

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：高 中 組

作品名稱：調和變換之研討與運用

關 鍵 詞：調和變換、天體運行軌道、圓錐曲線

編 號：040401

學校名稱：

國立臺南第一高級中學

作者姓名：

林育民、王帝皓

指導老師：

朱國頌、莊智仰



調和變換之研討與應用

一、研究動機：

反演變換，又名圓對稱，在幾何變換的領域佔有重要的地位。為許多難解的問題提供了新的解法與看法。在一次偶然的機會，我看到八十四年一位學長的作品「圓 - 也有春天 - 圓對稱的應用與推廣」中，有關圓對稱的各種應用，以及他自己定義的一種變換 - 「圓平均變換」，可以用來作三等分角等的應用。讓我深深體會到幾何變換的魅力所在。於是我也定義了「圓調和變換」，並用 GSP 模擬了許多圖，得到一些有趣的曲線，開始了對此變換的研究。

二、研究目的：

研究圓調和變換的性質與應用。

三、研究過程與方法

若一圓的圓心為 O ，半徑為 r ，則此圓以 $O_{(r)}$ 表示。以下帶有箭號的線段表有向

線段，例如 $\overrightarrow{AB}$ 表 $\overline{AB}$ 有向線段。

1. 圓調和變換的定義：

若 $O_{(r)}$ 是平面上一圓，對於平面上的每一點 P ，若 $\overrightarrow{OP}$ 交 $O_{(r)}$ 於相異兩點 M 、 N ，且 M 落於射線 OP 之上。

則定義 P 的像點 Q_A 、 Q_B 為 $\overrightarrow{OP}$ 上的兩點，且 $\frac{1}{\overrightarrow{OP}} + \frac{1}{\overrightarrow{OQ_A}} = \frac{1}{\overrightarrow{OM}}$ 、

$$\frac{1}{\overrightarrow{OP}} + \frac{1}{\overrightarrow{OQ_B}} = \frac{1}{\overrightarrow{ON}}$$

這種由 P 到 Q_A 、 Q_B 的變換，本文稱為「圓調和變換」。 O 稱為調和中心，已知圓稱為參考圓， r 稱為調和半徑， Q_A 、 Q_B 稱為 P 的調和點；對於調和中心，則不去定義它的調和點。

A. 基本性質：

(1) 若 $\overrightarrow{OP} > r$ ，則 $Q_B - O - Q_A$ ，且 $\overrightarrow{OQ_A} > r$ ， $0 < \overrightarrow{OQ_B} < r$ 。

(2) 若 $\overrightarrow{OP} = r$ ，則 Q_A 在無窮遠處， $Q_B - O - P$ 且 $\overrightarrow{OQ_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ 。

(3) 若 $\frac{r}{2} < \overrightarrow{OP} < r$ ，則 $Q_A - Q_B - O - P$ ，且 $\overrightarrow{OQ_A} > r$ ， $\overrightarrow{OQ_B} < r$ 。

(4) 若 $\overrightarrow{OP} = \frac{r}{2}$ ，則 $Q_A - Q_B - O - P$ 且 $\overrightarrow{OQ_A} = r$ ， $\overrightarrow{OQ_B} < r$ 。

(5) 若 $0 < \overline{OP} < \frac{r}{2}$, 則 $Q_A - Q_B - O - P$, 且 $\overline{OQ_A} < r$, $\overline{OQ_B} < r$ 。

B. 證明 :

$$\text{由 } \frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ_A}} = \frac{1}{\overline{OM}} \text{ , } \frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ_B}} = \frac{1}{\overline{ON}} \text{ 可知 } \overrightarrow{OQ_A} = \frac{\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OM}}{\overline{OP} - \overline{OM}} \text{ ,}$$

$$\overrightarrow{OQ_B} = \frac{\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{ON}}{\overline{OP} - \overline{ON}}$$

在此我們取 $\overrightarrow{OP}$ 方向為正 , 則 $\overline{OM} > 0$, $\overline{ON} < 0$

(1) 若 $\overline{OP} > r$

$$\phi \quad \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OM} > 0 \text{ , } \overline{OP} - \overline{OM} > 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ_A} > 0$$

$$\text{且 } \overline{OQ_A} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} - r} > \frac{\overline{OP} \times r - r^2}{\overline{OP} - r} = r$$

$$\phi \quad \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{ON} < 0 \text{ , } \overline{OP} - \overline{ON} > 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ_B} < 0$$

$$\text{且 } \overline{OQ_B} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} < \frac{\overline{OP} \times r + r^2}{\overline{OP} + r} = r$$

由 $\phi \phi$ 知則 $Q_B - O - Q_A$, 且 $\overline{OQ_A} > r$, $0 < \overline{OQ_B} < r$ 。

(2) 若 $\overline{OP} = r$

$$\phi \quad \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OM} > 0 \text{ , } \overline{OP} - \overline{OM} = 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ_A} \rightarrow \infty$$

$$\phi \quad \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{ON} < 0 \text{ , } \overline{OP} - \overline{ON} > 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ_B} < 0$$

$$\text{且 } \overline{OQ_B} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} = \frac{r \times r}{r + r} = \frac{r}{2}$$

由 $\phi \phi$ 知 Q_A 在無窮遠處 , $Q_B - O - P$ 且 $\overline{OQ_B} = \frac{1}{2}\overline{OP}$ 。

