中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：「變臉」遊戲的研究與推廣

關 鍵 詞：正多面體

編　　號：030416

學校名稱：

臺北市立西湖國民中學

作者姓名：

蔡忻潔、黃頌友、溫少瑜

指導老師：

陳宏仁

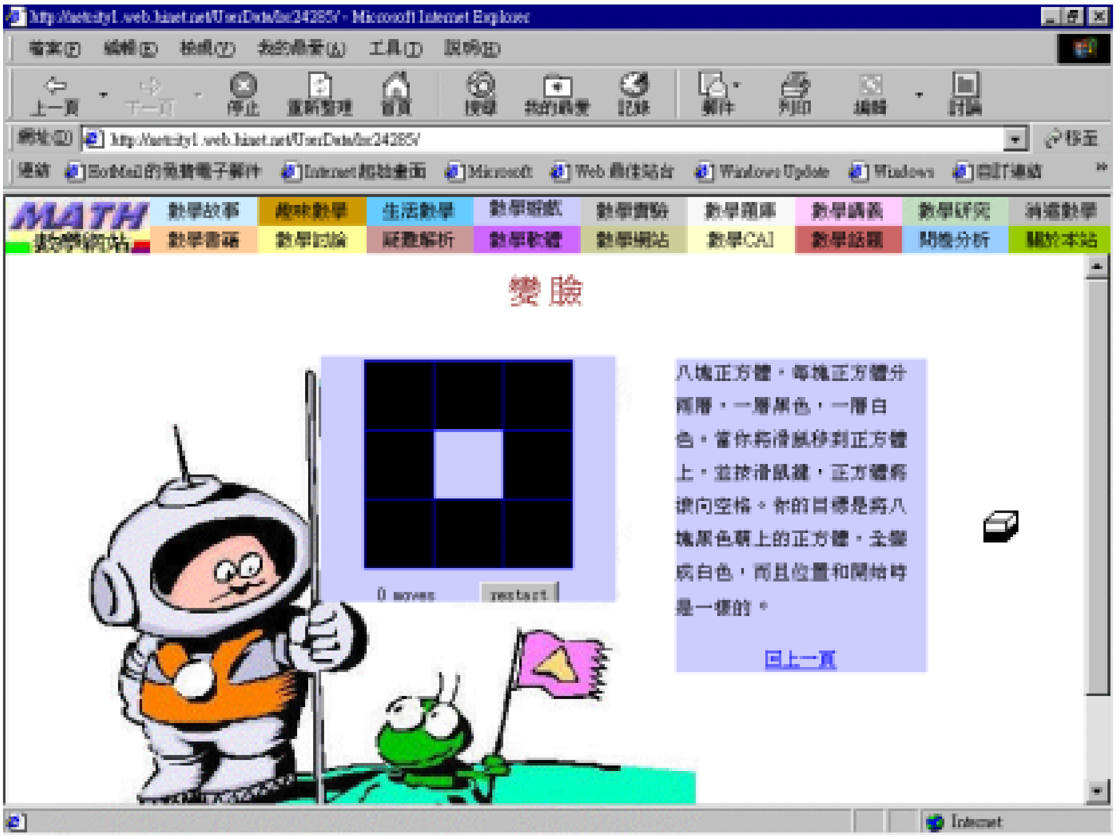
「變臉」遊戲的研究與推廣

壹、 摘要

如果 n^2-1 個正方體在 n×n 格的平面方格中翻轉時，正方體相互間會受到很多的限制。本研究即利用 n^2-1 個正方體在 n×n 的平面方格中翻轉時的特性，所設計出一連串的遊戲，並將遊戲推廣至正四面體在三角格中翻轉的情形。

貳、研究動機:：

有一天，我們在一個國中數學網站「昌爸工作坊」裡發現了一個很好玩的數學遊戲－「變臉」。其內容摘錄如下：



起初，不管我們怎麼玩就是沒有結果，有時想放棄算了，但就覺得心有不甘，於是便上數學討論區，希望能有高手指點迷津，隔天，果然真的有人出手相助，他的解法如下：

IP Address:
[61.59.130.45]　　　　　回覆於:2001/10/30　下午　09:45:42
begin

1	2	3
4	5	6
7	8	9

236985.236985.236985.236985.236985
214785.214785.214785.214785.214785…四角

2145.2145.2145	2145.2145.2145
6325.6325.6325	6325.6325.6325
8965.8965.8965	8965.8965.8965
4785.4785.4785	4785.4785.4785
2145.2145.2145	478965.6325.6325
6325.6325.6325	698745.8745.8745
8965.8965.8965	…四邊
4785.4785.4785	**end.**

