

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-物理科

科 別：物 理 科

組 別：高 中 組

作品名稱：毛細管內液體流速之探討及黏度測量方法之創新

關 鍵 詞：毛細管、流速、黏度

編 號：040117

學校名稱：

臺北市立麗山高級中學

作者姓名：

林凡又、鄭雨軒、林虹君

指導老師：

陳聲台



毛細管內液體流速之探討

及黏度測量方法之創新

壹、 研究動機

有一次上實驗課時看到鄰桌的同學正以實驗室的毛細管吸吮一瓶葡萄汁，每當他吞嚥時，毛細管內殘餘的葡萄汁竟然以近似等速的狀態降回果汁瓶裡，這似乎違背了重力加速度的常理，是毛細管的影響嗎？還是葡萄汁特有的現象？這與毛細管插入葡萄汁的深度有關嗎？

後來在資優科學營中我選擇研究以毛細管測量液體黏度的實驗，並且在學校選修的專題課程中即以此為題目做長期的研究，毛細管中液體的流速真是固定的嗎？重力不會影響流速嗎？若流速真為固定的，如何控制或改變流速呢？是否可以利用流速來測出液體黏度呢？

經過長期地研究及動手實驗改進，我們利用毛細管中液體的等速及不等速流動的特性，發展出了兩種既精簡又準確的液體黏度測量法，以下就是整個研究及創作的過程。

貳、 研究目的

- 一、 研究液體黏度對毛細管內液體流速的影響
- 二、 詳細討論目前實驗室中毛細管黏度測量法之優缺點
- 三、 研究在垂直毛細管中利用重力測量液體速度及黏度的方法
- 四、 發展自創的重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計
- 五、 研究液體內微小深度差之壓力變化的測量法
- 六、 發展自創的連續可變液位差式毛細管黏度計

參、 研究器材

- 一、 自製完成的器材
 - (一)、 傾斜角度連續可調式毛細管支座
 - (二)、 重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計
 - (三)、 微壓力變化的感測器之實驗設備

(四)、連續可變液位差式毛細管黏度計

(五)、自動計時、溫度感測、液位差電壓顯示電路

肆、文獻探討

一、水平毛細管內之液體流速

(一)、理想流體

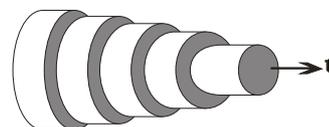
對於不可壓縮、不計黏性的理想流體而言，在水平置放的毛細管中連續流動特性，我們可以引用白努利方程(Bernoulli's equation)來描述，即

$$P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const} \quad (1)$$

白努利定律可視為流體的機械能守恆定律。


$$\Delta P = P_1 - P_2 = 0 \quad (2)$$

上式明確表示欲使理想流體在水平毛細管中維持穩定等速流動是不須壓力差的，正如同物體在光滑平面上等速直線運動是不須施加外力的，物體的機械能是守恆的。

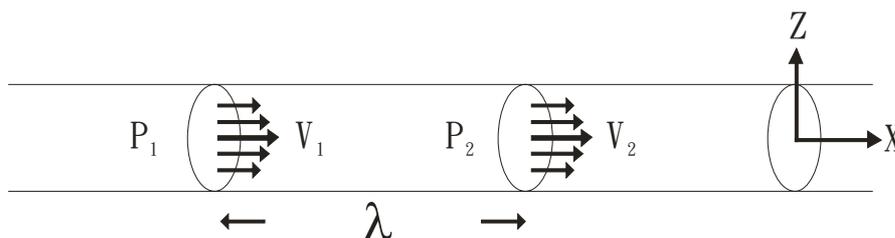


(二)、非理想流體

真實的流體因為具有黏性，在流速不大的情況下會形成如上圖所示的層流，各薄層之間互相以剪應力 τ 作用，所以在層與層之間造成了速度梯度

度 $\frac{dv}{dz}$ ，

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dz} \quad (3)$$



波塞尼勒(Poiseuille)以研討血管內血液流動為目的，而專門致力於細

圓管內液體流速之研究，他在文獻中提出了下列關係式

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{\lambda} \frac{\pi r^4}{8\eta} \quad (4)$$

水平細圓管中形成的穩定層流流體的平均流速為

$$v = \frac{r^2(P_1 - P_2)}{8\eta\lambda} \quad (5)$$

若欲維持固定的流速，則在流動方向上必須保持恆定不變的壓力梯度，即必須保持

$$\frac{P_1 - P_2}{\lambda} = \text{非零的常數} \rightarrow v \text{ 為等速度} \quad (6)$$

必須施予物體一固定的水平力與摩擦力平衡以維持等速度運動的道理一樣，壓力差 $P_1 - P_2$ 可視為驅策流體的動力，它也是流體因黏滯摩擦而造成的能量損失 ΔP_{visc} 。

