中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：等差數列外一章

關 鍵 詞：等差數列、等比子數列、項數

編　　號：030417

學校名稱：

高雄縣立鳳山國民中學

作者姓名：

杜信達、許名雅

指導老師：

杜鴻祥、宋碧金

等差數列外一章

摘　要

本文主要探討等差數列、等比數列的性質。首先證明任意等差數列之內，一定有等比子數列，且其首項、公差的比值必為有理數。接著利用等比數列公比 r，求出其相鄰兩項在原等差數列中項數的關係。

又發現等比子數列相鄰兩項的差與其在原等差數列中的項數所構成的數列，其相鄰兩項的差皆可以構成等比數列。並得到等比子數列在原等差數列中項數的一般項。也利用等比子數列連續三個項的項數，找出任意項的一般式。

等差數列的各個項可以構成係數類似巴斯卡三角形性質的等式。

我們又發現等差數列中祇要有完全平方（立方）數，就有無限多個完全平方（立方）數。最後，討論兩相異等差數列共同項的關係，並得到結論。

壹、研究動機：

數學課介紹了等差數列、等比數列的有關性質後，我們發現：等差數列的某些項之間，含有一些特殊規則可以討論，因此就在老師的指導之下著手研究。

為了研究方便，**我們祇討論正整數的數列，且首項 a、公差 d、公比 r，其中（a，d）＝1**。

以 $\{\mathbf{a_n}\}$ 表示原等差數列，$\{a_{k_n}\}$ 表示在等差數列 $\{\mathbf{a_n}\}$ 之中的等比子數列。

所以 $\{\mathbf{k_n}\}$ 為對應於原等差數列之中，等比子數列的項數所構成的數列。

即 a_{k_n} 表示等比子數列的第 n 項，也是原等差數列的第 $\mathbf{k_n}$ 項。

貳、研究目的：

一、任一等差數列之內，是否可以找出等比子數列？有何規則？

二、原等差數列與其等比子數列的項數之間，有何種關係？

三、等差數列中的各個項之間有何性質？

四、等差數列中是否有完全平方數？完全立方數？

五、兩不同等差數列是否有共同項？

參、研究過程與內容：

一、任一等差數列之內是否可以找出等比子數列？有何規則？

取各種等差數列做比較：

我們發現等差數列中，一定有等比子數列。不同等比子數列的公比，還構成等差數列。有相同公比的等比子數列也不祇一個。

例如：

a=2, d=3 $\Rightarrow$ 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ……

① r＝4 $\Rightarrow$ 2, 8, 32, …… ； $\Rightarrow$ 5, 20, 80, …… ； $\Rightarrow$ 11, 44, 176, ……

② r＝7 $\Rightarrow$ 2, 14, 98, …… ； $\Rightarrow$ 5, 35, 245, ……

③ r＝10 $\Rightarrow$ 2, 20, 200, …… ； $\Rightarrow$ 5, 50, 500, ……

……………

不同等比子數列的公比 r = 4、7、10、13 …… 也構成等差數列。

另外，具有相同公比且在某一項以後都相同的等比子數列，祇討論首項最小的那一個。

例如：r = 4 時，首項 a=2 或 a=8 或 a=32 ……的等比子數列，祇取 2, 8, 32, 128, ……討論。

在任意 $\{a_n\}$ 之中，a_{a+1} = a+ad=a（1+d）是 a 的倍數，所以一定有一個公比 r=1+d 的等比子數列。

1. r=1+d 時

$\boxed{\text{證明}}$：

①a_{a+1}=a+（a+1-1）d = a（1+d）是 a 的倍數

②∵a_{a+1} · r

= （a+ad）（1+d）= a +（2a + ad）d

$= a_{2a+ad+1}$

∵a、d∈N ∴ $a_{2a+ad+1}$ 必存在

∴在 $\{a_n\}$ 之中，取 a_{k_1} = a，a_{k_2} = a_{a+1}，$a_{k_3} = a_{2a+ad+1}$ ，可構成 r=1+d 的等比子數列的前三個項,

③若 a_{t+1} 為 r=1+d 的等比子數列的某一項,

則 a_{t+1} · r

= （a+ t d）（1+d）= a+（a+ t+ t d）d

∵a+ t+ td∈N ∴ $a_{a+t+td+1}$ 必存在。

∴在首項 a、r=1+d 的等比子數列之中，$a_{a+t+td+1}$ 必為 a_{t+1} 的後一項。

∴祇要 r=1+d 必可以找到一個以 a 為首項的等比子數列。

因為任意 $\{a_n\}$ 的 a_{a+1}= a（1+d）一定是 a 的倍數。所以至少有一個首項為 a，公比 r =1+d 的等比子數列。

2. r=1+2d 時

$\boxed{\text{證明}}$：

① a_{2a+1} = a+ 2ad = a（1+2d）是 a 的倍數

②∵ a_{2a+1} · r

= （a+ 2ad）（1+2d）= a+（4a+4ad）d

= $a_{4a+4ad+1}$ ∴ $a_{4a+4ad+1}$ 必存在

∴在 $\{a_n\}$ 之中，取 a_{k_1} = a , $a_{k_2} = a_{2a+1}$, $a_{k_3} = a_{4a+4ad+1}$,也可以構成 r=1+2d 的等比子數列的前三個項,