(3) 若 $\frac{r}{2} < \overline{OP} < r$

$$\phi \quad \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OM} > 0 \text{ , } \overline{OP} - \overline{OM} < 0 \quad \therefore \overrightarrow{OQ_A} < 0$$

$$\text{且 } \overline{OQ_A} = \frac{\overline{OP} \times r}{r - \overline{OP}} \text{ ,}$$

$$\begin{aligned} & \text{由 } \frac{r}{2} < \overline{OP} \Rightarrow 2\overline{OP} > r \Rightarrow \overline{OP} > r - \overline{OP} \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{r - \overline{OP}} > r \\ & \Rightarrow \frac{\overline{OP} \times r}{r - \overline{OP}} > r, \text{ 即 } \overline{OQ_A} > r \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \overline{OP} \times \overline{ON} < 0, \overline{OP} - \overline{ON} > 0 \quad \therefore \overline{OQ_B} < 0$$

$$\text{且 } \overline{OQ_B} = \frac{\overline{OP} \times r}{\overline{OP} + r} < \frac{\overline{OP} \times r + r^2}{\overline{OP} + r} = r$$

由 $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ 知若 $\frac{r}{2} < \overline{OP} < r$, 則 $Q_A - Q_B - O - P$, 且 $\overline{OQ_A} > r$, $\overline{OQ_B} < r$ 。

(4) (5) 同 (3) 理可證

若 $\overline{OP} = \frac{r}{2}$, 則 $Q_A - Q_B - O - P$ 且 $\overline{OQ_A} = r$, $\overline{OQ_B} < r$ 。

若 $0 < \overline{OP} < \frac{r}{2}$, 則 $Q_A - Q_B - O - P$, 且 $\overline{OQ_A} < r$, $\overline{OQ_B} < r$ 。

四、結果與討論：以下論證採極坐標表示法

1. 直線的調和變換

定理 1-1：當直線通過調和中心時，直線映射至其本身。

證明：點 $P(\rho, \theta)$ 對半徑為 r 且圓心在極點的參考圓進行調和變換所得的像為

$$Q_A\left(\frac{\rho \times r}{\rho - r}, \theta\right) \text{ 和 } Q_B\left(\frac{\rho \times r}{\rho + r}, \theta + \pi\right) = \left(-\frac{\rho \times r}{\rho + r}, \theta\right)$$

通過調和中心(極點)的直線可表成 $\theta = C$ (C 為定數), 而有上述的映射關係可知 θ 為不變量, 所以通過一條極點的直線 $\theta = C$ 映射後還是 $\theta = C$,

故調和變換將一條通過調和中心的直線映射成直線本身

定理 1-2：當直線不通過調和中心時，直線映至一個圓錐曲線。

證明：設調和中心在極點, 調和半徑為 r , 且此直線至極點的距離為 a , 取適當坐

標使此直線垂直極軸, 則此直線可表為 $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$ 。

點 $P\left(\frac{a}{\cos \theta}, \theta\right)$ 的像為

$$Q_A: \left(\frac{\frac{a}{\cos \theta} \times r}{\frac{a}{\cos \theta} - r}, \theta\right) = \left(\frac{a \times r}{a - r \cos \theta}, \theta\right) = \left(\frac{r}{1 - \frac{r}{a} \cos \theta}, \theta\right)$$

$$Q_B : \left(\frac{\frac{a}{\cos \theta} \times r}{\frac{a}{\cos \theta} + r}, \theta + \pi \right) = \left(\frac{\frac{a}{-\cos(\theta + \pi)} \times r}{\frac{a}{-\cos(\theta + \pi)} + r}, \theta + \pi \right)$$

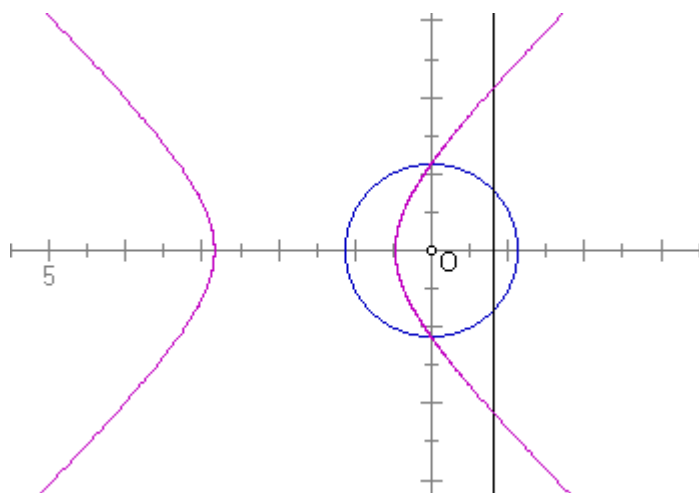
$$= \left(\frac{a \times r}{a - r \cos(\theta + \pi)}, \theta + \pi \right) = \left(\frac{r}{1 - \frac{r}{a} \cos(\theta + \pi)}, \theta + \pi \right)$$