因此對於具有黏性的真實流體在水平細圓管中流動時，白努利定律可以和波塞尼勒定律合併為

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta P_{visc} \quad (7)$$

水平細圓管 $\therefore h_1 = h_2$ ， $v_1 = v_2$ ，再結合(5)式可得

$$\Delta P_{visc} = P_1 - P_2 = \frac{8\eta\lambda v}{r^2} \quad (8)$$

(三)、雷諾數

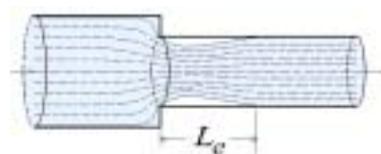
雷諾(Reynolds)曾經定義一個無因次的物理量 N_R

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (9)$$

其中 D 為圓管直徑，當 N_R 小於2000時管中液體可以形成穩定層流。

(四)、接口效應

在容器或粗管與毛細管入口(或出口)接續時因管徑忽然變窄(或變寬)，流體的速度分佈必須進入管口一段距離才能逐漸穩定而形成層流，依參考資料(7)可知此段過度長度 L_e 為



$$\frac{L_e}{D} = 0.035 \frac{\rho v D}{\eta} = 0.035 N_R \quad (10)$$

由此式知 L_e 與 D^2 成比例，所以降低管徑就能有效降低此段非穩流的過度長度。

(五)、以水平毛細管測量液體黏度

$$\eta = \frac{\pi}{8} r^4 \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{t}{V} \quad (11)$$

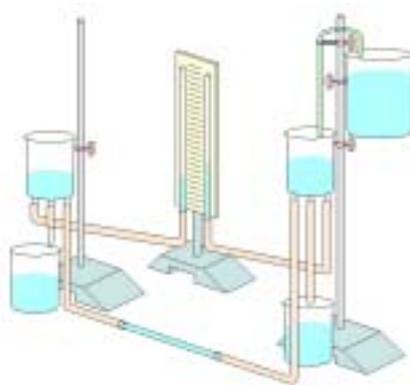
二、毛細管測量液體黏度實驗的回顧與檢討

(一)、實驗裝置(見附圖，照片略)

(二)、實驗步驟(流程圖略)

(三)、實驗結果與檢討分析

1. 流體流速和毛細管內徑有關，內徑若不均勻，流速將受極大的影響，在(11)式中內徑以4次方出現，若其誤差有2%，那麼對黏度測量將造成8%的誤差。
2. 待測液體在兩容器的出水管口因表面張力的影響，形成高出液面一段距離才忽然流入燒杯，然後液位又下降，又漲高..，這樣循環的結果使壓力差非常不穩定，管中水流根本無法穩定下來！不要忘記poiseuille定理是在流速穩定的條件下推導而得，在毛細管中流速不斷波動下所測量得的實驗數據當然無法完全符合依據poiseuille定理計算所得之理論值！這是本實驗結構性誤差的來源。



一、鉛直毛細管內液體流速之探討

我們假設毛細管內液體已發展成穩定的層流，且每一條流線上的流速是固定的，我們在液柱內考慮任意長 λ 、半徑為 z 的一小段液體圓柱，它與毛細管液柱是共軸心的。

小圓柱受到向下的力大小為

$$F_{\downarrow} = P_1(\pi z^2) + \rho(\pi z^2)\lambda g \quad (12)$$

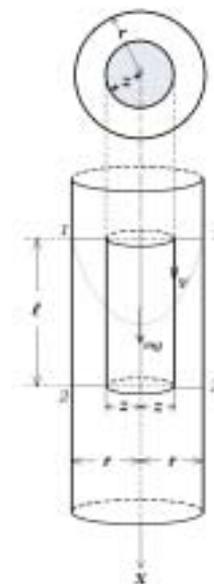
若液體是牛頓流體，剪應力為

$$\tau = \frac{F}{A} = -\eta \frac{dv}{dz} \quad (13)$$

小圓柱側表面受到黏滯阻力為

$$\tau A = -\eta \frac{dv}{dz} (2\pi z \lambda) \quad (14)$$

小圓柱受到向上的力大小為



$$F_{\perp} = P_2(\pi z^2) - 2\pi z\lambda\eta \frac{dv}{dz} \quad (15)$$

既然已假設液柱是等速流動，故小圓柱的淨外力為零

$$\sum F_x = F_{\downarrow} - F_{\perp} = (P_1 - P_2 + \rho\lambda g)\pi z^2 + 2\pi z\lambda\eta \frac{dv}{dz} = 0 \quad (16)$$

令 $P_1 - P_2 = \Delta P$ ，化簡上式並將變數分離得

$$dv = \frac{-[\Delta P + \rho\lambda g]}{2\eta\lambda} z dz \quad (17)$$

分別積分上式左右項得

$$v = \frac{-(\Delta P + \rho g\lambda)}{4\eta\lambda} z^2 + C \quad (18)$$

令 $z = r$ 處 $v = 0$ ，可求得積分常數

$$C = \frac{\Delta P + \rho g\lambda}{4\eta\lambda} r^2 \quad (19)$$

故由軸心 ($r = 0$) 至管壁 ($r = z$) 的液體流速可表示為

$$v = \frac{\Delta P + \rho g\lambda}{4\eta\lambda} (r^2 - z^2) \quad (20)$$

上式是拋物線的數學形式，在液柱軸心處流速最大，為

$$v_{(z=0)} = v_{\max} = \frac{\Delta P + \rho g\lambda}{4\eta\lambda} r^2 \quad (21)$$

由於液柱內是連續流體，每單位時間內通過管柱內任一橫截面的液體總體

積是相同的， $Q = \frac{dV}{dt} = \frac{V}{t} = \text{常數}$

現在我們考慮半徑為 Z 至 $Z + dz$ 的環狀截面上的體積流動率 dQ

$$dQ = v(2\pi z) dz = \frac{(\Delta P + \rho g\lambda)}{4\eta\lambda} (r^2 - z^2) (2\pi z) dz \quad (22)$$

