

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-物理科

科 別：物 理 科

組 別：高 中 組

作品名稱：以 6AF6 真空管測量電子荷質比實驗之迷思

關 鍵 詞：電子荷質比、6AF6 真空管

編 號：040116

學校名稱：

臺北市立建國高級中學

作者姓名：

朱立人、張凱崑、陳鵬仁、謝卓叡

指導老師：

劉國棟



一、 研究動機：

在高中物理第四冊的實驗課本中有一個以 6AF6 真空管測量電子荷質比的實驗，在真空管中使電子由管中央之陰(負)極射出，在螺線管內磁場的作用下，電子以彎曲的路徑向陽(正)極運動，最後投射在塗有螢光物質的漏斗狀陽極板上。測量螢光屏上亮點軌跡之曲率半徑，進一步推算出電子之荷質比。但是陽極板上電子所打出來的曲線恰好是電子的運動軌跡嗎？若否，其投影點連線之曲率半徑又有何意義呢？基於這個疑問，想要探討以這個實驗求取電子的荷質比是否有原理上的問題。

二、 研究目的：

- (一) 探討課本所述的荷質比測量在理論上是否有誤？
- (二) 探討實驗觀察到的螢光幕上投影點連線之曲率半徑與電子實際的運動軌跡曲率半徑之差距。
- (三) 探討在何種條件下，此實驗可較為精確地測出電子荷質比。

三、 研究器材：

個人電腦	一台
6AF6 真空管(附尺標)	一具 如圖(一)、(二)
可調變穩定直流電源(15V)	一具
可調變高壓直流電源(110、220V)	一具
直流安培計	一個
直流伏特計	一個
螺線管	一具
鱷魚夾	數條

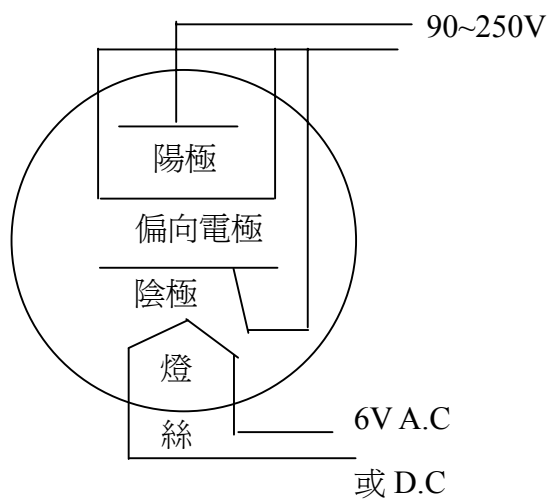
四、文獻探討

(一) 6AF6 真空管構造：

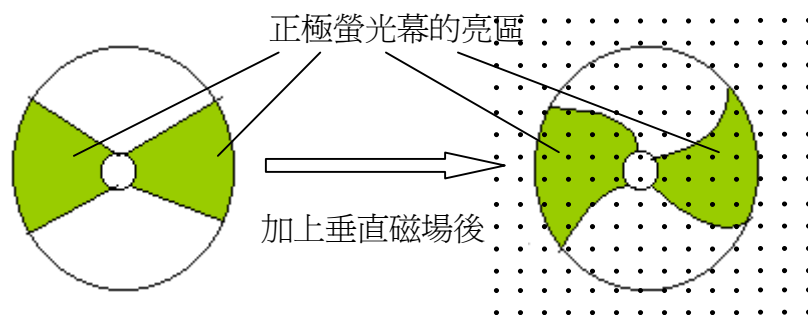
1. 6AF6 真空管之構造如圖(一)所示，中心軸為陰(負)極，漏斗狀之螢光屏為塗有螢光物質之陽(正)極，陰極之外圍有一燈絲用以加熱陰極使其產生熱電子。
2. 6AF6 真空管之內部接線如圖(二)所示，陰極產生之熱電子，在陰極與陽極間徑向電場的作用下，射向陽極，並在漏斗狀的陽極螢光屏上打出光點。
3. 將 6AF6 真空管置於載流螺線管內，如圖(三)所示，電子受軸向磁場之作用而偏轉，使得螢光屏上光點產生偏移。
4. 由上俯視真空管，以所視得之電子投影點連線代表真空管中最上層電子的運動軌跡，並藉由測量螢光屏上光點連線的軌跡半徑，進一步求出電荷質比 $(\frac{e}{m})$ 。



