中華民國第42屆中小學科學展覽會

:::: 作品說明書 ::::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：這是什麼數列？ 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ………

關 鍵 詞：數 列、費伯納西、兔 子

編　　號：030418

學校名稱：

屏東縣立明正國民中學

作者姓名：

曾勝賢、邱錡惠、莊茹媜、蔡宜玲

指導老師：

吳正宗

一、研究動機

當老師有一次在課堂中講解數列時，我們在課本中看見了一個很奇怪的數列 1，1，2，3，5，8，13，當時只是知道後項是前二項之和後來經老師講解之下才知道這一個數列就是有名的費伯納西數列（或兔子數列），哦！原來數列也可以這麼有趣，後來我們突然想到一個問題：就是在費伯納西數列中如果大兔子生下的不只一對小兔子而是生下二對小兔子的話這一個數列又該如何寫呢？

二、研究目的

（一） 找出此數列的一般項為何？亦即在第 n 個月時，有多少對兔子？

（二） 而其中大兔子有多少對？小兔子有多少對？

（三） 前 n 個月之和又是多少？

（四） 找出此數列的一些規律及其各項間的倍數關係、質數的個數有多少個？

三、研究設備及器材

課本、電腦及其 Excel 試算表

四、研究過程及方法

我們知道在費伯納西數列中，第一個月原本有一對小兔子，而這一對小兔子再過一個月後就會變成一對大兔子，而大兔子再過一個月後就會生下一對小兔子，假設兔子不會死亡，我們可以得知現若有一對小兔子，在第一、二、三、四、.....月時會有多少對兔子？我們可以容易發現這些數形成一有規律的數列，其前 n 項如下：1，1，2，3，5，8，13，21.....，現在若我們修正一下規則，將原本大兔子生下的一對小兔子改成生下二對小兔子而其他規則不變，問第 n 個月的兔子總對數？我們將前十個月列出。

第 n 個月	兔子總對數	大兔子對數	小兔子對數
一	1	0	1
二	1	1	0
三	3	1	2
四	5	3	2
五	11	5	6
六	21	11	10
七	43	21	22
八	85	43	42
九	171	85	86
十	341	171	170

我們可以發現當我們用 a_n 表示第 n 個月有多少對兔子時，我們發現一個規則。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (n>2)$$

為什麼呢？因為在第 n 個月時的兔子總數中其大兔子的數目必是前一個月兔子的總數（因為前一個月的小兔子再過一個月後已經長大），而小兔子的數目必是前二個月兔子總數的兩倍（因為當時的小兔子已經都長大成大兔子且又過一個月後，都可生 2 對小兔子了），如此就可得到上式的式子；但是我們了解上面的式子並不能提供一個實用的方式去計算一般式,（因為還必須先知道前一項和前二項才能求得第 n 項）為了克服這種我們先簡化一下式子。

我們再列此數列的前 30 項觀察是否有些規律：

第 n 月	兔子總對數	大兔子個數	小兔子個數	前 n 項之和
a_1	1	0	1	1
a_2	1	1	0	2
a_3	3	1	2	5
a_4	5	3	2	10
a_5	11	5	6	21
a_6	21	11	10	42
a_7	43	21	22	85
a_8	85	43	42	170
a_9	171	85	86	341
a_{10}	341	171	170	682
a_{11}	683	341	342	1365
a_{12}	1365	683	682	2730
a_{13}	2731	1365	1366	5461
a_{14}	5461	2731	2730	10922
a_{15}	10923	5461	5462	21845
a_{16}	21845	10923	10922	43690
a_{17}	43691	21845	21846	87381
a_{18}	87381	43691	43690	174762
a_{19}	174763	87381	87382	349525
a_{20}	349525	174763	174762	699050
a_{21}	699051	349525	349526	1398101

a_{22}	1398101	699051	699050	2796202
a_{23}	2796203	1398101	1398102	5592405
a_{24}	5592405	2796203	2796202	11184810
a_{25}	11184811	5592405	5592406	22369621
a_{26}	22369621	11184811	11184810	44739242
a_{27}	44739243	22369621	22369622	89478485
a_{28}	89478485	44739243	44739242	178956970
a_{29}	178956971	89478485	89478486	357913941
a_{30}	357913941	178956971	178956970	715827882

因為我們發現到這個數列的前後項的比好像離 2 很近，如此給了大家一個新的提示，我們再用原先的一般項來寫：

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = a_2 + 2a_1 = a_1 + 2a_2 = 2a_2 + 1 (\because a_1 = a_2)$$
$$a_4 = a_3 + 2a_2 = a_3 + (a_3 - 1) = 2a_3 - 1$$
$$a_5 = a_4 + 2a_3 = a_4 + (a_4 + 1) = 2a_4 + 1$$
$$a_6 = a_5 + 2a_4 = a_5 + (a_5 - 1) = 2a_5 - 1$$
$$a_7 = a_6 + 2a_5 = a_6 + (a_6 + 1) = 2a_6 + 1$$
$$a_8 = a_7 + 2a_6 = a_7 + (a_7 - 1) = 2a_7 - 1$$

…….