將上式左右分別積分可得液柱橫截面的總體積流動率：

$$\int dQ = \frac{\pi(\Delta P + \rho g\lambda)}{2\eta\lambda} \int_0^r (r^2 z - z^3) dz \quad (23)$$

$$Q = \frac{\pi r^4 (\Delta P + \rho g\lambda)}{8\eta\lambda} \quad (24)$$

若毛細管內液柱總長為 L 而 ΔP 為毛細管液柱的總壓差即

$$Q = \frac{\pi r^4 (\Delta P + \rho gL)}{8\eta L} \quad (25)$$

大多數時候，我們較關心的是液柱的平均流速 v_{av}

$$Q = \frac{dV}{dt} = \pi r^2 v_{av} \quad (26)$$

比較以上兩式可得毛細管內液體的平均流速為

$$v_{av} = \frac{\Delta P + \rho g L}{8\eta L} r^2 \quad (27)$$

由此式可知平均流速為軸心最大流速之半，為方便計算，此後我們仍以符號 v 代表平均流速而捨 v_{av} 不用。

探討與歸納：

1. 若將毛細管平置，則液柱的重量在液體流動方向沒有分力，以上推導中(12)式的 $\rho g \lambda$ 一項即可剔除，那麼

$$Q = \frac{\pi^4 \Delta P}{8\eta L} \quad (28)$$

此即為在科學營實驗時所用的 Hagen-Poiseuille 方程式。而管內平均流速應為

$$v = \frac{r^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (29)$$

由上式可看出想要有穩定不變的流速，毛細管液柱必須有穩定不變的壓力差 ΔP 才辦得到，這正是前述毛細管黏度實驗的重大致命傷及不易克服的困難。

2. 我們若能設法使垂直的毛細管中流動液柱兩端的壓力差為零，即 $\Delta P = 0$ 那麼由(25)式知液柱的平均流速變成

$$v = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \quad (30)$$

您注意到了嗎?對於固定的管徑及流體而言，上式右側各項皆為常數，如此 v 亦為常數，管中液體是以等速流動的！ v 竟然與 L 無關，即流速與管內尚有多長的液柱無關！太好了！這樣一來我們只須精確地測量液柱流速就可利用(30)式的關係求出液體黏度!再也不必費心於毛細管兩端的壓力差是否穩定了。

3. 我們可以將液體吸入毛細管至頂端後以拇指壓住頂部管口，毛細管底部則微微插入內盛相同液體之廣口淺盤的液面下，當拇指放開後由於液柱頂部及底部壓力皆近乎為大氣壓力，其壓差 $\Delta P \approx 0$ ，故液體只在開始時有短暫之加速，瞬即進入等速流動狀態。
4. 毛細管內液柱因表面張力影響會有一段自然上升的高度 y ，當液柱由上而下流

至接近此高度時又會逐漸減速至零而停在該定點上。

5. 液柱流動最初的加速期及最末減速期目前都不是我們所關心的，因為這可以是另一個階段研究的題目，我們只要能精確地測出等速期間液柱的流速 v （詳見實驗過程）就可以利用(30)式精準地算出液體的黏度 η ，此刻

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \quad (31)$$

6. 當測量低黏度液體時，由於流速過快，我們可以將毛細管斜置，在斜置毛細管中液體平均流速為

$$v = \frac{\rho g r^2}{8\eta} \sin \alpha \quad (32)$$

只要斜角 α 固定，那麼流速仍然為定值，而液體黏度則為

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha \quad (33)$$

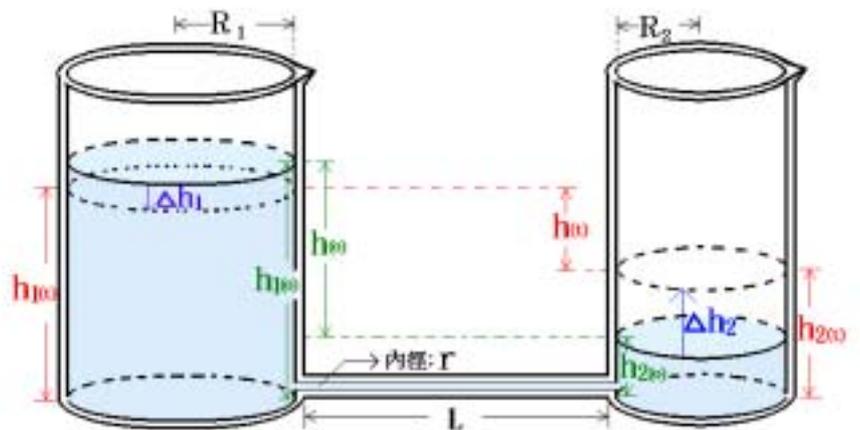
在實驗操作時只要逐漸減小傾斜角 α 就可以有效降低流速直到方便測量流速為止，如此一來低黏度液體亦能藉著測其流速而求出黏度了，酷... 多麼簡單優美的測量方法！。

哇塞! ...酷... 多麼簡單優美的測量方法!

