

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-物理科

科 別：物理科

組 別：高中組

作品名稱：利用雷射光的偏折研究溶液的折射率梯度

關 鍵 詞：折射率梯度、擴 散、擴散係數

編 號：040113

學校名稱：

國立嘉義高級中學

作者姓名：

蘇桓誼、曾奕穎、羅文鍵

指導老師：

李文堂、陳宏昌



利用雷射光的偏折研究溶液的折射率梯度

摘要：

- 一、兩種不同折射率的液體分上下層（ n_1 ， n_2 ）置於同一容器中，由於分子擴散作用，混合液的折射率會隨著高度改變，稱為折射率梯度。
- 二、通過和鉛垂線成 45° 的玻棒的雷射光照射盛有折射率梯度的方形盒，在屏上會出現常態曲線分佈圖，測量其涵蓋面積，可算出 $n_2 - n_1$ 。
- 三、半圓筒盛有折射率梯度的液體，雷射光前方加光柵，雷射光源置於升降台上，逐漸升高升降台，在屏上：
 - （一）光點距離隨高度改變，可直接量出折射率如何隨高度變化。
 - （二）雷射光向下偏 Z ，我們推導出折射率梯度 $\frac{dn}{dy}$ 和 Z 成正比，且作 $\frac{dn}{dy} - y$ 圖，亦成常態分佈，量其面積亦可求出 $n_2 - n_1$ 。
 - （三） $\frac{dn}{dy}$ 隨時間改變，可進一步測量擴散係數。

壹、 研究動機：

利用半圓形盒求水的折射率實驗時，同學在水中放入食塩（未攪拌）測量時，發現折射率隨時間改變，引起我們進一步研究的興趣。

貳、 研究目的：

- 一、 利用雷射光通過光柵後，照射半圓形盒，測盒中液體的折射率。
- 二、 雷射光通過和鉛直線成 45° 的玻璃棒，再照射盛上下兩種不同液體的方形盒，研究折射率梯度隨時間的變化。
- 三、 雷射光經光柵後照射半圓形筒，由雷射光的偏折，研究溶液的折射率梯度。

參、 原理：

- 一、 雷射光通過光柵（每 mm 300 條）在距光柵 a 處的光屏上出現相距 L 的干涉點 $\left(d = \frac{1}{300} mm \right)$

- 二、 在光柵前方置放半圓形盒，盒中盛攪拌均勻的待測液，使光線沿著盒的半徑穿出空氣，照在距盒 a 處的屏上，光點相距 L' ，

$$\frac{L}{L'} = n \cdots (1) = \text{待測溶液的折射率。}$$

- 三、 溶液折射率 n 和溶質（折射率 n_s ）濃度 c 的關係為

$$n^2 = n_f^2 + c(n_s^2 - n_f^2) \cdots (2), \text{ 學長於卅六屆科展〔註一〕用本}$$

公式及中空的稜鏡求溶質折射率（三位有效數字， n_f 為溶劑折射率），我們使用的光柵測折射率可達四位有效數字，我們重做此實驗，可瞭解溶液折射率隨溶質濃度的變化。在（2）式中，

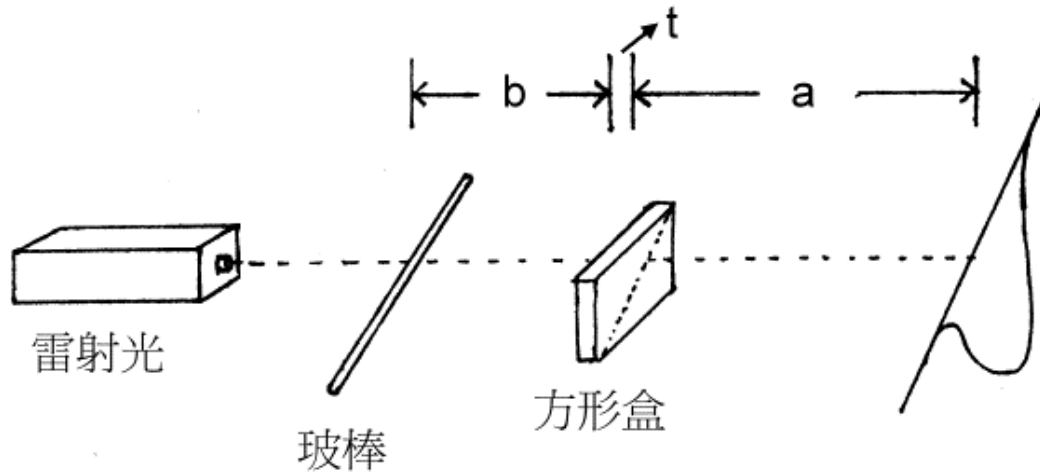
$$c = \frac{\text{溶液中溶質的密度}(d_1)}{\text{溶質的密度}(d_2)}$$