(圖一) 真空管照片



圖(二) 6AF6 電子管接線示



圖(三) 加上垂直磁場前後正極螢光區之變化

(二)實驗課本公式推導：

當一電子 e 以速率 v 垂直於磁場 B 運動時，會受到一作用力 F ，其值為

$$F = evB \dots\dots\dots(a)$$

由於 F 與 v 垂直，故電子在一均勻磁場中將如（圖三）作圓周運動，電子質量 m ，受磁力 F 作用，即

$$F = ma = m \times \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots(b)$$

式中 a 為加速度， r 為圓周運動的半徑

由(a)、(b)式可得

$$Bev = m \times \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots(c)$$

而電子的初能則來自陰極和陽極之電位差 V ，即

$$eV = \frac{1}{2} m v^2 \dots\dots\dots(d)$$

將(d)式代入(c)式即得

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2} \dots\dots\dots(e)$$

其中電位差 V 、磁場 B ，皆可控制，只要利用尺標測出螢光幕上亮光區邊緣的曲率半徑 r ，即可獲得電子的荷質比(e/m)

(三)真空管中電場之探討

為了較原先課本假設更接近實際情況，但又不使計算式過於複雜，超出我們的能力範圍，我們對真空管中產生電場的條件做了以下假設：

1. 陰極為一無限長直導線。
2. 陰極上各處電子只受到同一水平截面陽極的影響，意即假設電子運動路徑皆在同一水平截面上。
3. 電子在空間中不互相影響。

如圖(四)設在真空管中某一截面處，陰極半徑為 R_1 ，陽極之半徑為 R_2 ，此處

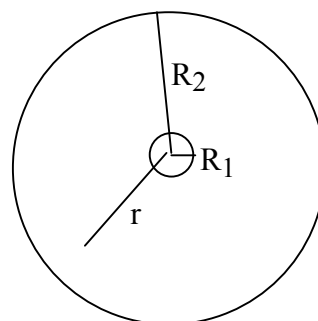
陰極之電荷線密度為 λ ，則此截面上與中心相距 r 處之電場 $E = \frac{2k\lambda}{r}$ ，又陰

極與陽極之電位差為 V ，所以

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{2k\lambda}{r} dr = V$$

得 $2k\lambda \times \ln \frac{R_2}{R_1} = V$

得 $\lambda = \frac{V}{2k \ln \frac{R_2}{R_1}}$



圖(四) 真空管中某一橫截面示意圖

此表示陰極上不同位置之電荷線密度不同，越低處 R_2 值越小，電荷線密度則越大。此截面上與軸心相距 r 之電場

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

五、研究方法：

(一) 以相機拍照，取得在以下兩種不同的操縱變因下實驗所得之實際影像：

1. 固定外加磁場大小，改變真空管陰陽極間電場大小。我們可以固定螺線管電流，改變真空管陰陽極間電壓大小來探討此變因。
2. 固定真空管陰陽極間電場大小，改變外加磁場大小。同樣的，可以利用固定真空管陰陽極間電壓大小，改變螺線管電流來探討此變因。
3. 測量出這兩種變因下實驗所得曲線的曲率半徑。