二、 壓力差緩變下的水平毛細管流速

在前述水平毛細管實驗中我們一直致力於調整兩定高容器的液位差並且力求此液位差的穩定而不可得，毛細管兩端壓力差仍

然不停地無規則性地波動著，由於兩定高容器中的出水口的”滴流”狀況始終無法改善，使我們興起捨棄定高容器不用的念頭，我們重新思考新的做法，並且將系統簡化成如下圖的模式。



上圖為半徑各為 R_1 、 R_2 的兩圓柱型容器，內盛裝待測液體，底部以長為 λ ，

內徑為 r 的水平毛細管互相連通，最初左端液位較右端高出 $h_{(0)}$ ，由於毛細管中液體持續流動使得兩容器的液位差 h 隨著時間而漸小，所以我們可以將其寫成與時間有關的型式

$$h = h_{(t)} = h_{1(t)} - h_{2(t)} \quad (34)$$

若毛細管內徑遠小於兩容器之內徑，即 $r \ll R_1$ 、 $r \ll R_2$ ，由流體連續方程式可知兩容器中液體的流速將遠小於毛細管的流速，因此任取一段短時間來看兩容器的液面，沒有明顯的上升或下降，都是近乎靜止的，如此毛細管兩端的壓力可來自兩容器底部液體的靜壓力，即

$$P_{1(t)} = \rho g h_{1(t)} + P_0, \quad P_{2(t)} = \rho g h_{2(t)} + P_0$$

式中 P_0 為當時的大氣壓力，而在毛細管兩端將產生一項隨時間緩慢變化的壓力梯度 $G_{(t)}$ ，由(34)式知

$$G_{(t)} = \frac{\rho g h_{(t)}}{\lambda} = \frac{\Delta P_{(t)}}{\lambda} \quad (35)$$

若毛細管半徑十分細小，其中液體流速 v 也甚小，使得其雷諾數能夠充分滿足

$$N_R = \frac{2\rho v r}{\eta} \ll 2000$$

在這樣緩慢的流速(creeping)下，任一段短時間內毛細管兩端的平均壓力差及管內平均流速幾可視為定值

$$Q_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta\lambda} \Delta P_{(t)} = \frac{\pi r^4}{8\eta\lambda} \rho g h_{(t)} \quad (36)$$

$$Q_{(t)} = -\frac{dV_1}{dt} = -\pi R_1^2 \frac{dh_{1(t)}}{dt} \quad (37)$$

對(34)式微分可得左右兩容器液位差變動率 $\frac{dh_{(t)}}{dt}$ 為

$$\frac{dh_{(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} [h_{1(t)} - h_{2(t)}] = \frac{d}{dt} h_{1(t)} - \frac{d}{dt} h_{2(t)} \quad (38)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \frac{dh_1}{dt} \quad (39)$$

將上式結果代入(38)式可得

$$\frac{dh_{(t)}}{dt} = \left(\frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \right) \frac{dh_{(t)}}{dt} \quad (40)$$

結合(36)(37)(40)三式可得

$$\pi \frac{(R_1 R_2)^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{dh_{(t)}}{dt} = \frac{-\pi r^4}{8\eta L} \rho g h_{(t)} \quad (41)$$

將上式變數分離得

$$\frac{dh_{(t)}}{h_{(t)}} = \frac{-\rho g r^4 (R_1^2 + R_2^2)}{8\eta L (R_1 R_2)^2} dt \quad (42)$$

為簡化問題，我們可以選用兩個完全相同的容器即 $R_1 = R_2 = R$ ，我們使用積分

公式 $\int \frac{du}{u} = \lambda n |u| + C$ 對上式積分，並且令 $h_{(t=0)} = h_{(0)}$ 可得

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{\frac{-\rho g r^4}{4\eta L R^2} t} \quad (43)$$

上式的意義為：當毛細管流速極緩慢時，左右容器的液位差 $h_{(t)}$ 將會由初液位差 $h_{(0)}$ 開始隨著時間的增長呈現指數型衰減的情形，左容器液位逐漸降低而右容器的液位漸升，若 $r \ll R$ 的關係成立，那麼需要相當長(近忽無限長)的時間，兩容器的液位才會趨於一致。

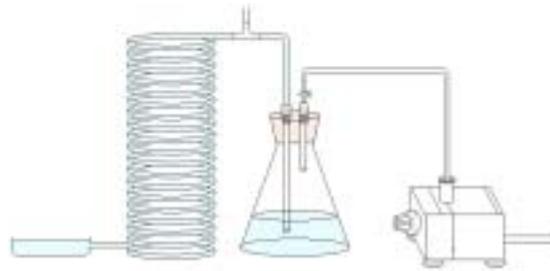
我們若將(43)左右同除 $h_{(0)}$ ，且兩邊同時取 λn 函數，可求得待測液黏度為

$$\eta = -\left(\frac{\rho g r^4}{4LR^2} \right) (t) / \lambda n \frac{h_{(t)}}{h_{(0)}} \quad (44)$$

由於毛細管兩端的壓力差(上式之 $h_{(t)}$)變化極為緩慢，完全不會有壓力差波動的問題產生，因此運用 poiseille 定律計算的理論與所測量之液體黏度可以十分吻合。

我們只要在毛細管開始流通後，任意定一起始時間 $t = 0$ ，並紀錄當時的左右液位差 $h_{(0)}$ ，經過一段時間 t 後，再度紀錄當時的液位差 $h_{(t)}$ ，將這兩組數據 $[0, h_{(0)}]$ ， $[t, h_{(t)}]$ 代入(44)式即可精確求得液體黏度了，就這麼簡單！好用吧！從此再也不需供水槽、不需虹吸管、不需點滴流量調整器、不需三個出水口的定

高容器、不需底部盛水燒杯、不需總長達 2 公尺的各式橡皮接管、不需秤液體重量、不需測量體積、不需擔心液位波動的問題……哇! ...酷...! 太好用了!