③若a_{t+1}為 r=1+2d 的等比子數列的某一項,

則a_{t+1} · r

=（a+ t d）（1+2d）= a+（2a+ t+2 t d）d

∵2a+ t+2td∈N ∴$a_{2a+t+2td+1}$必存在。

∴在 r=1+2d 的等比子數列之中, $a_{2a+t+2td+1}$必為a_{t+1}的後一項。

∴祇要 r=1+2d 也可以找到一個以 a 為首項的等比子數列。

所以**任意｛a_n｝也有一個首項為 a, 公比 r =1+2d 的等比子數列。**

3. r=1+md 時

證明：

① a_{am+1}= a+ amd =a（1+md）一定是 a 的倍數

②∵ a_{am+1} · r

=（a+ amd）（1+md）= a+（2am + am^2d）d

= a_{2am+am^2d+1}, 即第 2am + am^2d +1 項必存在

∴在｛a_n｝之中, 取a_{k_1}= a, $a_{k_2}=a_{am+1}$, a_{k_3}= a_{2am+am^2d+1} , 可以構成公比

r=1+md 的等比子數列的前三個項,

③若a_{t+1}為 r=1+md 的等比子數列的某一項,

則a_{t+1} · r

=（a+ t d）（1+md）= a+（am + t+ tmd）d = $a_{am+t+tmd+1}$

∴第 am+t+tmd+1 項必存在。

∴在 r=1+md 的等比子數列之中, $a_{am+t+tmd+1}$必為a_{t+1}的後一項。

∴祇要 r=1+md, 也可以找到一個以 a 為首項的等比子數列。

所以**任意｛a_n｝有一個首項為 a, 公比 r =1+md 的等比子數列。**

結論：

每一個｛a_n｝之內, 一定有等比子數列；而且首項相同, 公比不同的等比子數列, 其公比 1+d、1+2d、……、1+md 構成等差數列。

為什麼有這麼多等比子數列？再深入探討。

證明：

$$\because\ r=\frac{a_{k_{n+1}}}{a_{k_n}} = \frac{a+(k_{n+1}-1)d}{a+(k_n-1)d}$$

∴ a + k_{n+1} · d－d = a r + d r k_n－ d r

a（1－r）－d（1－r）=d（r k_n－k_{n+1}）

（a－d）（1－r） = d（r k_n－k_{n+1}）

$$r\,k_n - k_{n+1} = \frac{(a-d)(1-r)}{d}$$

$$k_{n+1} = r\,k_n + \frac{1}{d}(a-d)(r-1) \quad \text{---------} \quad Ⓐ$$

∵ a ,d , $k_n \in N$　　∴祇要$\frac{1}{d}(a-d)(r-1)$取正整數就可以找到 k_{n+1}

∴等比子數列必定存在。

祇要 r 固定，就可以取為等比子數列的項，所以｛a_{k_n}｝的首項a_{k_1}可以在原｛a_n｝之中任意取定，則 k_1 也確定。利用Ⓐ式就可以逐項求出 k_n、k_{n+1}。所以在原｛a_n｝之中可以取不同首項，相同公比的各種｛a_{k_n}｝。

∵a、d、r、$k_n \in N$

∴$\frac{1}{d}(a-d)(r-1) \in N$ 時，就可以求出 k_{n+1}

∴d｜（a-d）　或 d｜（r-1）

∴d｜a　或　r-1 = m d ，　$m \in N$

∵（a，d）＝1　　∴ r = 1+md

在（a，d）＝1，r 取為 1+d、1+2d、……、1+md 時，就可以找到等比子數列。因此，祇要在｛a_n｝之中取任意一個項做為首項，取公差的倍數加 1 為公比，必可以找到｛a_{k_n}｝。所以等比子數列不是唯一。

若首項恰為公差的倍數或是公差 d=1 時，一定可以找到等比子數列。

$\boxed{\text{結論}}$：

在｛a_n｝中，一定可以找到｛a_{k_n}｝：

1.首項a_{k_1}取原｛a_n｝的任一項，

2.公比 r 的取法：

① 當 d｜a 或 d＝1 時，　r 取任意正整數

②當（a，d）＝1 時，取 r = 1+md，$m \in N$

則｛a_{k_n}｝的相鄰兩項a_{k_n}、$a_{k_{n+1}}$其項數 k_n、k_{n+1} 有 $k_{n+1} = r\,k_n + \frac{1}{d}(a-d)(r-1)$的關係。

