中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：高 中 組

作品名稱：點的對稱

關 鍵 詞：對 稱

編　　號：040402

學校名稱：

國立臺南女子高級中學

作者姓名：

魏妤芳、林　晏、李亞恬

指導老師：

陸弘道

零. 內容摘要：

兩條不平行的相交直線 L_1、L_2，交角 θ 度。今有一不在 L_1、L_2 的點 P_0，作關於 L_1 的對稱點 P_1，P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L_1 的對稱點 P_3……如此反覆對 L_1、L_2 做對稱點，當 Pn 的 n＝ $\dfrac{2\pi}{g.c.d(\pi,\theta)}$ ，則 Pn 會重合 P_0。

另外對 L_1、L_2 形成的所有對稱點會位在同一個圓上

一. 研究動機：

有一天，班上同學提出了一個題目：兩條不平行的相交直線 L_1、L_2，交角 45 度。今有一不在 L_1、L_2 的點 P_1，作關於 L_1 的對稱點 P_1。P_1 又作關於 L_2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L_1 的對稱點 P_3……如此反覆對 L_1、L_2 對稱點，試問 Pn 等於多少時恰會回到 P_0？

看到它第一個念頭是懷疑：這樣對兩條做對稱，不會越跑越遠嗎？怎麼可能會重合到原來出發點？又倘若對稱一定次數後能重合，它重合的條件是什麼？θ 角和 n 值（對稱到最初的點所需次數）存在何關係？

二. 研究目的：

(一) 以基本的方法計算，得夾特殊角度 45 度，依題義反覆對稱，8 次會回到原處。
(二) 對稱到原處所需要的其它條件
(三) 利用電腦計算，一窺 θ 與 n 詳細情形
(四) 圖形篇　說明所有的對稱點都位在同一個圓上
(五) 以代數觀點闡明 θ 和 n 的關係

三. 研究過程：

（一）兩線夾 45 度時的情形

1. 為了幫助做題，我們適當地調整兩直線，使其一線固定，由另一條直線的轉動，控制 θ 的大小(0°＜θ≦90°)
2. 由於兩條直線只要 θ 角度固定，不論同時平移到平面上的任意位置，皆不會影響 n 值，故令兩條直線中固定的那一條為 x 軸，兩線的交點為原點。

此舉的好處為可以化 L1、L2 用函數式表達：L1 ： y = 0
L2 ： y = tanθ x

3. 當 L1(x 軸)與 L2 夾 45°，　L1：y=0，L2： y = x

關於直線 L2 的對稱點求法利用到兩個觀念：a 兩點的連直線垂直於所對稱直線 b 兩點至所對稱的直線距離相等

今設 P_0 為不在 L1、L2 上之一點，設 $P_0(x_0, y_0)$ 為 $P_1(x_1, y_1)$。

P_0P_1 的中點 $(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2})$ 在 L2 上，

$\rightarrow \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{y_0+y_1}{2}$

$\rightarrow x_0 - y_0 = y_1 - x_0$

$\overline{P_1P_0}$ 的斜率與 L1 斜率乘積 = -1 （$\because \overline{P_1P_0} \perp$ L1 ）

$\rightarrow \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1} \times 1 = -1$