伍、 實驗器材研製

- 一、 傾斜角度連續可變式毛細管支座
- 二、 自創的重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計

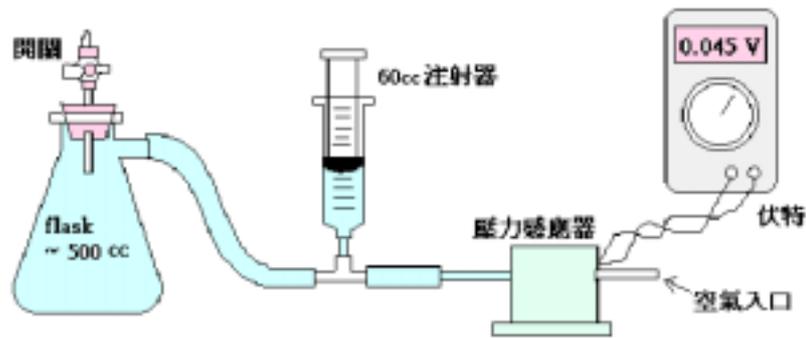
(一)、 製作原因:

長毛細管配合傾斜角度連續可變式支座實際使用及操做時發生許多麻煩與困擾，整個機座實在太大了，這項要命的缺點使我們在實測過程中不慎弄斷了3根毛細管! 我們在一起討論許多次，大家都認為若能將毛細管旋轉起來，像是旋轉式樓梯一樣向上盤旋就可以大為減少器材體積，提高空間使用率，更重要的是方便於測量與操作。

- 三、 微壓力感測器之運用及其校正儀製作

(一)、 製作過程

1. 想要感測液體深度我們曾考慮過使用超音波液位探知器，或是雷射干涉術來測量液面的位移，但是都因為系統太過複雜或是裝置加工困難而作罷。網路上看到一種潛水手錶，內部配置有壓力感測晶片，潛水者佩帶此種錶即可藉由水壓的變化而知道自己潛入水中的深度。我們開始全力收集有關資料，得到此種晶片的特性和用法。這種晶片藉由其上小孔承受的壓力使內部橫隔的半導體薄膜產生形變，再由形變轉換成輸出電壓。
2. 我們把測量的系統加入一500ml的燒瓶來緩衝，與其相連的針筒每壓縮或釋放5ml，總體積只改變了約1%，這樣才能有精細的刻度來量測壓力晶片的輸出電壓與氣體P-V之關係。



3. 理想氣體等溫壓縮時必遵守 $PV = K$ ，或是 $P \propto \frac{1}{V}$ ，比較實測過的數據和圖形，我們可以確定壓力晶片的輸出轉換特性是線性的。

四、 創新的連續可變液位差式毛細管黏度計之製作

(一)、 製作原因

基本上我們自創的改良型毛細管黏度計只需兩個完全相同的容器及底部相連通的毛細管即可，我們記錄兩容器的初始液位差及一段時間後的末液位差就可以求出黏度。我們考慮引用前面討論過的壓力晶片來感測任一時刻容器內的液位高，並且運用差動減法電路可以即時地求出任一時刻兩容器的液位差。

(二)、 製作原則

1. 其實兩容器的液位差就是底部相連通之毛細管兩端的壓力差 ΔP ，它也是克服黏滯阻力維持穩定流速的原動力，兩個壓力晶片一定要裝在毛細管入口處及出口處的同一直平面上，晶片的氣嘴以矽膠軟管與毛細管端口及針筒出口互相連通，兩晶片各自將感應到的左右液位轉換成電壓再傳送到差動減法電路去計算液位差。
2. 我們使用一種白金的熱電偶貼片，將其貼在毛細管正中央，這樣可以直接測得在其中流動的液體溫度，並將熱電偶引線接至數位溫度計上。
3. 我們將調整完成的平台裝入亞克力組成的三層支座內，兩個針筒用塑膠螺絲固定並將矽膠軟管接妥，然後在左邊針筒內倒入去離子純水，觀察是否有漏水情形並且可以看到左、右液面緩慢上升及下降的狀況。