- 四、 寬度 t 的方形壓克力盒，下層盛半盒均勻水溶液其折射率 n_2 ，緩緩加入水（折射率 n_1 ）至整盒，下層的溶質擴散至上層，1975 年 Barnard〔註二〕利用雷射光照射和鉛垂線成 45° 的玻棒，形成平行光束，再照射方形盒，如圖一所示，在屏上呈現常態分佈曲線，Barnard 用我們看不懂的理論，推導出曲線鐘形所涵蓋的面積為

$$A = \frac{at(a+b)}{b}(n_2 - n_1) \cdots (3), \text{ 我們在老師指導下，以簡單數}$$

學推導出（3）式〔詳見附錄一〕，為了和我們所設計的實驗做對照比較，我們利用此器材及公式（3）做進一步的研究。〔Barnard

推導出（3）式，且用硫代硫酸鈉水溶液 n_2 ，水 n_1 做實驗，在不同時間下用照相機拍下常態曲線分佈圖，觀察各不同時間下的鐘形不同，但涵蓋面積相等。]



[圖一：溶液使雷射光偏折]

五、高度 30 公分的半圓形筒半徑 r ，下半層盛折射率 n_2 的溶液，上半層折射率 n_1 的水溶液，擴散一段時間後，將雷射光置於很穩重的升降台上（光柵貼在雷射光出口），逐漸升高雷射光，量出各位置的溶液折射率且以高度 y 為橫軸，折射率 n 為縱軸，可觀察溶質擴散對折射率的影響（見圖二於後面彩色頁）。

六、我們原來的構想是要利用上述 $n-y$ 圖作出 $\frac{dn}{dy}-y$ 圖，但在實驗過程中發現雷射光經光柵再經溶液後，不但水平方向沿盒的半徑散開，且在垂直方向上向下偏折甚多，偏折的距離和折射率梯度成正比，通過光柵的雷射光，沿著盒的半徑（ r ）進入溶液時，經折射率 n 的光程 = $\frac{CT}{n}$ [C ：真空中的光速， T ：時間]，經 $n+dn$ 的

$$\text{光程} = \frac{CT}{n+dn}, \text{ 依海更士原理光線在盒中偏向 } \alpha_1, \alpha_1 = \frac{CT/n+dn}{y}$$

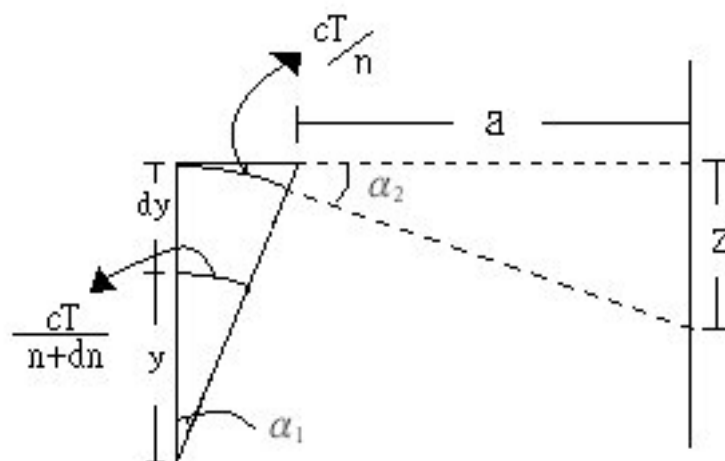
$$= \frac{CT/n}{y+dy} \Rightarrow ndy = ydn$$

$$\therefore \alpha_1 = \frac{CT/n}{y+dy} = \frac{r}{y} = \frac{r}{n} \frac{dn}{dy}$$

當光由盒中出空氣時： $n \sin \alpha_1 = 1 \cdot \sin \alpha_2 \quad \Theta \alpha_1, \alpha_2 \leq 5^\circ$

$\therefore n \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{Z}{a} \Rightarrow Z = ar \frac{dn}{dy}, \frac{dn}{dy} = \frac{Z}{ar} \dots (4)$ ，量筒至屏之距