$\rightarrow x_1 + y_1 = x_0 + y_0$ ……

由上知：$(x_1, y_1) = (y_0, x_0)$

令 f(x, y) = (y, x) …L2 之對稱點函數

g(x, y) = (-x, y)…L1 之對稱點函數

P_1 ：$f(X_0, Y_0) = (Y_0, X_0)$

P_2 ：$g(Y_0, X_0) = (Y_0, -X_0)$

P_3 ：$f(Y_0, -X_0) = (-X_0, Y_0)$

P_4 ：$g(-X_0, Y_0) = (-X_0, -Y_0)$

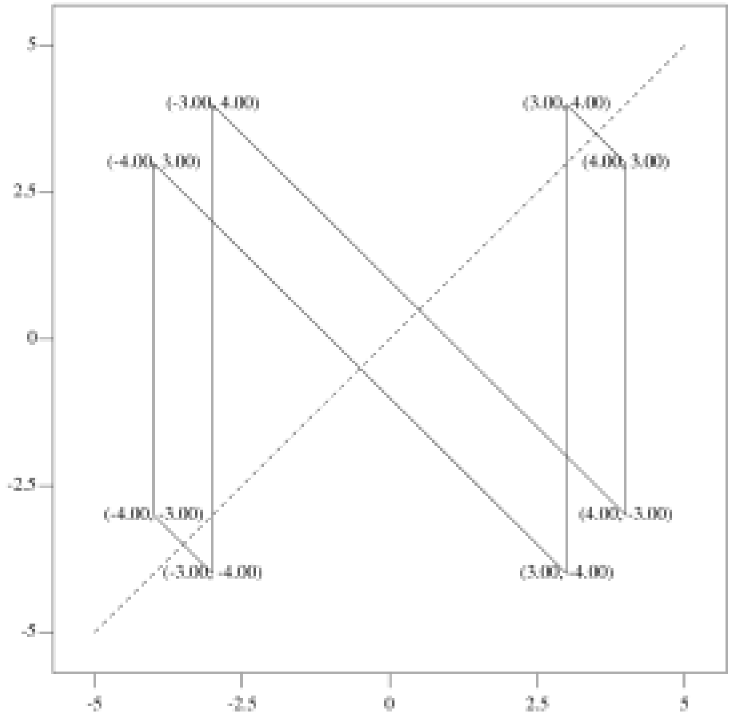
P_5 ：$f(-X_0, -Y_0) = (-Y_0, -X_0)$

P_6 ：$g(-Y_0, -X_0) = (-Y_0, X_0)$

P_7 ：$f(-Y_0, X_0) = (X_0, -Y_0)$

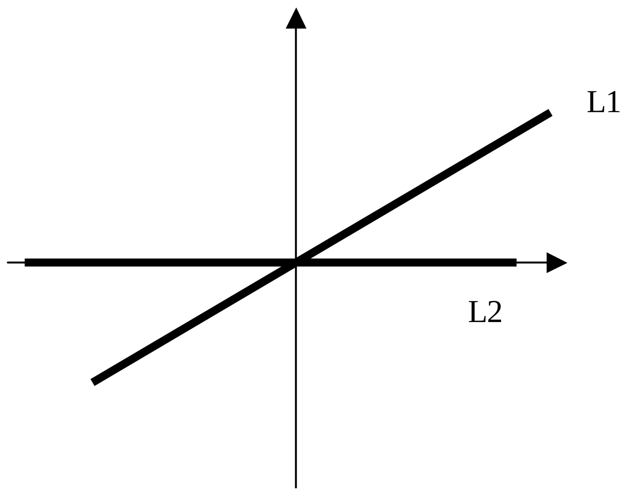
P_8 ：$g(X_0, -Y_0) = (X_0, Y_0)$

故在連續八次的對稱後，P_8會和P_0重合。



(二) 對稱點的另外限制

對於 P_0 這個對稱點除了不能為在 L_1、L_2 上，它還不能位在某一特定位置。舉個例：



假設上圖 L1、L2 夾 45°，若 P_0 為不在 L1、L2 的點，卻位在 y 軸上，那麼當 P_0 對 L1 做第一次對稱，得到的對稱點 P_1 會位在 L2 上，P_1 就不能對 L2 做另一次的對稱了！所以在取對稱點的時候，也應小心不要取到此種會對稱至對稱線上的點。

（三）45°是一個特殊的角度在我們所建構的座標系中，可以得到很漂亮的對稱點函數。然而，在其它的角度諸如 60°、90°，雖然已知曉方法，但技術層面有過於複雜繁瑣的麻煩。

另一方面，

利用對稱一直線的條件： 1. 兩點的連直線垂直於所對稱直線

2. 兩點至所對稱的直線距離相等

L1：(tanθ)x = y

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}\times\tan\theta=-1$$

$$\rightarrow \quad x+\tan\theta y=x_0+\tan\theta y_0$$

$$\tan\theta\times\frac{x+x_0}{2}=\frac{y+y_0}{2}$$

$$\rightarrow \quad \tan\theta x-y=y_0-\tan\theta x_0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}x_0+\tan\theta y_0 & \tan\theta\\ y_0-\tan\theta x_0 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \tan\theta\\ \tan\theta & -1\end{vmatrix}}=\frac{x_0(\tan^2\theta-1)-2\tan\theta y_0}{-1-\tan\theta}=\cos 2\theta x_0+\sin 2\theta y_0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & x_0+\tan\theta y_0\\ \tan\theta & y_0-\tan\theta x_0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \tan\theta\\ \tan\theta & -1\end{vmatrix}}=\frac{y_0(1-\tan^2\theta)-2\tan\theta x_0}{-1-\tan\theta}=\sin 2\theta x_0-\cos 2\theta y_0$$