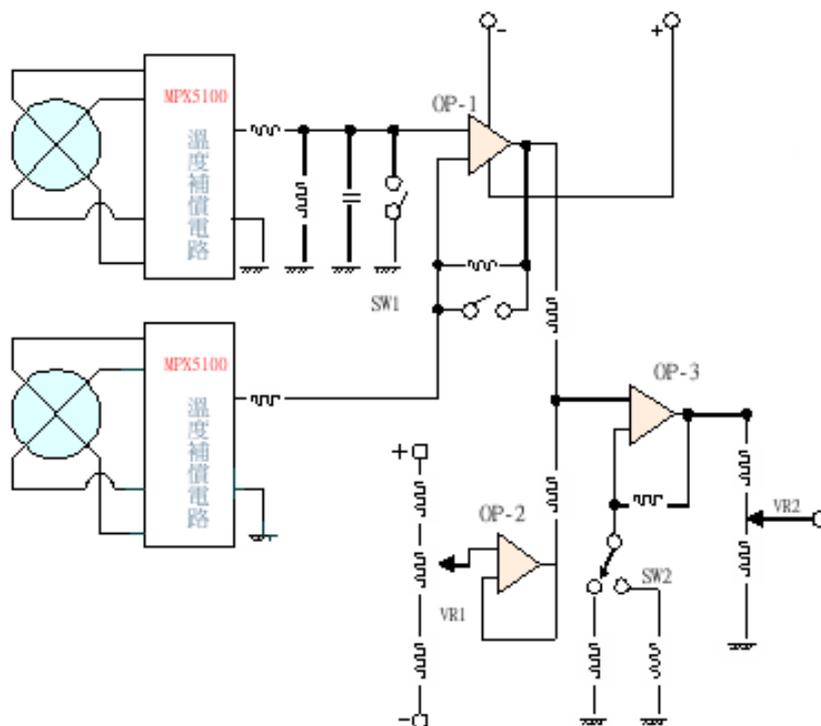
五、 液位差電壓顯示電路及自動計時電路製作

(一)、 電路概述

1. 壓力晶片MPX5010內附有2級放大器及溫度補償電路。
2. 左右各用一個晶片感測液位，其輸出導入減法電路求液位差。運算放大器有

兩個輸入端，是利用差動放大的原理，我們正好將兩個壓力晶片感測的電壓輸送到運算放大器的兩個輸入端可得到信號相減的結果，利用回授電阻及後續的放大器控制總放大倍數，使數位電路顯示的數值能以液位差的大小(mm)來表現。

- 我們雖已採用低雜音、低偏置(off-set)的運算放大器，依據經驗即使輸入信號為零其輸出仍有非零電壓，爲了在兩針筒液位相等時能有零的讀數，我們裝了抵補調整(OP-2、VR₁)以消除運算放大器的微小偏置。



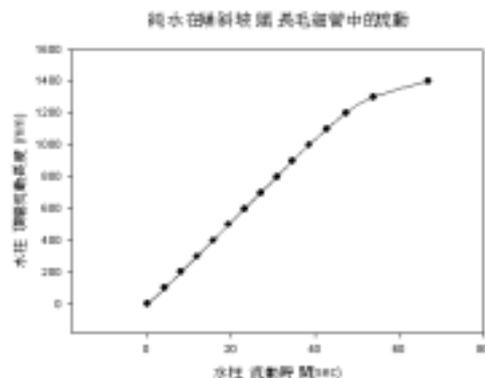
- 爲了認讀方便及減少誤差，我們用數字錶頭來顯示結果，BCD數字信號經解碼電路直接輸出推動顯示器，它們使用之電壓皆爲標準5伏特。
- 這次實驗的電路分成六個部分，即感測器、減法電路、A/D轉換部分、解碼及推動顯示部分、最後是電源電路。這些電路我們曾分別在麵包板上試驗，經多次修改及實測才確定做法。我們邊學邊做，克服了許多困難，一一循序設法解決。

陸、 實驗過程

實驗一：測量純水在傾斜玻璃長毛細管中的流速

(一) 實驗步驟

- 徹底清潔毛細管
- 檢驗毛細管內徑是否均勻



3. 調整毛細管支座
4. 緩緩倒入純水，直至毛細管底部恰好微觸及水面為止。
5. 將實驗室的微電腦空調設定在20°C恆溫。
6. 手動抽氣機將純水吸至頂端，碼表歸零並且放開抽氣機閥門，觀察並記錄水柱每經流動10cm所費的時間。
7. 將傾斜角度每次增加2.5°重複以上實驗並記錄之。
8. 更換不同內徑的毛細管重複以上實驗並記錄之。
9. 抽氣機將水柱吸上一小段，重複以上實驗並記錄之。

(二) 實驗結果列表(略)

(三) 實驗結果討論

1. 加速期間非常短暫，僅流動幾公分即開始等速流動。
2. 水柱在最後三分之一長度時即開始逐漸減速，待水柱停止後，水柱頂端到水盤底部的高度差與課本公式

$$y = \frac{2T \cos \alpha}{\rho g r}$$

所求出的高度甚接近，僅略低於理論所預測的高度。

3. 等速段的流程相當長，約佔毛細管長度的三分之二，但在此期間流速相當的穩定，且與(32)式計算值相符，與當時水柱的剩餘長度無關，此時毛細管中水柱受到的黏滯阻力完全被其自身的重力所平衡，水柱呈現等速流動狀態。
4. 將一小段水柱吸至頂端時放開抽氣機閥門，此小段水柱的流動速度與整段水柱微插入水盤的流動速度幾乎完全相同，且與小段水柱自身的長度無關。
5. 不論水柱多長，當水柱在尾端管口呈現滴流狀態時流速開始變成不穩定，因為表面張力會在液滴形成時使水柱減速，卻又在破裂的瞬間牽引水柱使其加速。
6. 利用表一的數據我們將等速段的水柱流速求出後即可代入(33)式來求待測純水的黏度了。

實驗二：用自創的傾斜旋轉的毛細管測量純水的流速

(一) 實驗步驟(與實驗一近似)

(二) 實驗結果列表

(三) 實驗結果討論

1. 當抽氣機將水柱吸至頂端的定點然後放開抽氣機閥門，水柱加速期間非常短暫，大多是僅加速流動幾公分即開始等速流動。
2. 水柱流動至大約第37圈長度時即開始逐漸減速，越接近毛細管尾端減速度的值越大，如此直到水柱停止不再流動。
3. 旋轉毛細管傾斜角甚小，水柱流速緩慢而優雅，我們有充分的觀察與記錄的時間，人為誤讀大為減低，流速求測極為準確。
4. 等速段的流程相當長，佔毛細管長度的三分之二，但在此期間流速相當的穩定，與當時水柱剩餘長度無關，且符合(32)式。
5. 我們將所測得的水柱流速代入(33)式計算黏度，與公認值相比僅有0.34%的差距!準確度相當高!
6. 液體黏度受溫度的影響極為明顯，由於採用旋轉式設計，儀器體積大為縮減，可以將整組毛細管放入恆溫箱內來完成實驗。
7. 本儀器中央內藏的日光燈點亮時，毛細管內的水柱清晰可見，是個簡單實用的黏度計，也可成為優良的輔助教具。