離 a ，筒半徑 r ，鉛直下偏距離 Z ，可得 $\frac{dn}{dy}$ 。



〔圖三：折射率梯度使雷射光偏折〕

肆、 器材：

- | | |
|------------------------------------|-----------------------|
| 一、雷射光源（4mA，6328Å） | 二、玻棒（半徑約 0.4cm） |
| 三、半圓形盒 | 四、半圓形筒（半徑 6cm，高 30cm） |
| 五、透明方形盒二個（長 10.5cm，寬 2.5cm，高 12cm） | |
| 六、升降台（由車床改裝） | 七、天平 |
| 八、攪拌器 | 九、待測藥品 |

伍、 實驗步驟：

- 一、半圓形盒於桌面上，雷射光前方附光柵，雷射光投射在屏上，兩光點距離 L ，在盒中加入蒸餾水，光點距離 L' ，水的折射率 $n_1 = \frac{L}{L'}$ 。
- 二、取 V mL 的水，加入 m 克食鹽，充份均勻攪拌後量溫度，用上法量待溶液折射率 n ，再代入公式（2）可求出食鹽的折射率 n 。改用硫代硫酸鈉重做同樣實驗。
- 三、透明方形盒先注入半盒飽和硫代硫酸鈉溶液，再注滿水，雷射光經和鉛直成 45° 的玻棒照射至透明盒再照射到屏上的一白紙，雷射光受溶液偏折，成常態分佈曲線，起初曲線之鐘形非常尖銳，然後漸趨平穩。每隔一段時間，在紙上劃出分佈圖，量 a, b, t 並用透明方格紙量曲線涵蓋面積 A ，代入公式（3），求出飽和硫代硫酸

鈉溶液折射率。

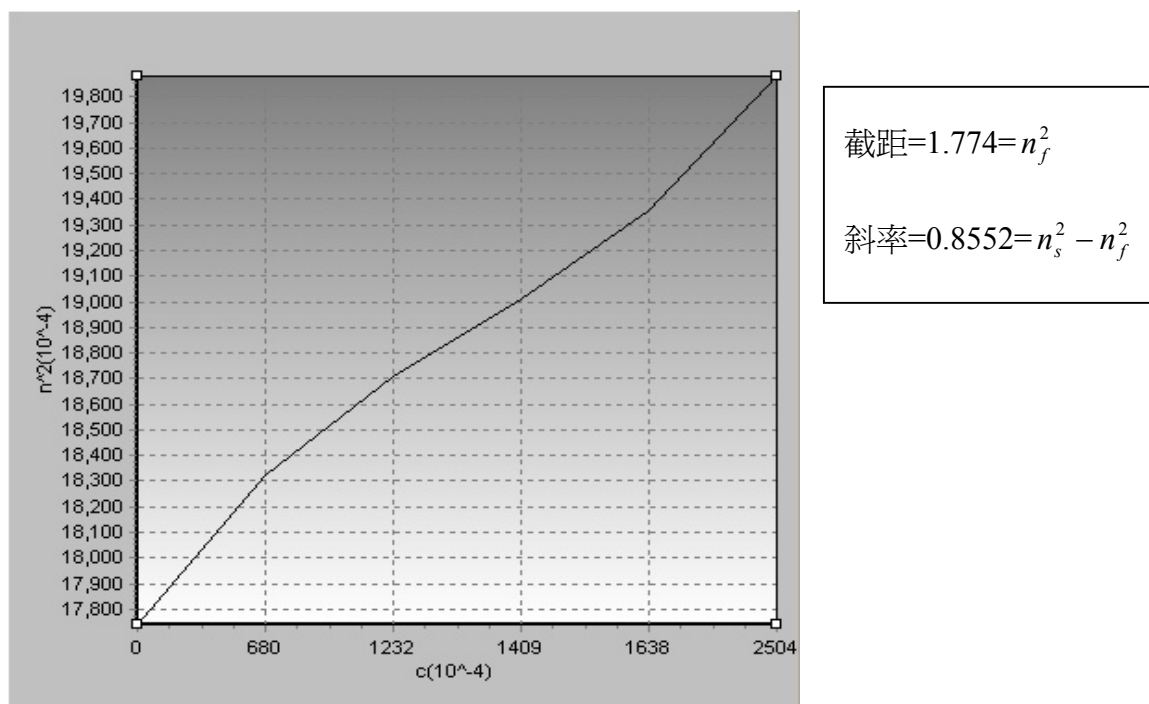
- 四、 方形透明盒下層盛半盒甘油，上層放半層水，做上述實驗，求出甘油折射率。
- 五、 半圓形筒下層放入半筒飽和硫代硫酸鈉水溶液，上層放入水，雷射光附光柵置於升降台上，由筒底逐漸上升，量出各高度的溶液折射率，作 $n-y$ 圖。
- 六、 上步驟改測量雷射光向下偏的距離 Z ，量出盒的半徑 r ，盒至屏距離 a ，由 (4) $\frac{dn}{dy} = \frac{Z}{ar}$ ，作 $\frac{dn}{dy}-y$ 圖，隔一段時間後重做此實驗，以探討時間對折射率梯度的影響。
- 七、 換甘油重做上述實驗。

