

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

高中-物理科

科 別：物 理 科

組 別：高 中 組

作品名稱：對旋渦流線、速度、壓力之研究

關 鍵 詞：等角螺線、沉流、渦流

編 號：040110

學校名稱：

國立鳳山高級中學

作者姓名：

陳俊潔、陳富豪

指導老師：

楊右銘



對旋渦流線、速度、壓力之研究

一、研究動機

自然界充滿著許多美妙現象，大部分都有漂亮的幾何圖形。在重力場中，物體劃過巧妙的拋物線；行星軌道的圓錐曲線；鸚鵡螺成等角螺線的形狀……等。這其中有數學，更有迷人的物理性質。其實，想要研究旋渦，是因為老師曾經讓我們看過有關旋渦的影片，其中美麗的圖像讓我們想更進一步探索。而本來我們只是想找出旋渦的流線，後來了解到速度、壓力是流體力學重要的一環，於是進而探索其速度壓力。另外，若能了解到兩個渦流彼此的干擾，更能深入其性質。於是我們就進行了一連串的實驗與研究。

二、研究目的

本次研究之主要目的可分：

（一）當一環流放水時，會形成旋渦，我們試圖找尋此旋渦形成的流線及影響其形式的變因。

（二）找出此旋渦中各點的速度和壓力，並探究其分佈關係。

三、研究設備及器材

1. 旋轉台(轉速 100~200r.p.m).....>一座



<照片一：旋轉台>



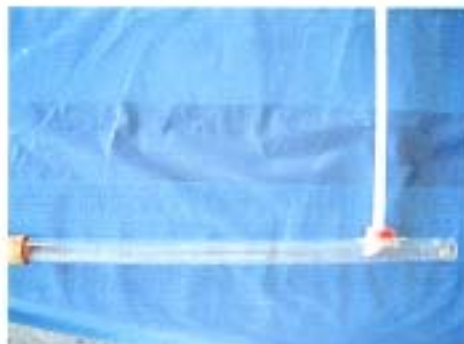
<照片二：旋轉台>

2. 墨水(紅、黑).....>數瓶
3. 沙拉油.....>一瓶
4. 不同孔徑的橡皮塞(控制流量), 分為大(直徑 2.5 公分)、中(直徑 1 公分)、小(直徑 0.5 公分).....>各一個
5. 測速器(測轉速).....>一台
6. 自製流速計(利用 L 形管配合 U 形管製成).....>一支



<照片三：自製流速計>

7.自製模擬流速計(利用透明水管和 L 形管製成).....>一支



<照片四: 自製模擬流速計>

8.自製壓力計(利用 U 形管、L 形管、直管製成).....>一支



<照片五:自製壓力計>



<照片六:自製壓力計>

9.雷射筆.....>一支

四、實驗步驟

(一)旋渦流線

一開始我們是採用點光源曝光紀錄流線的方法，方法如下：

- 1.首先將水槽裝水，置於旋轉台上，以穩定速度旋轉。
- 2.待整體的水以相同角速度作同心圓旋轉時，在靠近槽壁的地方放置一浮標(浮標上裝設螢光棒，作為點光源)，再將馬達關掉，並且放水。此時即形成一旋渦，而浮標則順流而下。
- 3.在放水的同時，按下相機快門，經長期曝光後，點光源的軌跡即被記錄下來。

因為此方法必須在暗室中操作，而且結果並不明顯。所以後來採用第二種法，步驟如下：

- 1.照前面的方法產生渦流，接著用不溶於水的染料，加進旋渦中，染料順著旋渦而下，接著拍照。染料的曲線即為旋渦流線(我們採用油性墨水混合沙拉油當染料，這樣的染料比較不容易散掉且較有連續性)。
- 2.改變放水孔徑(即改變流量)和轉速，觀察對旋渦的影響。
- 3.再將實驗曲線與理論曲線作比較。

(二)流量測法

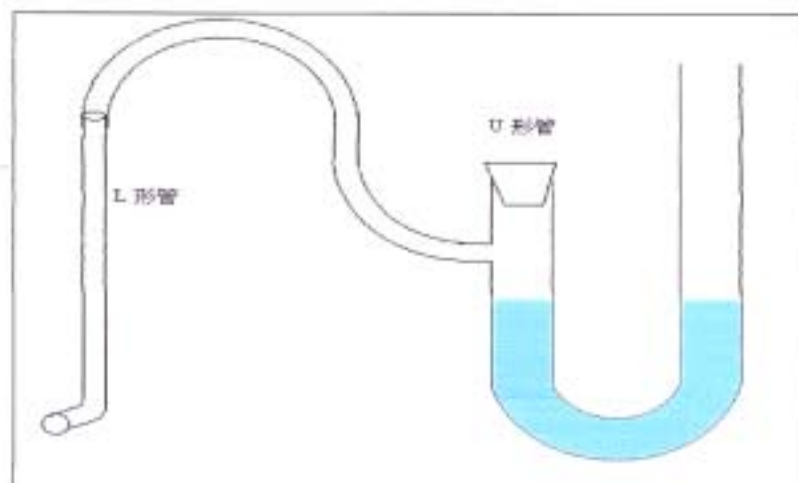
因為流量是控制變因之一，所以必須測量出流量，方法如下：

- 1.放一標有刻度之水槽（底面積相同）於旋轉台下，每五秒紀錄水量一次，再將水量變化描繪成曲線。
- 2.改變放水孔徑，測量出每一種孔徑所對應到的流量。

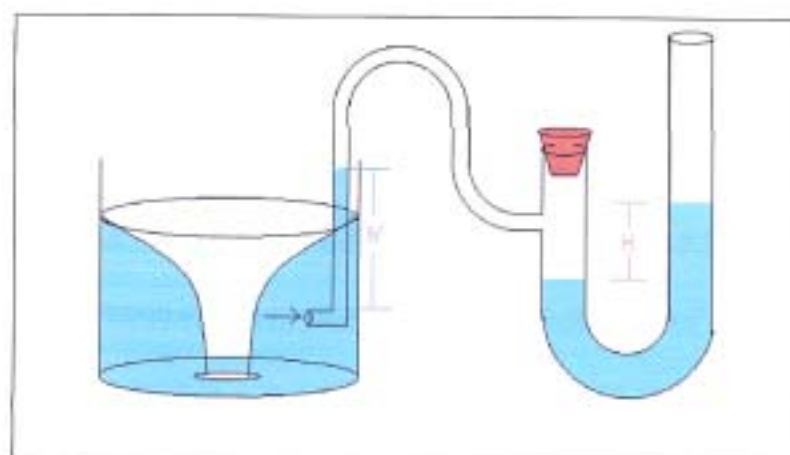
(三)流速測法

我們是利用水流造成衡量的原理來設計流速計。在實驗討論一欄會詳細解說設計的原理，這裡先撰述操作方法。方法如下：

- 1.先利用雷射筆來定位，找出旋渦中欲測量的點，再把<圖一>中的 L 形管放在此點之位置，開口方向對準流線切線方向(流線可由前面提到的染料法找到)U 形管中的水即產水位差，將此時的水位差紀錄下來(如圖二)。