因為不同｛a_{k_n}｝的公比 r 具有 1+d、1+2d、……、1+md 的形式，所以在同一｛a_n｝中不同｛a_{k_n}｝的不同公比之間構成公差為 d 的等差數列。

所以，想知道任意｛a_n｝之中，有沒有特定公比的｛a_{k_n}｝時，祇要這個特定公比是公差的倍數加 1 就可以。

但是Ⓐ式是 k_{n+1} 與 k_n 的關係，能不能直接求 k_{n+1} 呢？

二、原等差數列與其等比子數列的項數之間，有何種關係？

任意 $\{a_n\}$ 之中，不祇一個等比子數列，等差數列的首項也不一定是等比子數列的首項，公比也不祇一個，這些數字之間有何規則？先由例子觀察。

$a=2, d=3 \Rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \cdots\cdots$

$r=4 \Rightarrow a_1=2 , a_3=8 , a_{11}=32 , a_{43}=128 , a_{171}=512 , \cdots\cdots$

$\because\ r = 4 = \dfrac{32-8}{8-2} = \dfrac{128-32}{32-8} = \cdots\cdots$

另外， $r = 4 = \dfrac{11-3}{3-1} = \dfrac{43-11}{11-3} = \cdots\cdots$

得知 $\{a_{k_n}\}$ 中，相鄰兩項的差構成等比數列；且其項數所構成的數列，相鄰兩項的差也構成等比數列。

於是想到直接求 k_{n+1} 的規則：

（一）先找等比子數列各相鄰兩項的差的關係：

證明：

在 $\{a_{k_n}\}$ 之中

設 $\{b_n\}$ 表相鄰兩項的差所構成的數列，即 $b_n=a_{k_{n+1}} - a_{k_n}$

$\because\ a_{k_n} = a_{k_{n-1}} \cdot r$

$\therefore\ b_{n-1} = a_{k_n} - a_{k_{n-1}} = a_{k_1} \cdot r^{n-2} \cdot (r-1)$

$\quad\ b_n = a_{k_{n+1}} - a_{k_n} = a_{k_1} \cdot r^{n-1} \cdot (r-1)$

$\therefore\ r = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{a_{k_{n+1}} - a_{k_n}}{a_{k_n} - a_{k_{n-1}}}$ ---------- Ⓑ

$\therefore\ \{b_n\}$ 為公比 r 的等比數列

因此 $\{a_{k_n}\}$ 各相鄰兩項的差所構成的數列，也構成等比數列。

（二）再找出各相鄰兩項的項數之間的關係：

證明：

若 $\{a_n\}$ 中的 a_k , a_m , a_n 是某一 $\{a_{k_n}\}$ 的連續三個項

利用Ⓑ式 $\because\ r = (a_n - a_m) \div (a_m - a_k)$

$\therefore\ r = \dfrac{(n-m)d}{(m-k)d} = (n-m) / (m-k)$

$\therefore$若 a_k , a_m , a_n 為 $\{a_n\}$ 的三個項，且構成公比 r 的等比子數列

則 $r = \dfrac{a_n - a_m}{a_m - a_k} = \dfrac{n-m}{m-k}$ ---------- Ⓒ

結論：

在任意 {a_n} 中，{a_{k_n}} 的相鄰兩項之間的差，會構成等比數列；且 {k_n} 相鄰兩個項數之間的差，也可以構成等比數列。而公比就是此一 {a_{k_n}} 的公比。

所以，祇要知道 {a_n} 中的某三個項數，是某一 {a_{k_n}} 的連續三個項，就可以利用©式求得此一 {a_{k_n}} 的公比。

但是對任意 {a_n}，祇要知道任兩項及其項數就可以利用 $a_n = a + (n-1)d$ 求出首項、公差。

祇要已知某一 {a_{k_n}} 的任意相鄰兩項，及其在原 {a_n} 中的項數，就可求其公比、原 {a_n} 的首項、公差及原 {a_n} 的任意項。

接著，找 k_n 的關係式，

$\boxed{\text{證明}}$：

在 {a_{k_n}} 之中

其項數所構成的數列 $k_1, k_2, k_3, \cdots\cdots k_{n-2}, k_{n-1}, k_n, \cdots\cdots$

設 {c_n} 為相鄰兩個項的項數差所構成的數列

則 $c_n = k_{n+1} - k_n$

由©式可知

$$r = \frac{k_3-k_2}{k_2-k_1} = \frac{k_4-k_3}{k_3-k_2} = \cdots = \frac{k_n-k_{n-1}}{k_{n-1}-k_{n-2}} = \cdots$$

$$= \frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \cdots = \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} = \cdots$$