從這裡我們可以知道一個結果：

※ 當 n 為奇數月時，$a_n = 2a_{n-1} + 1$（n＞2）
當 n 為偶數月時，$a_n = 2a_{n-1} - 1$（n＞2）

但是這樣好像還不是很好用的表示法（因為還有第 n-1 項），但我們似乎可以利用上式再化簡：

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 + 1$

$a_4 = 2a_3 - 1 = 2(2+1) - 1 = 2^2 + (2 - 1)$

$a_5 = 2a_4 + 1 = 2(2^2+2-1) + 1 = 2^3 + (2^2 - 2 + 1)$

$a_6 = 2a_5 - 1 = 2(2^3+2^2-2+1) - 1 = 2^4 + (2^3 - 2^2 + 2 - 1)$

$a_7 = 2a_6 + 1 = 2(2^4+2^3-2^2+2-1) + 1 = 2^5 + (2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1)$

$a_8 = 2a_7 - 1 = 2(2^5+2^4-2^3+2^2-2+1) + 1 = 2^6 + (2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1)$

…….

我們可以做個歸納，當 n 為奇數時：

$$a_n=2^{n-2}+(2^{n-3}-2^{n-4}+2^{n-5}-\ldots\ldots+2^2-2+1)$$

在此我們可用等比級數求和，首項=1，公比=(-2)<1，項數=n-2

$$a_n=2^{n-2}+\frac{1\left[1-(-2)^{n-2}\right]}{1-(-2)}=\frac{3\times 2^{n-2}+\left[1+2^{n-2}\right]}{3}=\frac{4\times 2^{n-2}+1}{3}=\frac{2^2\times 2^{n-2}+1}{3}=\frac{2^n+1}{3}(n>2)$$

同理，當 n 為偶數時：

$$a_n=2^{n-2}+(2^{n-3}-2^{n-4}+2^{n-5}-\ldots\ -2^2+2-1)$$

我們再用等比級數求和，首項=(-1)，公比=(-2)<1，項數=n-2

$$a_n=2^{n-2}+\frac{(-1)\left[1-(-2)^{n-2}\right]}{1-(-2)}=\frac{3\times 2^{n-2}-\left[1-2^{n-2}\right]}{3}=\frac{4\times 2^{n-2}-1}{3}=\frac{2^2\times 2^{n-2}-1}{3}=\frac{2^n-1}{3}(n>2)$$

我們終於得到一個實用的通式了，也就是在第 n 個月時，兔子的總對數有

※

$$\boxed{\begin{aligned}a_n&=\frac{2^n+1}{3}(\text{當}n\text{為奇數時})\\ a_n&=\frac{2^n-1}{3}(\text{當}n\text{為偶數時})\end{aligned}}$$

※由前面所述可知，在第 n 個月時，其大兔子的對數為前 n-1 項，即 a_{n-1}；

而小兔子的對數為前 n-2 項的 2 倍，即 $2a_{n-2}$。

※同時我們可以利用以上的結論去證一個我們早就發現到的規律，就是連續兩項相加必是 2^n 的型式。例如：$1+1=2^1$、$1+3=2^2$、$3+5=2^3$、$5+11=2^4$、$11+21=2^5$，……

因為，我們可先假設 $a_n=\frac{2^n+1}{3}$ 為一奇數項，故 $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{3}$ 就是偶數項，所以

$$a_n+a_{n+1}=\frac{2^n+1}{3}+\frac{2^{n+1}-1}{3}=\frac{2^n+2^{n+1}}{3}=\frac{2^n+2^1\times 2^n}{3}=\frac{2^n(1+2)}{3}=2^n$$

同理，當 a_n 為一偶數項、a_{n-1} 為一奇數項時，我們亦可得一相同的結果。

※如此一來是否前 n 項之和 S_n 也可以求出？

在此我們利用上式所得 $a_n+a_{n+1}=2^n$ （n>2）

$$\begin{aligned}a_1&=1\\ a_1+a_2&=2^1\\ a_2+a_3&=2^2\\ a_3+a_4&=2^3\\ a_4+a_5&=2^4\\ \ldots\ldots\ &\ \ \ldots\ldots\\ a_{n-1}+a_n&=2^{n-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rl}
+ & a_n+a_{n+1} = 2^n \\
\hline
& 2(a_1+a_2+a_3+a_4\ldots+a_n)+a_{n+1} = 1+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}+2^n
\end{array}
$$