陸、 實驗結果：

- 一、 表一為利用光柵測量不同濃度的食鹽水溶液折射率的結果，以 n^2 為縱軸， c 為橫軸，($c = \frac{d_1}{d_2}$ 為相對濃度， d_2 為食鹽密度)，作 n^2-c 圖，結果在圖四 (截距 $= 1.774 = n_f^2$)，將 d_1 ， n 代入公式 (2) 求得食鹽折射率 $n_2 = 1.621$ 和公認值 1.5443 比較，誤差 5%。

表一、食鹽水溶液的折射率〔水溫 26°C，食鹽密度 $2.164 \frac{g}{cm^3}$ 〕

	濃度 $d_1(\frac{g}{cm^3})$	$L(cm)$	$L'(cm)$	N	c
6g	0.1472	67.68	50.00	1.3536	0.0680
12g	0.2666	67.68	49.48	1.3678	0.1232
18g	0.3049	67.68	49.09	1.3788	0.1409
24g	0.3545	67.68	48.64	1.3914	0.1638
30g	0.5419	67.68	48.00	1.4100	0.2504



〔圖四：食鹽水 $n^2 - c$ 關係圖〕

- 二、 硫代硫酸鈉由實驗測得折射率=1.5472 和公認值1.4886比較，誤差4%。
- 三、 方形盒盛飽和硫代硫酸鈉水溶液和雷射光通過玻棒照射，其常態分佈曲線的變化圖如圖五(見後面彩色頁，此圖為重複曝光的照片)。
本實驗結果：
 - (一) 置入兩液後 20 分鐘得到之鐘形非常尖銳。
 - (二) 2 小時後平穩甚多。
 - (三) 經 4 天後，每 2 小時觀察一次，已沒有太大變化。
 - (四) 不同時間的鐘形涵蓋面積用透明方格紙量面積相等。
- 四、 改用照相館沖洗相片的高感度海波（硫代硫酸鈉加冰醋酸），常態分佈圖在開始擴散的前 4 小時，鐘形變化比飽和硫代硫酸鈉快很多，4 天後亦沒有多大變化。催化劑使硫代硫酸鈉擴散速率加快。
- 五、 方形盒下層放甘油，上層放水（二者均為液體純物質，折射率各為

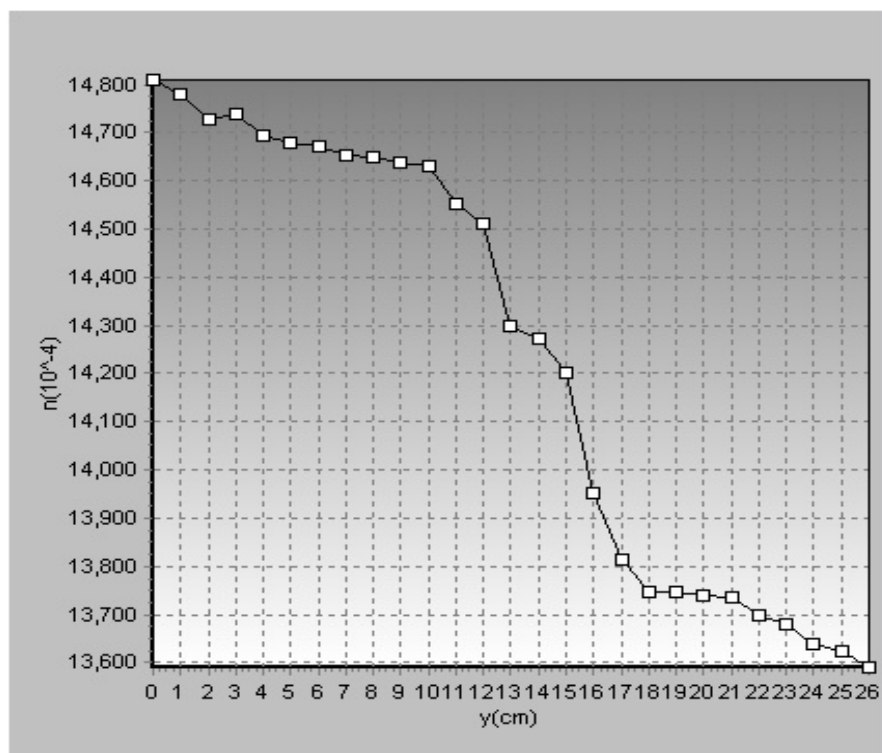
n_2, n_1 ）雷射光照射形成的常態分佈曲線面積 $A = 311.5$ ，

