個大頭釘所成的 n 邊形與其反射圖形有一定的規則，其規則為：

1. n 邊形和反射出的 n 邊形之線圈長度有一定的比值，期比值為：

$$= \frac{\text{總線圈長度}}{n\text{邊形周長}} = \frac{(n-1) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n}}{n}$$

2. n 邊形和反射出的 n 芒星之線圈長度有一定的比值，期比值為：

$$= \frac{\text{總線圈長度}}{n\text{邊形周長}} = \frac{(n-1) + \sec \frac{360^\circ}{2 \times n} \times \left(1 + \sec \frac{360^\circ}{n}\right)}{n}$$

三、而此種構想所畫出的圖形，可實際應用於不同的建築物，達到保全及遠距傳聲等功能。

四、當由任何凸圖形往切線方向發射往以封閉線圈繞凸圖形所得之曲線，經反射後任何反射軌跡皆不會進入凸圖形內部。

玖、參考資料及其他

書名：Geometry /Berger,Marcel ; Cole,M & Levy,S,tr

資料：GSP 操作說明書