$2S_n + a_{n+1} = \dfrac{1[2^{n+1}-1]}{2-1}$（∵首項=1，公比=2，項數=n+1 其中 $S_n = a_1+a_2+a_3+a_4\ldots+a_n$）

$$\Rightarrow 2S_n + \left[\frac{2^{n+1}-1}{3}\right] = 2^{n+1}-1 (\text{在此假設}n\text{為奇數}) -------- ※$$

$$\Rightarrow 2S_n = 2^{n+1}-1-\left[\frac{2^{n+1}-1}{3}\right] = \frac{3\times 2^{n+1}-2^{n+1}-3+1}{3} = \frac{2\times 2^{n+1}-2}{3}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{2^{n+1}-1}{3} (n\text{為奇數時})$$

而當 n 為偶數時，我們亦可用相同的方式求得，由※可得到

$$\Rightarrow 2S_n + \left[\frac{2^{n+1}+1}{3}\right] = 2^{n+1}-1 (\text{在此假設}n\text{為偶數})$$

$$\Rightarrow 2S_n = 2^{n+1}-1-\left[\frac{2^{n+1}+1}{3}\right] = \frac{3\times 2^{n+1}-2^{n+1}-3-1}{3} = \frac{2\times 2^{n+1}-4}{3}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{2^{n+1}-2}{3} (n\text{為偶數時})$$

※
$$\boxed{\begin{array}{l} S_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{3} (\text{當}n\text{為奇數時}) \\ S_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{3} (\text{當}n\text{為偶數時}) \end{array}}$$

※接下來再看其各項間是否有其規律？很明顯我們發現到數列中其最後一個數字必是 1、1、3、5 的循環，為什麼呢？

我們可將連續十個整數分成一組，即 10k，10k+1，10k+2，10k+3，…..，10k+9。因為阿拉伯數字是十進位，所以我們就看每一項被十除所餘的數即可，故我們假設

$a_1=1=10k_1+1$（其中 $k_1=0$）

$a_2=1=10k_2+1$（其中 $k_2=0$）

由一般項 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（$n>2$） 知

$a_3=a_2+2a_1=(10k_2+1)+2(10k_1+1)=10(k_2+2k_1)+3=10k_3+3$（其中 $k_3=k_2+2k_1$）

$a_4=a_3+2a_2=(10k_3+3)+2(10k_2+1)=10(k_3+2k_2)+5=10k_4+5$（其中 $k_4=k_3+2k_2$）

$a_5=a_4+2a_3=(10k_4+5)+2(10k_3+3)=10(k_4+2k_3)+11=10(k_3+2k_2+1)+1=10k_5+1$
（其中 $k_5=k_3+2k_2+1$）

$a_6=a_5+2a_4=(10k_5+1)+2(10k_4+5)=10(k_5+2k_4)+11=10(k_5+2k_4+1)+1=10k_6+1$
（其中 $k_6=k_5+2k_4+1$）