∴ {k_n} 相鄰兩項的差所構成的數列 {c_n} 為公比 r 的等比數列。

利用這個性質找 k_n 的關係式

$\boxed{\text{證明}}$：

$\because k_{n+1} = k_n + c_n$

$\therefore k_2 = k_1 + c_1$

$k_3 = k_2 + c_2 = k_1 + (c_1 + c_2)$

……

$k_n = k_{n-1} + c_{n-1} = k_1 + (c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1})$

$$\therefore k_n = k_1 + \frac{(k_2-k_1)(1-r^{n-1})}{1-r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{Ⓓ}$$

所以，{a_{k_n}} 在原 {a_n} 中的項數所構成的數列 {k_n}，可以利用 $k_n = k_1 + \frac{(k_2-k_1)(1-r^{n-1})}{1-r}$ 直接算出。因此祇要有 {a_{k_n}} 的前兩項 a_{k_1}, a_{k_2}，則 r、a_{k_n}、k_n 都可以求出。

但是在原 {a_n} 之中，若是知道 {a_{k_n}} 某些項的項數，是否可以找出這個 {a_{k_n}} 任意項的項數？

因為公比 r 由相鄰兩個項的項數差即可得到，如©式。所以必須有 {a_{k_n}} 連續三個項的

項數，才能算出公比。

（三）利用｛a_{k_n}｝的連續三個項的項數 **k_m、k_{m+1}、k_{m+2}**，求任意項 **k_n**？

1、已知｛a_{k_n}｝的連續三個項的項數 $k_3=11$、$k_4=43$、$k_5=171$，求 $k_n=$？

$\because\ r=\dfrac{171-43}{43-11}=4$

利用 $k_{n+1}=r\,k_n+\dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)$ --------- Ⓐ

$\therefore\ 43=4\cdot 11+\dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)$ $\qquad\therefore\ \dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)=-1$

$\therefore k_{n+1}=4\,k_n-1$ -----①

$\because c_3=k_4-k_3=32=c_1\cdot 4^2$

$\therefore c_1=k_2-k_1=2$ ---------②

$\therefore k_2=k_1+2$ 代入①

$k_1+2=k_2=4k_1-1$

$k_1=1$ -----③

由②③代入Ⓓ

$\therefore k_n=k_1+\dfrac{(k_2-k_1)(1-r^{n-1})}{1-r}$ ………… Ⓓ

$=1+\dfrac{2(4^{n-1}-1)}{3}=\dfrac{2\cdot 2^{2n-2}+1}{3}$

$=\dfrac{2^{2n-1}+1}{3}$

2、在｛a_n｝中，若某一個｛a_{k_n}｝連續三個項的項數 $k_m=p$、$k_{m+1}=q$、$k_{m+2}=s$，求 k_n？

$\boxed{\text{證明}}$：

$\because k_m=p$、$k_{m+1}=q$、$k_{m+2}=s$

$\therefore\ r=\dfrac{s-q}{q-p}$

$\because\ k_{n+1}=r\,k_n+\dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)$ ------ Ⓐ

$\therefore\ q=\dfrac{s-q}{q-p}\cdot p+\dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)$

$\therefore\ \dfrac{1}{d}(a-d)(r-1)=\dfrac{q^2-ps}{q-p}$

$\therefore\ k_{n+1}=\dfrac{s-q}{q-p}k_n+\dfrac{q^2-ps}{q-p}$ ------ ①

$\because\ c_m=k_{m+1}-k_m=q-p=c_1\cdot r^{m-1}$

$\therefore\ c_1 \cdot \left(\frac{s-q}{q-p}\right)^{m-1} = q-p$

$\therefore\ k_2 - k_1 = c_1 = (q-p) \cdot \frac{(q-p)^{m-1}}{(s-q)^{m-1}} = \frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}}$ ------ ②

由①②得 $k_2 = \frac{s-q}{q-p} \cdot k_1 + \frac{q^2-ps}{q-p}$ ------ ③

$k_2 - k_1 = \frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}}$ ------ ④

③代入④

$$\left(\frac{s-q}{q-p} \cdot k_1 + \frac{q^2-ps}{q-p}\right) - \left(\frac{q-p}{q-p}\right) k_1 = \frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}}$$

$$\frac{p-2q+s}{q-p} \cdot k_1 = \frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}} - \frac{q^2-ps}{q-p}$$

$$k_1 = \frac{q-p}{p-2q+s}\left[\frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}} - \frac{q^2-ps}{q-p}\right]$$

$$= \frac{1}{p-2q+s}\left[\frac{(q-p)^{m+1}}{(s-q)^{m-1}} - q^2 + ps\right] \text{ ------⑤}$$