與圓錐曲線標準式 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ 比較可知：

此直線映射後的像為一離心率 $e = \frac{r}{a}$ ，焦點在調和中心且與準線距離為 a 之圖

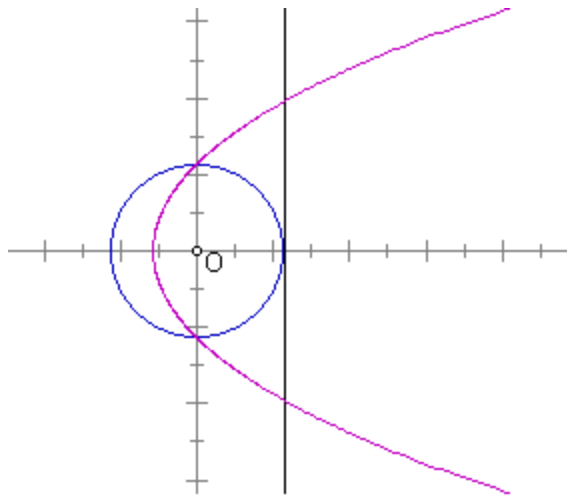
錐曲線。其中， $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$ 為 Q_A 之軌跡， $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 為 Q_B 之軌跡。

① 若 $r > a$ ，則像為雙曲線（圖一）



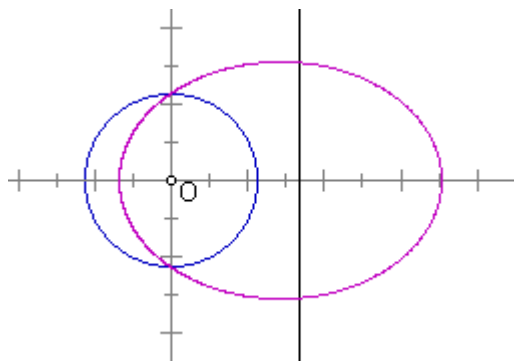
圖一

② 若 $r = a$, 則像為拋物線 (圖二)



圖二

③ 若 $r < a$, 則像為橢圓 (圖三)



圖三

2. 圓的調和變換

本文討論像源之圓通過調和中心時的各種映射情況：設調和中心在極點，調和半徑為 r ，且欲變換之圓的半徑為 a ，則此圓可表為 $\rho = 2a \cos \theta$

$\therefore$ 點 $P(2a \cos \theta, \theta)$ 的像為

$$Q_A : \left(\frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r}, \theta \right)$$

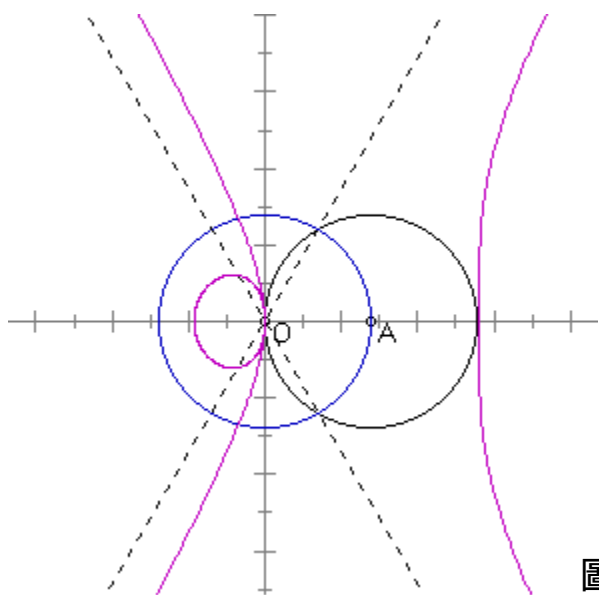
$$\begin{aligned} Q_B : \left(\frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta + r}, \theta + \pi \right) &= \left(\frac{-2ar \cos(\theta + \pi)}{-2a \cos(\theta + \pi) + r}, \theta + \pi \right) \\ &= \left(\frac{2ar \cos(\theta + \pi)}{2a \cos(\theta + \pi) - r}, \theta + \pi \right) \end{aligned}$$

故此圓之像為曲線 $\rho = \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r}$ ，其中

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$ 之部分為 Q_A 之軌跡，

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 之部分為 Q_B 之軌跡。

定理 2-1：當 $a = r$ 時，像集為 $\rho = \frac{2r \cos \theta}{2 \cos \theta - 1}$ (圖四)



(1) $\theta = 0 \Rightarrow \rho = 2r$

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \rho = r + \frac{r}{2 \cos \theta - 1} > 0$

當 θ 遞增時， $2a \cos \theta - 1$ 遞減， $\frac{r}{2 \cos \theta - 1}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

(3) $\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$

$$(4) \quad \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \frac{r}{1-2\cos\theta} < 0$$

當 θ 遞增時, $1-2a\cos\theta$ 遞減, $\frac{r}{1-2a\cos\theta}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

$$(5) \quad \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$$

$$(6) \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r}{1-2\cos\theta} > 0$$

當 θ 遞增時, $1-2a\cos\theta$ 遞增, $\frac{r}{1-2a\cos\theta}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(7) \quad \theta = \pi \Rightarrow \rho = \frac{2r}{3}$$

(8) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射
討論:

(1) 以 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{3}$ 為漸近線

(2) 在 (ρ, θ) 之切線斜率

$$m = \frac{\left(\frac{d\rho}{d\theta} \sin\theta\right) + \rho \cos\theta}{\left(\frac{d\rho}{d\theta} \cos\theta\right) - \rho \sin\theta} = \frac{\frac{2r \sin\theta}{(2\cos\theta-1)^2} \sin\theta + \frac{2r \cos\theta}{2\cos\theta-1} \cos\theta}{\frac{2r \sin\theta}{(2\cos\theta-1)^2} \cos\theta - \frac{2r \cos\theta}{2\cos\theta-1} \sin\theta}$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ 和 $\theta = \frac{5\pi}{3}$ 時不可微分