$a = 200\text{cm}$ ， $b = 140\text{cm}$ ， $t = 2.5\text{cm}$ ， $n_1 = 1.333$ ，由

$A = \frac{at(a+b)}{b}(n_2 - n_1)$ ，得 $n_2 = 1.589$ 和公認值 1.5286 比較，誤差 4

%。

六、半圓筒下層放飽和硫代硫酸鈉溶液，上層放入水，其溶液折射率對高度關係圖如圖六。



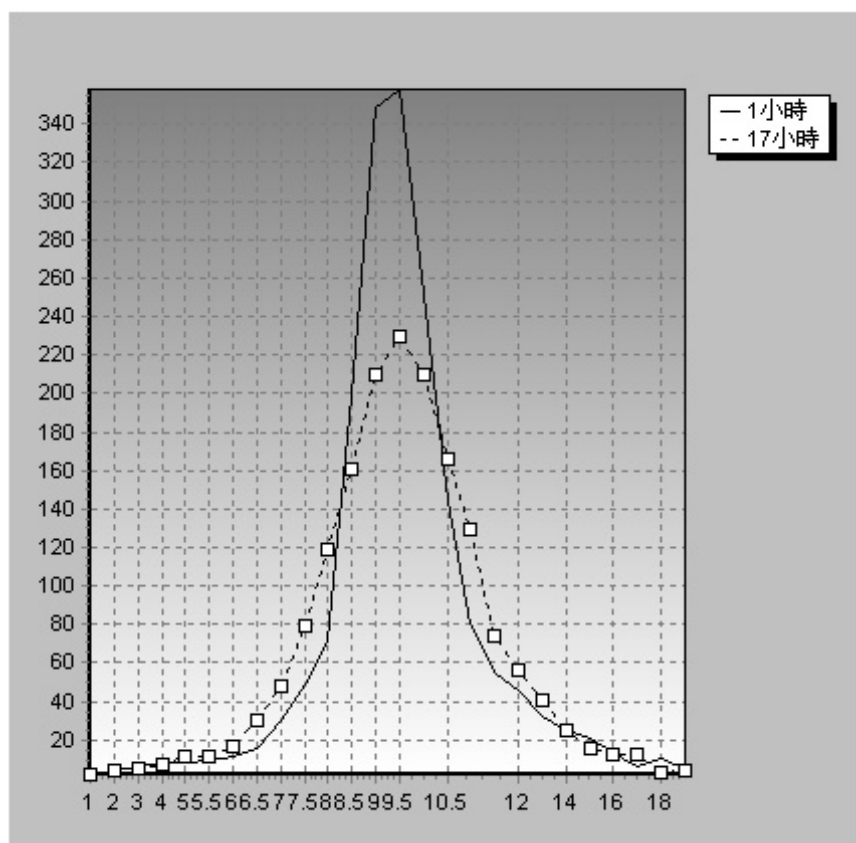
〔圖六：硫代硫酸鈉之 $n-y$ 圖〕

七、上述的半圓筒，雷射光（附光柵）照射後鉛直高度變化 Z ，和高度的關係，在置放後一小時結果如表二， $\frac{dn}{dy}-y$ 圖，在 24 小時後， $\frac{dn}{dy}-y$ 圖在圖七。