(二) 寫程式描繪真空管中最上層之電子同時在電場與磁場作用下之運動軌跡，方法如下：

1. 訂定一個以陰極為原點的平面座標系，輸入各項初始值，包括陽極屏幕半徑(r)、電場大小(E)、磁場大小(B)、電子起始位置(x, y)、電子初速度(v_x, v_y)、電子實際荷質比(k)。
2. 當時間 $t=n\sigma$ (n 屬於 N ， σ 為一微量單位時間)時，
計算目前電場及磁場對電子所造成的加速度($a_x(n\sigma), a_y(n\sigma)$)，
再推算出目前速度($v_x(n\sigma) = v_x((n-1)\sigma) + a_x(n\sigma) \times \sigma$ ， $v_y(n\sigma) = v_y((n-1)\sigma) + a_y(n\sigma) \times \sigma$)。
3. 由 2.得到的($v_x(n\sigma), v_y(n\sigma)$)來更新電子的座標($x((n+1)\sigma) = x(n\sigma) + v_x(n\sigma) \times \sigma$ ， $y((n+1)\sigma) = y(n\sigma) + v_y(n\sigma) \times \sigma$)。
4. 將電子目前的位置點在螢幕上。
5. 由目前座標判斷電子是否已經碰到屏幕，若已碰觸，則結束模擬；否則回到 2.，繼續模擬 $t = (n+1)\sigma$ 。

(三) 寫程式模擬實驗所得曲線，即描繪電子同時在電場與磁場作用下，由不同高度之陰極射出，在陽極螢光屏上產生光點，俯視真空管陽極板所得之投影點連線，方法如下：

1. 給定真空管高度 h 與半徑 R 的方程式(參照真空管陽極螢光幕實際情況繪製)。
2. 算出陰極上某一橫截面的中心電荷密度。
3. 對每一橫截面依 1. 中的方法，跑出粒子軌跡，但不畫出來，只畫出最後碰到邊界的點時電子的位置，即是電子打到陽極螢光幕上之光點。
4. 把每個高度繪出之光點疊合起來，就是從真空管上方看到的投影點連線。

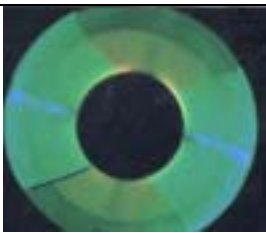
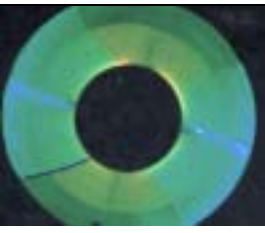
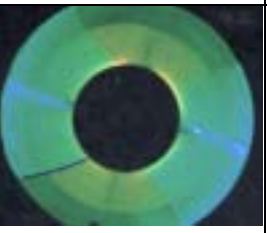
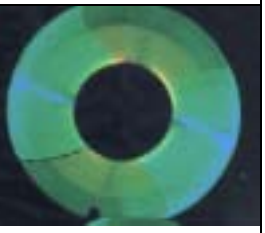
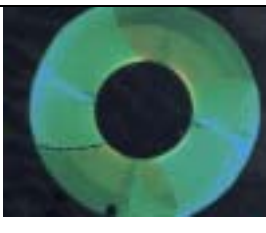
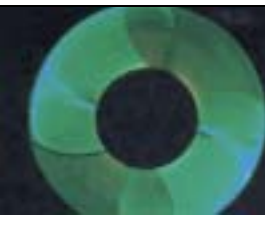
(四) 計算出實驗電子軌跡及電腦模擬運動軌跡上各點之曲率半徑，並繪成圖表比較。由於電腦模擬運動軌跡時，亦知在某點的運動方向及速度，因此可精確的算出該點曲率半徑。但對於實驗電子軌跡之各點曲率半徑求法，由於軌跡上各點曲率半徑不同，若以人工方法任取三點來求曲率半徑，將會造成很大的誤差，因此我們利用電腦高精確度的特性來輔助解析。求法如下：

1. 將相機拍照取得實際之影像掃描入電腦中，並在電腦內對此影像建立一平面座標系。
2. 若欲求某點曲率半徑，便在該點附近任取相異三點，將此三點座標帶入數學公式，即可求出該點近似之曲率半徑。