$\therefore$ 令 $2\cos\theta - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow m = \frac{3\cos^3\theta - 2\cos^2\theta + 1}{\sin 2\theta(1 - \cos\theta)}$$

令 $\sin 2\theta(1 - \cos\theta) = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

則 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 時兩點重疊 Φ

令 $2\cos^3\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

設 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 4x \Rightarrow$ 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 和 $\frac{2}{3}$ 時有反曲

點, 但 $f(0) > 0$, $f(\frac{2}{3}) > 0$, 故只有一實數解。而 $f(-1) < 0$,

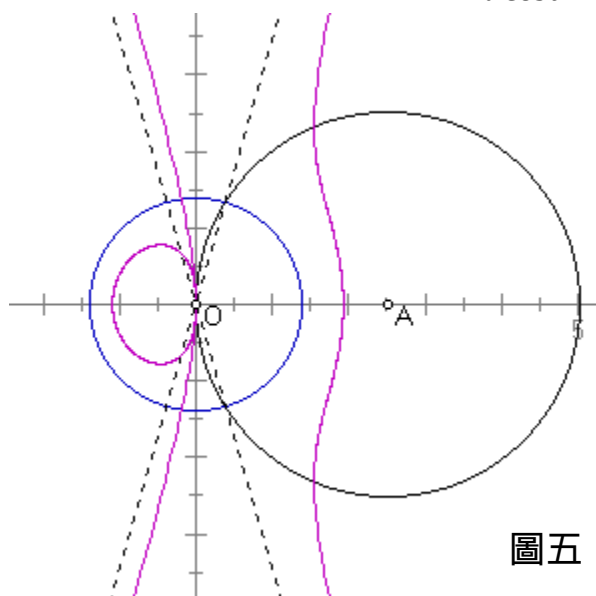
$\therefore f(x) = 0$ 在 -1 和 0 之間有一解, 即 $\cos\theta$ 在 -1 和 0 之間有一解

$\therefore \theta$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之間有二解

○

由知 ○ ○ 知共有 5 個反曲點

定理 2-2：當 $a > r$ 時，像集為 $\rho = \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r}$ (圖五)



圖五

$$(1) \theta = 0 \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{2a - r} \Rightarrow r < \rho < 2a$$

$$(2) 0 < \theta < \cos^{-1} \frac{r}{2a} \Rightarrow \rho = r + \frac{r^2}{2a \cos \theta - r} > 0$$

當 θ 遞增時， $2a \cos \theta - r$ 遞減， $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

$$(3) \theta = \cos^{-1} \frac{r}{2a} \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$$

$$(4) \cos^{-1} \frac{r}{2a} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} < 0$$

當 θ 遞增時， $r - 2a \cos \theta$ 遞增， $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(5) \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$$

$$(6) \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} > 0$$

當 θ 遞增時， $r - 2a \cos \theta$ 遞增， $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(7) \theta = \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r+2a} = \frac{2ar}{r+2a}$$

(8) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射
討論：

(1) 以 $\theta = \cos^{-1} \frac{r}{2a}$ 和 $\theta = 2\pi - \cos^{-1} \frac{r}{2a}$ 為漸近線

(2) 在 (ρ, θ) 之切線斜率

$$m = \frac{\frac{dp}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{dp}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} = \frac{\frac{2ar^2 \sin \theta}{(2a \cos \theta - r)^2} \sin \theta + \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r} \cos \theta}{\frac{2ar^2 \sin \theta}{(2a \cos \theta - r)^2} \cos \theta - \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r} \sin \theta}$$

$$\because \theta = \cos^{-1} \frac{r}{2a} \text{ 和 } 2\pi - \cos^{-1} \frac{r}{2a} \text{ 時不可微分}$$

$$\therefore \text{令 } 2a \cos \theta - r \neq 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r}{\sin 2\theta (r - a \cos \theta)}$$

$$\text{令 } \sin 2\theta (r - a \cos \theta) = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{則 } \theta = 0, \cos^{-1} \frac{r}{a}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi - \cos^{-1} \frac{r}{a}$$

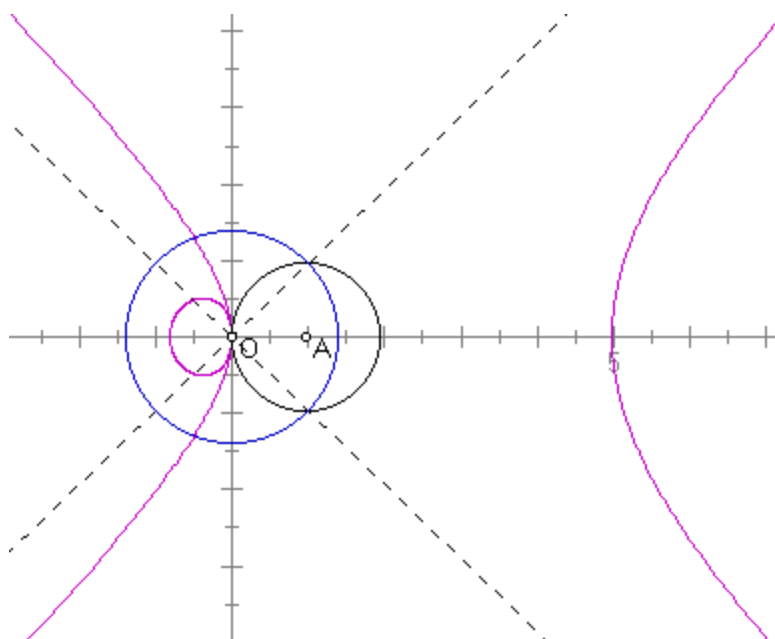
$$\text{其中 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ 時二點重疊} \quad \oplus$$

$$\text{令 } 2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{同定理 3-1 可知 } \theta \text{ 有二解落於和 } \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \frac{3\pi}{2} \text{ 之間} \quad \ominus$$