由④⑤代入Ⓓ

$$k_n = k_1 + \frac{(k_2-k_1)(1-r^{n-1})}{1-r} \text{ ------ Ⓓ}$$

$$k_n = \frac{1}{p-2q+s}\left[\frac{(q-p)^{m+1}}{(s-q)^{m-1}} - q^2 + ps\right] + \frac{\frac{(q-p)^m}{(s-q)^{m-1}} \cdot \left[1-\left(\frac{s-q}{q-p}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{s-q}{q-p}}$$

$$= \frac{1}{p-2q+s}\left[\frac{(q-p)^{m+1}}{(s-q)^{m-1}} - q^2 + ps - \frac{(q-p)^{m+1}}{(s-q)^{m-1}} + \frac{(q-p)^{m+1}}{(s-q)^{m-1}} \cdot \frac{(s-q)^{n-1}}{(q-p)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{p-2q+s}\left[ps - q^2 + \frac{(q-p)^{m-n+2}}{(s-q)^{m-n}}\right]$$

$$= \frac{1}{p-2q+s}\left[ps - q^2 + \frac{1}{r^{m-n}} \cdot (q-p)^2\right]$$

能不能有更簡便的方法呢？

把 $k_m=p$、$k_{m+1}=q$、$k_{m+2}=s$ 代入Ⓐ式 $k_{n+1} = r\,k_n + \frac{1}{d}(a-d)(r-1)$

$\therefore \frac{1}{d}(a-d)(r-1) = q - rp$

$\therefore\ k_{n+1} = r\,k_n + q - rp$ ------ ①

$\because\ c_m = k_{m+1} - k_m = q - p = c_1 \cdot r^{m-1}$

$\therefore\ c_1 = k_2 - k_1 = \dfrac{q-p}{r^{m-1}}$ ------ ②

由① $k_2 = r\,k_1 + q - rp$ ------ ③

③代入② $(r\,k_1 + q - rp) - k_1 = \dfrac{q-p}{r^{m-1}}$

$\therefore\ (r-1)\,k_1 = \dfrac{q-p}{r^{m-1}} - q + rp$

$k_1 = \dfrac{1}{r-1}\left(\dfrac{q-p}{r^{m-1}} - q + rp\right)$ ------ ④

由②、④代入Ⓓ

$$\therefore k_n = \frac{1}{r-1}\left(\frac{q-p}{r^{m-1}} - q + rp\right) + \frac{\frac{q-p}{r^{m-1}}\left(1-r^{n-1}\right)}{1-r}$$

$$= \frac{1}{r-1}\left(\frac{q-p}{r^{m-1}} - q + rp\right) - \frac{1}{r-1}\left(\frac{q-p}{r^{m-1}} - \frac{q-p}{r^{m-n}}\right)$$

$$= \frac{1}{r-1}\left(\frac{q-p}{r^{m-1}} - q + rp - \frac{q-p}{r^{m-1}} + \frac{q-p}{r^{m-n}}\right)$$

$$= \frac{1}{r-1}\left(rp - q + \frac{q-p}{r^{m-n}}\right)$$

在 $\{a_n\}$ 中，若某一 $\{a_{k_n}\}$ 連續三個項的項數 $k_m = p$、$k_{m+1} = q$、$k_{m+2} = s$，

則 $k_n = \dfrac{1}{p-2q+s}\left[ps - q^2 + \dfrac{(q-p)^{m-n+2}}{(s-q)^{m-n}}\right]$

$= \dfrac{1}{p-2q+s}\left[ps - q^2 + \dfrac{1}{r^{m-n}}\cdot(q-p)^2\right]$，**也可以簡化為**

$k_n = \dfrac{1}{r-1}\left(rp - q + \dfrac{q-p}{r^{m-n}}\right)$

(四) 等差數列之中，等比子數列的項有何性質？

再利用等比中項的性質：

若 $\{a_n\}$ 中的某三個項 $a_{k+1}, a_{m+1}, a_{n+1}$ 是某一個等比子數列的連續三個項

則 $a_{m+1}^2 = a_{k+1}\cdot a_{n+1}$

$\therefore\ (a+md)^2 = (a+kd)\cdot(a+nd)$

$a^2 + 2amd + m^2d^2 = a^2 + and + akd + knd^2$

$2amd - and - akd = knd^2 - m^2d^2$

$\therefore\ ad\,(2m-n-k) = (kn-m^2)\,d^2$

$\therefore\ (k-2m+n)\,a = (m^2-kn)\,d$

若 $k-2m+n=0$ 則 $m^2-kn=0$ $(\because ad\neq 0)$

$\therefore m=\dfrac{k+n}{2}$ 代入前式，得（$\dfrac{k+n}{2}$）^{2}－kn＝0

$\therefore$（k－n）^{2}＝0 得到 k＝m＝n

$\therefore a_{k+1}= a_{m+1}= a_{n+1}$　不合

$\therefore \dfrac{a}{d}=\dfrac{m^2-kn}{k-2m+n}$

所以，**{a_n} 中若有 {a_{k_n}}，則 {a_n} 的首項、公差的比值必為有理數，比值可由 {a_{k_n}} 的任意連續三個項的項數求出。因此，若 a_{k+1} , a_{m+1} , a_{n+1} 是某一個 {a_{k_n}} 的連續三個項，則比值 $\dfrac{a}{d}=\dfrac{m^2-kn}{k-2m+n}$。**