六、結果討論：

(一) 電腦模擬投影點連線與實驗結果之比較：

1. 在固定真空管陰陽極間電壓 150V 下改變螺線管電流，實驗中俯視真空管螢光幕上光點之連線與電腦模擬電子投影在螢光幕上之光點連線比對如圖(五)：

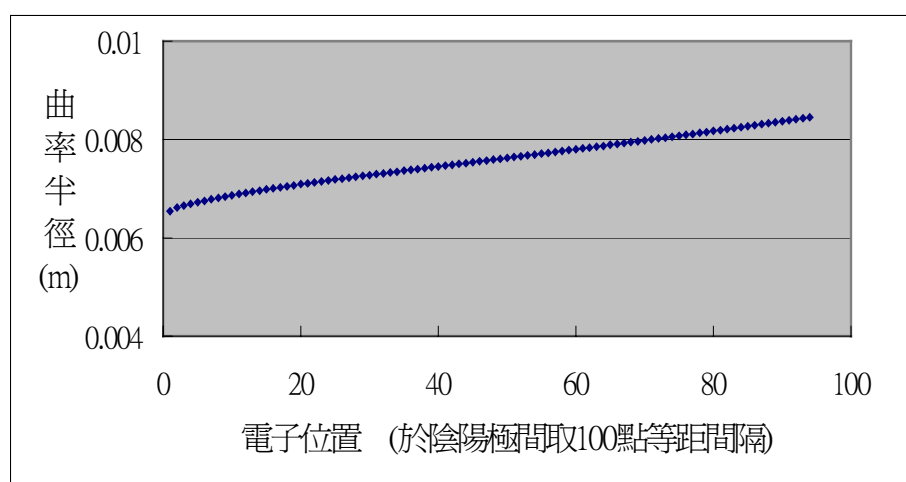
電流	0.25A	0.5A	0.75A	1A
圖片比對				
電流	1.25A	1.5A	1.75A	2A
圖片比對				

圖(五) 在不同電流下電腦模擬陽極板上投影點連線與實際圖片比較

由各圖可知我們所模擬出來的多電子投影點連線的確能與實際實驗所得之曲線吻合，因此可用模擬出來的曲線代替實際曲線進行探討。

2. 將陽極上不同高度處，電子投影點連線之曲率半徑作圖，如(圖六)所示。

橫軸為該截面上陽極的半徑與陰極最上方橫截面陽極半徑之比值。

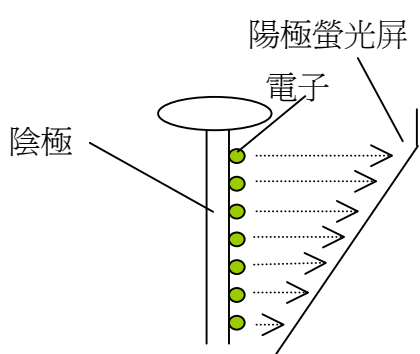


圖(六) 電子投影點連線曲率半徑對電子位置作圖

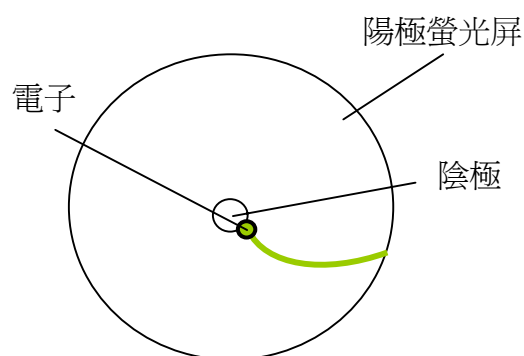
由圖可知實驗所得電子投影連線之曲率半徑不是定值，代表電子在真空管中確實受到電場影響，而非如課本所述以等速由陰極射向陽極。

(二)課本實驗之謬誤：

1. 電子自陰極出發後，同時受電場(徑向)與磁場(軸向)作用，即電子並非經電場加速後以等速度 v 在磁場中運動。
2. 由於陰極上不同高度之電子射向陽極之軌跡不同，因此電子在螢光屏上投影點連線(圖七)(圖八)，不能代表最上層電子的運動軌跡。



(圖七) 6AF6 真空管縱切面



(圖八) 6AF6 真空管俯視圖

3. 由(一)的比對我們已知電腦模擬投影點軌跡與實驗所得曲線確實符合，因此可以電腦模擬的數據代替實驗測量數據，免去實驗之測量誤差。以下是我們將電腦模擬數據計算出的曲率半徑代入課本導出的公式(四-2-e)，所求出的荷質比。

電壓：150 (V) 磁場大小： 3.62×10^{-3} (韋伯) 曲率半徑： 1.05×10^{-2} (m)