由 $\oplus \ominus$ 知共有 7 個反曲點

定理 2-3：當 $\frac{r}{2} < a < r$ 時像集為 $\rho = \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r}$ (圖六)



圖六

$$(1) \theta = 0 \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{2a-r} \Rightarrow \rho > 2a$$

$$(2) 0 < \theta < \cos^{-1} \frac{r}{2a} \Rightarrow \rho = r + \frac{r^2}{2a \cos \theta - r} > 0$$

當 θ 遞增時, $2a \cos \theta - r$ 遞減, $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

$$(3) \theta = \cos^{-1} \frac{r}{2a} \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$$

$$(4) \cos^{-1} \frac{r}{2a} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} < 0$$

當 θ 遞增時, $2a \cos \theta - r$ 遞減, $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞增 $\therefore \rho$ 遞增

$$(5) \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$$

$$(6) \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} > 0$$

當 θ 遞增時, $2a \cos \theta - r$ 遞增, $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(7) \theta = \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r + 2a} = \frac{2ar}{r + 2a}$$

(8) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射
討論:

$$(1) \text{以 } \theta = \cos^{-1} \frac{r}{2a} \text{ 和 } \theta = 2\pi - \cos^{-1} \frac{r}{2a} \text{ 為漸近線}$$

(2) 同 (2) 理 知在 (ρ, θ) 之切線斜率

$$m = \frac{2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r}{\sin 2\theta(r - a \cos \theta)}$$

$$\text{令 } \sin 2\theta(r - a \cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\because r > a \quad \therefore r - a \cos \theta > 0$$

$$\text{故 } \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{其中 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ 時二點重疊} \quad \Phi$$

$$\text{令 } 2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{設 } f(x) = 2ax^3 - 2rx^2 + r \Rightarrow f'(x) = 6ax^2 - 4rx$$

$$\Rightarrow \text{令 } f'(x) = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 和 } \frac{2r}{3a} \text{ 時有反曲點, 其中 } \frac{2}{3} < \frac{2r}{3a} < \frac{4}{3},$$

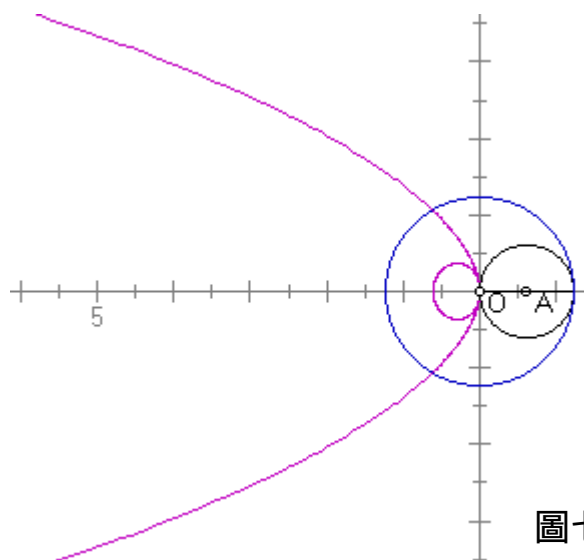
$$\text{且 } f(0) > 0, \quad f\left(\frac{2r}{3a}\right) < 0, \text{ 故 } f(x) = 0 \text{ 有三個實數解}$$

但 $f(-1) < 0$, $f(1) = 2a - r > 0$,
 $\therefore f(x) = 0$ 在 -1 和 0 之間有一解 , 但在 1 和 0 之間無實數解 ,
 故 $\cos \theta$ 在 -1 和 0 之間有一解 ,

$\therefore \theta$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之間有二解 $\circ$

由 $\circ$ $\circ$ 知共有 5 個反曲點

定理 2-4 : 當 $a = \frac{r}{2}$ 時 , 像集為 $\rho = \frac{r \cos \theta}{\cos \theta - 1}$ (圖七)



(1) $\theta = 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$

(2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = r - \frac{r}{1 - \cos \theta} < 0$

當 θ 遞增時 , θ 遞增 , $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

(3) $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$

(4) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r}{1 - \cos \theta} > 0$

當 θ 遞增時 , $2a \cos \theta$ 遞增 , $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

(5) $\theta = \pi \Rightarrow \rho = \frac{r}{2}$

(6) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射

討論：

(1) 無漸近線

(2) $\theta = 0$ 時不可微分 令 $\cos \theta - 1 \neq 0$

$\therefore$ 在 $(0, \theta)$ 之切線斜率

$$m = \frac{r \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r}{\sin 2\theta(r - \frac{r}{2} \cos \theta)} = \frac{\cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + 1}{\sin 2\theta(1 - \frac{1}{2} \cos \theta)}$$

$$\text{令 } \sin 2\theta(1 - \frac{1}{2} \cos \theta) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \text{ 其中 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \frac{3\pi}{2} \text{ 時二點重疊} \quad \Phi$$

$$\text{令 } \cos^3 \theta - 2\cos^2 \theta + 1 = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