也就是說，若有一個不在 L1: y=tanθx 上的也就點 p(x_0,y_0)，相關於 L1 的對稱點為（cos2θx_0+sin2θy_0 , sin2θx_0－cos2θy_0）。將此式連同以知的 L2 的對稱點方程式

” f（x, y）=（x, -y）”套入電腦運算，得到下列資料：

$\theta : n$	$\theta : n$	$\theta : n$	$\theta : n$	$\theta : n$
1: 360	38: 180	75: 24	112: 90	149: 360
2: 180	39: 120	76: 90	113: 360	150: 12
3: 120	40: 18	77: 360	114: 60	151: 360
4: 90	41: 360	78: 60	115: 72	152: 90
5: 72	42: 60	79: 360	116: 90	153: 40
6: 60	43: 360	80: 18	117: 40	154: 180
7: 360	44: 90	81: 40	118: 180	155: 72
8: 90	45: 8	82: 180	119: 360	156: 30
9: 40	46: 180	83: 360	120: 6	157: 360
10: 36	47: 360	84: 30	121: 360	158: 180
11: 360	48: 30	85: 72	122: 180	159: 120
12: 30	49: 360	86: 180	123: 120	160: 18
13: 360	50: 36	87: 120	124: 90	161: 360
14: 180	51: 120	88: 90	125: 72	162: 20
15: 24	52: 90	89: 360	126: 20	163: 360
16: 90	53: 360	90: 4	127: 360	164: 90
17: 360	54: 20	91: 360	128: 90	165: 24
18: 20	55: 72	92: 90	129: 120	166: 180
19: 360	56: 90	93: 120	130: 36	167: 360
20: 18	57: 120	94: 180	131: 360	168: 30
21: 120	58: 180	95: 72	132: 30	169: 360
22: 180	59: 360	96: 30	133: 360	170: 36
23: 360	60: 6	97: 360	134: 180	171: 40
24: 30	61: 360	98: 180	135: 8	172: 90
25: 72	62: 180	99: 40	136: 90	173: 360
26: 180	63: 40	100: 18	137: 360	174: 60
27: 40	64: 90	101: 360	138: 60	175: 72
28: 90	65: 72	102: 60	139: 360	176: 90
29: 360	66: 60	103: 360	140: 18	177: 120
30: 12	67: 360	104: 90	141: 120	178: 180
31: 360	68: 90	105: 24	142: 180	179: 360
32: 90	69: 120	106: 180	143: 360	181: 360
33: 120	70: 36	107: 360	144: 10	182: 180
34: 180	71: 360	108: 10	145: 72	183: 120
35: 72	72: 10	109: 360	146: 180	184: 90
36: 10	73: 360	110: 36	147: 120	185: 72
37: 360	74: 180	111: 120	148: 90	186: 60

187: 360
188: 90
189: 40
190: 36
191: 360
192: 30
193: 360
194: 180
195: 24
196: 90
197: 360
198: 20
199: 360
200: 18
201: 120
202: 180
203: 360
204: 30
205: 72
206: 180
207: 40
208: 90
209: 360
210: 12
211: 360
212: 90
213: 120
214: 180
215: 72
216: 10
217: 360
218: 180
219: 120
220: 18
221: 360
222: 60
223: 360
224: 90
225: 8
226: 180
227: 360
228: 30
229: 360
230: 36
231: 120
232: 90
233: 360
234: 20
235: 72
236: 90
237: 120
238: 180
239: 360
240: 6
241: 360
242: 180
243: 40
244: 90
245: 72
246: 60
247: 360
248: 90
249: 120
250: 36
251: 360
252: 10
253: 360
254: 180
255: 24
256: 90
257: 360
258: 60
259: 360
260: 18
261: 40
262: 180
263: 360
264: 30
265: 72
266: 180
267: 120
268: 90
269: 360
270: 4
271: 360
272: 90
273: 120
274: 180
275: 72
276: 30
277: 360
278: 180
279: 40
280: 18
281: 360
282: 60
283: 360
284: 90
285: 24
286: 180
287: 360
288: 10
289: 360
290: 36
291: 120
292: 90
293: 360
294: 60
295: 72
296: 90
297: 40
298: 180
299: 360
300: 6
301: 360
302: 180
303: 120
304: 90
305: 72
306: 20
307: 360
308: 90
309: 120
310: 36
311: 360
312: 30
313: 360
314: 180
315: 8
316: 90
317: 360
318: 60
319: 360
320: 18
321: 120
322: 180
323: 360
324: 10
325: 72
326: 180
327: 120
328: 90
329: 360
330: 12
331: 360
332: 90
333: 40
334: 180
335: 72
336: 30
337: 360
338: 180
339: 120
340: 18
341: 360
342: 20
343: 360
344: 90
345: 24
346: 180
347: 360
348: 30
349: 360
350: 36
351: 40
352: 90
353: 360
354: 60
355: 72
356: 90
357: 120
358: 180
359: 360