求出的荷質比： 2.07×10^{11} (C/kg) 正確荷質比： 1.76×10^{11} (C/kg)

誤差：17.6%

由於此數據是經由電腦計算出來，已忽略實驗的測量誤差，但與正確荷質比之誤差仍達 17.6%之高，由此可知此實驗所得確實與荷質比無關。

(三)實驗課本公式修正：

我們將陰陽極間電場對電子的影響列入考慮，重新推導荷質比之公式，修正公式如下：

如圖(九)假設陰極為座標原點，則電子在軌跡末端位置向量與軌跡切線夾 θ 角，電子的跡軌半徑為 r' ，則

$$\frac{v^2}{r'} = a_n = \frac{evB}{m} - \frac{eE \sin \theta}{m} \dots\dots\dots(a)$$

且電子在末端時的速度 v 滿足

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \dots\dots\dots(b)$$

將(b)代入(a)，得

$$\frac{e}{m} = \frac{(\frac{2V}{r'} + E \sin \theta)^2}{2B^2V} \dots\dots\dots(c)$$

由之前電場公式的推導，在陰極半徑為 R_1 ，陽極半徑為 R_2 ，電子距中心半徑為 r 時

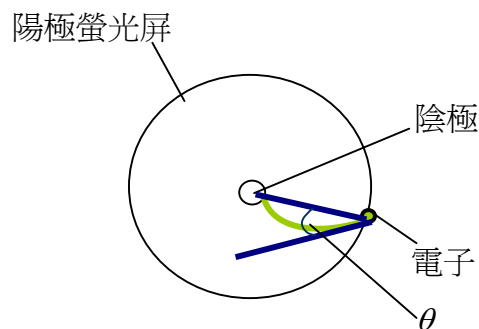
$$E = \frac{V}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

其中由於電子位於軌跡末端所以 $r=R_2$ 所以：

$$E = \frac{V}{R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \dots\dots\dots(d)$$

