

# 中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

## 高中-物理科

科 別：物理科

組 別：高中組

作品名稱：扭扭車的前進(後退)原理研究

關 鍵 詞：扭扭車、摩擦力、轉動

編 號：040115

---

**學校名稱：**

國立大里高級中學

**作者姓名：**

施敏權、王瑋婷、何長芳、黃鈴育

**指導老師：**

黃詩翔



# 扭扭車的前進（後退）原理的研究

## 壹、研究動機

有一天，看見老師的兩歲大兒子在玩扭扭車，扭扭車結構簡單無須電力、馬達，即可前進、後退、原地轉彎，是很普通的玩具。後來發現兩歲大的幼兒用小小的力量，可以搭載 65 kg 的老師，不斷扭來扭去做「之」字型的前進，真是太神奇了！使我們想了解：扭扭車的前進（後退）原理（Fig.01）。

## 貳、實驗器材

（Fig.02,03,04,05），整理如下表：

品名	數量	規格	用途
扭扭車	1 台	淨重 4.7 kg，耐重 120 kg	研究主題
複寫紙	12 張	A4 大小	測量移動軌跡
水平儀	1 支	2 個方向	檢查地板是否水平
大型直角板	2 個	附有刻度	測量尺寸
舉重用圓盤	4 個	總重 32.7 kg	代替人的體重
數位體重計	1 個	秤重 136 kg，最小刻度 0.05 kg	測量輪子的正向力
彈簧秤	1 支	秤重 3 kg，最小刻度 0.1 kg	測量水平拉力
	1 支	秤重 10 kg，最小刻度 0.1 kg	測量水平拉力

## 參、實驗裝置：

[說明]：扭扭車的底面圖（未按比例），其中

1. A、B 為前輪，C、D 為後輪，圓心 K 為轉軸。用「I」表示輪的位置，方向指向轉軸。
2. R 為轉軸到把手的距離，前輪以 R 為半徑，可做圓周轉動。
3. 眼睛看把手為「W」，轉動把手，則扭扭車可前進（Fig.06,07,08）。
4. 眼睛看把手為「M」，轉動把手，則扭扭車可後退（Fig.09,10,11）。
5. 扭扭車的前輪與轉軸，經測量約呈「正三角形」，頂點的位置為轉軸，兩底角為前輪的位置。
6. 不管扭扭車是前進或後退，切線方向的施力 F 與輪的方向，夾角始終  $60^\circ$ 。
7. 人操作扭扭車時，會因轉動把手而改變重心位置，為求客觀，本科展以舉重用的掛重圓盤 4 片共 32.5kgw，固定在扭扭車座椅上，離後輪中垂線 6.5 cm。

## 肆、實驗原理：

1. 因為車輪與地面的摩擦力與正向力成正比，故測量車輪的正向力，可知摩擦力的變化。
2. 市面上許多種扭扭車，其原理都相同。

3. 發現「玩偶攀繩上升」的玩具，構造是平衡桿綁兩條平行的控制線，則玩偶的手（圓球）恰可以穿過。當拉動繩子使平衡桿偏轉，則兩繩相對靠近，其中一條線被圓球卡住當作支點，另一個圓球因摩擦力較小，則可順勢向上（Fig.12,13），給我們推導軌跡方程式的靈感。
4. 導出 4 個輪的軌跡方程式：假設前輪由 A、B 轉至 A'、B'， $\overline{BA}$ 與 $\overline{B'A}$ 的夾角 $\alpha$ ，轉角 $0^\circ \leq \alpha \leq 10^\circ$ （Fig.14,15）。

**轉動前**

M 為  $\overline{AB}$  的中點，R 為前輪迴轉半徑。原來座標：

$$\begin{cases} A = (L - R \cos 30^\circ, R \sin 30^\circ) = (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}, \frac{R}{2}) \\ B = (L - R \cos 30^\circ, -R \sin 30^\circ) = (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}, -\frac{R}{2}) \\ M = (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}, 0) \end{cases}$$

**轉動後**：以 D 為圓心， $\overline{OD} = b$  為半徑，原點 O 旋轉角度 $\beta$ 到 O'，則  $O' = (b \cdot \sin \beta, b \cdot (\cos \beta - 1))$ ，M' 為  $\overline{A'B}$  的中點。

**改訂直角座標為複數平面**：

（將 A'、B'、C'、D' 用極座標  $Z = r \cdot e^{i\theta}$  表示）

先求 D' 座標，再求 O' 座標、M' 座標、A'、B' 座標（Fig.15）

則 D' 座標 =  $-bi$      $\ominus$      $\angle D'O'M' = 90^\circ$

則 O' 座標 =  $-bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \beta)}$

則 C' 座標 =  $-bi + 2b \cdot e^{i(90^\circ - \beta)}$  ..... 1

M' 座標 =  $-bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \beta)} + (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}) \cdot e^{-i\beta}$

A' 座標 =  $-bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \beta)} + (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}) \cdot e^{-i\beta} + \frac{R}{2} \cdot e^{i(90^\circ - \alpha)}$

B' 座標 =  $-bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \beta)} + (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}) \cdot e^{-i\beta} + \frac{R}{2} \cdot e^{i(270^\circ - \alpha)}$

其中  $\alpha$  為  $\overline{BA}$  與  $\overline{B'A}$  的夾角， $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 10^\circ \\ \alpha = \omega_1 \cdot t \end{cases}$

$\beta$  為  $\overline{DO}$  與  $\overline{D'O}$  的夾角， $\begin{cases} 0 \leq \beta \leq 5^\circ \\ \beta = \omega_2 \cdot t \end{cases}$

$\omega_1, \omega_2$  為前輪、後輪轉動的角速率

A' 座標 =  $-bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \omega_2 t)} + (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}) \cdot e^{-i\omega_2 t} + \frac{R}{2} \cdot e^{i(90^\circ - \omega_1 t)}$  ..... 2

$$B' \text{座標} = -bi + b \cdot e^{i(90^\circ - \omega_2 t)} + (L - \frac{\sqrt{3}R}{2}) \cdot e^{-i\omega_2 t} + \frac{R}{2} \cdot e^{i(270^\circ - \omega_1 t)} \dots 3$$

代入數據：b = 15.75 cm, R = 13 cm, L = 47 cm

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 10^\circ \\ \alpha = 10 \times \frac{\pi}{180} = \omega_1 \cdot t \end{cases}, \text{ 令 } 0 \leq t \leq 1, \text{ 則 } \omega_1 = \frac{\pi}{18}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \beta \leq 5^\circ \\ \alpha = 5 \times \frac{\pi}{180} = \omega_2 \cdot t \end{cases}, \text{ 令 } 0 \leq t \leq 1, \text{ 則 } \omega_2 = \frac{\pi}{36}$$

1, 2, 3 式可整理如下，其軌跡可視為  $M \cdot \sin(\omega_2 t) + N \cdot \cos(\omega_1 t)$  的疊合，與實際慢速轉動，軌跡如波浪狀吻合。

5. 以我們高一程度，只能約略預估扭扭車往前啟動，把手向右轉  $10^\circ$ ，( $0 \leq \alpha \leq 10^\circ$ )，帶動後輪轉  $5^\circ$  ( $0 \leq \beta \leq 5^\circ$ ) 的軌跡方程式。
6.  $\alpha = 10^\circ$ ， $\beta = 5^\circ$  只是經驗值， $\alpha$  與  $\beta$  必然有相關的物理公式，只是超出我們的理解，因此無法導出連續方程式。

## 伍、 實驗步驟：

[實驗 1]：測量車輪的正向（側向）摩擦力。

1. 扭扭車的後座放 32.7 kg 圓盤，用膠布固定把手，前進方向訂為  $0^\circ$
2. 使用彈簧秤以轉軸為圓心，改變不同角度  $\theta$ ，將靜止的扭扭車拉動，測量最大靜摩擦力  $f_s$ ，( Fig.16,17, 表 1 )。

$\theta$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f_s$ (kgw)	0.75	1	1.2	1.25	2	2.3	2.75	3	5	> 10

[實驗 2]：測量扭扭車由靜止而啟動，四輪的運動軌跡。

1. 水平面墊複寫紙，再舖上壁報紙，扭扭車放在壁報紙上面。
2. 轉動把手約  $10^\circ$ ，則壁報紙印上扭扭車瞬間移動的軌跡 ( Fig.18,19 )

[實驗 3]：改變把手的轉速、旋轉角度，測量扭扭車運動的軌跡：

1. 把手慢速、小角度轉動，測量扭扭車前進（後退）的運動軌跡 ( Fig.20,21 )。
2. 若把手快速、大角度轉動，使扭扭車後退，測量運動軌跡 ( Fig.22 )。
3. 只向前左轉、右轉，向後退右轉，測量運動軌跡。 ( Fig.23,24,25,26 )。

[實驗 4]：前輪偏轉不同角度，使用數位式磅秤測量四輪的正向力 ( Fig.27,28 )。

1. 扭扭車的把手從「W」開始偏轉，從  $0^\circ$  轉到  $90^\circ$ 。
2. 扭扭車的把手從「M」開始偏轉，從  $0^\circ$  轉到  $90^\circ$ 。

四輪	前 進 (單位kgw)					後 退 (單位kgw)				
角度	A	B	C	D	總重	A	B	C	D	總重
0°	4.3	2.8	16.75	14.8	38.65	3	2.2	15.8	15.65	36.65
10°	5.2	2.4	16.95	14.45	39.00	3.8	1.3	15.3	16.45	36.85
30°	5.5	1	17.25	14.05	37.80	4	0.75	14.85	16.65	36.25
50°	5.8	0.5	16.9	14.2	37.40	4.25	0.25	15.35	16.6	36.45
70°	5.7	0.7	16.65	14.1	37.15	4.55	1.1	15.25	16.9	37.80
90°	5.25	2.25	17	13.7	38.20	5.2	2	14.6	16.8	38.60
				平均	38.03				平均	37.10

(上表 2 : 測量 4 輪的正向力, 磅秤最小單位為 0.05kgw)

3. 前輪從 0°到偏轉 90°, 計算圓盤與扭扭車的重心 M, 其座標  $X_C$  (Fig.30, 下表 3)。

前進 0°	$X_C = \frac{11 \times 4.3 + 11 \times 2.8 + 47 \times 16.75 + 47 \times 14.8}{38.65} = 40.33 \text{ cm}$
偏轉 90°	$X_C = \frac{6.5 \times 5.25 - 6.5 \times 2.25 + 47 \times 17 + 47 \times 13.7}{38.2} = 38.28 \text{ cm}$
偏轉 180° (後退 0°)	$X_C = \frac{-11 \times 3 - 11 \times 2.2 + 47 \times 15.8 - 47 \times 15.65}{36.65} = 38.7 \text{ cm}$

[實驗 5] : 前進時的扭扭車若方向盤突然轉 90°, 則扭扭車利用慣性速度可原地 180°轉彎; 若把手快速轉 360°, 則扭扭車的移動軌跡為「8」字型, 操縱很靈活。