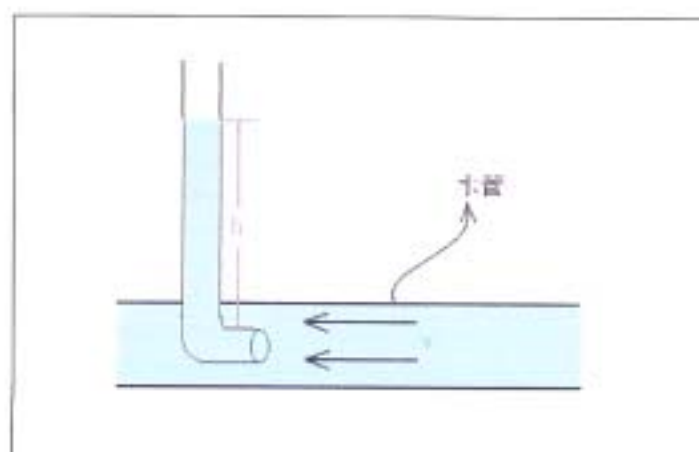


<圖一：測速計>



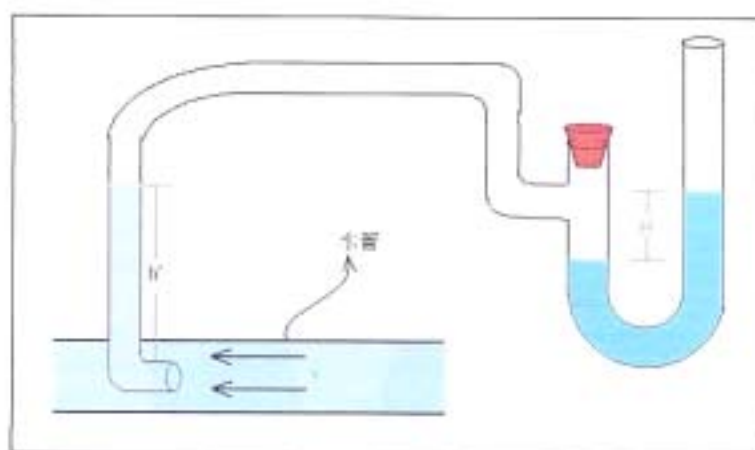
<圖二：測速>

2.利用模擬流速計(圖三)來製造流速。紀錄 L 形管中不同的水位高度 h 對應到的流速。欲測量流速，只要知道水源源頭的流量即可換算成水管中的流速。所以我們測量源頭十秒的流量，經由計算，我們得知水位和流速的關係。



<圖三：流速模擬>

1. 因為 L 形管是沉浸在旋渦中，不易直接觀察 L 形管的水位，所以我們將 L 形管連接 U 形管，以利觀察(圖四)。但接了 U 形管後，L 形管中的水位高 h 受到來自 U 形管中水位差的壓力，故下降一些，成為 h' 。有鑑於此，我們必須找出 H (U 形管的水位差)和 h (未接 U 形管時的水位高)之間的關係，並換成流速。我們的做法是這樣，調整水源流量，產生欲測量的 H ，接著拔掉 U 形管，即<圖三>的樣子，最後再紀錄所對應的 h 。由 h 可知流速。



<圖四：接上 U 形管>

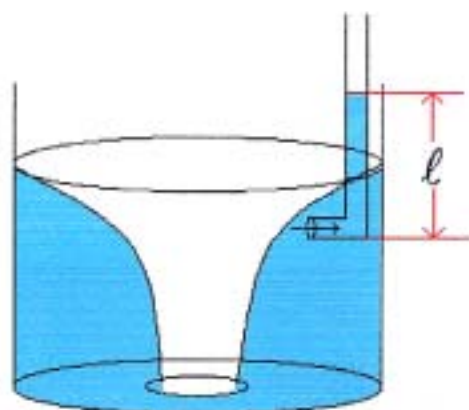
(四)壓力測法

1.靜壓力

利用自製流速計即可測出靜壓力，並紀錄 L 型管和 U 型管中的水面高度差，看看是否符合理論推導的結果。

1.動壓力

1. 取一標有刻度之玻璃管。
2. 與水流方向垂直插入，如下圖。



<圖五：測動壓力>

3. 紀錄管中上升高度 l 。

五、實驗結果

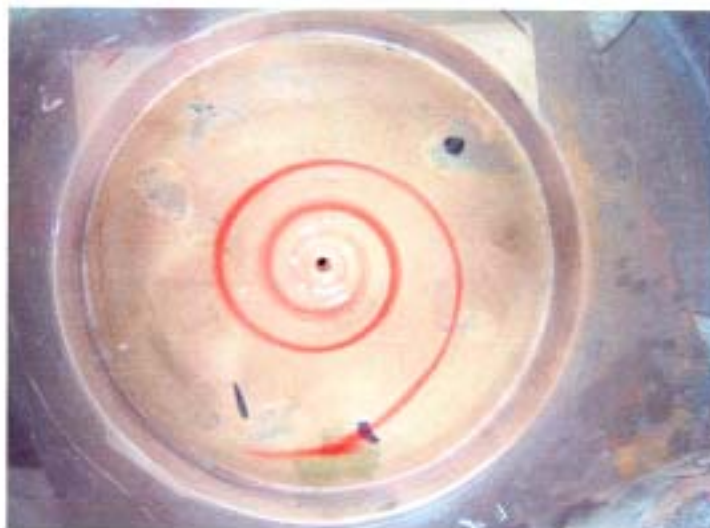
(一)流線

2. 放水孔徑 1cm



<照片七：正面>

4. 放水孔徑 0.5cm



<照片八：正面>



<照片九：侧面>

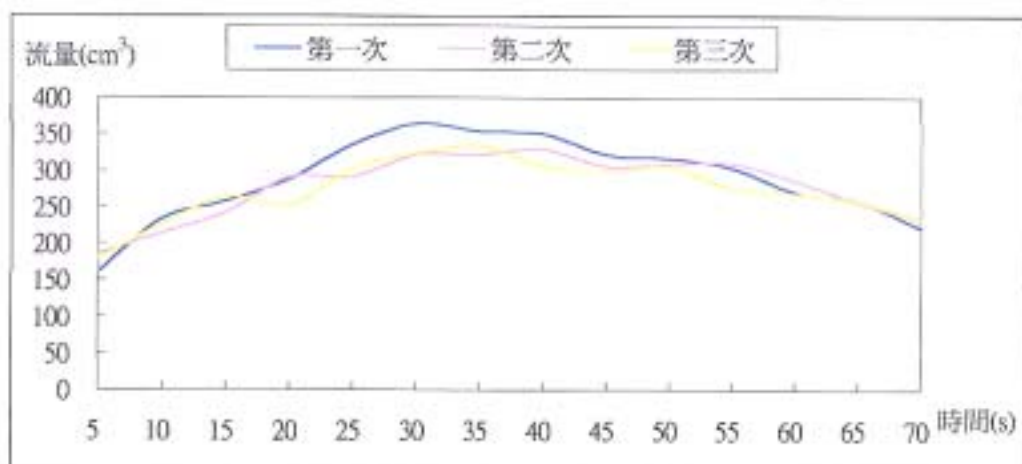
(二)流量

(一) 改變變因(孔徑大小、轉速)，探討渦流性質。

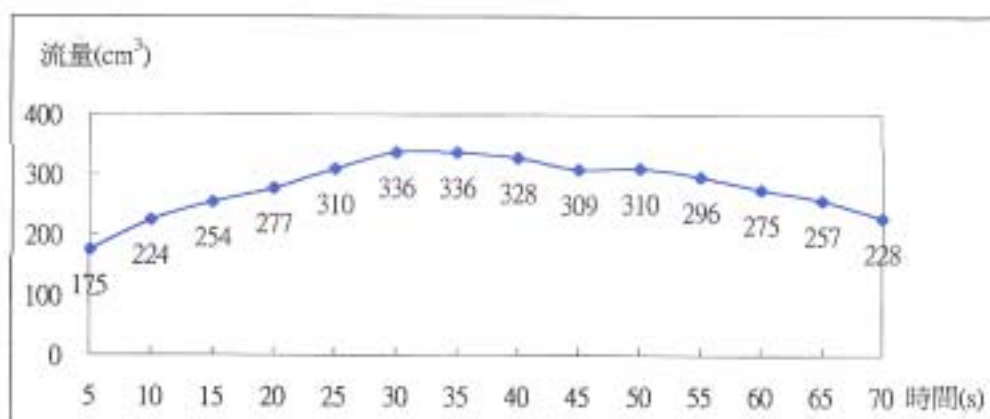
1. 縱軸：取以每五秒流入於一固定容器（面積為定值）之流量，單位為 cm^3 。