看完解法後，頓時覺得太厲害了吧！不單如此，更因爲在國中數學第四冊 2-4「生活中的立體圖形」單元中，我們學到了正方體與正四面體的特性，因此激起我們對這方面的興趣，於是我們想：

1. 對於「變臉」遊戲是否還有其他解法？
2. 當遊戲規則改變時，其結果又爲何？
3. 能不能根據其特性，自己再設計出一套遊戲？

最後，我們決定全面性的來研究這個問題。

參、 研究目的

（一） 正方體與方格棋盤的探討。

1. 探討一個正方體在 3×3 方格中翻轉的情形，如圖（0-1）。
2. 名詞解釋及定義。
3. 在方格棋盤中，任意四格窗（即 2×2 的正方形）可以 " 自由旋轉 90 度 " 情形之探討。
   - 遊戲一：在方格棋盤中，四格窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。
   - 遊戲二：在方格棋盤中，四格窗可以自由旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。
4. 在方格棋盤中，任意四格窗 " 無法旋轉 " 之探討。
   - 遊戲三：在方格棋盤中，四格窗無法旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。
   - 遊戲四：在方格棋盤中，四格窗無法旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。

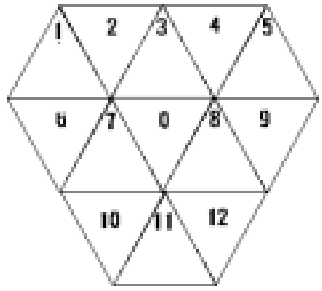
（二）正四面體與三角格棋盤的探討。

5. 探討一個正四面體在三角格棋盤中翻轉的情形，如圖（0-2）。
6. 名詞解釋及定義。
7. 在三角格棋盤中，任意正六邊形窗可以＂自由旋轉 180 度＂情形之探討。
   - 遊戲五：在三角格棋盤中，正六邊形窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。
   - 遊戲六；在三角格棋盤中，正六邊形窗可以自由旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。
8. 在三角格棋盤中，任意正六邊形窗＂無法旋轉＂之探討。
   - 遊戲七：在三角格棋盤中，正六邊形窗無法旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。
   - 遊戲八：在三角格棋盤中，正六邊形窗無法旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

圖

（0-1）



圖（0-2）

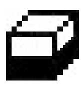
肆、 研究過程或方法

一、 正方體與方格棋盤的探討

為了想全面性了解「變臉」遊戲，我們需先了解一個正方體翻轉時的特性。

（一） 探討一個正方體在 **3×3** 方格中翻轉的情形。

如圖（1-1），正方體若以位置 1 為起點，且白色面朝上，是否能翻轉至位置 2.3.4…….9 時，其白色面仍朝上？



1	2	3
4	5	6
7	8	9

圖（1-1）

我們先了解正方體是否能成功的翻轉到位置 2~9，經由我們實際翻轉後發現：

1. 正方體能成功的翻轉到位置 2，其路徑爲 DRU。
2. 正方體也能成功的翻轉到位置 4，其路徑爲 RDL。
3. 由 1.2 知：爲正方體可以成功的翻轉到右邊方格及上面方格，因此，重覆此動作，正方體可以成功的翻轉到任意方格。

發現

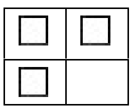
從以上的探討中，我們發現與「變臉」遊戲相關的特性：

1. 在 3x3 的方格棋盤中，任何位置當起點時，正方體均可以成功的翻轉到其他八個位置上。
2. **定理１**：從正方體由位置１翻轉至特定位置３中我們發現：若１、２、３、４爲四格窗各位置的編號，如圖（1-2）