## 陸、 實驗分析 :

### 1. 由[實驗 1] :

- 若依輪子的滾動方向, 則最大靜摩擦力甚小, 約為 0.75kgw, 即使 2 歲的幼兒也能拉動。
- 若「側向」拉輪子, 則前輪與地面的最大摩擦力, 隨角度增加逐漸加大, 當角度為垂直, 最大摩擦力甚至超過 10kgw (表 1)。
- 此摩擦力並不提供輪子轉動, 而是作用於地面, 地面給輪子的反作用力, 作為扭扭車動力來源。
- 後輪 C、D 輪流當「支點」, 使得扭扭車的質心偏轉, 造成轉動的力矩。並且巧妙運用省力槓桿而前進, 所以無須使用電力。
- 扭扭車順著輪子方向運動時, 其動摩擦力甚小, 若持續施力, 軌跡為平滑曲線。
- 所有軌跡圖, 必須左右顛倒, 才是真正前進 (後退) 的軌跡。

2. 由[實驗 2]：
- (a)若扭扭車只小角度的轉動，有四種情形：
- ◇ 向右前進，則 D 輪幾乎不動，A 輪往前，B 輪往後。
  - ◇ 向左前進，則 C 輪幾乎不動，A 輪往後，B 輪往前。
  - ◇ 向右後退，則 C 輪幾乎不動，A 輪往前，B 輪往後。
  - ◇ 向左後退，則 D 輪幾乎不動，A 輪往後，B 輪往前。
- (b)也就是說，施力的瞬間，後輪有一個當支點，另一輪則前進 (Fig.29)。前輪則繞著中點 M 旋轉。
- (c)當施力方向改變時，向側邊偏轉的方向立刻改變，於是後輪中，當作「支點」與「前進輪」互換。
3. 由[實驗 3]：
- (a). 真實的運動軌跡與把手的轉速、旋轉角度有關。若把手慢速、小角度轉動，其軌跡約呈波浪狀，平順前進。
- (b). 若把手快速、大角度轉動，其軌跡容易出現不連續的轉折。  
原因是：施力改變方向時，輪與地面並非「純滾動」，也就是輪與地面有側邊滑動現象。
- (c). 發現圓盤與扭扭車的重心很靠近後輪，所以後輪的力矩才是主要的動力來源，前輪只是改變方向。
4. 由[實驗 4]：
- (a). 扭扭車的設計必須容易轉動，而且人與扭扭車的重心很靠近後輪，所以當把手垂直轉 90°，扭扭車也不會翻覆。
- (b). 發現即使是對稱的左、右輪，其正向力也不同，可能是圓盤沒有固定在中心線上，或是地面沒有水平，重心沒有在中垂線上。
- (c). 由靜力平衡：  
4 輪的正向力和 = 扭扭車重 + 圓盤重 = 4.7 + 32.7 = 37.4 kgw  
由 (表 2)：(正向力和) 平均 =  $\frac{1}{2}(38.03 + 37.10) = 37.57 \text{ kgw}$   
誤差 =  $\left| \frac{37.56 - 37.4}{37.4} \right| \times 100\% = 0.4\%$ ，故數位式體重計讀數可信賴。
- (d). 若只考慮 X 方向的質心位移，由「W」轉 180°變成「M」，位移 40.33 - 38.7 = 1.63 cm，因為施力造成力矩使質心前進 (表 3)。
5. 由[實驗 5]：  
當前輪轉 90°之後，除非改變施力的轉動方向，不然扭扭車會左轉 (右轉)，而不是前進 (後退)。

## 柒、研究結論：

1. 輪子提供 2 個方向的摩擦力，
  - (a) 若施力沿著輪子前進（後退）方向：最大靜摩擦力很小（ $<0.75\text{kgw}$ ），動摩擦力，幾乎可忽略。
  - (b) 若施力沿著輪子側邊方向，則最大靜摩擦力與側邊角度有關，角度越大，最大靜摩擦力越大。
2. 前輪偏轉時，左、右兩輪摩擦力不同，瞬間移動有兩種運動方式：
  - (a) 前輪是以兩輪的中點為中心旋轉。
  - (b) 後輪是以一輪為支點，另一輪前進。
3. 由實驗 1，實驗 2 知：圓盤與扭扭車的質心不斷向側邊、向前移動，因此外觀上呈現「之」字型前進。
4. 扭扭車會前進或後退，是因前輪前輪受到切線方向施力偏轉時，與地面的摩擦力不同且偏向一側，使後輪當支點，產生轉動力矩。
5. 蛇類巧妙利用扭曲再伸直即可「之」字型前進，對蛇而言，是最省力的方式。而扭扭車利用前輪的轉動，則 4 輪的正向力重新分配，利用摩擦力不同而前進，將手的施力變成轉動力矩，質心因而前進，這與蛇前進的道理相同。
6. 若把手旋轉角度過大，則前輪順勢右（左）轉，而不是前進（後退），因此難以討論軌跡方程式。
7. 只有當把手慢速轉動，平滑、連續的軌跡符合本科展所推導的方程式，若把手快速轉動，所產生的不連續折線軌跡，非本科展所能討論。

## 捌、參考資料：

1. 扭扭車曾經榮獲 1994 年玩具設計競賽優良設計獎，專利人：賴金益先生，市面上並無相關書籍討論扭扭車的前進（後退）原理，故本科展具有原創性。
2. 本科展的軌跡推導也找不到相關的佐證或參考資料，若有錯誤敬請指教。因所識有限，只能用「數學幾何」作推導，無法用「動力學」做探討。

```

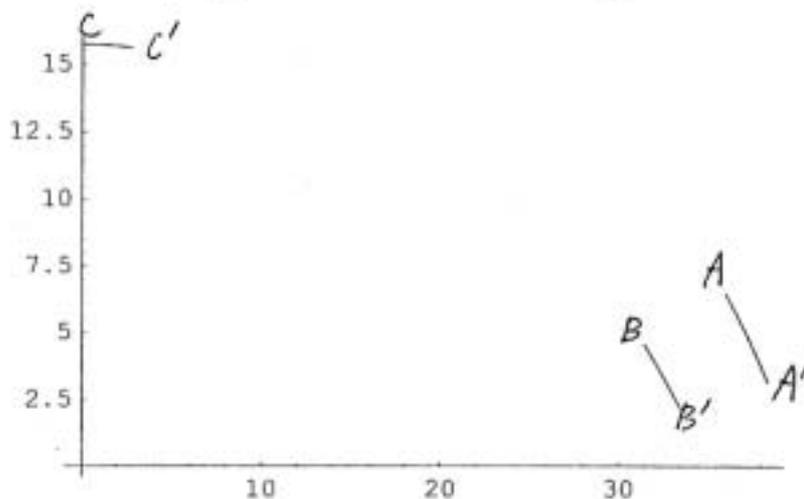
ParametricPlot[
  {
    {15.75 Cos[Pi / 2 - Pi t / 36] + 36 Cos[-Pi t / 36] +
      6.5 Cos[Pi / 2 - Pi t / 18],
     -15.75 + 15.75 Sin[Pi / 2 - Pi t / 36] +
      36 Sin[-Pi t / 36] + 6.5 Sin[Pi / 2 - Pi t / 18]},
    {15.75 Cos[Pi / 2 - Pi t / 36] + 36 Cos[-Pi t / 36] +
      6.5 Cos[3 Pi / 4 - Pi t / 18],
     -15.75 + 15.75 Sin[Pi / 2 - Pi t / 36] +
      36 Sin[-Pi t / 36] + 6.5 Sin[3 Pi / 4 - Pi t / 18]},
    {31.5 Cos[Pi / 2 - Pi t / 36],
     -15.75 + 31.5 Sin[Pi / 2 - Pi t / 36]}}, {t, 0, 1}]

```

```

ParametricPlot[{{36 Cos[ $\frac{\pi t}{36}$ ] + 15.75 Sin[ $\frac{\pi t}{36}$ ] + 6.5 Sin[ $\frac{\pi t}{18}$ ],
  -15.75 + 15.75 Cos[ $\frac{\pi t}{36}$ ] + 6.5 Cos[ $\frac{\pi t}{18}$ ] - 36 Sin[ $\frac{\pi t}{36}$ ]},
  {36 Cos[ $\frac{\pi t}{36}$ ] + 6.5 Cos[ $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi t}{18}$ ] + 15.75 Sin[ $\frac{\pi t}{36}$ ],
  -15.75 + 15.75 Cos[ $\frac{\pi t}{36}$ ] - 36 Sin[ $\frac{\pi t}{36}$ ] + 6.5 Sin[ $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi t}{18}$ ]},
  {31.5 Sin[ $\frac{\pi t}{36}$ ], -15.75 + 31.5 Cos[ $\frac{\pi t}{36}$ ]}, {t, 0, 1}]