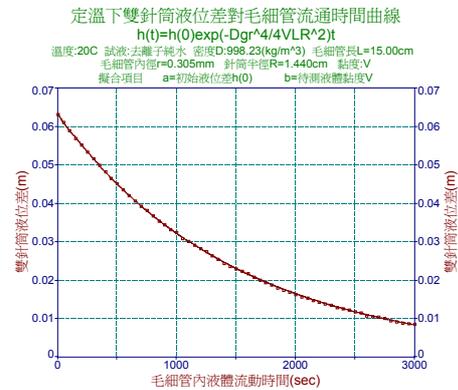
實驗三：用自創的液位差式毛細管黏度計測量液體黏度

(一) 實驗步驟

1. 測量毛細管內徑(使用走讀顯微鏡)。
2. 測量毛細管長度。
3. 徹底清潔毛細管(煮沸、超音波洗淨)。
4. 全新開封的左右針筒, 以游標尺測其內徑。
5. 微調毛細管座的水平高度至水平儀氣泡歸零。
6. 將自黏式熱電偶貼片黏貼於毛細管正中央，接妥壓力晶片和熱電偶至顯示電路及放大器的連線。
7. 將實驗室的微電腦空調設定在20°C 恆溫。
8. 將待測純水灌入左側針筒至滿水位，待右針筒水位上升至約10cc，開啓電源，將計時器歸零，開始讀取左右針筒的液位差，每隔50秒讀取一次並記錄液位差讀數。
9. 將記錄的60組數據輸入至分析程式中進行曲線擬合的工作，由擬合所得之常數可直接得到受測純水之黏度。

10. 將整組設備移到恆溫箱去測量溫度對流速及黏度的影響，再將數據輸入至分析程式中進行線性迴歸的工作。
11. 對試藥級的四氯化碳，重覆以上各項測量工作。
12. 對CANNON N1.0標準黏度劑，重覆以上各項測量工作。

(二)實驗結果曲線繪圖



(三)實驗結果討論

1. 對數據進行線性迴歸時我們將擬合的範圍分成三個區段，即0~3000秒取樣間隔50秒，0~900秒取樣間隔100秒，500~1400秒取樣間隔100秒，數據擬合的對象是(43)式由擬合所得之常數可直接得到受測純水之黏度 η 。
2. 三個區段的起測點不同、總時間長度不同、取樣間隔也不相同，但所測得黏度與公認值相比僅有不到0.8%的差距!準確度相當高!換句話說，在毛細管流通後的任一時刻都可以當成起測點，且測量時間不用很長，只須測量幾分鐘就有足夠的數據估算黏度了。
3. 四氯化碳的測量值僅較公認值低了0.4%，而CANNON N1.0的測量值與標示值相差更低於0.2%，由此可看出液位差連續緩變式毛細管黏度測量法的誤差相當的低。
4. 表七顯示， $-\ln[h_{(t)}/h_{(0)}]$ 與t成正比，所以只須記錄起點與終點的液位差 $h_{(0)}$ 、 $h_{(t)}$ 及經過的時間t，即可由(44)式求得黏度值，表七顯示，即使測量時距t低至50秒，測量誤差也不超過0.6%，非常節省實驗時間。
5. 如果有更精準的儀器測量毛細管內徑r，必能進一步降低實驗誤差，因為它是以四次方呈現於(44)式的，佔了極大的權值，目前我們測量的黏度僅有3位有效數字就是受限於毛細管內徑r的精確度。

6. 黏度標準液其瓶上印有溫度及對應的黏度和密度值，在調整我們的壓力晶片電路中放大器的放大倍數時，能用黏度標準液來校正實驗值是非常方便而正確的。

實驗四：測量溫度對液體黏度的影響

(一) 實驗原理

1. 迄至目前為止，在所有推求牛頓流體的黏度相對於溫度變化的方程式中，最有名也最常為人們採用的有二：其一為 H.Helmholtz提出的，另一則是 Andrade所提出的，兩人之方程式一直為科學界所公認是最普適性的。

(1) Helmholtz方程式:

$$\eta = \frac{a}{1+b \cdot t+c \cdot t^2} \quad (46)$$

上式中t為攝氏溫度而 a，b，c皆為實驗常數。

(2) Andrade方程式:

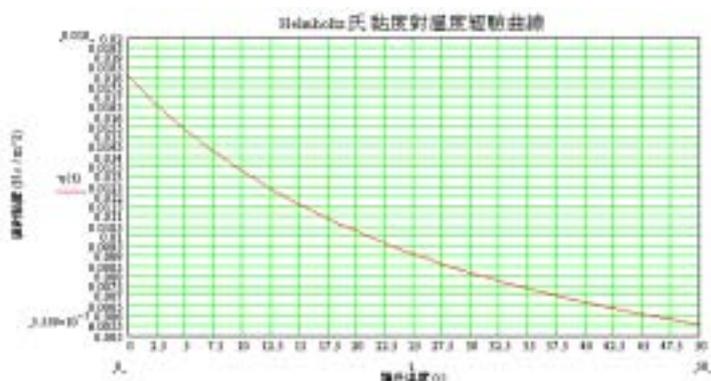
$$\eta = D \cdot \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (47)$$