30°、45°、60°等特殊角度得到的 n 值分別為 12、8、6，但 40°、72°卻出現了 18、10 等 n 值。這跟我們原本的想法：n 等於 360 除以 θ 是有些不符合的。又一些和 360 互質的角度，最終都以對稱 360 次後回到原點。茲整理如下：

1.若 θ 為 360°的因數，且 360/θ 為一偶數，則 n=360/θ

ex.　θ=45°，n= 8

2 若 θ 為 360°的因數，且 360/θ 為一奇數，則 n=360×2/θ

(即 8｜θ，θ｜360)

ex.　θ=72°，n= 10

3 若 θ 與 360°互質，則 n 恒為 360°。

4 若 θ 非 360 的因數，也非互質，那表示 θ 可寫成 θ=aT,

a=(θ,360)。則當 360/a 為偶數時，n=360/a，當 360/a 為奇數時，n=360×2/a。

ex.　θ=64°，n= 90

θ=44°，n= 90

(四)圖形

由 90 ° 60 ° 30 ° …乃至 2 ° 的圖形來看，當圖上可觀的對稱點越來越多時，可發覺對稱的點集合有形成一個圓的趨勢－不免令人猜測：對 L_1、L_2形成的所有對稱點應該位在同一個圓上。下面為說明：

今有兩條相交直線 L_1、L_2，P_0為不在 L_1、L_2上的點；P_1是 P_0對 L_1所做的對稱點；P_2是 P_1對 L_2所做的對稱點；P_3是 P_2對 L_1所做的對稱點。