```



- Graphics -

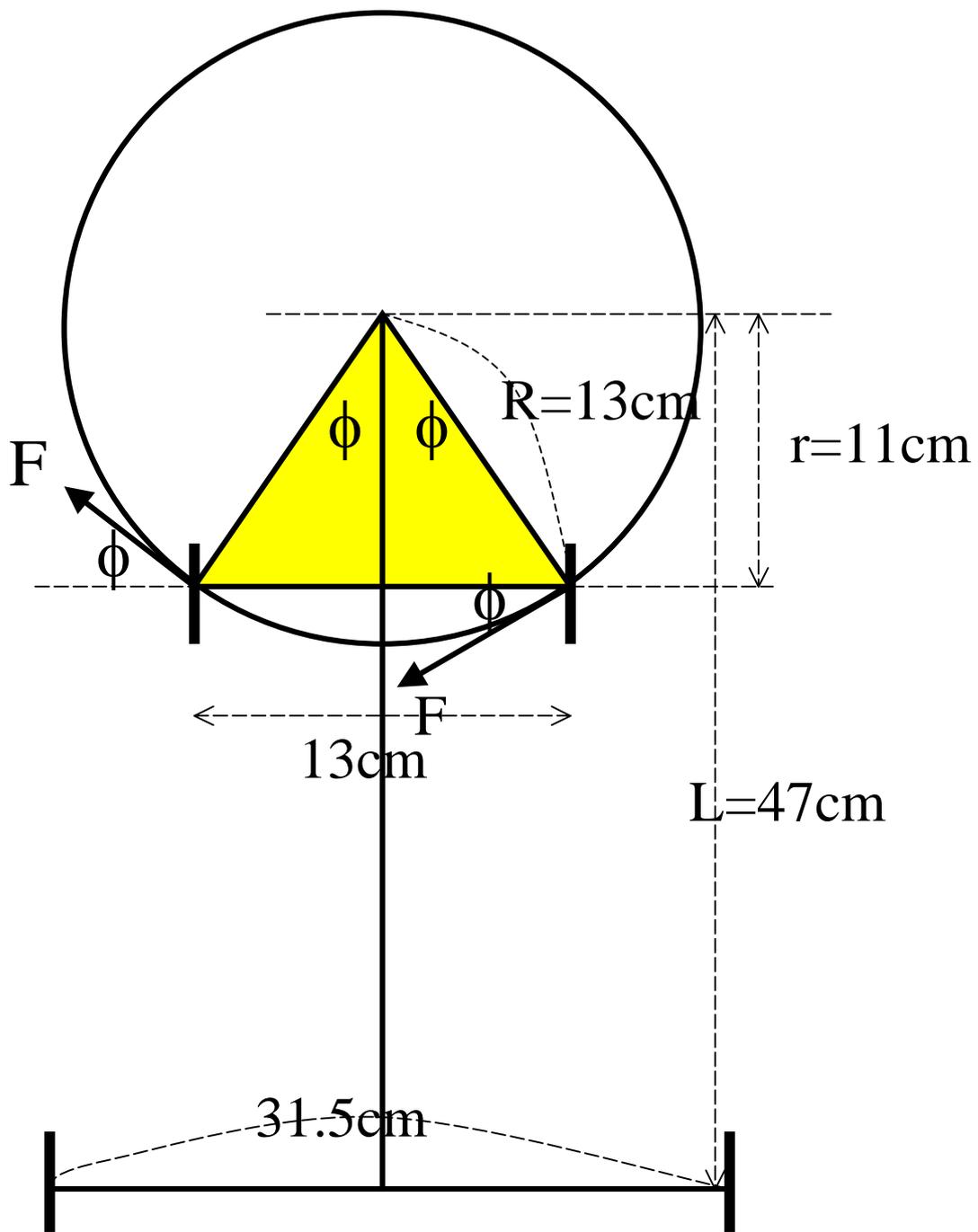


Fig.08 扭扭車前進圖

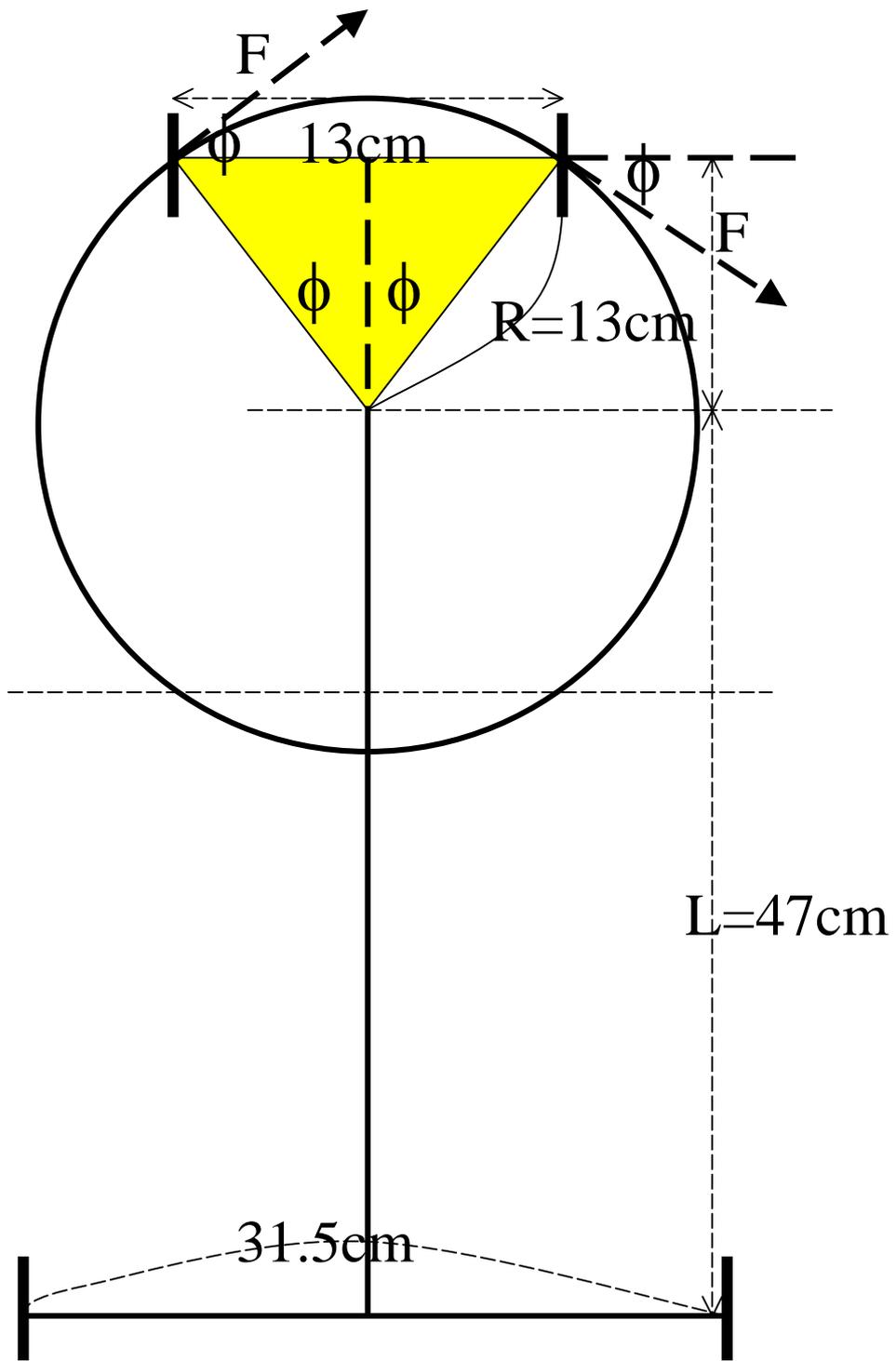


Fig.11 扭扭車後退圖

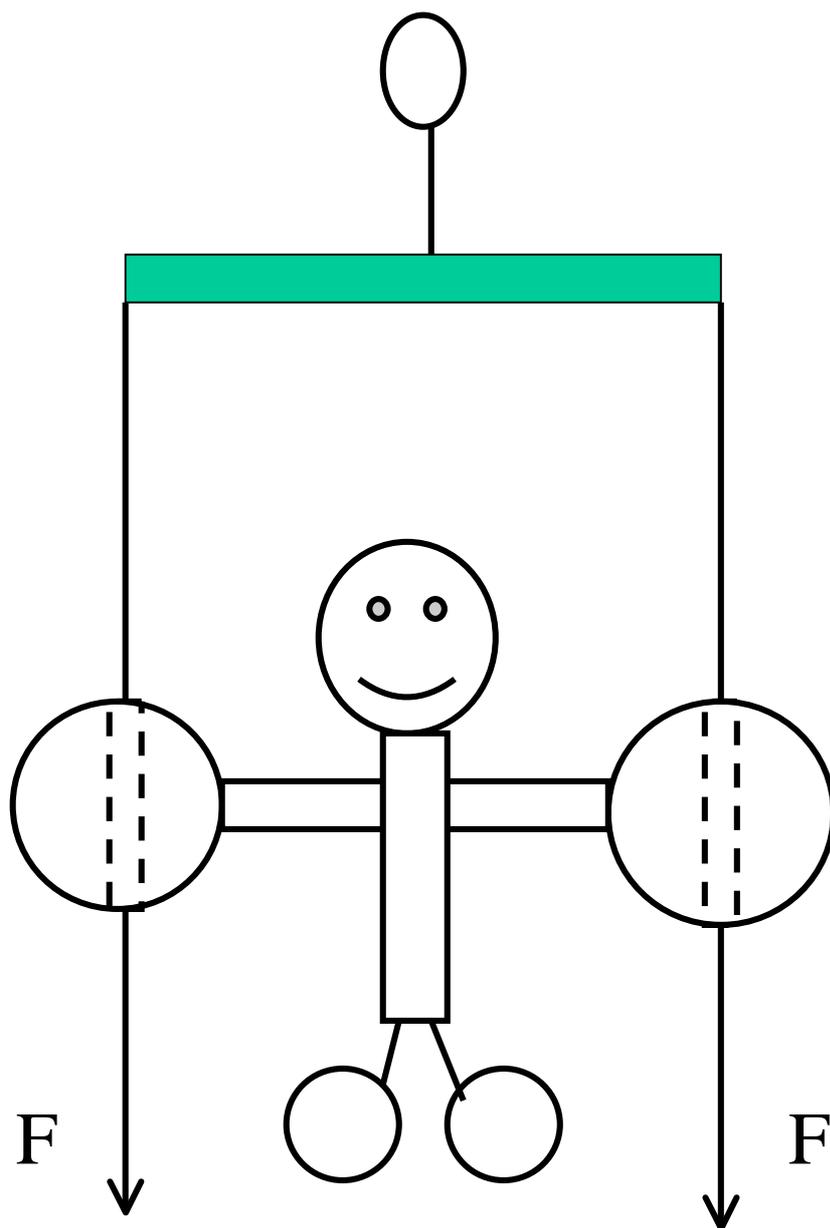


Fig.12 平衡桿維持水平, 兩繩  
平行下垂, 則玩偶自然落下

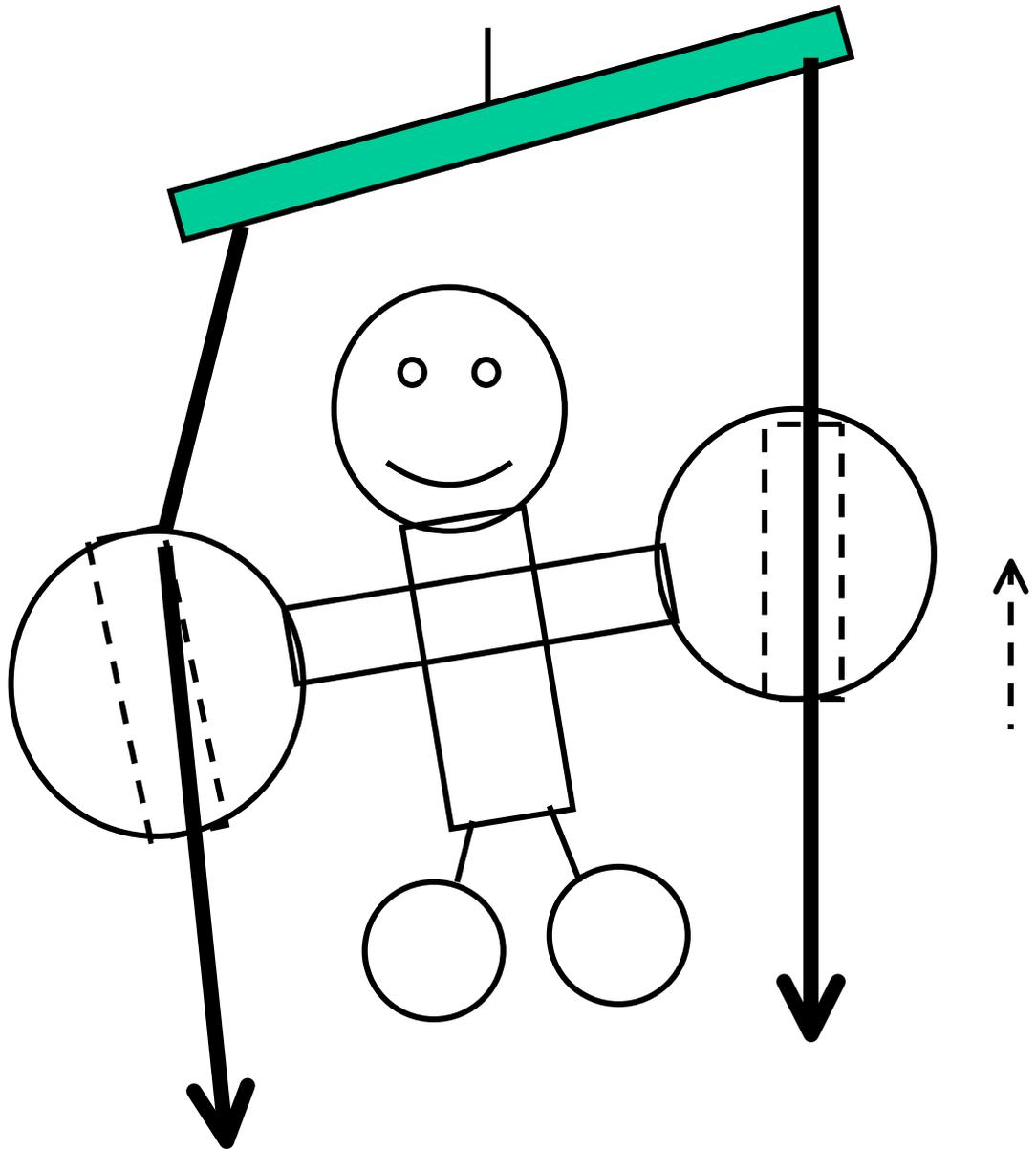


Fig.13 平衡桿傾斜,左端圓球為支點  
 ,右端圓球可上升

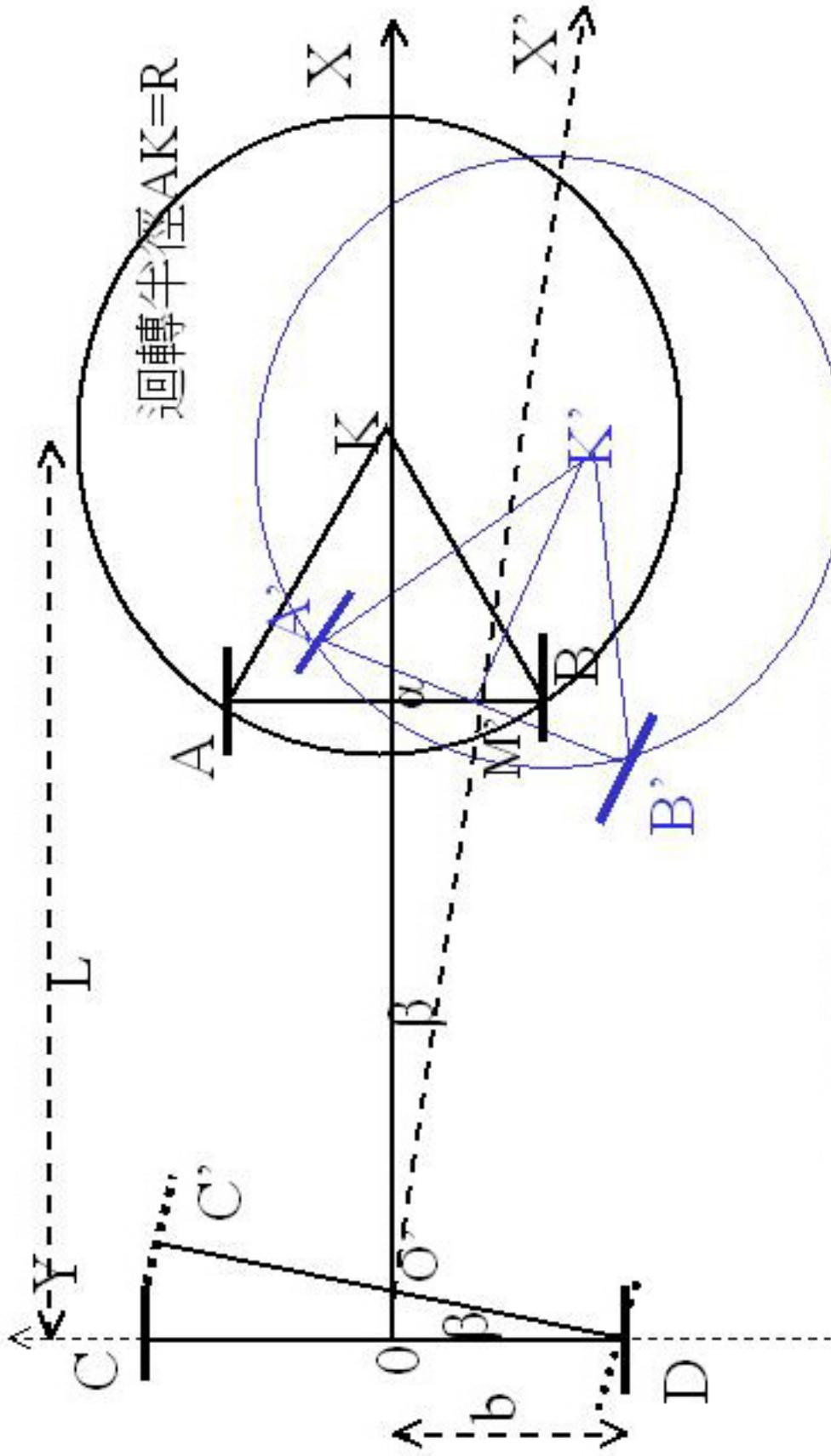


Fig.14 扭扭車的前進原理



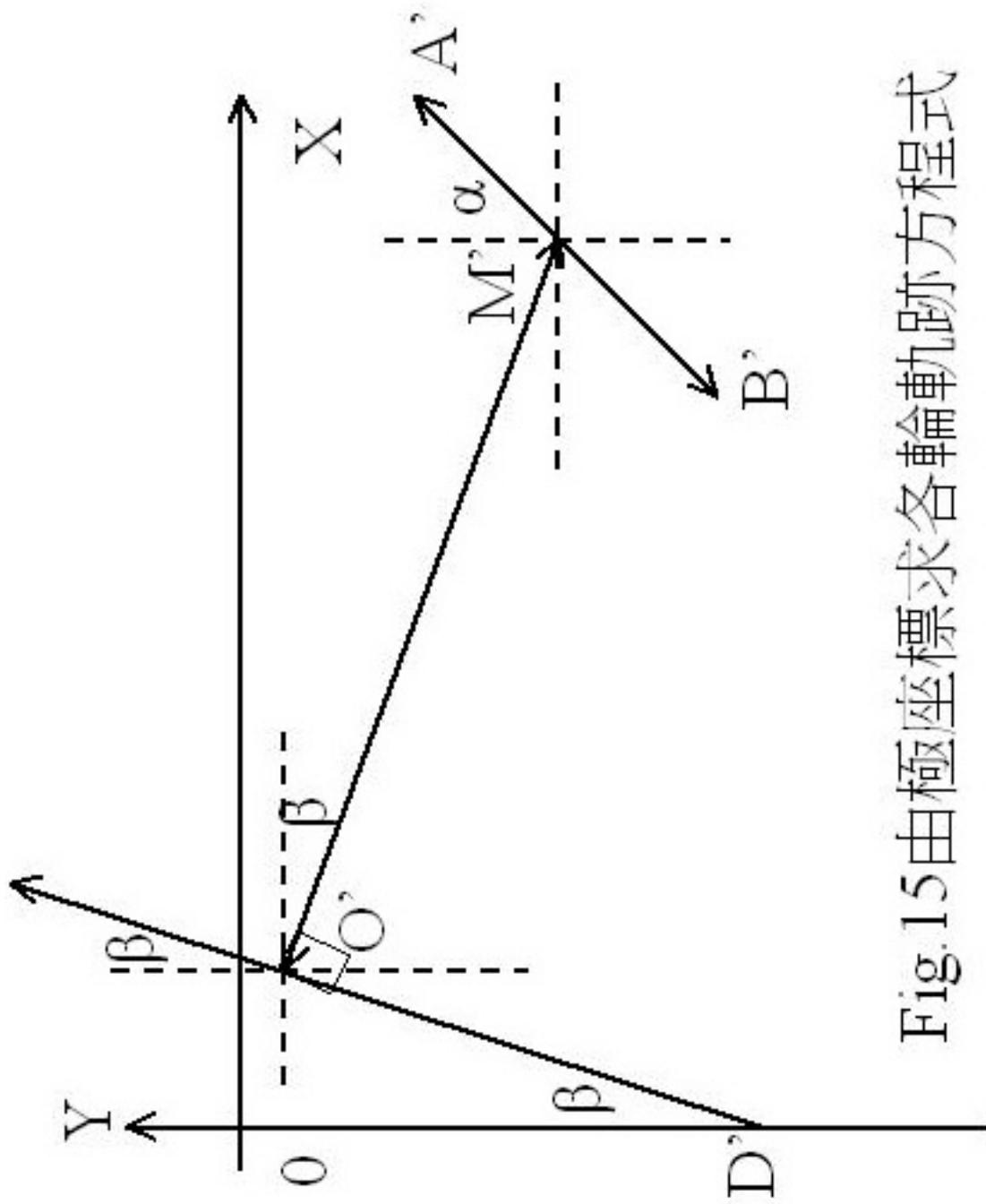


Fig.15 由極座標求各輪軌跡方程式

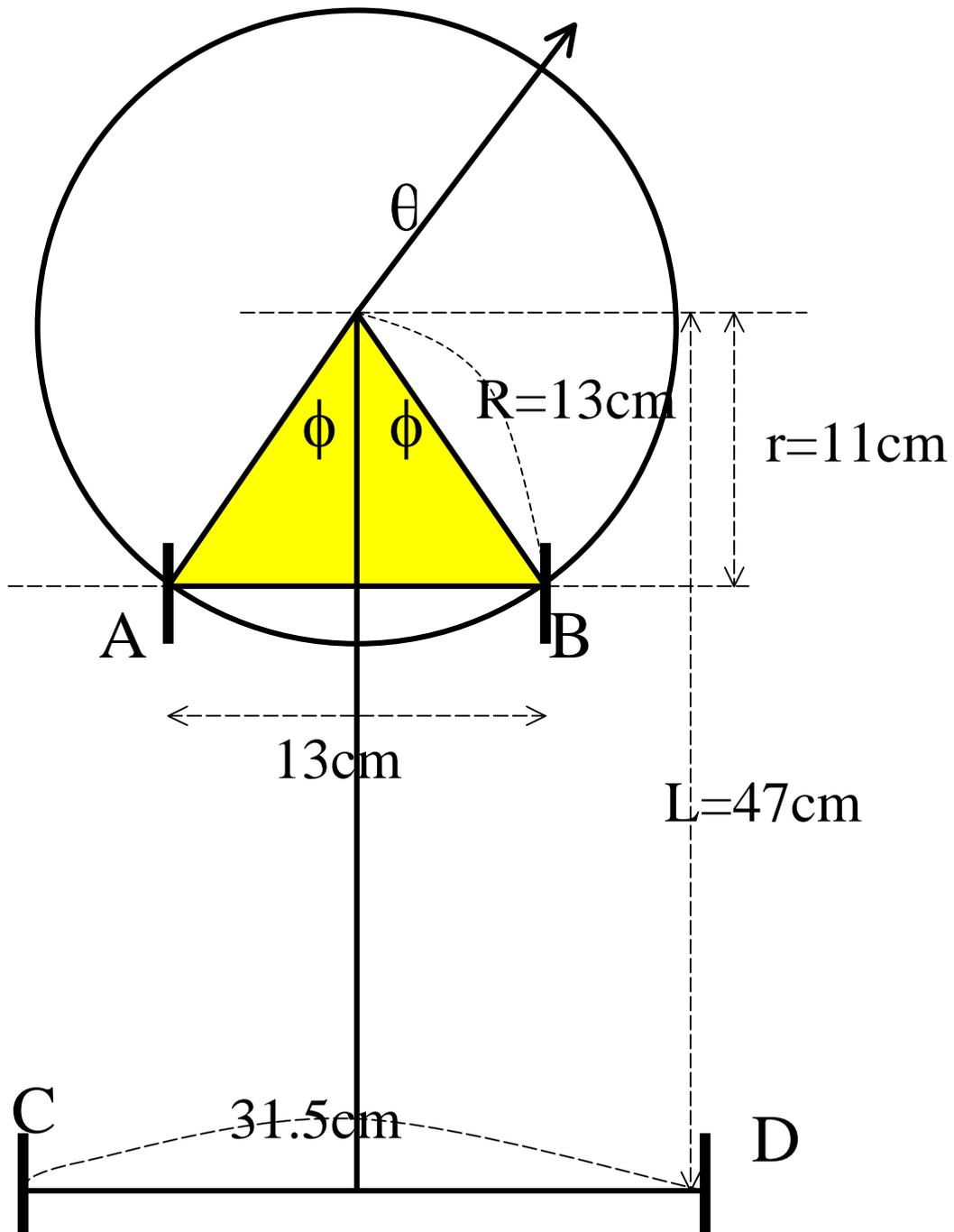


Fig.17 不同角度,測量摩擦力

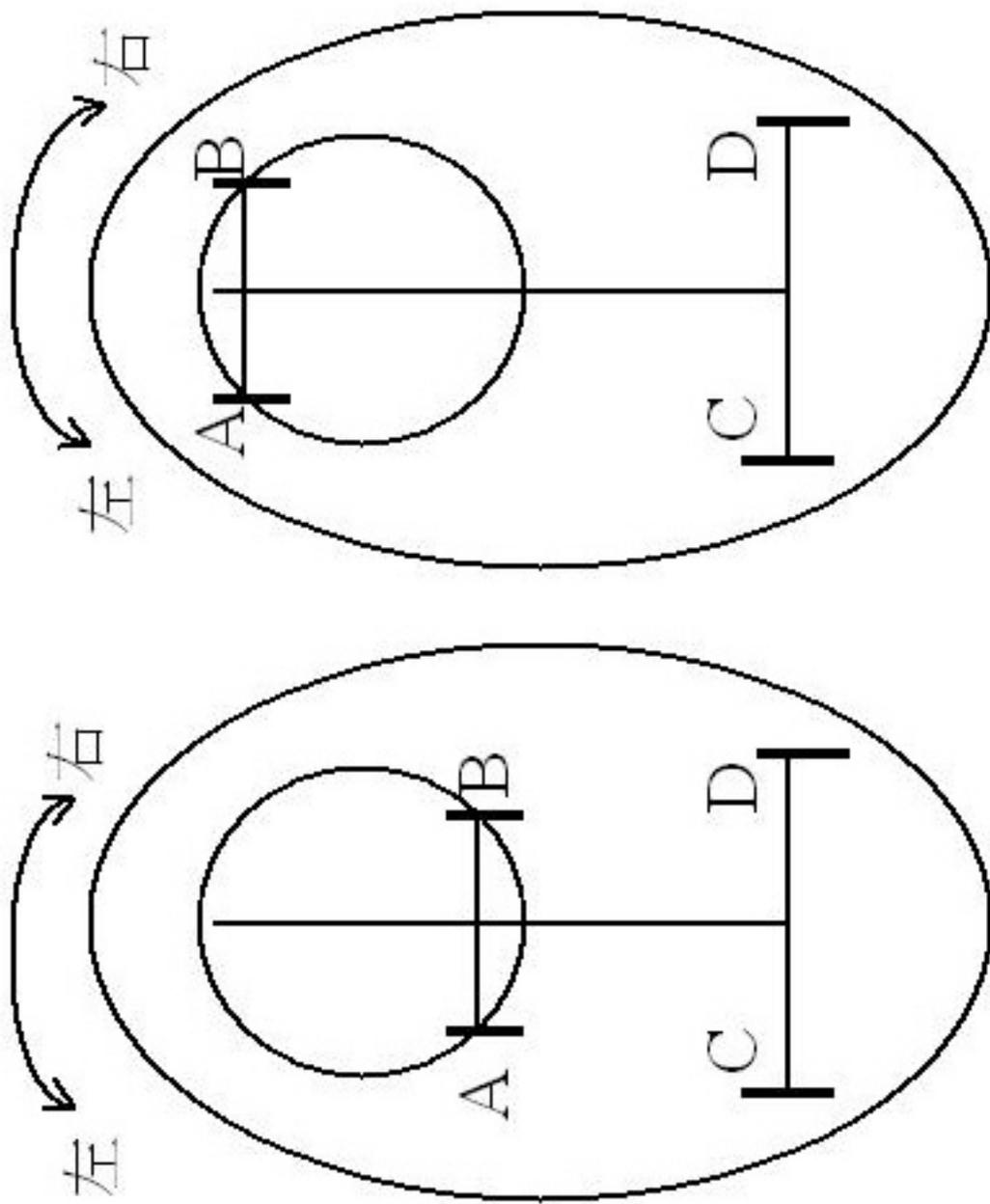