表二、硫代硫酸鈉和水在鉛直方向的偏折〔放置一小時， $a = 189.4\text{cm}$ ，

$r = 6\text{cm}$ ，水溫 26°C 〕

$y(\text{cm})$	$Z(\text{cm})$	$\frac{dn}{dy}$	$y(\text{cm})$	$Z(\text{cm})$	$\frac{dn}{dy}$
1	0.23	0.0002	9.5	40.70	0.0358
2	0.41	0.0004	10	28.69	0.0252
3	0.73	0.0006	10.5	16.41	0.0144
4	0.90	0.0008	11	9.14	0.0080
5	0.86	0.0008	11.5	5.21	0.0055
5.5	0.81	0.0009	12	3.69	0.0046
6	0.79	0.0011	13	3.57	0.0032
6.5	0.79	0.0016	14	2.38	0.0025
7	0.74	0.0030	15	1.03	0.0021
7.5	1.24	0.0049	16	0.71	0.0013
8	8.04	0.0071	17	0.73	0.0006
8.5	22.6	0.0199	18	1.16	0.0010
9	39.65	0.0349	19	0.58	0.0005



〔圖七：硫代硫酸鈉之 $\frac{dn}{dy} - y$ 圖〕

八、 由圖六量得二者面積均 $= 0.1292 = n_2 - n_1$ ，和直接量得之 $n_2 - n_1$ 比較差 6%。

柒、 討論：

- 一、 本實驗利用雷射附光柵測液體折射率均為四位有效數字(雷射光波長為 6328 Å)，藥品及水的純度為誤差主要來源，屏若改為半徑 a 的圓弧形，量得的 L 及 L' 及 n 會更準確。
- 二、 溶液中的溶質擴散時，依分子運動論，其巨觀的行為呈常態分佈，由圖五 n^2 和 c 成線性關係，可知由折射率的測量可得到其濃度的分佈情形—常態分佈。

- 三、 Barnard 利用雷射光照方形盒，得常態分佈曲線，鐘形隨時間變化，但涵蓋面積一定，等於 $A = \frac{at(a+b)}{b}(n_2 - n_1)$ ， $n_2 - n_1$ 分別為硫代硫酸鈉水溶液和水的折射率。我們推廣至 n_2 ， n 均為純物質（例如甘油和水）亦滿足（3）式。
- 四、 我們設計的半圓形筒做 $\frac{dn}{dy}$ 關係實驗：
- （一）雷射光偏折的效果比 Barnard 結果更顯著。
- （二）理論比 Barnard 簡單。
- （三）可直接看到折射率梯度如何隨高度變化。
- 五、 表二硫代硫酸鈉在鉛直方向的偏折，盒至屏距離 $a = 189.4 \text{ cm}$ ，盒半徑 6 cm ，由公式（4） $\frac{dn}{dy} = \frac{Z}{ar}$ ，最大 Z 值 $= 40.7 \text{ cm}$ ， $\alpha_1 = \frac{r}{n} \cdot \frac{dn}{dy} \doteq 7.5^\circ$ 略大於 5° ，甘油加水 1 小時後， α_1 ， α_2 亦大於 5° ，要用三角函數修正。
- 六、 我們設計的簡單器材可量折射率，求折射率梯度，測量溶質折射率，進一步可做擴散係數的測量〔註三〕。（4 月底已以利用溶液的折射率梯度測量溶質的擴散係數向國立台灣科學教育館申請中學生參加專題研究專案補助，已獲審查通過，將在教授指導下繼續研究。）
- 七、 用高感度的海波（硫代硫酸鈉）和水作出常態分佈曲線， $Z_m^9 t^4 = \text{定值}$ ，其物理意義值得進一步研究。

表三、 Z_m 和 t 的關係

Z_m (m)	t (min)	$Z_m^9 t^4 (10^4)$
0.3126	240	9.46
0.2610	360	9.44
0.1460	1330	9.43
0.1410	1440	9.42
0.0865	4320	9.44