接著又想到等差中項是否也有特別關係，結果發現…

三、等差數列中的各個項之間有何性質？

若 a_1、a_2、a_3 構成等差數列，則 $2a_2=a_1+a_3$

$\therefore a_1-2a_2+a_3=0$　　------①

接著，等差數列 a_2、a_3、a_4

$a_2-2a_3+a_4=0$　　------②

①－② 得 $a_1-3a_2+3a_3-a_4=0$　　------③

同理，等差數列 a_2、a_3、a_4、a_5

則 $a_2-3a_3+3a_4-a_5=0$　　------④

③－④ 得 $a_1-4a_2+6a_3-4a_4+a_5=0$

$a_1-5a_2+10a_3-10a_4+5a_5-a_6=0$

$a_1-6a_2+15a_3-20a_4+15a_5-6a_6+a_7=0$

$a_1-7a_2+21a_3-35a_4+35a_5-21a_6+7a_7-a_8=0$

接著下去　……　……　……

我們發現：等差數列的各個項可構成一個等式，且等式的係數可以構成類似巴斯卡三角形的性質。

先找出一般式：$a_1-c_1^n a_2+c_2^n a_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}c_{n-1}^n a_n+(-1)^n c_n^n a_{n+1}=0$　　----Ⓔ

證明：

$a_1-na_2+\dfrac{n(n-1)}{2}a_3-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}a_4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}na_n+(-1)^n a_{n+1}=0$

利用數學歸納法證明Ⓔ式：

（i）n=1　　$a_1-a_2\neq0$　　〔$\because$ a、d $\in$ N〕

（ii）n=2　　$a_1-2a_2+a_3=0$ 成立

（iii）設 n=k 時成立

即 $a_1 - ka_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_3 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}a_4 + \cdots + (-1)^{k-1}ka_k + (-1)^k a_{k+1} = 0$ --⑤

同理，等差數列 a_2、a_3、a_4、……、a_{k+1}、a_{k+2} 由⑤式可得

$a_2 - ka_3 + \frac{k(k-1)}{2}a_4 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}a_5 + \cdots + (-1)^{k-1}ka_{k+1} + (-1)^k a_{k+2} = 0$ --⑥

n=k+1 時

$$a_1 - (k+1)a_2 + \frac{(k+1)k}{2}a_3 - \frac{(k+1)k(k-1)}{6}a_4 + \cdots + (-1)^k(k+1)a_{k+1} + (-1)^{k+1}a_{k+2}$$

$$= \left[a_1 - ka_2 + \frac{k(k-1)}{2}a_3 + \cdots + (-1)^{k-1}ka_k + (-1)^k a_{k+1}\right]$$

$$-a_2 + ka_3 - \frac{k(k-1)}{2}a_4 + \cdots + (-1)^k ka_{k+1} + (-1)^{k+1}a_{k+2}$$

$$= -a_2 + ka_3 - \frac{k(k-1)}{2}a_4 + \cdots + (-1)^{k-1}(-1)ka_{k+1} + (-1)^k(-1)a_{k+2}$$

$$= -a_2 + ka_3 - \frac{k(k-1)}{2}a_4 + \cdots - (-1)^{k-1}ka_{k+1} - (-1)^k a_{k+2}$$

$$= -\left[a_2 - ka_3 + \frac{k(k-1)}{2}a_4 + \cdots + (-1)^{k-1}ka_{k+1} + (-1)^k a_{k+2}\right]$$

=0 〔由⑥式〕

∴當 n∈N，且 n≧2 時，

$$\mathbf{a_1} - c_1^n \mathbf{a_2} + c_2^n \mathbf{a_3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}^n a_n + (-1)^n c_n^n a_{n+1} = \mathbf{0}$$