Fig. 19 扭扭車底面前進(後退),小角度擺動

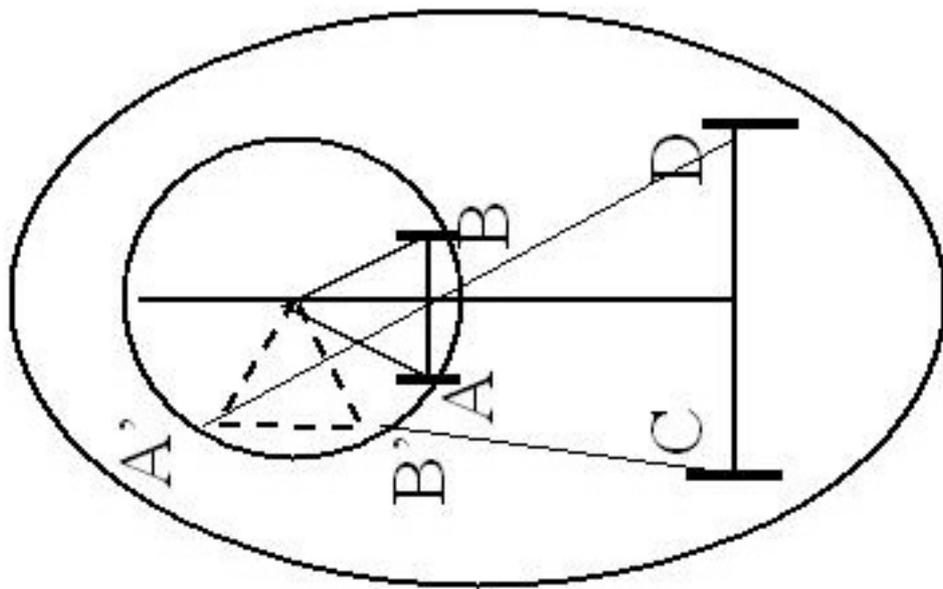


Fig.28 扭扭車把手旋轉 $90^{\circ}$

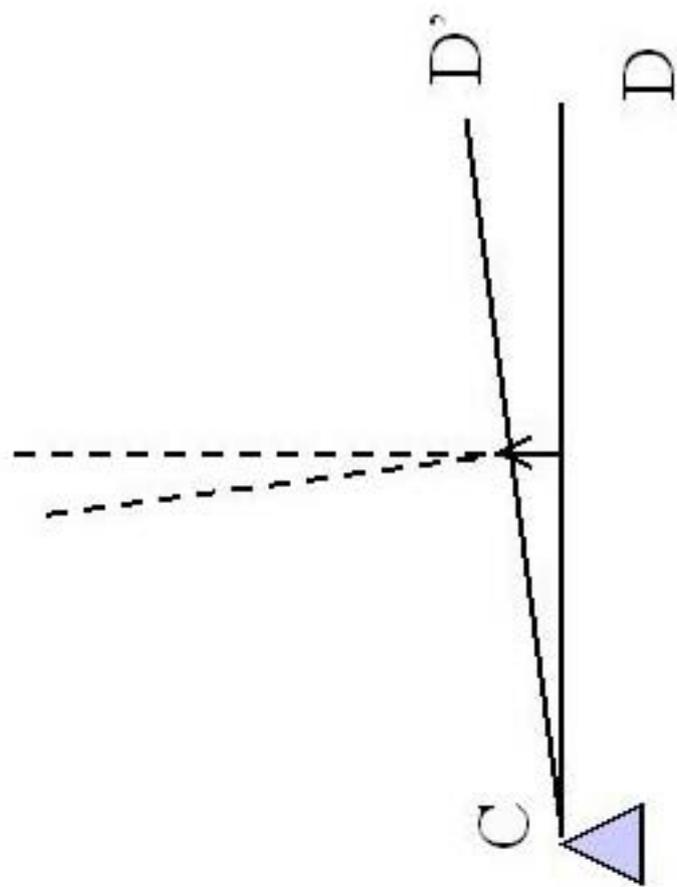


Fig.29 後輪中,C輪不動,  
D輪向前,質心往前移動

Fig.30 扭扭車的前進側面重心位置圖

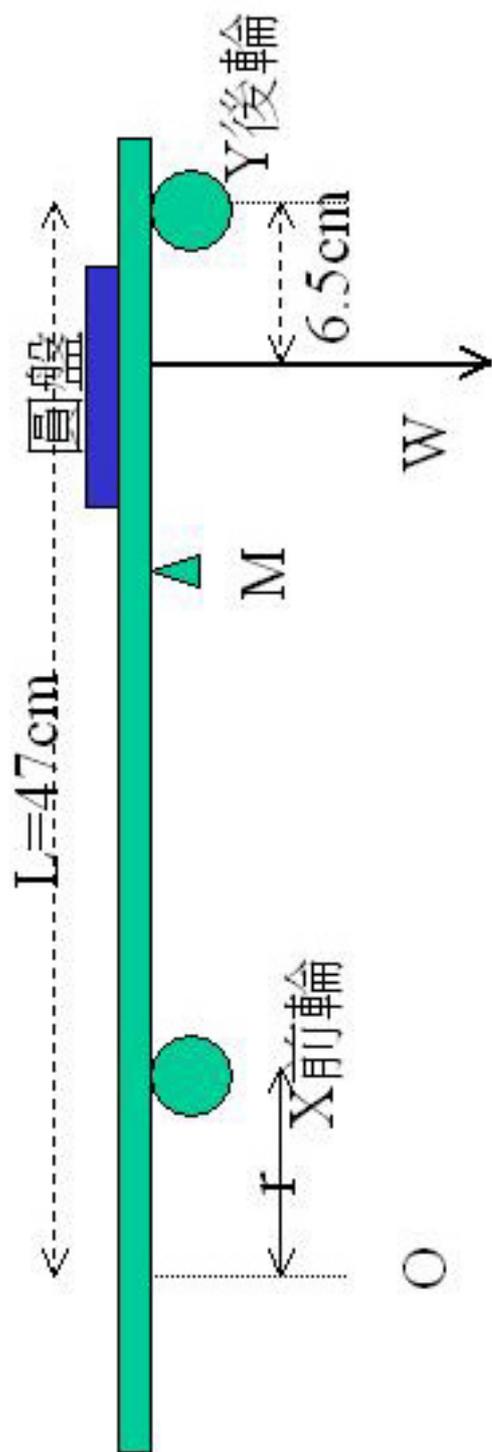
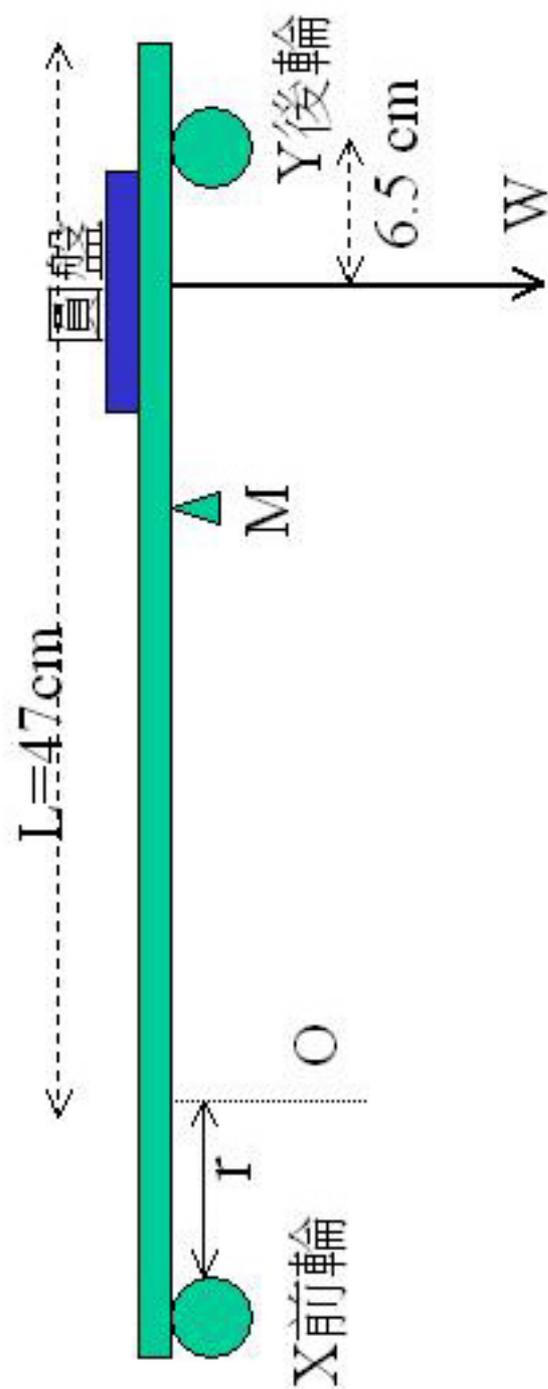


Fig.30 扭扭車的後退側面重心位置圖



## 圖 形 檢 索

圖片編號	圖形說明	圖片性質
Fig.01	父子坐扭扭車	數位相片
Fig.02	研究成員與設備	數位相片
Fig.03	數位體重計	數位相片
Fig.04	測量工具	數位相片
Fig.05	4 個圓盤標示重量	數位相片
Fig.06	W 表示前進(正面)	數位相片
Fig.07	W 表示前進(底面)	數位相片
Fig.08	扭扭車前進圖	PowerPoint