(二) 繪製液體黏度對溫度關係的理論圖形。(略)

(三) 實驗步驟

1. 各項實驗工作與實驗(三)完全相同。
2. 恆溫箱溫度由10°C 逐步調節至40°C，每隔5°C 實驗一次。

(四) 實驗結果曲線繪圖 f: (Helmholtz 擬合方程式)



柒、 結論

- 一、 這個實驗緣起於觀察毛細管中葡萄汁下降的速度，想探求毛細管中液體流動是否可能為等速，我們展開了長達一年的研究，由測量毛細管中液體流速開始，

進而設法精確控制流速，最後發展出新的液體黏度測量方法。

- 二、 要克服黏滯力，使毛細管中液柱等速流動是需要外加驅動源的，這個驅動源依(27)式

$$v_{av} = \frac{\Delta P + \rho g L}{8\eta L} r^2$$

即為上式分子中的毛細管兩端的壓力差 Δp 及 $\rho g L$ ，我們透過巧妙的設計，使 $\Delta P \approx 0$ ，使毛細管中液柱流速變成(30)式

$$v_{av} = \frac{\rho g r^2}{8\eta}$$

上式右側各物理量於定溫下皆為常數，左測流速確實為定值!

- 三、 為了精確測量流速，我們使用軟質毛細管設計了重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計，這使得液柱流程擴大而流速減緩，不僅增加了流速測量的精確度，更有效地縮減實驗器材的佔用體積，使測量工作更為快速方便，我們測得毛細管中液體的流速確實如(30)式中理論預期的相符。

- 四、 液體流速既可精確測量，那麼我們就可反過來利用(33)式

$$\eta = \frac{\rho g r^2}{8v} \sin \alpha$$

來求出待測液體的黏度了，這是非常簡單優異的測量方法!

- 五、 在科學營中我們曾用實驗教材中的方法測量液體黏度，此法不僅器材數量極多，清洗及組合不便外，其引用的理論(28)式

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L}$$

因為左右定高容器排水孔受到液體表面張力影響使 ΔP 無法穩定下來，致使實驗誤差偏高且難以改進。

- 六、 若我們仍然使用左右兩個容器(針筒)，但容許兩容器內液壓差 ΔP 十分緩慢地變化，這樣可推求兩容器的液位差為式(43)

$$h_{(t)} = h_{(0)} e^{-\frac{\rho g r^4}{4\eta L R^2} t}$$

我們發現實驗數據與上式有相當良好的擬合，誤差非常的低，利用此式及實驗數據可以精確地計算出液體黏度，液位差連續緩變的構想及理論式(43)之意義，

或許在學術上可以有應用及推廣的價值。

- 七、 使用兩個壓力晶片同時測量左右液位深度是個很實用的設計，配合減法電路可即時而精確地讀出左右容器液位差，這比一般使用超音波反射法或雷射測距法測量液位深度精簡許多。
- 八、 液體黏度受到溫度影響很大。溫度變化偏離常溫不多時，我們建議使用 Helmholtz 方程式來預測黏度，根據實驗四的結果可以看出，與數據擬合時它比 Andrade 方程式有較小的偏差。
- 九、 重力式傾斜旋轉的毛細管黏度計因為管子太長清洗不便，所以較適於只測量單一類型的液體黏度，不過本儀器可成為優良的輔助教具，可以讓同學觀察到毛細管中水柱等速流動的情形。液位差緩變式毛細管黏度計則完全沒有清洗的困難，針筒及數公分的軟管價格都非常低廉，可以發展成可棄式的設計，測量液體黏度將會變成方便而愉快的工作。

捌、 參考資料

一、 中文資料

- (一) 褚德三等編 物質科學物理篇下冊 龍騰文化事業出版 第 10 章 1992 年版。
- (二) 王石安編著 應用流體力學 臺灣中華書局印行 第 1 至 5 章 1982 年版。
- (三) 普通物理實驗 大海文化出版事業公司印行 實驗九 黏滯係數 p41。
- (四) 陳炳陽編著 電子儀表上冊 全友圖書公司出版 第 1、2、9 章 1983 年 6 月版。
- (五) 陳文華編譯 實用電子電路第二冊 全華科技圖書公司出版第 8 章 1977 年 6 月版。

二、 西文資料

- (一) M.Nelkon, J.M.Ogborn Advanced Level Practical Physics, Fourth Edition Heinemann Educational Books London p36 (1978).
- (二) Franz Rosenberger, J.Iwan, D.Alexander, and Wei-qing Jin, Gravimetric capillary method for kinematic viscosity measurements, Rev. Sci. Instrum, 63(9), 4196, (1992)
- (三) Kuzman Raznjevic, Hand Book of Thermodynamic Tables and charts (1985)

三、 網站資料

- (一) <http://grad.math.arizona.edu/~walton/biomath/physcond.htm>
- (二) <http://www.cec.uchile.cl/cinetica/papers/rc95.html>

(三) <http://www.urm.edu/~jstoffer/MW/HagPoi.html>

(第一名)

本作品是用細長螺旋管使兩端等壓，以及利用初始與終點時的液面差，變化兩種方法量測液體在毛細管中的流速（即黏滯係數），設計具有創意，方法科學，思慮縝密，解決問題的能力強，作品完美精巧，精確度較傳統裝置為高，是難得一件的好作品。