橫軸：每五秒為一單位。

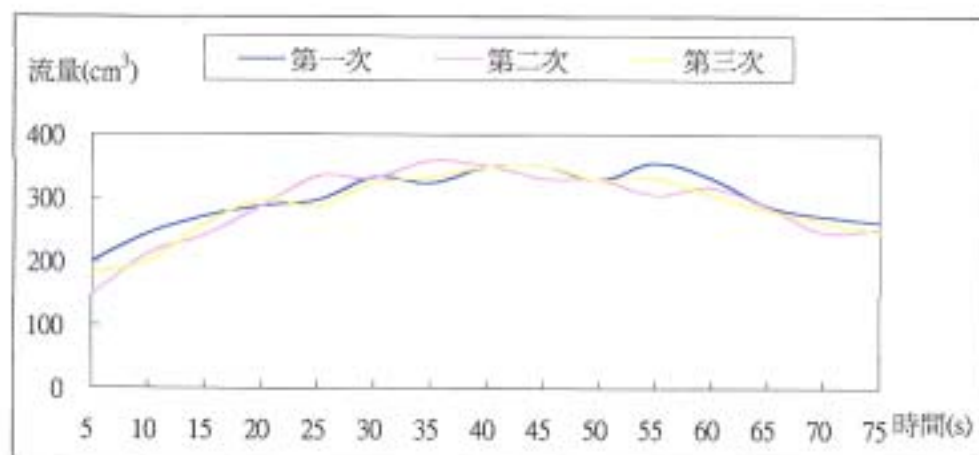
(1) 孔徑：大 轉速：200r.p.m



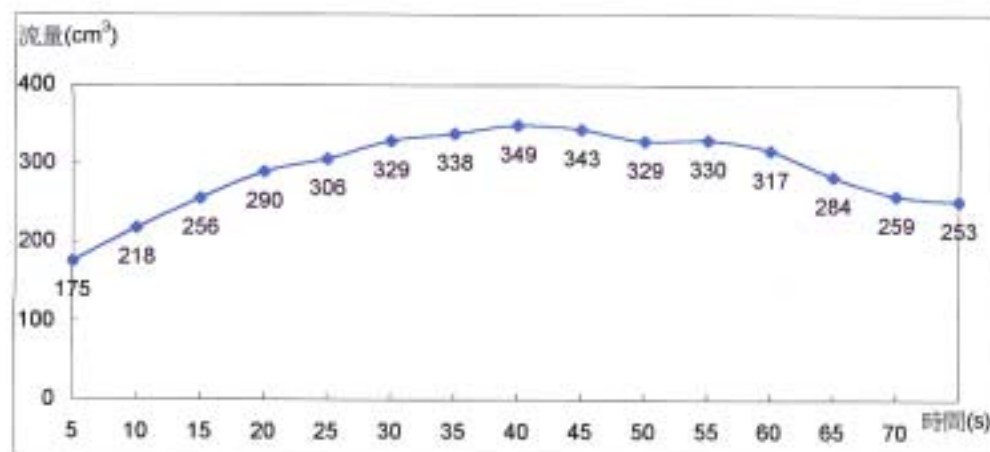
平均值



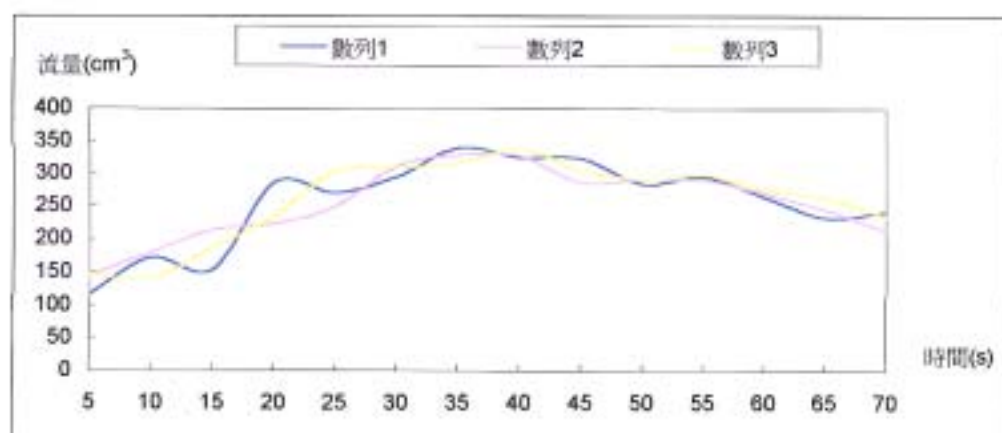
(2) 孔徑：大 轉速：175r.p.m



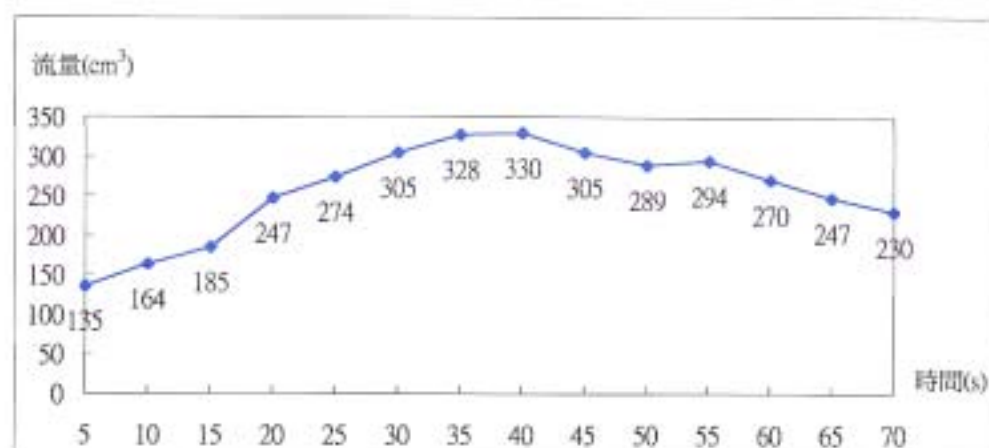
平均值



(3) 孔徑：大 轉速：150r.p.m



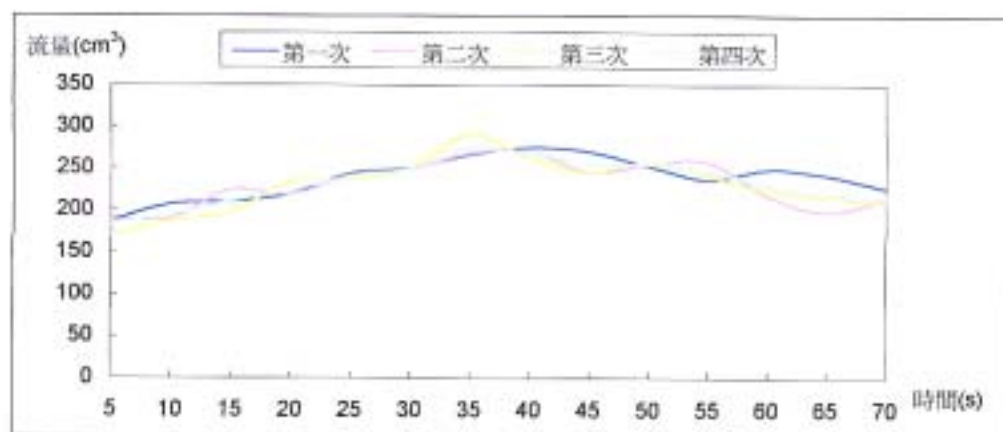
平均值



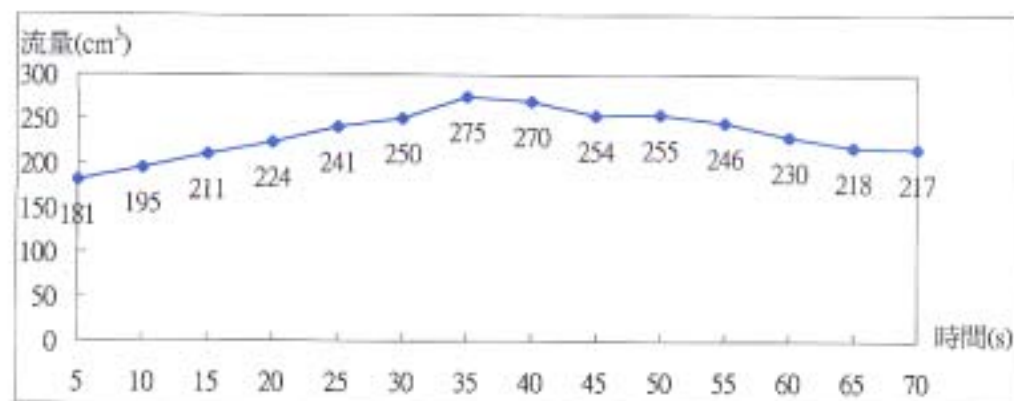
2.縱軸：取以每十秒流入於一固定容器（面積為定值）之流量，單位為 cm^3 。