如此可避開電子運動速度為定值的假設，且只要測量出單電子運動軌跡之曲率半徑

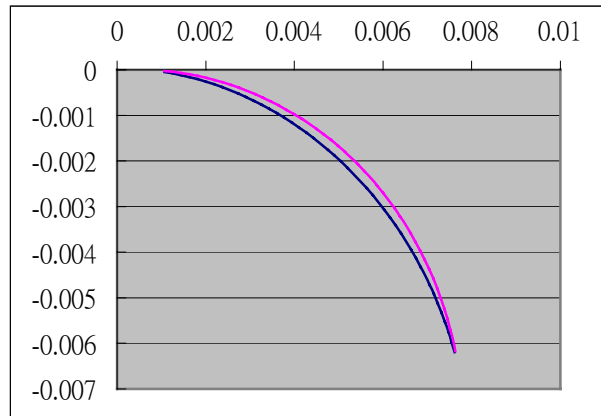
與 θ ，由(c)(d)兩式即可求出電子荷質比。



(圖九) 6AF6 真空管俯視圖

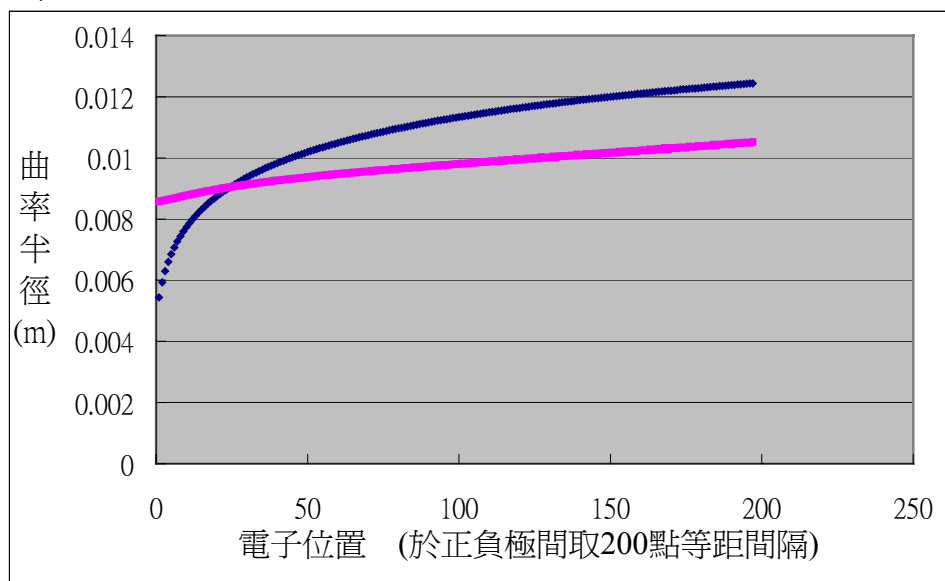
(四)電腦模擬最上層電子運動軌跡與電腦模擬陽極板上投影點連線之差異比較：

1. 以陰陽極間電位差 150V、螺線管電流 0.75A 的條件下為例，如(圖十)所示，電腦模擬單電子運動軌跡(紅線)與電腦模擬電子的投影點軌跡(藍色)兩線頭尾部分吻合，但在中間兩條線有些許差距。



(圖十) 以電腦模擬電子運動軌跡及投影點連線
圖為一平面座標 單位(公尺)

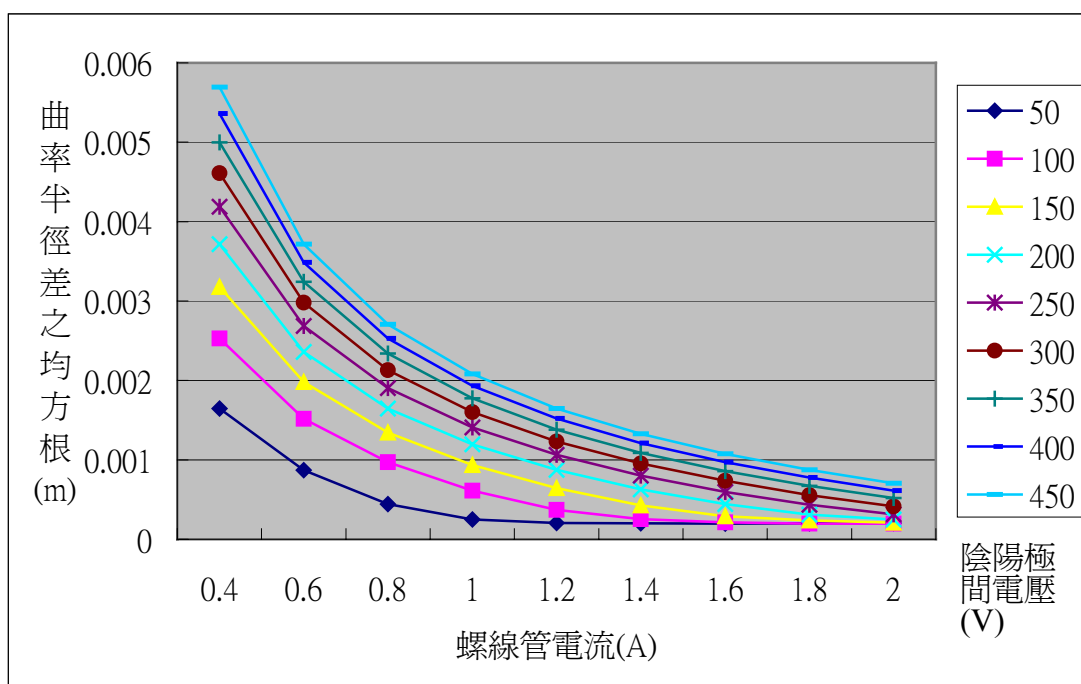
2. 同 1.的實驗狀態，如(圖十一)，雖然在(圖十)中，兩線差距似乎很小，但將兩線上平均取 200 個點後，分別計算各點曲率半徑後比較，發現仍有一定的誤差。