∵ $d(P_0, L_1) = d(P_2, L_1)$

且 $P_0P_1 \perp L_1$

L_1 相當於 P_0P_1的中垂線；

同理 L_2 為 P_1P_2的中垂線

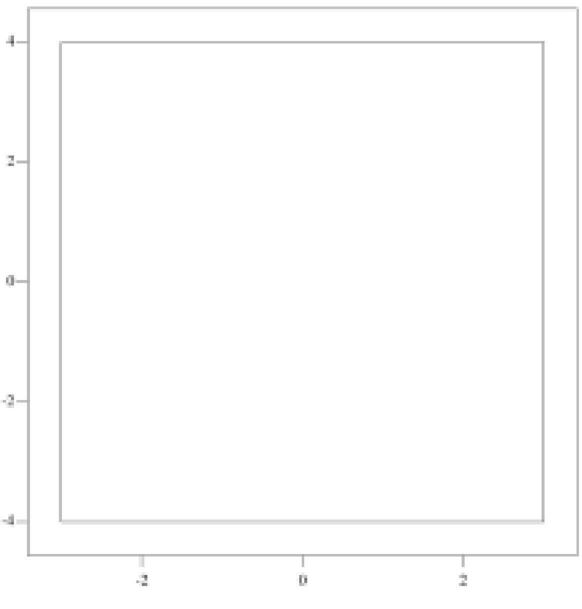
$OP_0 = OP_1 = OP_2$（O 為兩線相交點）

∴ P_0 、P_1 、P_2 三點形成的的圓是以 O 點為圓心 P_0O 之長為半徑之圓。

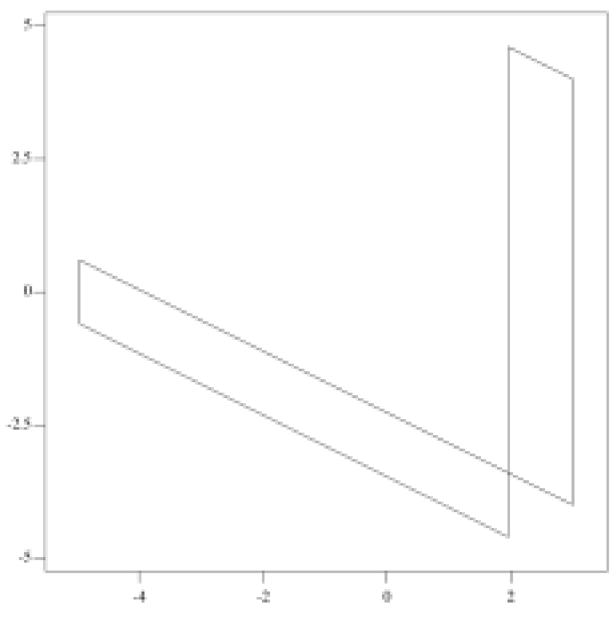
同理可證其它的對稱點也位在此圓上。

註：$d(P_0, L_1)$ 為 P_0到 L_1的距離。

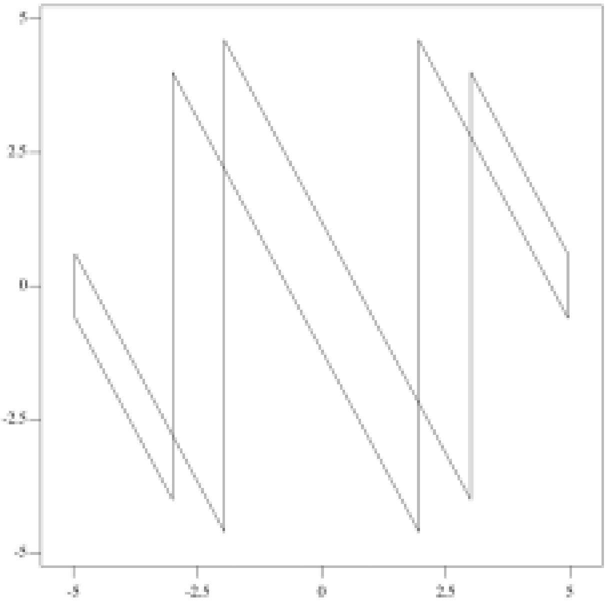
90°對稱 4 次



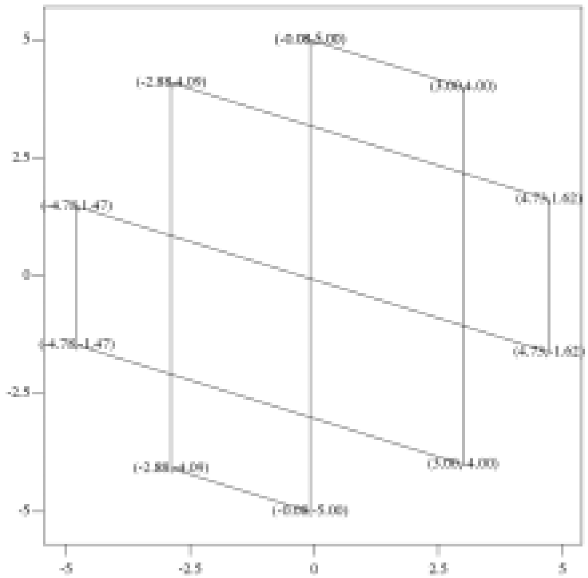
60°對稱 6 次



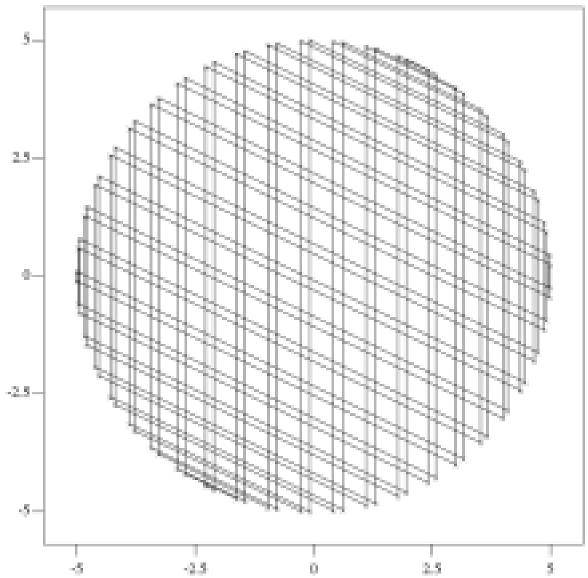
30° 對稱 12 次



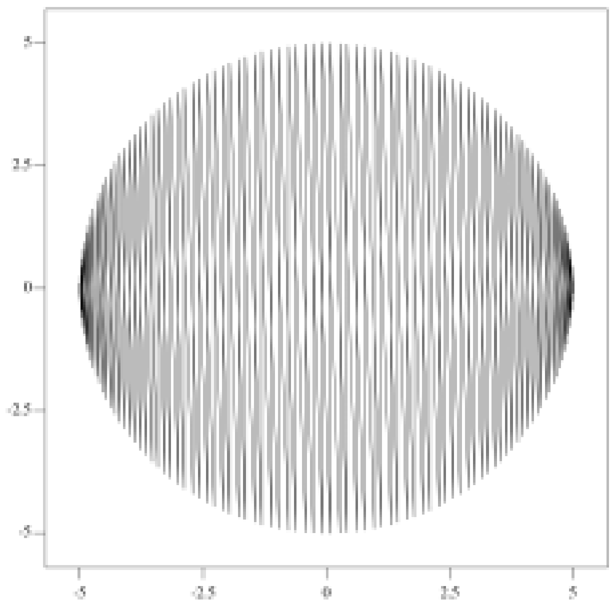
72° 對稱 16 次



64° 對稱 90 次



2° 對稱 180 次



（五）為何存在這種關係？我們於是又回頭尋找一般式的可能性，藉由代數的計算求得，本篇所欲解開的謎題－n 與θ的關係至此已明，概敘述之於下：

由（二）知：

任意點（x，y）對於 $y = \tan\theta x$ 的對稱點為：

$((\cos 2\theta)x+(\sin 2\theta)y, (\sin 2\theta)x-(\cos 2\theta)y)$

今設 $f(x, y) = ((\cos 2\theta)x+(\sin 2\theta)y, (\sin 2\theta)x-(\cos 2\theta)y)$

$g(x, y) = (x, -y)$

分別為 Ll、L2 的對稱點方程式。

若有一不在 L1、L2 上的點 P_0 (x_0, y_0)，對稱 L1 後的點叫 P_1， P_1 對稱 L2 後的點叫 P_2， P_2 對稱 L2 後的點叫 P_3，即

$f(P_0) = P_1$

$g(P_1) = P_2$

$f(P_2) = P_3$。

則

$P_1 = f(P_0) =((\cos 2\theta)x_0+(\sin 2\theta)y_0, (\sin 2\theta)x_0-(\cos 2\theta)y_0)$