橫軸：每十秒為一單位。

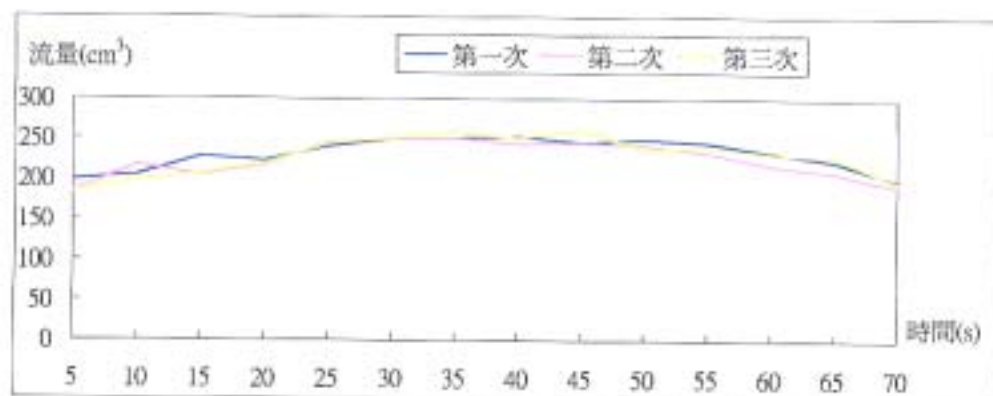
(1) 孔徑：中 轉速：200r.p.m



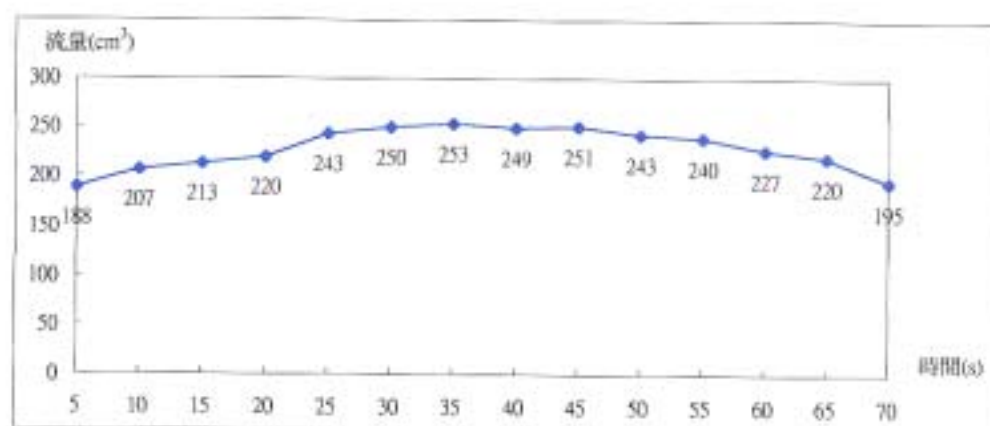
平均值



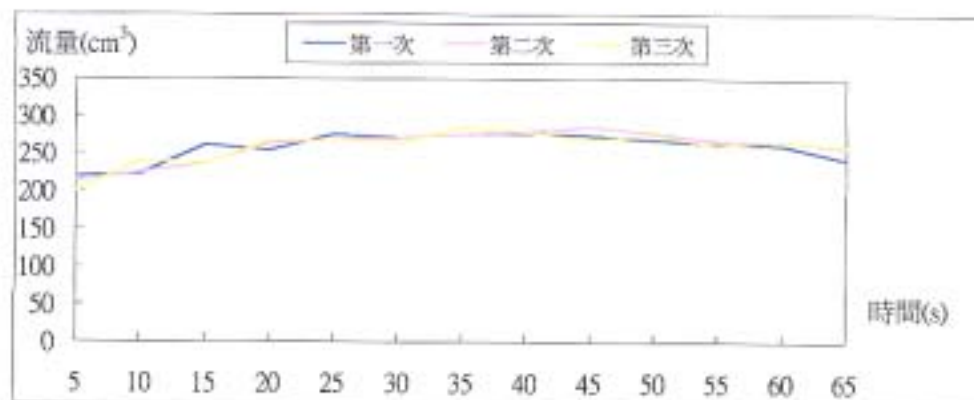
(2) 孔徑：中 轉速：175r.pm



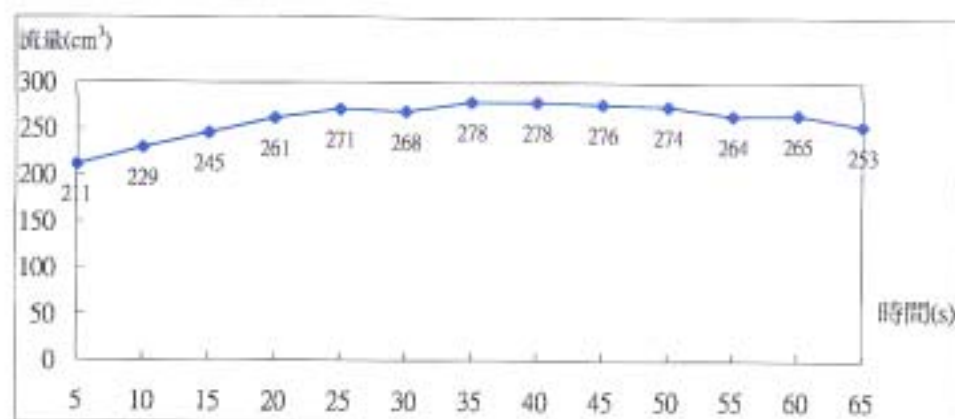
平均值



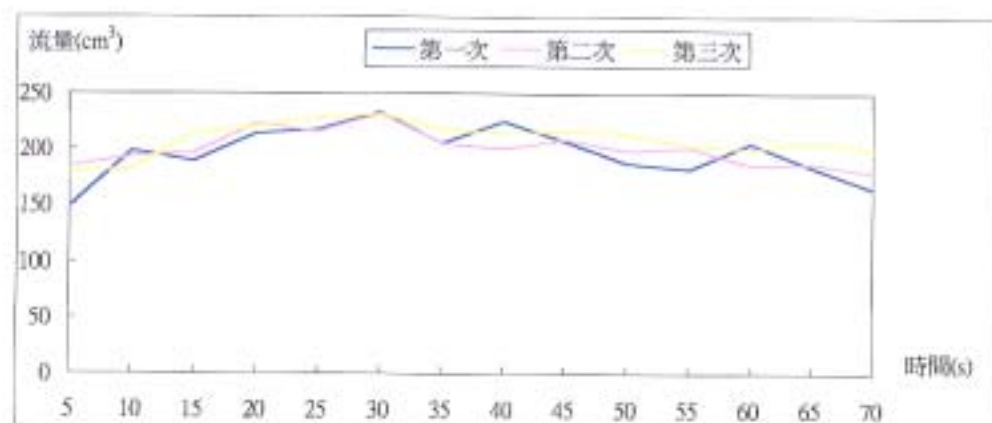
(3) 孔徑：中 轉速：150r.pm



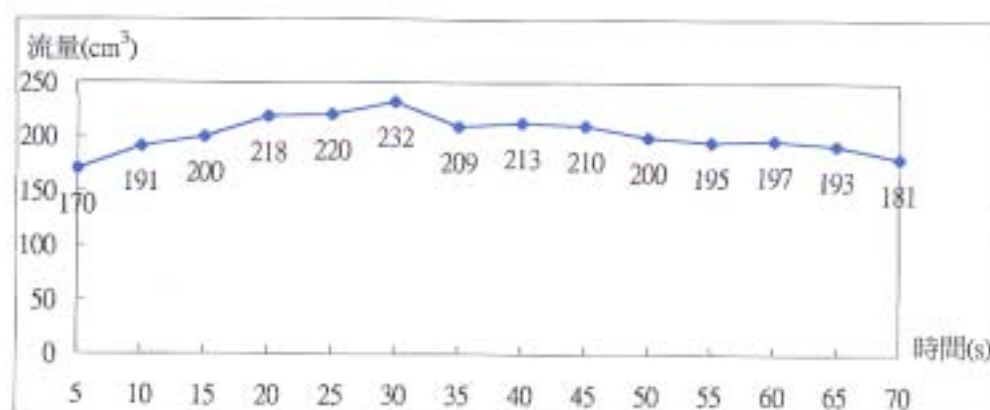
平均值