由以上得知，在｛a_n｝中，等差數列的各個項可構成一個等式，由數學歸納法得知，此等式的係數可以構成類似巴斯卡三角形的性質。如Ⓔ式。

四、等差數列中是否有完全平方數？是否有完全立方數？

首項 a=1 的等差數列有完全平方數 1。其他的等差數列就不一定有完全平方數。

想知道｛a_n｝之中是否有完全平方數，因為 a 與 d 的不同，不是我們的能力所能完成。但是，若等差數列中有完全平方數時，則必有無限多個。

$\boxed{\text{證明}}$：

利用 a_{a+1} = a（1+d）一定是 a 的倍數。

1、先由首項 a = 1，公差 d 開始，

①∵1 即為完全平方數

∴在公差 d 的｛a_n｝：1+d ,1+2d ,1+3d ,… 總會出現 $1+2d+d^2$,……

∴a_{3+d} = 1+（2+d）d =（1+d）^{2} 至少是 1 以後的另一個完全平方數

②若 1+td 為完全平方數，設 $1+td=m^2$

則 m^2+d , m^2+2d , m^2+3d , …… , m^2+（2m+d）d =（m+d）^{2}

∴自 $1+td = m^2$ 起算，第 2m+d+1 項（m+d）^{2} 就是 m^2 的下一個完全平方數

2、再以首項 a，公差 d 的任意｛a_n｝：

若｛a_n｝中的某一個項是完全平方數時，設其為 s^2

則 s^2、s^2+d、s^2+2d、s^2+3d、……、s^2+（2s+d）d、……

自 s^2 起算，第 2s+d+1 項即為（s+d）^{2} 為完全平方數

∴s^2 之後至少會再出現（s+d）^{2}

因此，每一個完全平方數的項之後，必定會再出現另一個，

∴必有無限多個完全平方數的項

3、若｛a_n｝中的某一個項是完全立方數時，設其為 s^3

∵公差 $d\in N$　　∴自 s^3 之後依次為

s^3+d , s^3+2d , s^3+3d、……、, s^3+（$3s^2+3sd+d^2$）d、……、

∴自 s^3 起算，第 $3s^2+3sd+d^2+1$ 項即為（s+d）^{3} 為完全立方數

∴s^3 之後至少會再出現（s+d）^{3}

因此，每一個完全立方數的項之後，必定會再出現另一個，

∴必有無限多個完全立方數的項。

因此，**在｛a_n｝中，祇要有一個完全平方（立方）數的項；則之後一定會跟著出現另一個。所以，若｛a_n｝中有某一個項是完全平方（立方）數，則必有無限多個完全平方（立方）數。同理，若有一個完全 n 次方數的項，必有無限多個完全 n 次方數。**

五、兩不同等差數列是否有共同項？

設｛a_n｝、｛a'_n｝的首項分別為 a , a' ,公差為 d , d'，其中 $a , a', d , d' \in N$

設 $a_{m+1}=a'_{n+1}$

則 $a+md=a'+nd'$

$$\therefore m=\frac{a'-a+nd'}{d}$$

① $a=a'$，　$d\neq d'$

∴首項就是共同項，且 $m=\dfrac{nd'}{d}$

∵$m , n\in N$ ∴祇要 $d \mid nd'$ 就有共同項。

② $a\neq a'$，　$d=d'$

$$\because m=\frac{a'-a}{d}+n$$

∴$d \mid$（$a'-a$）就有共同項

∴自共同項以後都是共同項

③ $a\neq a'$，　$d\neq d'$

祇要 $d \mid$（$a'-a+nd'$）就有共同項

∴若 $a_{m+1}=a'_{n+1}$，則 $a_{m+kd'+1}=a'_{n+kd+1}$，（k∈N 或 k＝0）

$\boxed{\text{證明}}$：

$a_{m+1}=a'_{n+1}$

$a+md=a'+nd'$

$a+md+kdd'=a'+nd'+kdd'$

$a+(m+kd')d=a'+(n+kd)d'$

$\therefore a_{m+kd'+1}=a'_{n+kd+1}$

共同項的公差＝$a_{m+2d'+1}-a_{m+d'+1}$

＝〔$a+(m+2d')d$〕－〔$a+(m+d')d$〕

＝$(m+2d')d-(m+d')d$

＝$d\cdot d'$

首項分別為 a, a'，公差為 d, d' 的 {a_n}、{a'_n}，其中 $a, a', d, d' \in N$

若① $a=a'$，$d\neq d'$ 則在 $d \mid nd'$ 時，就一定有共同項，且首項就是共同項。

② $a\neq a'$，$d=d'$ 則在 $d \mid (a'-a)$ 時，就有共同項，且從共同項以後都是共同項

③ $a\neq a'$，$d\neq d'$ 則在 $d \mid (a'-a+nd')$ 時，就有共同項。

當 $a_{m+1}=a'_{n+1}$，則 $a_{m+kd'+1}=a'_{n+kd+1}$，（k∈N 或 k＝0），且其共同項的公差為 $d\cdot d'$。

肆：結論：

一、因為任意 {a_n} 的 a_{a+1}=a（1+d）是 a 的倍數。所以至少有一個首項 a，r =1+d 的等比子數列。也可以找到公比 r 分別是 1+2d、…、1+md 的不同等比子數列。且首項相同，公比不同的等比子數列，其公比 1+d、1+2d、……、1+md 可以構成等差數列。

二、祇要 r 固定，就可以取為 {a_{k_n}} 的項，所以 {a_{k_n}} 的首項 a_{k_1} 可以在原 {a_n} 之中任意取定。則 k_1 也確定。利用Ⓐ式就可以逐項求出 k_n、k_{n+1}。所以在原 {a_n} 之中可以取不同首項，相同公比的等比子數列。