Fig.09	M 表示後退(正面)	數位相片
Fig.10	M 表示後退(底面)	數位相片
Fig.11	扭扭車後退圖	PowerPoint
Fig.12	玩偶拉繩上升(平衡桿水平)	PowerPoint,數位相片
Fig.13	玩偶拉繩上升(平衡桿傾斜)	PowerPoint,數位相片
Fig.14	扭扭車的前進原理	PowerPoint
Fig.15	扭扭車的軌跡推導	PowerPoint
Fig.16	不同角度測量摩擦力	PowerPoint
Fig.17	不同角度測量摩擦力	數位相片
Fig.18	小角度前進(後退)	數位相片
Fig.19	扭扭車底面前進後退小角度擺動	PowerPoint
Fig.20	前進慢速連續軌跡	數位相片
Fig.21	向後慢速連續軌跡	數位相片
Fig.22	向後退軌跡圖(大角度右轉)	數位相片
Fig.23	向後退(大角度)	數位相片
Fig.24	向前進(左轉)	數位相片
Fig.25	向後退(右轉)	數位相片
Fig.26	向前進(右轉)	數位相片
Fig.27	測量正向力(附圓盤)	數位相片
Fig.28	扭扭車底面把手轉 90 度	PowerPoint
Fig.28	底面偏轉 90 度	數位相片
Fig.29	後輪質心往前移動	PowerPoint
Fig.30	扭扭車前進後退重心位置圖	PowerPoint
表 1	摩擦力與角度的關係	
表 2	測量 4 輪的正向力	
表 3	不同位置的質心座標	



Fig.01. 親子玩扭扭車



Fig.02. 研究成員及設備



Fig.03 數位(指針)體重計



Fig.04 測量工具

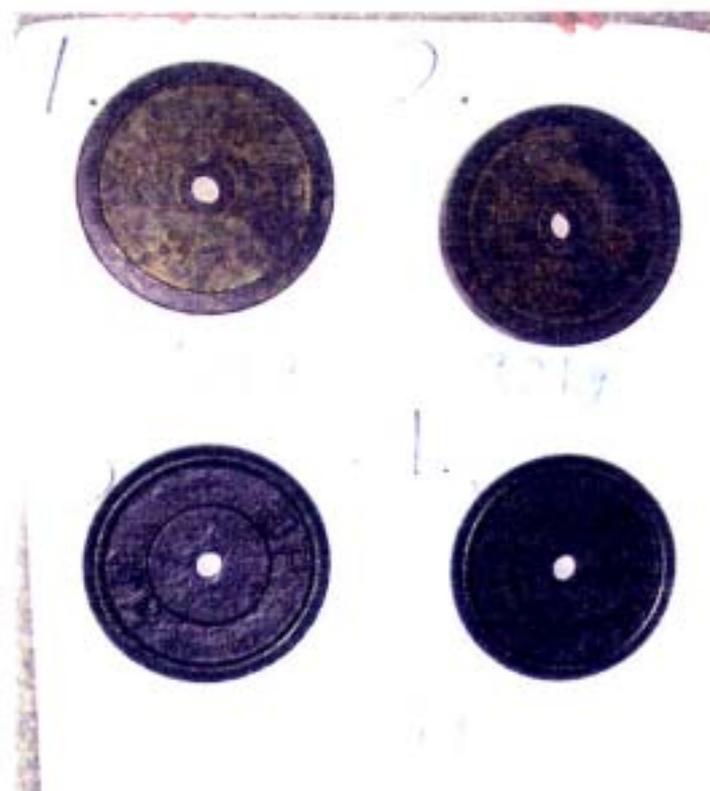


Fig.05 四個圓盤標示重量



Fig.06W 表示前進(正面)



Fig.07W 表示前進（底面）



Fig.09M 表示後退（正面）



Fig.10M 表示後退（底面）



Fig.12 玩偶拉繩上升  
（平衡桿水平）



Fig.13a 玩偶拉繩上升  
(平衡桿傾斜)



Fig.13b 玩偶拉繩上升  
(平衡桿傾斜)



Fig.17 不同角度測量摩擦力

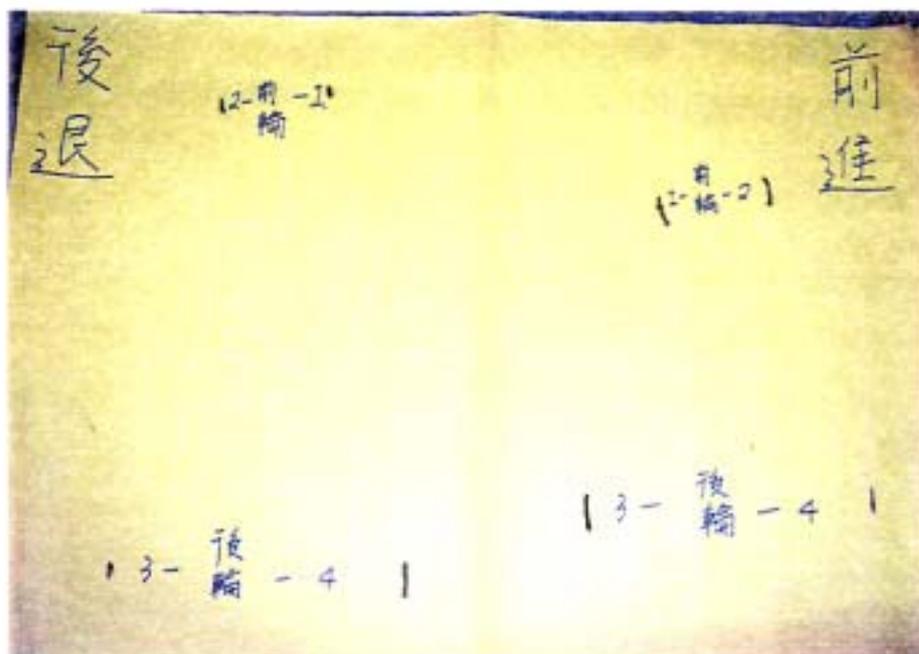


Fig.18 小角度前進(後退)