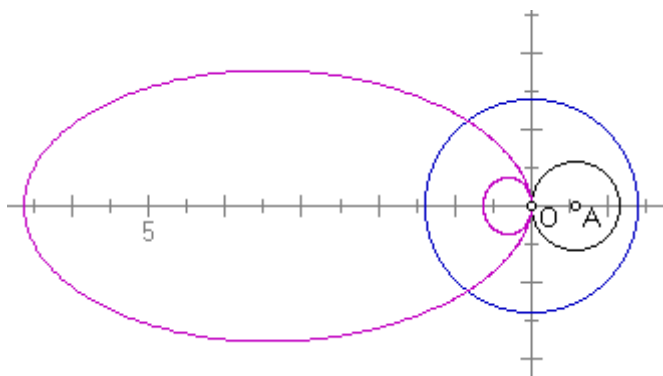
$$\Rightarrow (\cos \theta - 1)(\cos^2 \theta - \cos \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ or } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (不合)}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ or } 2\pi - \cos^{-1} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \Phi$$

由 Φ Φ 知共有 5 個反曲點

定理 2-5： 當 $0 < a < \frac{r}{2}$ 時，像集為 $\rho = \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r}$ (圖八)



圖八

$$(1) \theta = 0 \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{2a - r} \Rightarrow \rho < 0$$

$$(2) 0 < \theta < 2\pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} < 0$$

當 θ 遞增時， $2a \cos \theta$ 遞增， $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(3) \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = 0$$

$$(4) \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow \rho = r - \frac{r^2}{r - 2a \cos \theta} > 0$$

當 θ 遞增時, $2a \cos \theta$ 遞增, $\frac{r^2}{2a \cos \theta - r}$ 遞減 $\therefore \rho$ 遞增

$$(5) \theta = \pi \Rightarrow \rho = \frac{2ar}{r + 2a}$$

(6) $\pi < \theta < 2\pi$ 之圖形為 $0 < \theta < \pi$ 之圖形對極軸之映射

討論:

(1) 無漸近線

(2) 在 (ρ, θ) 之切線斜率

$$m = \frac{\frac{dp}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta}{\frac{dp}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta} = \frac{\frac{2ar^2 \sin \theta}{(2a \cos \theta - r)^2} \sin \theta + \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r} \cos \theta}{\frac{2ar^2 \sin \theta}{(2a \cos \theta - r)^2} \cos \theta - \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r} \sin \theta}$$

$$\because a < \frac{r}{2} \quad \therefore 2a \cos \theta - r \neq 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r}{\sin 2\theta (r - a \cos \theta)}$$

$$\text{令 } \sin 2\theta (r - a \cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\because r > a \quad \therefore r - a \cos \theta > 0$$

$$\text{故 } \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 時二點重疊 Φ

$$\text{令 } 2a \cos^3 \theta - 2r \cos^2 \theta + r = 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{設 } f(x) = 2ax^3 - 2rx^2 + r \Rightarrow f'(x) = 6ax^2 - 4rx$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ 和 } \frac{2r}{3a} \text{ 時有反曲點, 其中 } \frac{2r}{3a} > \frac{4}{3},$$

且 $f(0) > 0$, $f(\frac{2r}{3a}) < 0$, 故 $f(x) = 0$ 有三個實數解

$$\text{但 } f(-1) < 0, \quad f(1) = 2a - r < 0,$$

$\therefore f(x) = 0$ 在 0 和 -1 之間與 0 和 1 之間各有一解

故 $\cos \theta$ 在 0 和 -1 之間與 0 和 1 之間各有一解,

$\therefore \theta$ 在 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{3\pi}{2}$ 之間各有二解 Φ

由 Φ 知共有 7 個反曲點

3. 圓錐曲線的調和變換

在此本文討論像源之圓錐曲線的焦點位於調和中心之情況。

定理 3：一條焦點在調和中心的圓錐曲線映射成兩條圓錐曲線或一直線和一條圓錐曲線。

設調和中心在極點，調和半徑為 r ，且像源之圓錐曲線的離心率為 e ，焦點至準線

之距離為 p 。則此圓錐曲線可表 $\rho = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$ ，故點 $P \left(\frac{ep}{1 - e \cos \theta}, \theta \right)$ 的像為

$$Q_A : \left(\frac{\frac{ep}{1 - e \cos \theta} \times r}{\frac{ep}{1 - e \cos \theta} - r}, \theta \right) = \left(\frac{epr}{ep - r + re \cos \theta}, \theta \right)$$

(1) 若 $r \neq ep$

$$\text{則 } Q_A : \left(\frac{\frac{epr}{ep - r}}{1 + \frac{re}{ep - r} \times \cos \theta}, \theta \right) = \left(\frac{\left(\frac{-re}{ep - r} \right) (-p)}{1 - \left(\frac{-re}{ep - r} \right) \times \cos \theta}, \theta \right)$$

(2) 若 $r = ep$

$$\text{則 } Q_A : \left(\frac{p}{\cos \theta}, \theta \right)$$

$$Q_B : \left(\frac{\frac{ep}{1 - e \cos \theta} \times r}{\frac{ep}{1 - e \cos \theta} + r}, \theta + \pi \right) = \left(\frac{\frac{ep}{1 + e \cos(\theta + \pi)} \times r}{\frac{ep}{1 + e \cos(\theta + \pi)} + r}, \theta + \pi \right)$$

$$= \left(\frac{\frac{epr}{ep + r + re \cos(\theta + \pi)}}{1 + \frac{re}{ep + r} \cos(\theta + \pi)}, \theta + \pi \right) = \left(\frac{\frac{epr}{ep + r}}{1 + \frac{re}{ep + r} \cos(\theta + \pi)}, \theta + \pi \right)$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{-re}{ep + r} \right) (-p)}{1 - \left(\frac{-re}{ep + r} \right) \cos(\theta + \pi)}, \theta + \pi \right)$$