三、{a_n} 中，一定可以找到 {a_{k_n}}：

1.首項 a_{k_1} 取原 {a_n} 的任一項，

2. r 的取法為：

① 當 d∣a 或 d＝1 時，r 取任意正整數

②當（a，d）＝1 時，取 r = 1+md，m∈N

則所找到的 {a_{k_n}} 的相鄰兩項 a_{k_n}、$a_{k_{n+1}}$，其項數 k_n、k_{n+1} 有 $k_{n+1}=r\,k_n+\frac{1}{d}(a-d)(r-1)$ 的關係。

不同 {a_{k_n}} 的公比 r 具有 1+d、1+2d、……、1+md 的形式，所以在同一 {a_n} 中不同 {a_{k_n}} 的不同公比之間，恰好構成公差 d 的等差數列。因此若想知道任意 {a_n} 之中，有沒有特定公比的等比子數列，祇要這個特定公比是公差的倍數加 1 就可以。

四、在任意｛a_n｝中，｛a_{k_n}｝的相鄰兩項之間的差會構成等比數列；且｛k_n｝相鄰兩個項數之間的差，也可以構成等比數列。且公比就是此一｛a_{k_n}｝的公比。所以祇要已知某一｛a_{k_n}｝的任意相鄰兩項，及其在原｛a_n｝中的項數，就可求其公比、原｛a_n｝的首項、公差及原｛a_n｝的任意項。

五、｛a_{k_n}｝在原｛a_n｝中的項數所構成的數列｛k_n｝，可以利用 $k_n = k_1 + \frac{(k_2-k_1)(1-r^{n-1})}{1-r}$ 直接算出。因此祇要有｛a_{k_n}｝的前兩項 a_{k_1}, a_{k_2}，則 r、a_{k_n}、k_n 都可求出。

六、在｛a_n｝中，若某一｛a_{k_n}｝連續三個項的項數 $k_m = p$、$k_{m+1}=q$、$k_{m+2}=s$，

則 $k_n = \frac{1}{p-2q+s}$〔$ps-q^2+\frac{(q-p)^{m-n+2}}{(s-q)^{m-n}}$〕$=\frac{1}{p-2q+s}$〔$ps-q^2+\frac{1}{r^{m-n}}\cdot(q-p)^2$〕，也可以簡化為 $k_n = \frac{1}{r-1}$（$rp-q+\frac{q-p}{r^{m-n}}$）

七、｛a_n｝中若有｛a_{k_n}｝，則｛a_n｝的首項、公差的比值必為有理數，比值可由｛a_{k_n}｝的任意連續三個項的項數求出。因此，若 $a_{k+1}, a_{m+1}, a_{n+1}$ 是某一個｛a_{k_n}｝的連續三個項，則比值 $\frac{a}{d}=\frac{m^2-kn}{k-2m+n}$。

八、等差數列的各個項可構成一個等式，此等式的係數可以構成類似巴斯卡三角形的性質。如Ⓔ式：$a_1 - c_1^n a_2 + c_2^n a_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}^n a_n + (-1)^n c_n^n a_{n+1} = 0$

九、在｛a_n｝中，祇要有一個完全平方（立方）數的項；之後一定會跟著出現另一個。所以，若｛a_n｝中有某一個項是完全平方（立方）數，則必有無限多個完全平方（立方）數。同理，若有一個完全 n 次方數的項，必有無限多個完全 n 次方數。

十、首項分別為 a, a'，公差為 d, d' 的｛a_n｝、｛a'_n｝，其中 $a, a', d, d' \in N$

若① $a = a'$，$d \neq d'$ 則在 $d \mid nd'$ 時，就一定有共同項，且首項就是共同項。

② $a \neq a'$，$d = d'$ 則在 $d \mid (a'-a)$ 時，就有共同項，且從共同項以後都是共同項。

③ $a \neq a'$，$d \neq d'$ 則在 $d \mid (a'-a+nd')$ 時，就有共同項。

當 $a_{m+1}=a'_{n+1}$，則 $a_{m+kd'+1}=a'_{n+kd+1}$，（$k\in N$ 或 $k=0$）

伍、討論：

想不到等差數列、等比數列之間會有這麼奧妙的規則，其中還隱藏了這麼多的秘密。在研究的過程中，為了解決某個問題，竟又出現了另一個問題。這個研究讓我們認識到什麼是學無止境，數學實在太奇妙了。可惜的是，完全平方數的進一步討論，所牽涉到的原理不是我們的能力所能完成。另外，若在一個數列中出現兩個不同的公差時，此雙等差數列會有何種規則？期盼評審老師能給我們指導。謝謝！！

陸、參考資料：

（一）國立編譯館主編	國中數學課本第六冊	國立編譯館
（二）李信明編著	數學家傳奇	九章出版社