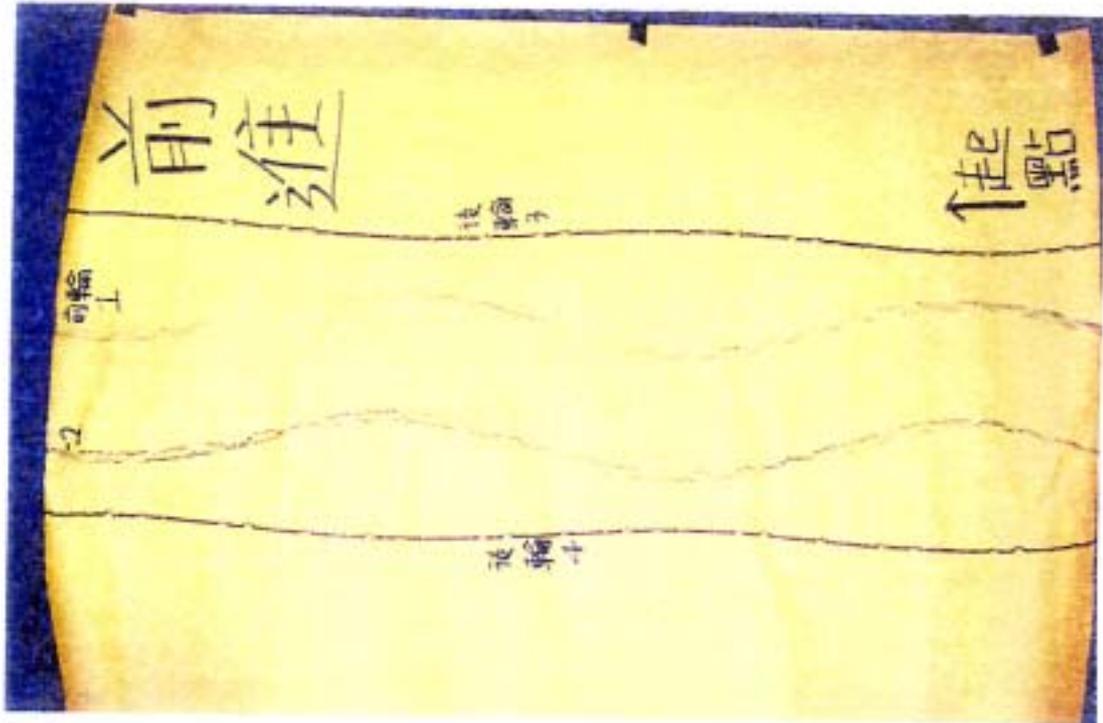


Fig.20 前進慢速連續軌跡

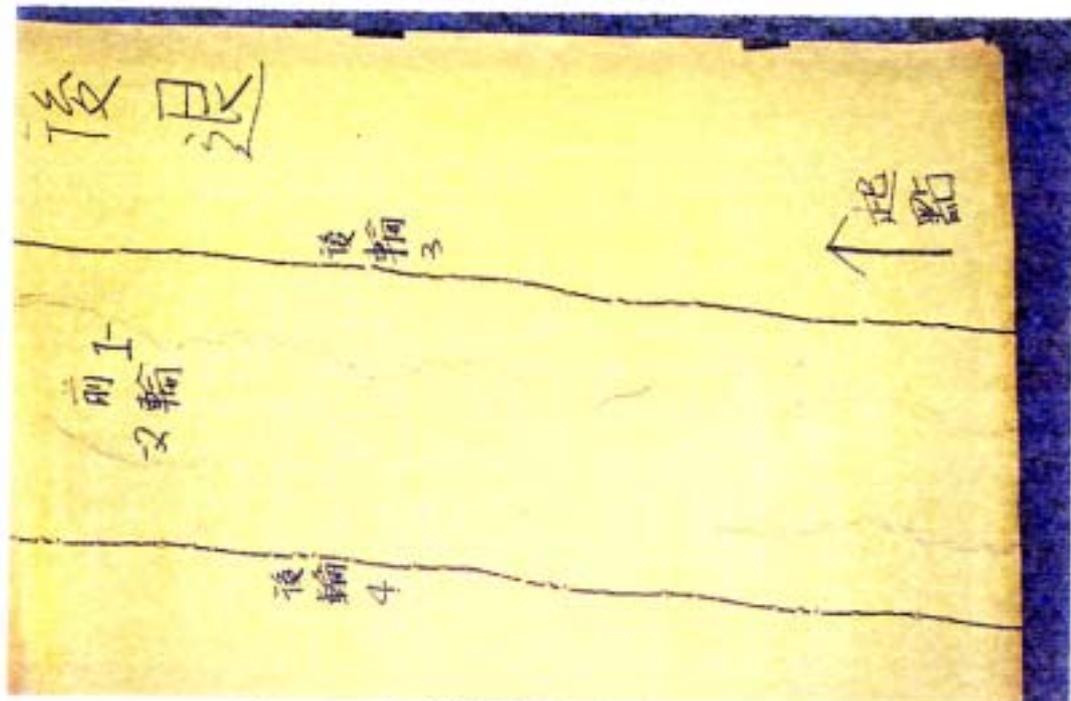


Fig.21 向後慢速連續軌跡

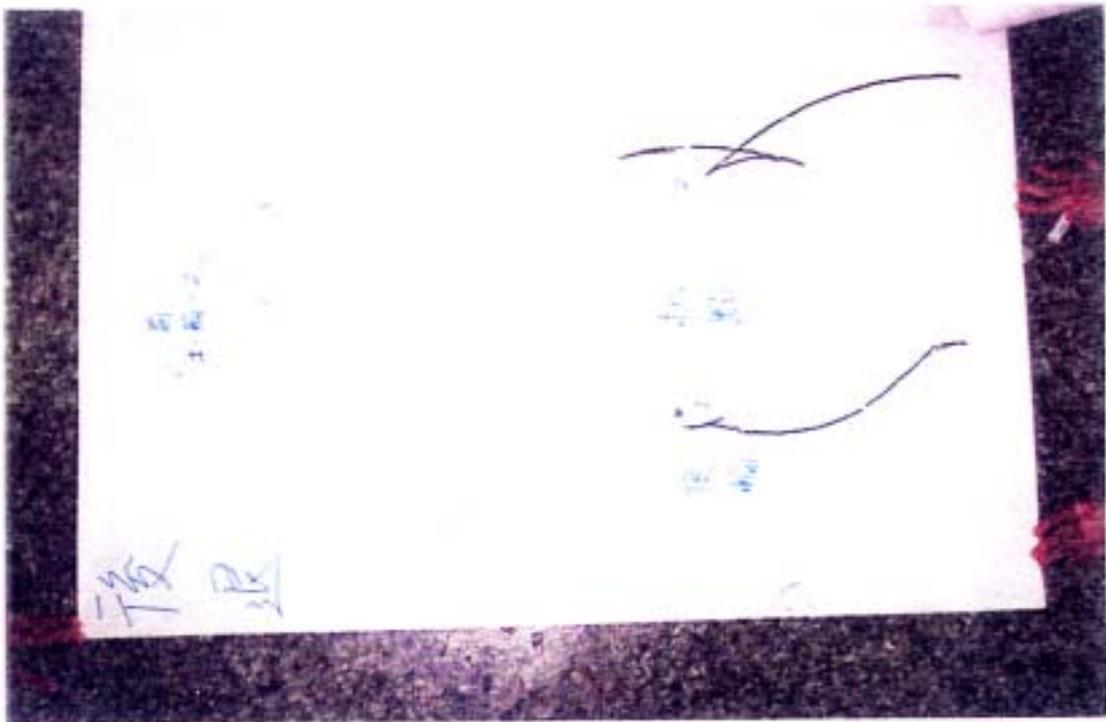


Fig.22 向後退軌跡圖(大角度右轉)

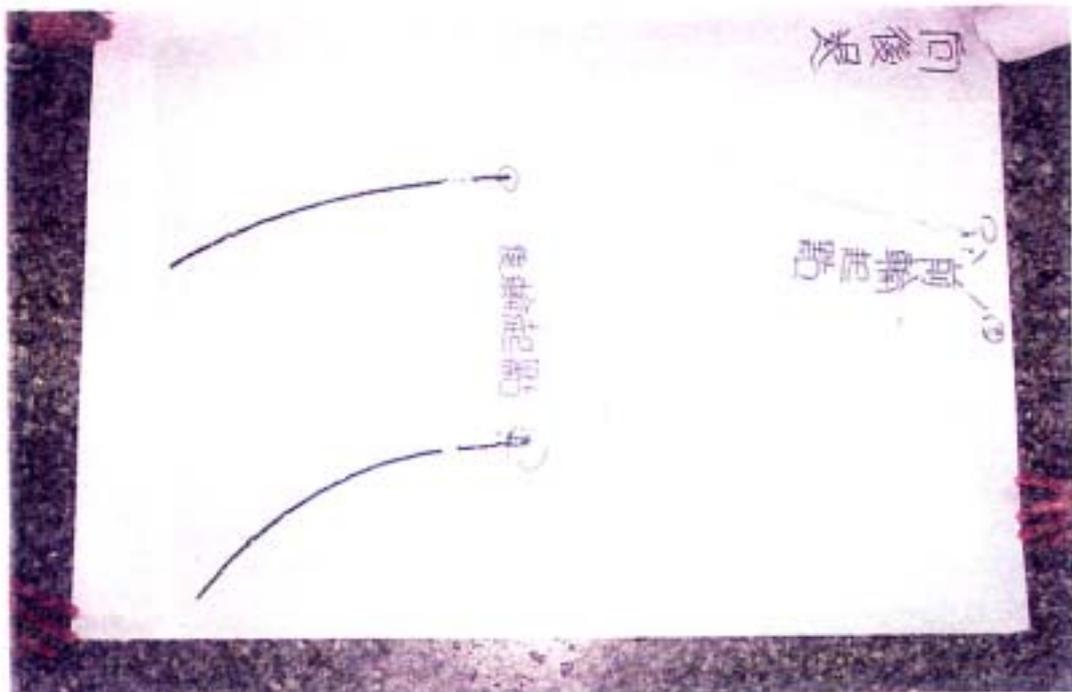


Fig.23 向後退(大角度)

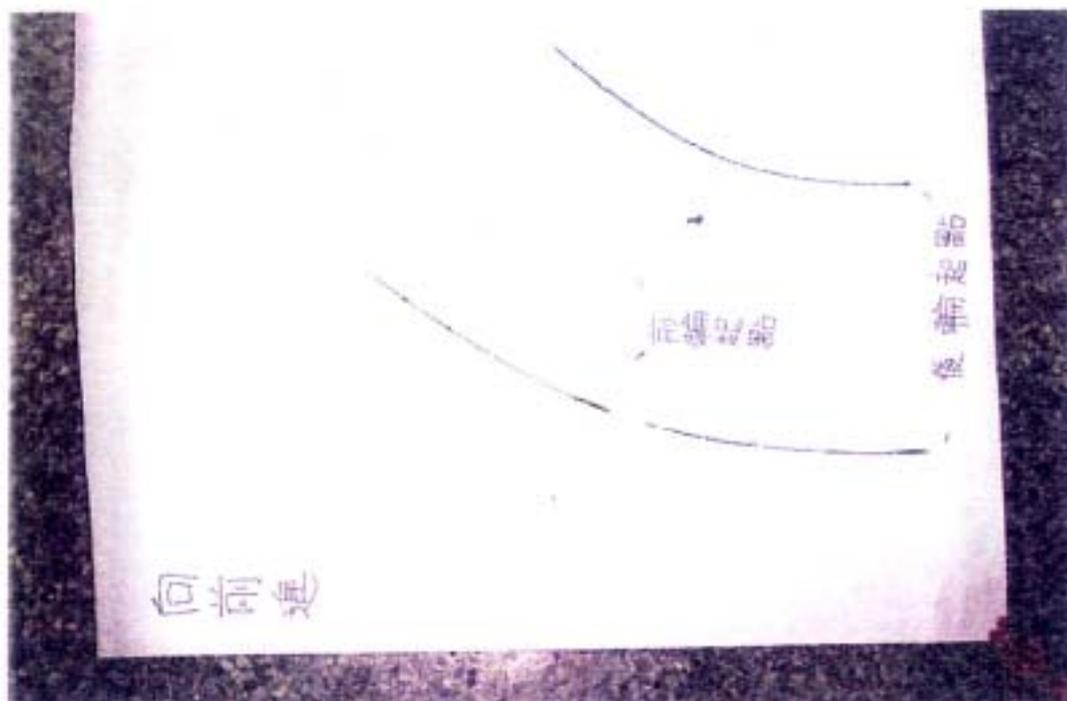


Fig.24 向前進(左轉)