捌、 結論：

- 一、 溶質在溶液中的擴散可由折射率的測量知其呈常態分佈。
- 二、 由溶質在溶液中的擴散可求溶質的折射率。

玖、 參考資料：

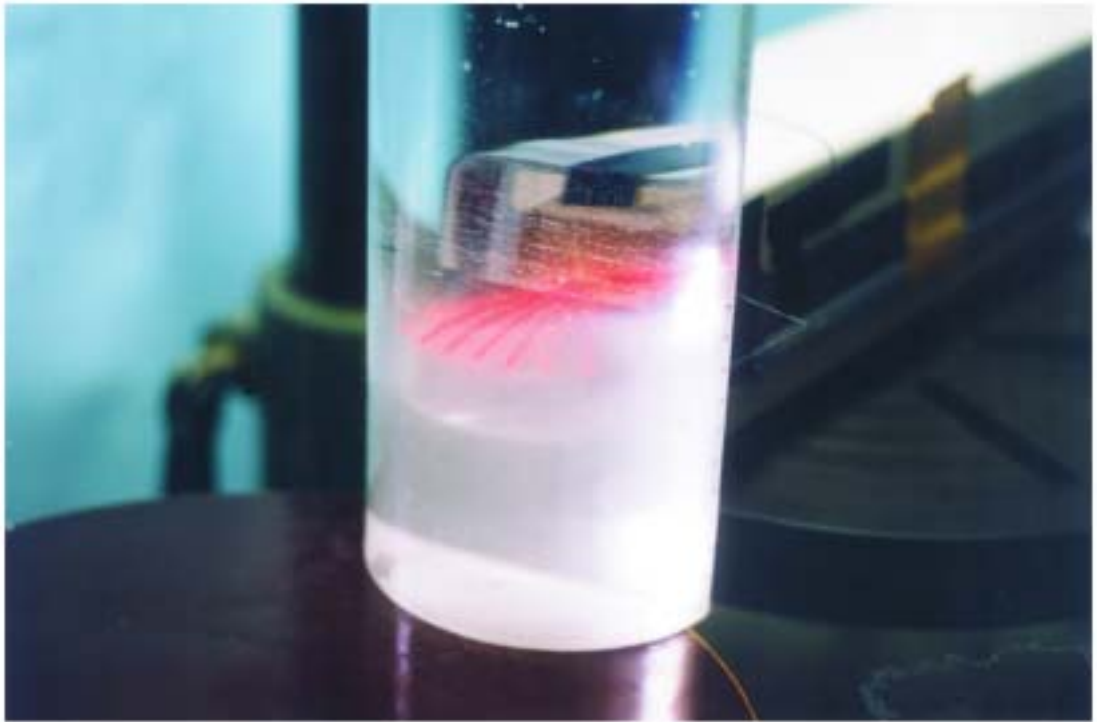
- 一、 學生用：

〔註一〕 蘇碩偉等二人：利用混合法求溶質折射率的研究（中華民國第卅六屆中小學科學展覽會作品說明書，民國 84 年）。

- 二、 指導老師用：

〔註二〕 A. J. Barnard and Ahlborn “ Measurement of refractive index gradients by deflection of a laser beam “ , Am. J. Phys.**43**
(7),573-574(1975)

〔註三〕 C. Gaffney and Cheuk-Kin Chau “ Using refractive index
gradients to measure diffusivity between liquids “ , Am. J.
Phys.**69**(7),821-825(2001)



〔圖二：雷射光在溶液中的偏折〕



〔圖五：硫代硫酸鈉隨時間擴散，時間為 40 分，100 分，160 分，280 分〕

附錄一：

(一) 圖一所示的方形盒厚度 t ，盛有液體，其折射率由底層往上層逐漸減少，距底端 y 及 $y + dy$ 處折射率分別為 $n + dn$ 及 n ，真空中的光速 C ，

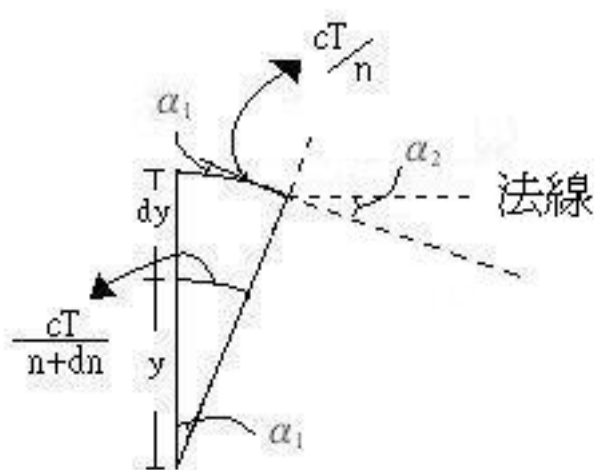
在 T 秒內的光程分別為 $\frac{CT}{n + dn}$ 及 $\frac{CT}{n}$ ， $\alpha_1 = \frac{CT/n}{y} = \frac{CT/n}{y + dy}$

可得 $\frac{dn}{dy} = \frac{n}{y} \cdots (a)$ $\therefore \alpha_1 = \frac{CT/n}{y + dy} = \frac{t}{y} = \frac{dn}{dy} \cdot \frac{t}{n} \cdots (b)$

司乃耳定律 $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ ，光由方形盒出空氣時，由上圖，

$\ominus \alpha_1, \alpha_2$ 甚小 $\therefore n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2 \Rightarrow n_1 \alpha_1 = \alpha_2$ 代入 (b)