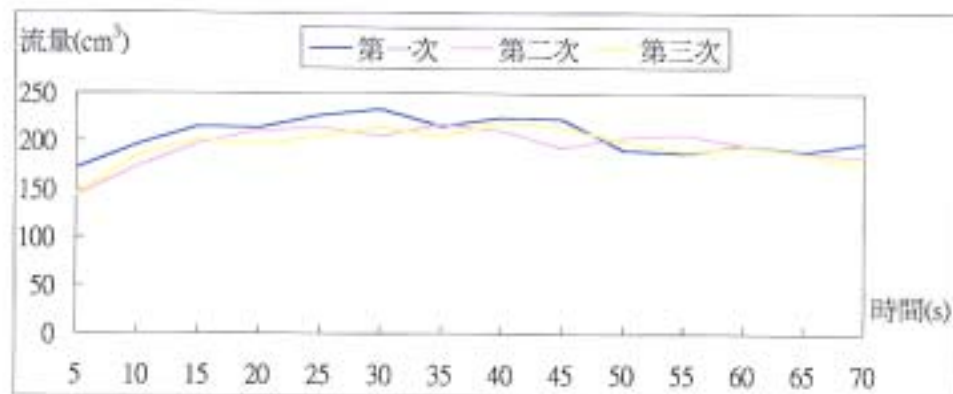
(4) 孔徑：小 轉速：200r.pm



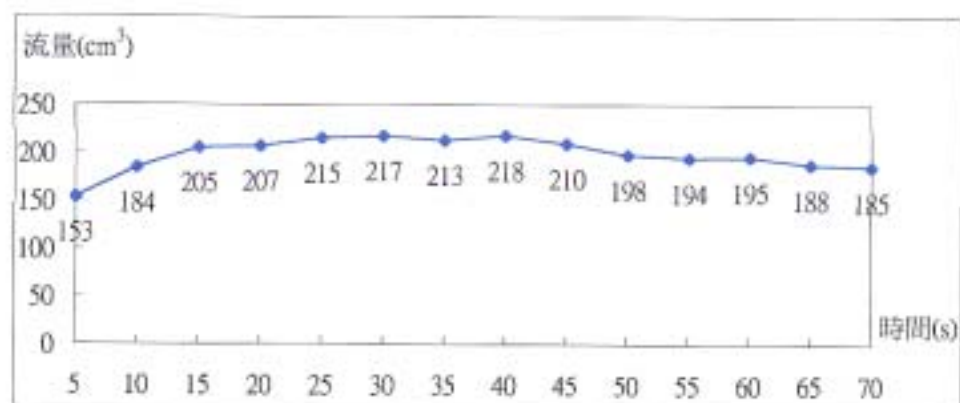
平均值



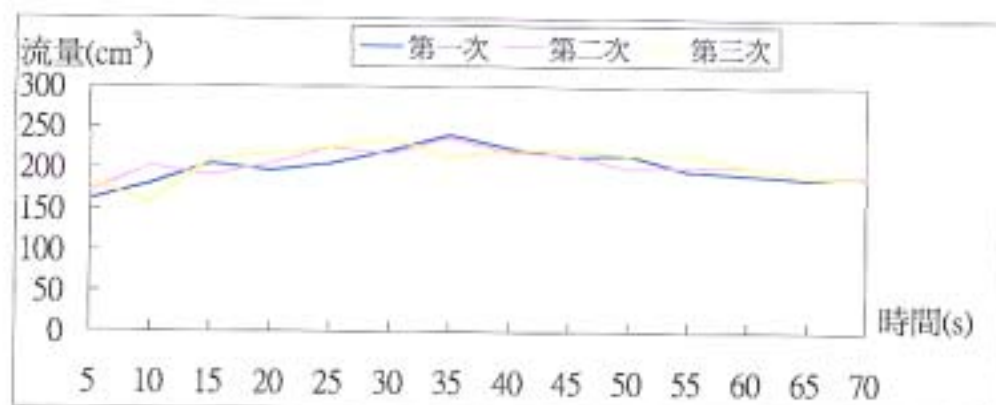
(5) 孔徑：小 轉速：175r.p.m



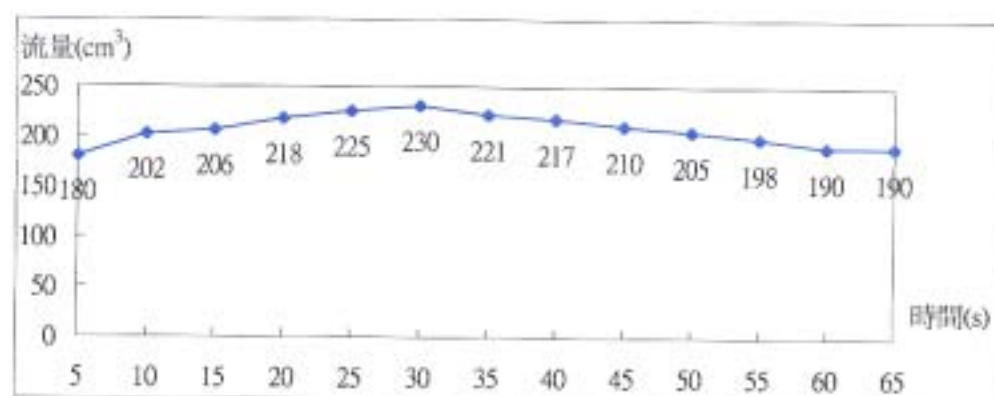
平均值



(6) 孔徑：小 轉速：150r.p.m



平均值



(三)流速

1.未接 U 形管

代號說明：

h：L 形管中的水位高(cm)

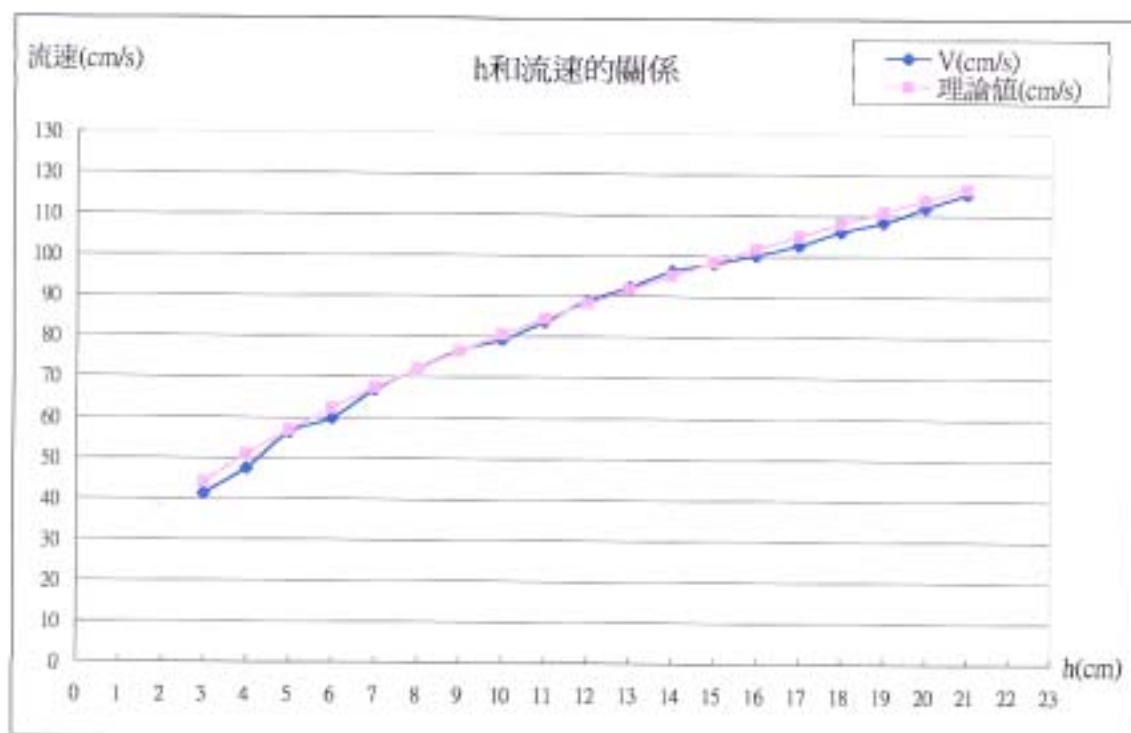
Q:水源的十秒流量

V：實測流速

理論值： $\sqrt{\frac{2}{3}hg}$ (推導在實驗討論一欄)