如此又回到 10k+1、10k+1 的形式，若以這方式一直做下去我們可以得到這個數列尾數的循環必是 1、1、3、5，換個方向來說這個數列的每一項都是奇數。

※我們又找到似乎每隔幾項就有倍數關係，首先發現每隔 2 項必是 3 的倍數

我們再利用上面的方法去證明

$a_1=1=3k_1+1$（其中 $k_1=0$）

$a_2=1=3k_2+1$（其中 $k_2=0$）

由一般式 $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（$n>2$）可得

$a_3=a_2+2a_1=(3k_2+1)+2(3k_1+1)$

$=3(2k_1+k_2+1)$

$=3k_3$（其中 $k_3=2k_1+k_2+1$）

$a_4=a_3+2a_2=3k_3+2(3k_2+1)$

$=3(2k_2+k_3)+2$

$=3k_4+2$（其中 $k_4=2k_2+k_3$）

$a_5=a_4+2a_3=(3k_4+2)+2(3k_3)$

$=3(2k_3+k_4)+2$

$=3k_5+2$（其中 $k_5=2k_3+k_4$）

$a_6=a_5+2a_4=(3k_5+2)+2(3k_4+2)$

$=3(2k_4+k_5+2)$

$=3k_6$（其中 $k_6=2k_4+k_5+2$）

$a_7=a_6+2a_5=3k_6+2(3k_5+2)$

$=3(2k_5+k_6+1)+1$

$=3k_7+1$（其中 $k_7=2k_5+k_6+1$）

$a_8=a_7+2a_6=(3k_7+1)+2(3k_6)$

$=3(2k_6+k_7)+1$

$=3k_8+1$（其中 $k_8=2k_6+k_7$）

由此可知，當此數列的每一項用 $a_n=3k_n+x$ 表示時其尾數 x 的循環分別為

1、1、0、2、2、0、1、1、0、2、2、0、………

可知此數列每隔 2 項必是 3 的倍數

我們可依此方式證明

每隔 3 項必是 5 的倍數、每隔 4 項必是 11 的倍數、每隔 5 項必是 7 的倍數、每隔 6 項必是 43 的倍數、每隔 7 項必是 17 的倍數、每隔 8 項必是 57 的倍數、每隔 9 項必是 31 的倍數……

※我們在證明上式時發現到若 n 是質數（$n>2$）時是不是就表示 a_n 也必定是一個質數？

我們知道藉由厄拉托賽（ERATOSTHENES）的「篩法」可以只需檢查小於或等於 $\sqrt{n}$ 的質數即可，但是若數字很大時即使是 $\sqrt{n}$ 也是要檢查好久，幸好我們藉由網路找到了一個快速檢驗質數的程式，我們將網站（http://www.aplusmath.com/Homework_Helper/PrimeNumbers.html）部分內容節錄如下：

Check for a Prime Number!

178956971

Answer

178956971 is not a prime number. 3033169 * 59 equals 178956971

Definition

prime number : A number that has itself and 1 as its only factors.

Home | Comments | FAQ

我們整理後可得

質數項（n＞2）		是否質數	質數項（n＞2）		是否質數
a_3	3	v	a_{17}	43691	v
a_5	11	v	a_{19}	174763	v
a_7	43	v	a_{23}	2796203	v
a_{11}	683	v	a_{29}	178956971	X
a_{13}	2731	v	a_{29}＝178956971＝59×3033169		

雖然我們在檢查第 29 項時就發現第 29 項並不是一個質數，但是就留下一個問題：此數列中是否有無窮多個質數呢？若不是，那最大的質數又是多少？因為這個我們只能猜想「應該」有無限多個但我們卻無法提出證明，這就留給有興趣的人去努力了。

五、 研究結果

（一） 此數列的一般項為 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}$（n＞2）。

（二） 第 n 個月時，兔子總對數為

$$a_n=\frac{2^n+1}{3}(當n為奇數時)$$

$$a_n=\frac{2^n-1}{3}(當n為偶數時)$$

（三） 其中，大兔子的對數是第 n-1 項；小兔子的對數是第 n-2 項的 2 倍。

（四） 前 n 項之和為

$$S_n=\frac{2^{n+1}-1}{3}(當n為奇數時)$$

$$S_n=\frac{2^{n+1}-2}{3}(當n為偶數時)$$

（五） 連續兩項相加必是 2^n 的型式，即 $a_n + a_{n+1} = 2^n$。

（六） 此 數列尾數的循環必是 1、1、3、5。

（七） 每隔 2 項必是 3 的倍數、每隔 3 項必是 5 的倍數、每隔 4 項必是 11 的倍數….

六、討論

其實我們覺得應該還有很多規律是我們尚未發現的，而且我們在研究之中也發現到兩個問題？

（一） 若將大兔子生長規則改成下一個月生下 n 對小兔子，其一般項就會改成 $a_n = a_{n-1} + na_{n-2}$ （n＞2）。

（二） 若將小兔子生長規則改成下一個月長成中兔子，而中兔子下一個月才長成大兔子，大兔子在下一個月又生下一對小兔子，其一般項就會變成 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ （n＞3）。

哇！如此一來就多出很多很多東西值得去研究了，我們會朝此方向繼續努力下去的。

七、心得

沒想到就單單一個規則就能衍生出這麼多東西，起初看見這麼多數據時大家還不是有把握能找到一些規律來，結果我們居然找到這麼多規律而且都可以用我們學過的方法去解決它，真是太神奇了，不禁讓我們感到數學的奧妙所在，而在這幾個月中大家彼此討論研究數學已經成為一種習慣，也學會用試算表來算數學，也學會用網路去克服研究中遭遇到的難題，雖然時間短暫，但是相信大家對這一次參加科展的經驗一定不會忘記。

八、參考資料及說明

1. http://www.aplusmath.com/Homework_Helper/PrimeNumbers.html

2.國立編譯館，國民中學數學第六冊，台北，國立編譯館，（民 89）。

3.國立編譯館，國民中學數學第一冊教師手冊，台北，國立編譯館，（民 89）。

4.孫文先編譯，神祕有趣的數學，九版，台北市，九章出版社，第 27~30 頁，(民 82)。