$P_2 = g(P_1) =((\cos 2\theta)x_0+(\sin 2\theta)y_0, -(\sin 2\theta)x_0+(\cos 2\theta)y_0)$

$P_3 =((\cos 4\theta)x_0+(\sin 4\theta)y_0, (\sin 4\theta)x_0-(\cos 4\theta)y_0)$(註 1)

$P_4=((\cos 4\theta)x_0+(\sin 4\theta)y_0, -(\sin 4\theta)x_0+(\cos 4\theta)y_0)$

$P_5 =((\cos 6\theta)x_0+(\sin 6\theta)y_0, (\sin 6\theta)x_0-(\cos 6\theta)y_0)$

……

$P_{2n-1} =((\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0, (\sin 2n\theta)x_0-(\cos 2n\theta)y_0)$

$P_{2n} =((\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0, -(\sin 2n\theta)x_0+(\cos 2n\theta)y_0)$

(註 1

P_3：$x= \cos 2\theta((\cos 2\theta)x_0+(\sin 2\theta)y_0)+ \sin 2\theta(-(\sin 2\theta 0x_0+(\cos 2\theta)y_0)= [(\cos 2\theta)^2 -(\sin 2\theta)^2]x_0 + 2(\sin\theta)(\cos\theta)y_0 = (\cos 4\theta)x_0+ (\sin 4\theta)y_0$

$y = \sin 2\theta((\cos 2\theta)x_0+(\sin 2\theta)y_0) - \cos 2\theta(-(\sin 2\theta)x_0+(\cos 2\theta)y_0)$

$= 2(\sin\theta)(\cos\theta)x_0 + [(\sin 2\theta)^2 -(\cos 2\theta)^2]y_0$

$= (\sin 4\theta)x_0-(\cos 4\theta)y_0$

同理，利用積化和差，也可得 P_5、P_7、P_9……)