h(cm)	Q(cm ³)	V(cm/s)	理論值(cm/s)
3	830.1	41.31	44.04
4	953.8	47.46	50.86
5	1130.4	56.25	56.86
6	1201.1	59.77	62.29
7	1342.4	66.8	67.28
8	1448.3	72.07	71.93
9	1536.6	76.46	76.29
10	1589.6	79.1	80.42
11	1677.9	83.5	84.35
12	1783.9	88.77	88.1
13	1854.6	92.29	91.7
14	1933.83	96.23	95.16

15	1971.81	98.12	98.5
16	2011.6	100.1	101.73
17	2063.45	102.68	104.86
18	2129.37	105.96	107.9
19	2178.2	108.39	110.86
20	2249.55	111.94	113.74
21	2318.48	115.37	116.55



2. 接上 U 形管

代號說明：

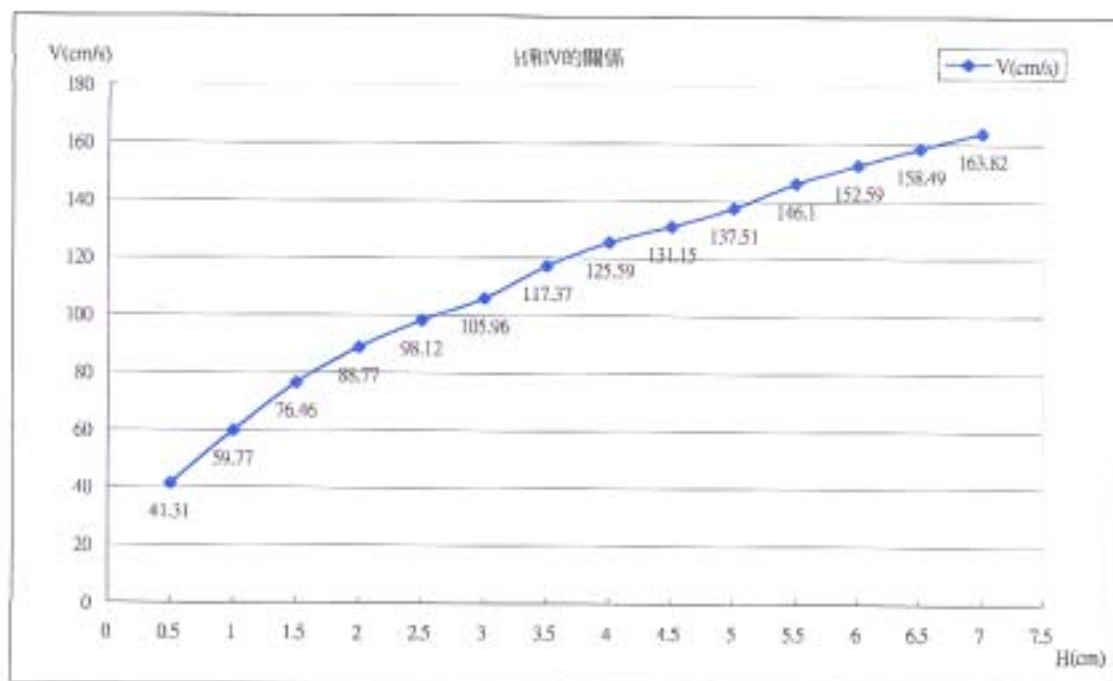
H：U 形管中的水位差(cm)

v：當 U 形管中的水位差為 H 時的流速

H(cm)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
V(cm/s)	41.31	59.77	76.46	88.77	98.12	105.96

H(cm)	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
V(cm/s)	115.37	124.59	132.15	139.29	146.10	152.59

H(cm)	6.5	7
V(cm/s)	158.82	164.82



3.旋渦速度

代號說明

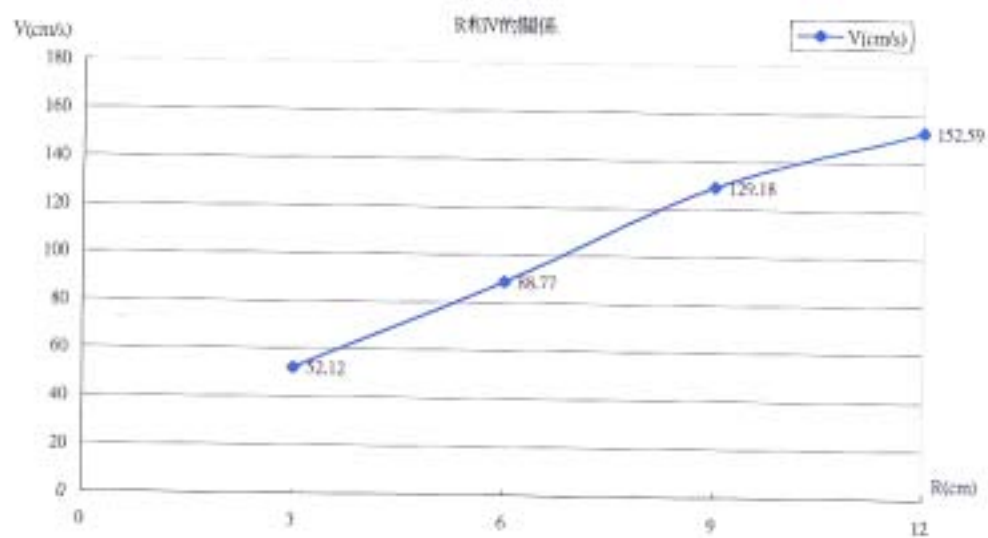
R:測點與排水孔的距離(cm)

H:欲測點U形管中的水位差(cm)

v : 流速(cm/s)

150 r.p.m 未放水 渦流表面

R(cm)	3	6	9	12
H(cm)	0.7	2	4.3	6
V (cm/s)	52.12	88.77	129.18	152.59



175 r.p.m 未放水 渦流表面

R(cm)	3	6	9	12
H(cm)	0.9	2.8	5.5	6.8

200 r.p.m 未放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.5	3.5	6.4	10

放水經十秒後測量

150 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.5	1	0.8	0.4

175 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.9	1.2	1	0.7

200 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	2.2	1.5	1.3	0.6

150 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.2	0.9	0.7	0.5

175 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1	0.7	0.6	0.4

200 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.6	1.1	0.9	0.8

150 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.4	1.2	0.9	0.6

175 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	1.3	1.1	1	0.9

200 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
H	2	1.7	1.5	1.4

(四)壓力

靜壓力

水深 (cm)	6.5	10	13.5
h	2	3	4
ℓ	2	2.9	3.9

動壓力

150 r.p.m 未放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	1.4	3.5	5.5	7

175 r.p.m 未放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	1	2.9	6.4	7.5

200 r.p.m 未放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	1.3	4.2	7.1	9.3

放水經十秒後紀錄

150 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.5	1.9	1.5	1

175 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	3	2.1	1.9	1.4

200 r.p.m 大孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	3.8	2.6	2.2	1.1