與圓錐曲線標準式比較可知：

若 $r \neq ep$ ：

Q_B 的軌跡為一離心率為 $\frac{-re}{ep+r}$ ，焦點與準線距離為 $-p$ （和原來反向）

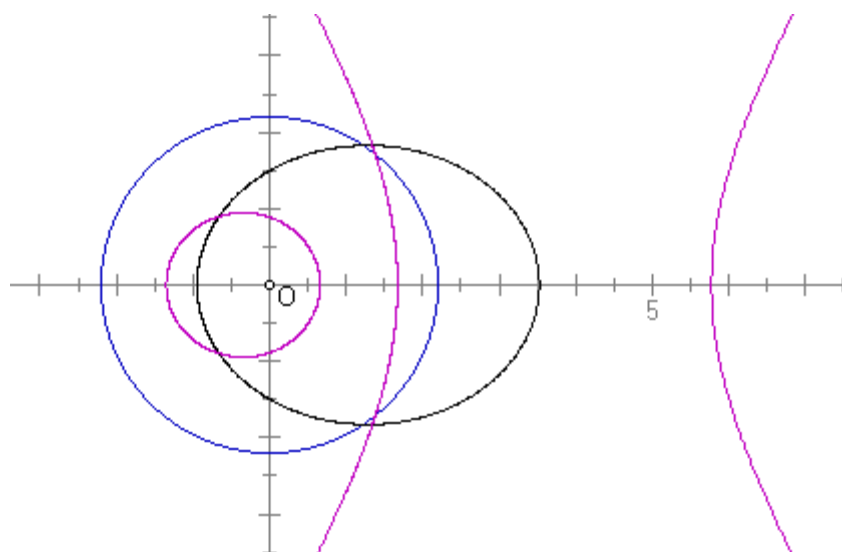
之圓錐曲線。 Q_A 的軌跡為一離心率為 $\frac{-re}{ep-r}$ ，焦點與準線距離為 $-p$

（和原來反向）之圓錐曲線（圖九）。

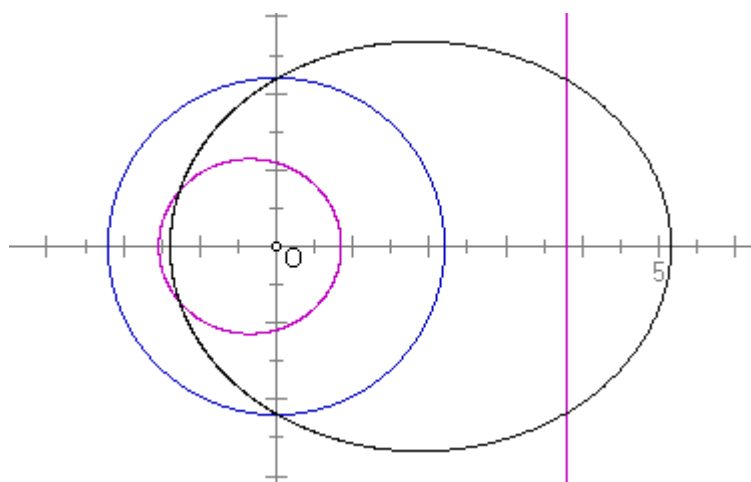
若 $r = ep$ ：

Q_B 的軌跡為一離心率為 $\frac{-re}{ep+r}$ ，焦點與準線距離為 $-p$ （和原來反向）

之圓錐曲線。 Q_A 的軌跡為距調和中心 p 的一直線（圖十）。

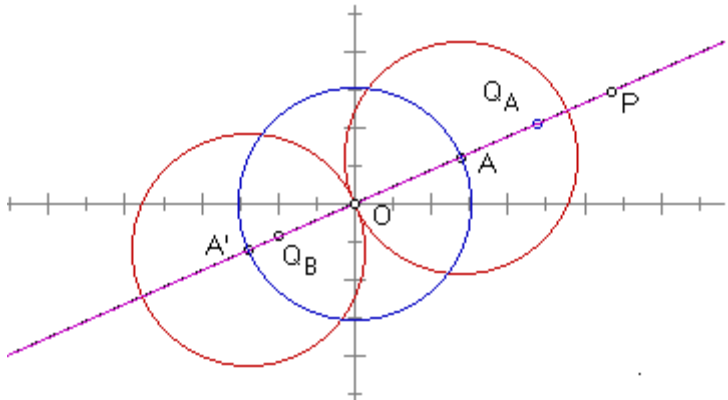


圖九



圖十

4. 調和變換與反演變換的關係



圖十一

定理四：設調和中心為 O ，調和半徑為 r 。作 P 與 O 的連線交參考圓於 A, A' （設 $\overline{PA'} > \overline{PA}$ ），以 A, A' 為圓心， r 為半徑作圓 A 和圓 A' ，若以此二圓為反演變換的參考圓，則 P 分別對圓 A 與圓 A' 作反演變換所得的像即為 P 對圓 O 作調和變換所得的兩個像 Q_A 及 Q_B （參考圖十一）