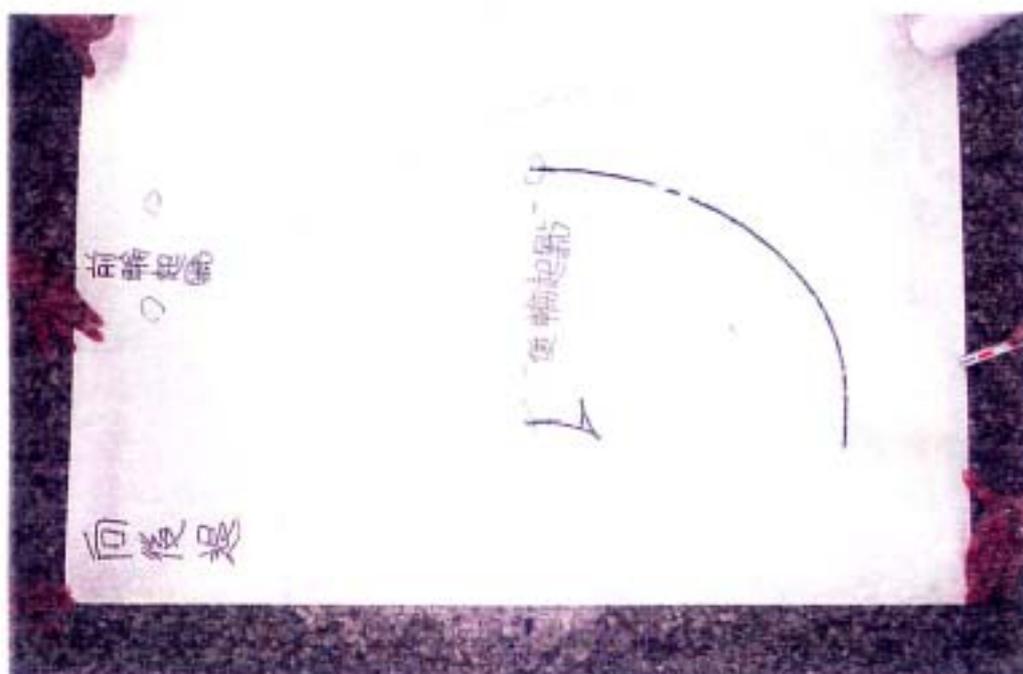


Fig.25 向後退(右轉)

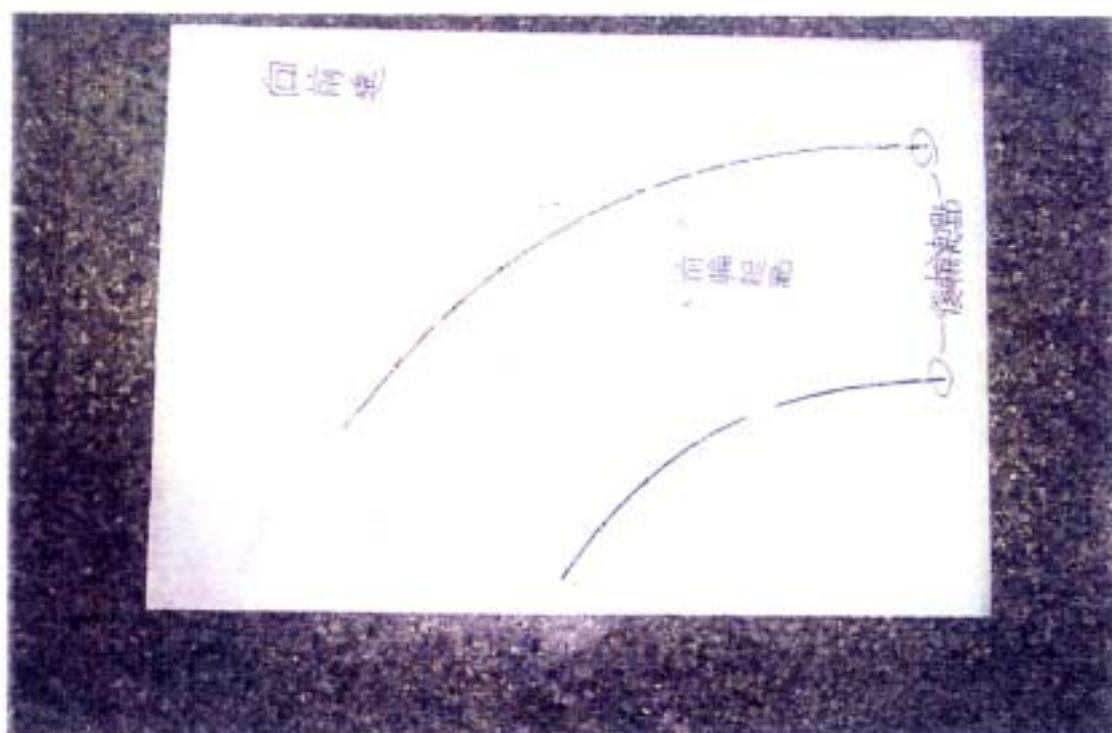


Fig.26 向前進(右轉)

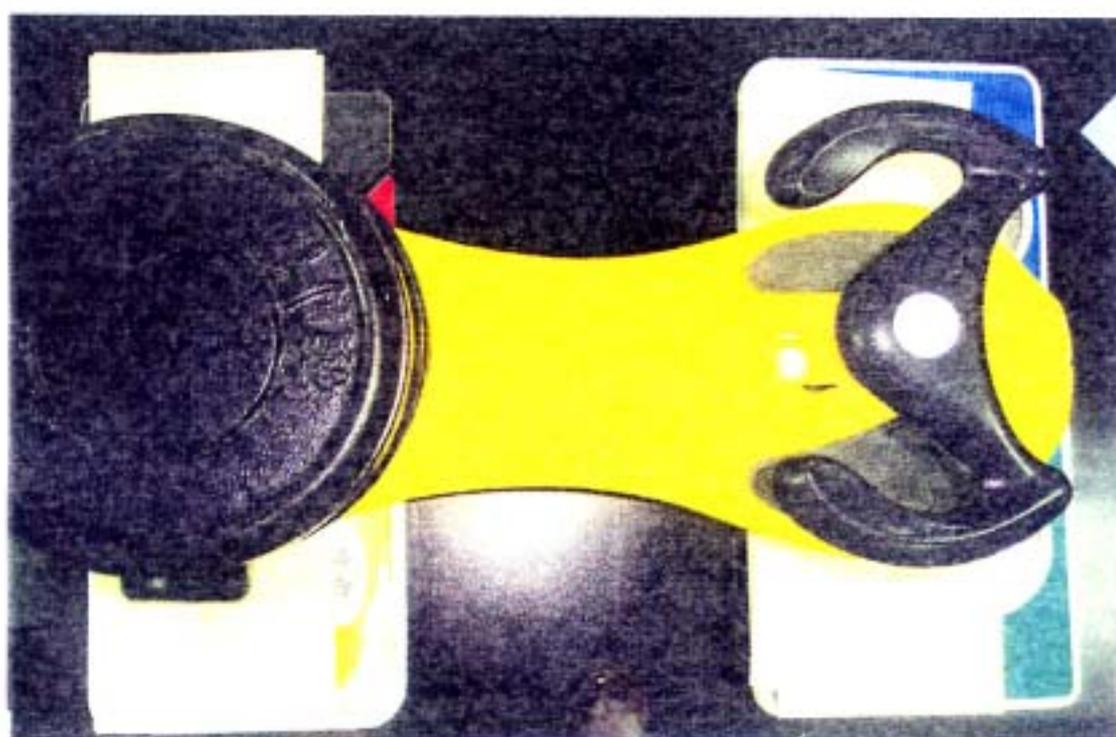


Fig.27 測量正向力(附圓盤)

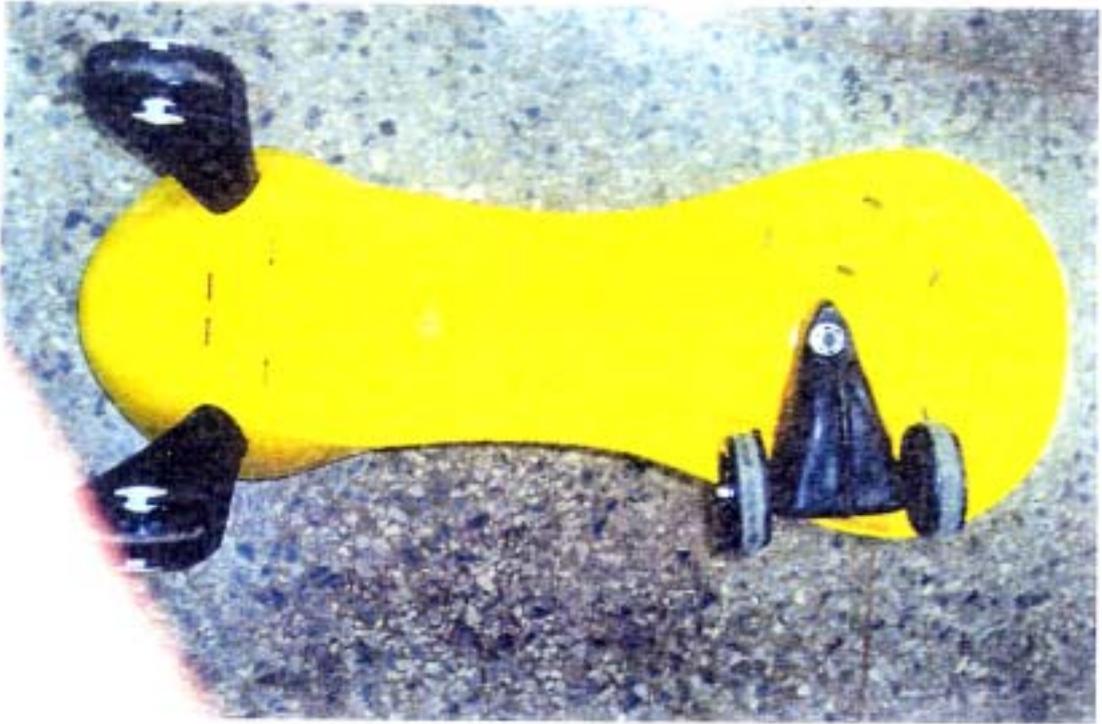


Fig.28 底面偏轉 90 度