150 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.1	1.8	1.4	1.3

175 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	1.8	1.5	1.2	1.2

200 r.p.m 中孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.5	2	1.9	1.4

150 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.2	1.9	1.8	1.6

175 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.5	2.2	1.9	1.7

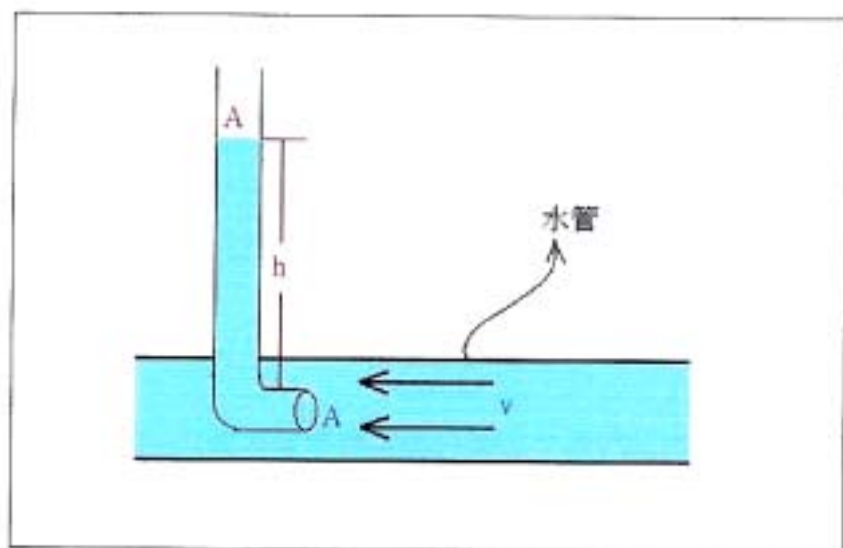
200 r.p.m 小孔徑 放水 渦流表面

R	3	6	9	12
h	2.7	2.6	2.6	2.3

六、實驗討論

(一)流速

流速測量原理



<圖六>

我們係利用水流所造成的衝量來測量流速。如圖五，流速 V 對 L 形管管口造成一股衝力，此衝力恰可支撐高度 h ，底面積 A 的水柱。這股力是由於水分子不斷撞擊表面積 A 上，造成動量變化而產生。我們先假設水分子作完全非彈性碰撞，則動量變化為

$$mv - m \times 0 = mv$$

由力的定義 $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$

m 取一秒內撞擊在表面積 A 的質量，所以 $m = Av$

則 $\Delta p = Av \times v = Av^2$

代入 $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ，得到 $F = \frac{Av}{1}v = Av^2$

此衝力 F 恰可支撐高度 h ，底面積 A 的水柱所造成的重力。

故 $F = Av^2 = Ahg$

$\Rightarrow v = \sqrt{hg}$

但是 $v = \sqrt{hg}$ 和實驗值有段距離，所以我們猜測 hg 前面應該有個

係數才對，即 $v = \sqrt{xhg}$ 。在不斷嘗試之下，我們發現當 $x = \frac{2}{3}$ 時，

最接近實驗值。但要怎樣解釋這個係數呢？我們認為，一開始假設水

分子做完全非彈性碰撞是錯的，若假設水分子碰撞後的速度變為

$-nv$ ，則動量變化為 $\Delta P = mv - m(-nv) = m(1+n)v$ 。

且 $m = Av$

代入，得 $\Delta P = Av(1+n)v = A(1+n)v^2$

代入 $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ ，得 $F = \frac{A(1+n)v^2}{1} = A(1+n)v^2$

此衝力 F 恰可支撐高度 h ，底面積 A 的水柱所造成的重力。

故 $F = A(1+n)v^2 = Ahg$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{1+n}hg}$

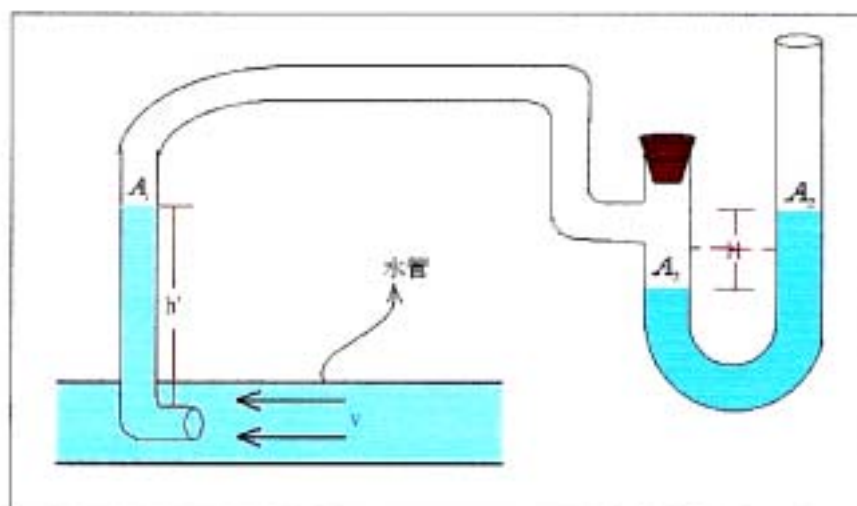
再和實驗值 $v = \sqrt{\frac{2}{3}hg}$ 做比較，

得 $\frac{1}{n+1} = \frac{2}{3}$ 。

$\Rightarrow n=0.5$

所以，水分子撞擊反彈後的速率剩下原來的一半。

爲了利於觀察，我們在 L 形管上接上 U 形管(如圖六)，所以觀察到的是 H。我們必須找出 H 和 v 的關係。



<圖七>

同前面的推導，水的衝力爲 $F = \frac{3}{2}A_1v^2$ 。

此衝力 F 恰可支撐高度 h'，底面積 A_1 的水柱和高度 H，底面積 A_2 的水柱所造成的重力，則 $F = \frac{3}{2}A_1v^2 = A_1h'g + A_2Hg \dots\dots\dots(1)$

由於 L 形管中的水上升 h'，因而擠壓管內空氣，使得 U 形管中的水下降。所以 L 形管中水上升的體積等於 U 形管中水由平衡點上升的

體積，即 $A_1 h' = A_2 \times \frac{H}{2}$ 。

$$\Rightarrow h' = \frac{A_2}{A_1} \times \frac{H}{2} \dots\dots\dots(2)$$

將(2)代入(1)，得 $F = \frac{3}{2} A_1 v^2 = A_1 \left(\frac{A_2}{A_1} \times \frac{H}{2} \right) g + A_2 H g = \frac{3}{2} A_2 H g$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{A_2}{A_1} H g} \dots\dots\dots(3)$$

本實驗中， $A_2 = 0.7 \times 0.7 \times \pi$ $A_1 = 0.35 \times 0.35 \times \pi$

代入(3)，得 $v = 2\sqrt{Hg}$ 。

和之前推得的 $v = \sqrt{\frac{2}{3}hg}$ 做比較，

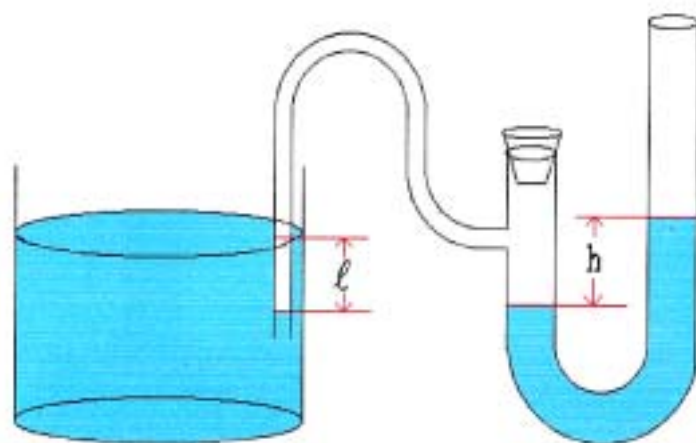
得 $h = 6H$ 。

意指當 U 形管中水位高為 H 公分時的流速，相當於 L 形管中水位高為 6H 公分時的流速，跟實驗值相當吻合。

我們得到 H 和 h 的關係，也得到 h 和 v 的關係，所以可由 H 找到 v。

(二) 壓力

靜壓力



<圖八：測靜壓力>

實驗如上圖，

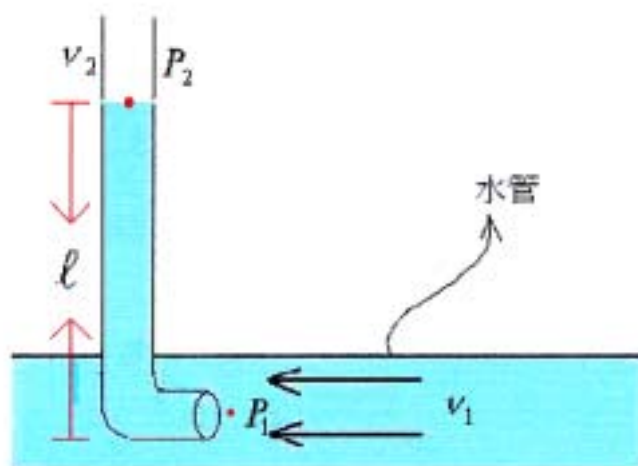
$$P_{\text{管內}} = P_{\text{空}} + \ell_{\text{cmH}_2\text{O}}$$