現在要使得對稱第 n 次後的點回到起點，分成兩個狀況：

1. P_{2n-1}=（$(\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0$, $(\sin 2n\theta)x_0-(\cos 2n\theta)y_0$ ）
   $=(x_0,y_0)$
   $(\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0 = x_0$
   $\therefore \cos 2n\theta=1, \sin 2n\theta=0$
   $2n\theta = 2\pi+2k\pi$ …(1)
   $(\sin 2n\theta)x_0-(\cos 2n\theta)y_0=y_0$
   $\therefore \sin 2n\theta=0, -\cos 2n\theta=1$
   $2n\theta=\pi+2k\pi$, …(2)
   由(1) (2)知不可能對稱奇數次後回到起點, 所以往後只考慮 P_{2n} 的狀況。

2. P_{2n}=($(\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0$, $-(\sin 2n\theta)x_0+(\cos 2n\theta)y_0$ $=(x_0,y_0)$
   $(\cos 2n\theta)x_0+(\sin 2n\theta)y_0 = x_0$
   $\therefore \cos 2n\theta=1, \sin 2n\theta=0$
   $2n\theta = 2\pi+2k\pi$ …(3)
   $-(\sin 2n\theta)x_0+(\cos 2n\theta)y_0= y_0$
   $-\sin 2n\theta=0, \cos 2n\theta = 1$
   $2n\theta = 2\pi+2k\pi$ …(4)
   由(3) (4)知對稱 2n 次後回到原點，n 和 θ 的關係是：
   $$2n\theta = 2\pi+2k\pi$$
   為維持最小整除，所以如果能被 2π 整除則 $n=\pi/\theta$
   如果 θ 不能被 2π 整除則以 123…代入 k 直到 $n=\pi+k\pi/\theta$ 為止

四、研究結果

(一)若θ是π(180)的因數

→ $2n\theta=2\pi$

→ $n=\pi/\theta$

(n 是 P_{2n} 的 n，所以要求的"次數" N= 2n = 2π/θ。同（三）結論第一點)

(二)若θ非π(180)的因數

設θ=aT , a=(θ，π)

→ $2n\theta=2\pi+2k\pi$

→ $2n\times aT=2\pi+2k\pi$

→ $n=\dfrac{(k+1)\pi}{aT}$

→ $n=\pi/a$

(調整 k 值，使得 T=k+1，那麼由於 a 是π的因數，所以可求得 n＝π/a，次數 N =2n = 2π/a 等同（三）結論第二、三、四點)

上面所敘指出了一點：n 只和θ為π的公因數有關, 即 $n=\dfrac{2\pi}{g.c.d(\pi,\theta)}$ 。

五. 結論與討論：

此次整個的研究過程是先就特例 45°的狀況，一窺究竟。在知道了基本的方法，卻因計算繁複而有所退步，最終藉由電腦已得結果，推算兩線夾的角度和對稱點的關係，回到先前導特例的法子，輔以積和化差的三角函數方法，得到了這樣的結果：兩條相異直線 L1、L2，夾 θ 角度。有一不在兩線的點，P_0，作關於 L1 的對稱點 P_1。P_1 又作關於 L2 的對稱點 P_2，P_2 又作關於 L1 的對稱點 P_3……Pn 時會重合 P_0，而 n 與 θ 的關係為：

$$n = \frac{2\pi}{g.c.d(\pi,\theta)}$$ 。

關於這個主題還有很多研究方向，茲如三條線、四條線的交錯不停對稱，對稱的情形會是怎樣；空間中點對面或線的情形又是怎樣，但想來狀況定是複雜許多。在現實中也可以看到此種點的對稱：鏡子。我們人站在鏡子前，在鏡中看到的自己，其實是構成輪廓的那些點對於鏡子的對稱，若在我們的背後、鏡子的對面在放上一面鏡子，那麼第一面鏡中形成影像的點又會對第二面鏡子再做一次對稱。相同的，第二面鏡子的影像又會出現在第一面鏡中，如此反覆下來，在第一面和第二面鏡中就出現了無數個我的形態，到底什麼時後這種對稱才會停止呢？ 原來我們所研究的東西只是這個問題的最基本面。不管怎樣本篇主題：點的對稱，到此做個結束，期盼日後對它能有更進一步的了解和發現。

六. 參考資料：

(1)平面幾何新路　張景中著　九章出版社

(2)直線方程式　陸思明著　建宏出版社