圖(十一) 電子運動軌跡(藍)及投影點連線(紅)之曲率半徑變化圖

為了探討兩條線在各種電壓、電流狀態下差異大小變化趨勢，我們從兩條線上平均取 200 個點，以兩組數據相減後取均方根所得到的數據，作為比較兩線差異大小的指標。

3. 固定加速電壓時，在各種螺線管電流下電子運動軌跡和投影點連線之曲率半徑差值方均根比較：

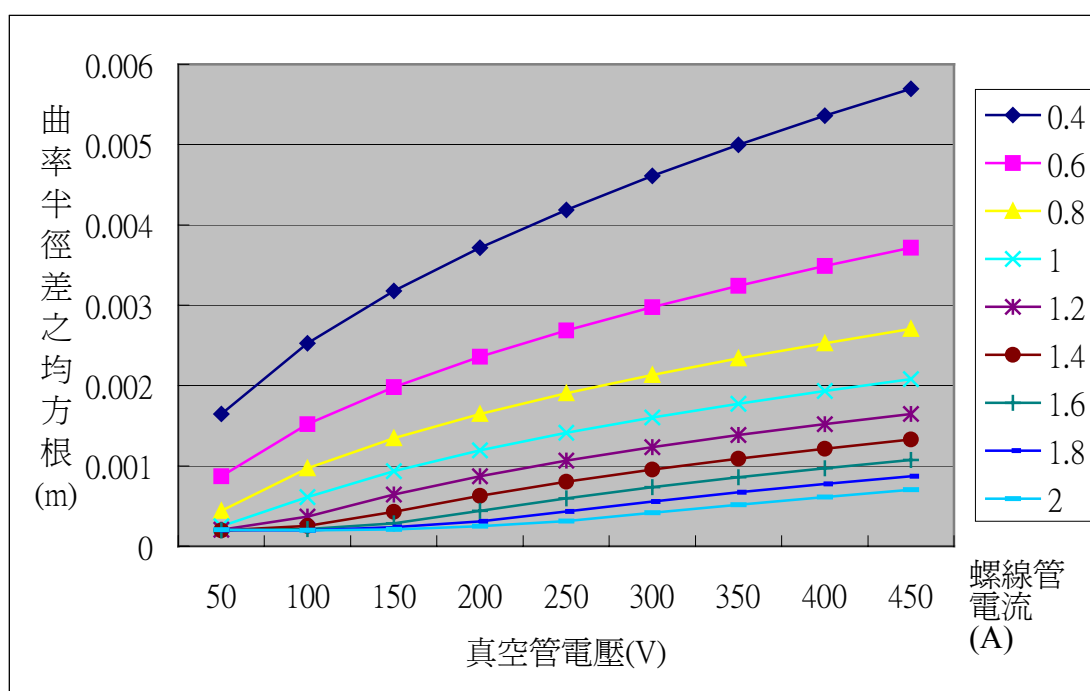


(圖十二) 等電壓下螺線管電流對曲率半徑差值均方根之變化圖

由(圖十二)可歸納得知，當真空管電壓固定時，螺線管電流越大，其曲率半徑差之均方根也就越小，即電子運動軌跡與投影點連線兩條線間之差異越小。

4. 固定加速電壓時，在各種螺線管電流下電子運動軌跡和投影點連線之曲率半

徑差值均方根比較：



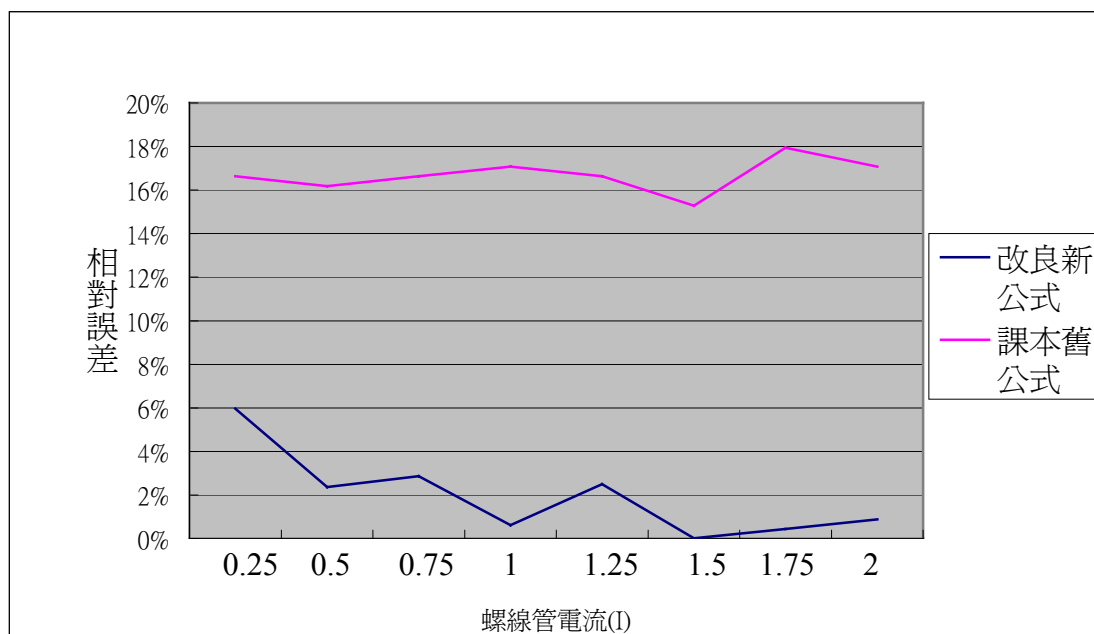
(圖十三) 螺線管等電流下電壓對曲率半徑差值均方根之變化圖

由(圖十三)可歸納得知，當螺線管電流固定時，真空管電壓越小，其曲率半徑差之均方根也就越小，即電子運動軌跡與投影點連線兩條線間之差異越小。

綜合 3.4.兩點可得，螺線管電流越大，真空管電壓越小，電子運動軌跡與投影點連線兩條線間之差異也就越小，可以解釋為因為螺線管電流越大，真空管電壓越小電場對此實驗之影響越小，因此兩曲線也較為接近。

5.我們固定真空管陰陽極間電壓為 150V，改變螺線管電流，以實際測量出

的曲率半徑與角度帶入(三)所推出之公式，與課本所述之公式，比較如下：



(圖十四) 陰陽極電位差 150V 下 實驗改良前後所得結果誤差比較