$$P_{\text{管內}} = P_{\text{空}} + h_{\text{cmH}_2\text{O}}$$

$$\Rightarrow \ell = h$$

動壓力

流體動壓力的計算方法



<圖九：測動壓>

考慮上圖，由伯努力方程式 $P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho gh_2$

因為 $\rho = 1$ ， $P_2 = P_0$ (大氣壓力)， $V_2 = 0$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + gh_1 = P_0 + gh_2$$

$$\Rightarrow P_1 = P_0 - \frac{1}{2}V_1^2 + g(h_2 - h_1)$$

$$\Rightarrow P_1 = P_0 - \frac{1}{2}V_1^2 + g\ell \cdots \cdots \cdots \text{壓力算法}$$

七、結論

1. 旋渦的流線極座標方程式為 $r = e^{\frac{mq \cdot \gamma}{K}}$ ，為等角螺線，且螺距成等比。

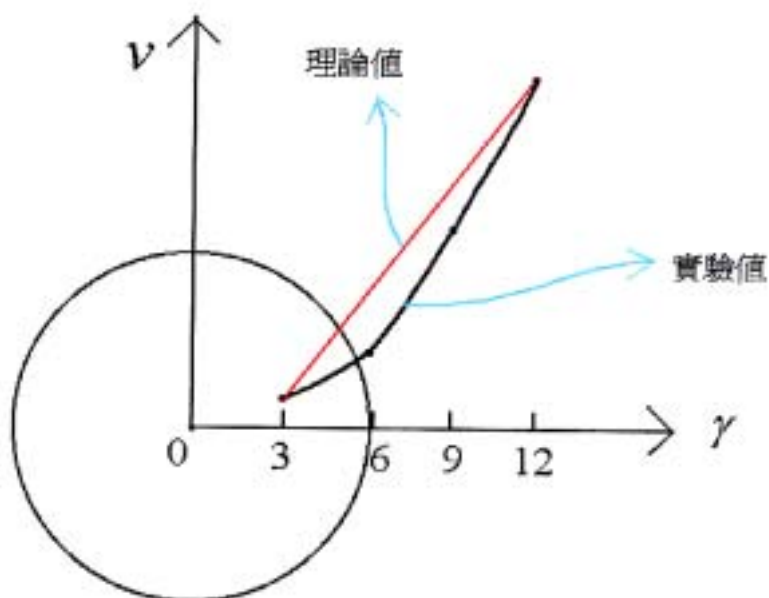
3. 速率大小為 $\frac{\sqrt{K^2 + m^2}}{r}$ ，只跟離中心的距離 r 有關。
方向為流線的切線方向。

3. 當 $r \rightarrow 0$ ， $r \rightarrow \infty$ ，故為奇異點。

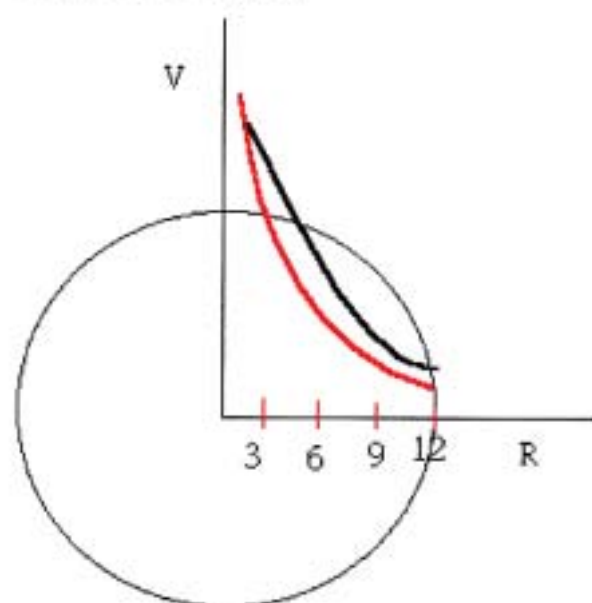
4. 旋渦任兩點的壓力差為

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{K^2 + m^2}{r_2^2} \right) - \left(\frac{K^2 + m^2}{r_1^2} \right) \right] + \rho g (y_2 - y_1)$$

5. 旋轉不放水時，越接近中心速度越慢。

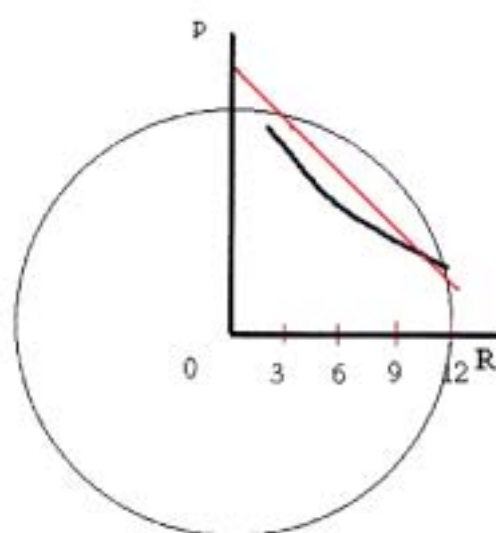


6. 旋轉放水時，越接近中心速度越快。

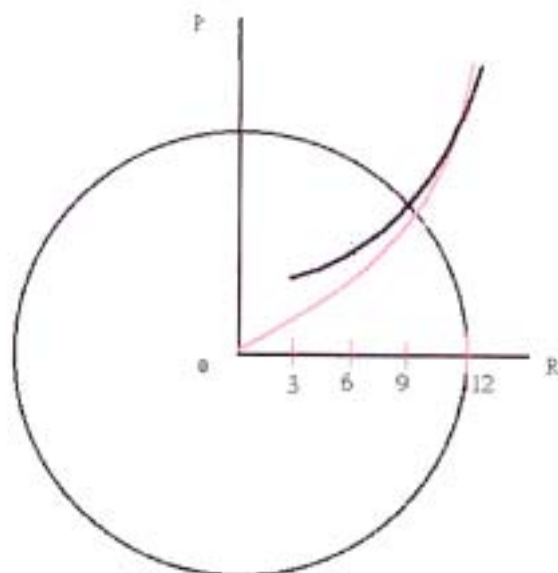


7. 旋轉不放水時，越接近中心速度越慢壓力越大。其關係圖如下：

註：紅線為理論值，黑線為實驗值



8.旋轉放水時，越接近中心速度越快壓力越小。



9.觀察於上面流速表得知，當旋轉達平衡時放水，外圍水速漸慢，而內圍水速漸快。

10.利用浮標法來抓取流線實非不易，因此我們拋棄浮標法而以油性墨水來代替浮標抓取旋渦流線。

11.觀察於上面流速表得知，當旋轉達平衡不放水時，外圍水速較快，而內圍水速較慢；當旋轉達平衡時放水，外圍水速較慢，而內圍水速較快。

12.孔徑愈大，流量愈大；孔徑愈小，流量愈小。而至於曲線趨勢，一開始轉速較快，大部分的水皆被甩到旁邊，所以流量較小；當

流速因為內摩擦而漸漸慢下來，水就漸漸聚集到中央，因而流量增加；最後，水大部分都已漏光，故水壓變小，流量又漸漸變小。

九、參考書目

- 1.高中物質科學物理篇(下).....龍騰出版
- 2.流體動力學曉園出版
- 3.流體力學全華出版
- 4.複變數.....中央出版
- 5.數學基本公式手冊.....九章出版