$\alpha_2 = n_1 \alpha_1 = \frac{dn}{dy} \cdot t \cdots (c)$



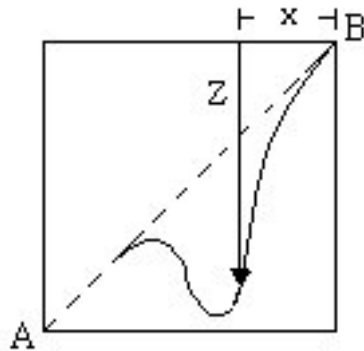
〔圖八：雷射光在溶液中偏折〕

(二) 雷射光經玻璃棒後，折射散開成線狀，照射距玻璃棒 b 的方形盒， b 遠大於玻璃棒的半徑，且方形盒的邊長亦遠小於 b ，因此照到方形盒的光為

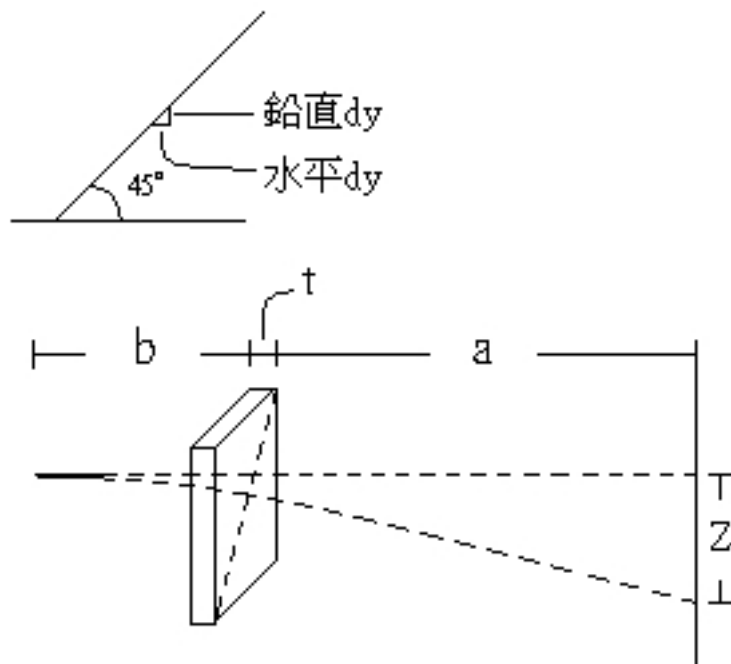
和鉛垂線成 45° 的平行光，經方形盒折射出空氣，在距盒 a 的屏上向

下偏 Z 。 $Z = a\alpha_2 = at \frac{dn}{dy} \cdots (d)$ 折射率梯度 $\frac{dn}{dy} = \frac{Z}{at}$

1. 愈近兩液原始界面濃度梯度 $\frac{dc}{dy}$ 愈大，折射率梯度愈大，鐘形頂端的 Z 愈大。
2. 時間愈久，溶質擴散至兩液愈趨近均勻，兩液原始界面 $\frac{dn}{dy}$ 愈小，常態分佈的鐘形頂端的 Z 愈小。



〔圖九：雷射光經偏折後投影在屏上〕



〔圖十：雷射光向下偏折〕

(三) 通過玻棒的雷射光和鉛垂線成 45° ，照到屏時，光點自 B 點 x 處向下

偏 Z，當其照在盒子的鉛直分量 dy 時，水平分量大小亦為 dy ，水平

方向 $\frac{dy}{b}$ (盒) = $\frac{dx}{b+a}$ (屏) $\therefore dx = \frac{a+b}{b} dy$ ，將 (d) $Z = at \frac{dn}{dy}$

代入得 $Zdx = \frac{at(a+b)}{b} dn$ ，兩邊積分 $\int Zdx = \frac{at(a+b)}{b} \int dn \Rightarrow$ 常態分佈

曲線的液體的折射率， n_1 為濃度較小的液體折射率時間愈久，鐘形愈

平穩，但涵蓋面積相等。

(第三名)

本作品用雷射光通過玻璃棒後成為一直線光束再通過半圓柱形容器之液體，其偏折量經此放大後明顯易測，使該處的折射率與折射率梯度更易求得。改進量測之精確度，也可用於量測溶解速率，構思巧妙也具有實用性。惟其實驗裝置如何規格化，可以思考。