由(圖十四)中可觀察到經由我們改良實驗公式後(藍線)的確能大幅提高荷質比測量之精準度，且如同 4. 的推論當螺線管電流增加，實驗所得的曲線將較為接近實際電子的軌跡，使實驗誤差減小，然而當螺線管電流大於 1.5A，電子軌跡之曲率半徑小於真空管的半徑，代表電子將迴轉，而不會直接射到正極，因此造成誤差增大，我們可以取螺線管電流為 1.5A，真空管陰陽極間電壓為 150V 來做荷質比的測量，將可得到較為正確的結果。

七、結論：

- (一) 課本所述關於本實驗之原理確實有誤，電子並非經電場加速後再進入磁場區產生偏轉。同時實驗所觀測到的曲線乃是電子投影在陽極螢光幕之連線，非實際運動軌跡。
- (二) 利用本實驗所測出的荷質比誤差過大，因此建議使用電子束管及荷姆霍茲線圈來取代 6AF6 真空管測量電子荷質比。
- (三) 在電子尚未迴旋的條件下，當螺線管電流越大，真空管正負及間電壓越小時，電子運動軌跡與投影點連線兩條線間之差異也就越小，即可使用投影點連線來代表電子運動軌跡。
- (四) 若仍需繼續採用此實驗，則可藉由結論(三)及新公式的推導，將此實驗之荷質比的測量值精確度提高。

八、參考資料：

物理實驗手冊(第四冊)

國立編譯館 90 年 01 月 十五版

經典物理學發展中的著名實驗

物理(下) 第五版

全華科技圖書 89 年 08 月 出版三刷

(第三名)

作者能注意到 6.4Hz 真空管的電子運動軌跡已偏離等速運動之軌跡，進而推導電子加速運動時的 e/m 方程式，觀察敏銳，再用電腦繪圖以與拍攝真空管的運動軌跡比較，方法科學。由兩者之吻合度證明其構想正確但其精確度受限於真空管之結構，有改善的空間。