證明：依反演變換的定義可知

$$\overline{AQ_A} \times \overline{AP} = r^2$$

$$\Rightarrow (\overline{OQ_A} - r)(\overline{OP} - r) = r^2$$

$$\Rightarrow \overline{OQ_A} \times \overline{OP} - r(\overline{OQ_A} + \overline{OP}) + r^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \overline{OQ_A} \times \overline{OP} = r(\overline{OQ_A} + \overline{OP})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ_A}} = \frac{1}{r} \quad \phi$$

$$\text{同理可得 } \frac{1}{\overline{OP}} - \frac{1}{\overline{OQ_B}} = \frac{1}{r} \quad \ominus$$

由 ϕ $\ominus$ 知得證。

五、結論與應用

1. 結論：設調和半徑為 r ：

（1）調和變換可以把通過調和中心的直線映射成原直線。

- (2) 調和變換可以把不通過調和中心的直線映射成圓錐曲線：
 當直線與調和中心距離大於 r 時，映射形為雙曲線；
 當直線與調和中心距離等於 r 時，映射形為拋物線；
 當直線與調和中心距離小於 r 時，映射形為橢圓。
- (3) 調和變換可以把通過調和中心且半徑為 a 的圓映射成曲線

$$\rho = \frac{2ar \cos \theta}{2a \cos \theta - r} :$$

當 $a > \frac{r}{2}$ 時，圖形有漸近線；

當 $0 < a \leq \frac{r}{2}$ 時，圖形無漸近線。

- (4) 調和變換可以把以調和中心為焦點的圓錐曲線映射成兩條圓錐曲線或一條圓錐曲線和一直線。
- (5) 圖形經調和變換可視為一系列反演變換後所得像之集合。

2. 應用：

因為天體運動的軌跡是圓錐曲線，而直線的調和變換圖形也是圓錐曲線，因此這個調和變換研究在應用上也就露出一道曙光！在老師的建議下，我們利用了調和變換證明行星的運動軌道為圓錐曲線：

證明：建立一極坐標系，設行星位置為 $(X(t), \theta(t))$ (表 X 、 θ 為時間之函數)。
 經由一個圓心在極點且半徑為 r 的參考圓作調和變換後得到的 Q_A 像為

$$\left(\frac{X(t) \times r}{X(t) + r}, \theta(t) \right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{r} - (X(t))^{-1}}, \theta(t) \right)$$

由前面的討論我們知道：若取適當長度為參考圓半徑，則所有不通過調和中心的圖形中只有圓錐曲線的 Q_A 像軌跡能被映射成一直線。於是我們希望

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{r} - (X(t))^{-1}}, \theta(t) \right) \text{ 可以表為 } \left(\frac{1}{\beta \cos(\theta - \alpha)}, \theta \right) \text{ 之形式。令 } k = \frac{1}{r}, \text{ 即希望}$$

$(k - (X(t))^{-1}, \theta(t))$ 可表為 $(\beta \cos(\theta - \alpha), \theta)$ 之形式。也就是

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (k - (X(t))^{-1}) + (k - (X(t))^{-1}) = 0。$$

為了簡化計算，令 GMm 為 1。

由角動量守恆： $X^2 \omega = C \Rightarrow X^2 \frac{d\theta}{dt} = C \dots\dots\dots \Phi$

位能：由 $W = FS$ 得 W (位能) $= \int \frac{1}{X^2} dx = -\frac{1}{X}$ ；

切線速度： $X\omega = X \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{X}$ (由 Φ)；法線速度： $\frac{dX}{dt}$

由能量守恆： $\frac{-1}{X} + \frac{1}{2}((\frac{C}{X})^2 + (\frac{dX}{dt})^2) = E \dots\dots\dots \circ$

$$\frac{d}{d\theta}(k - (X(t))^{-1}) = \frac{\frac{d}{d\theta}X}{X^2} = \frac{\frac{dt}{d\theta} \cdot \frac{d}{dt}X}{X^2} = \frac{\frac{X^2}{C} \cdot \frac{d}{dt}X}{X^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt}X \quad (\text{由 } \Phi)$$

$\circ$ 兩邊對 θ 微分：

$$\frac{\frac{d}{d\theta}X}{X^2} + \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{2}(\frac{C}{X})^2 + \frac{1}{2}(\frac{d}{dt}X)^2) = \frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt}X - \frac{C^2 \frac{d}{d\theta}X}{X^3} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X) \cdot \frac{d}{dt}X = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt}X - \frac{C^2 \cdot \frac{X^2}{C} \cdot \frac{d}{dt}X}{X^3} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X) \cdot \frac{d}{dt}X = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{C}{X} + \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{dt}X) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt}X) = -(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{X})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}(\frac{d}{d\theta}(k - (X(t))^{-1})) = \frac{d^2}{d\theta^2}(k - (X(t))^{-1}) = -(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{X})$$

若取 $r = C^2$ ，即 $k = \frac{1}{C^2}$

$$\text{則 } \frac{d^2}{d\theta^2}(k - (X(t))^{-1}) + (k - (X(t))^{-1}) = -(k - \frac{1}{X}) + (k - \frac{1}{X}) = 0$$

故得證行星運動軌道為圓錐曲線。

六、參考文獻

1. 軌道力學導論 / 沈長庚 著 / 國立編譯館
2. 台灣省台南一中第六屆數理資優班專題研究作品及經驗傳承彙編 / 台灣省立台南第一高級中學編印