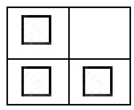
1	2
3	4

圖（1-2）

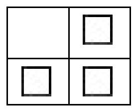
則



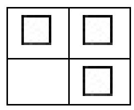
經 213421342 可成功翻轉成



再經 134213421 可成功翻轉成



再經 342134213 可成功翻轉成



其中，每個結果的三個正方體之上面狀態均能和起點狀態相同。

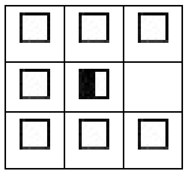
（數字 X 表示位置 X 的正方體翻轉到空格）

3. **定理 2**：相同的，從正方體由位置 1 翻轉至位置 9 中，我們也發現：若 1~9 爲各方格位置的編號，如圖（1-3）

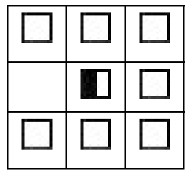
1	2	3
4	5	6
7	8	9

圖（1-3）

則



3214789
經 6321478　可成功翻轉成
9632147
8963214

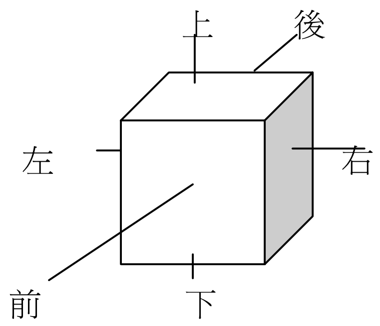


其結果的正方體之上面狀態均能與起始狀態相同。
（數字 X 表示位置 X 的正方體翻轉到空格）

（二） 名詞解釋及定義：

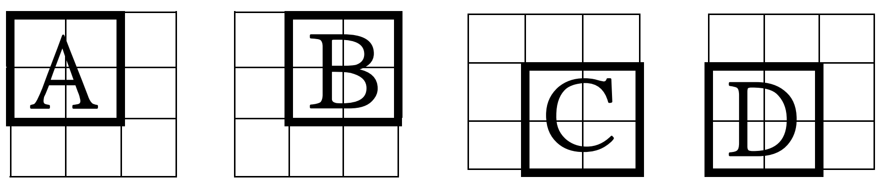
爲了方便我們的研究，我們必須有一些定義：

1. 我們將正方體分爲上、下、左、右、前、後六面，如圖（2-1）。



圖（2-1）

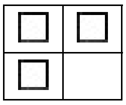
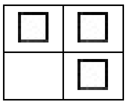
2. 我們將 3x3 的正方形棋盤分爲 A、B、C、D 四區，如圖（2-2）

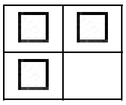
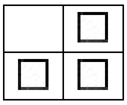


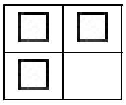
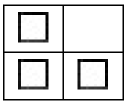
圖（2-2）

3. 若某 X 區之四格窗可以自由旋轉 90°時，我們以代號表示，
   如：
   A 區順時針旋轉 90°，以 A 表示。
   B 區順時針旋轉 180°，以 B^2 表示。
   C 區逆時針旋轉 90°，以 C^{-1} 表示。

4. 從定理 1 中，我們得知；若某 X 區

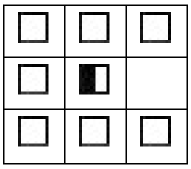
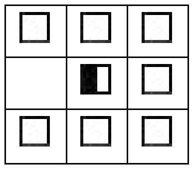
 可成功翻轉成  相當於 X 區順時針旋轉 90°，以 X 表示

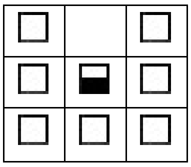
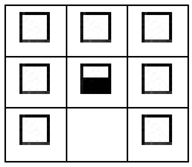
 可成功翻轉成  相當於 X 區順時針旋轉 180°，以 X^2 表示

 可成功翻轉成  相當於 X 區逆時針旋轉 90°，以 X^{-1} 表示

此種模式我們稱之為「L 型旋轉」

5. 在定理 2 中我們知道：

 可成功翻轉成 

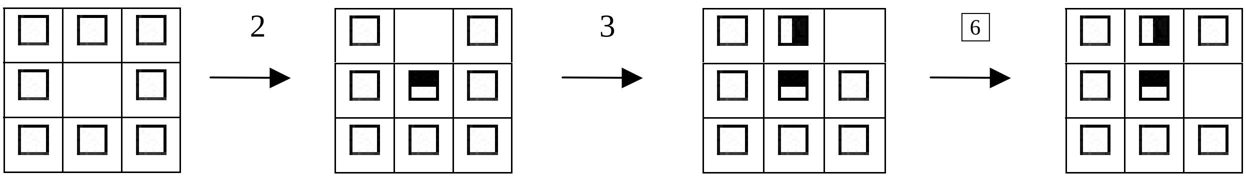
 可成功翻轉成 

此種模式我們稱之為「ㄇ字型旋轉」

6. 若以數字 1～9 表示各方格的位置，如圖（2-3）
則：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

圖（2-3）



數字 X 表示位置 X 的正方體翻轉到空格
數字$\boxed{X}$表示位置$\boxed{X}$的正方體移到空格

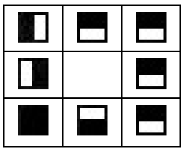
7. 空格部分以 space 表示，space＝5 為空格在位置 5

（三）在方格棋盤中，任意四格窗（即 2×2 的正方形）可以 " 自由旋轉 90 度 " 情形之探討。

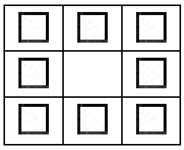
- 遊戲一：在方格棋盤中，四格窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。

遊戲規則

1. 開始狀態：八個正方體不完全為黑色面朝上，space＝5，如圖（3-1）
   目的狀態：八個正方體均為白色面朝上，space＝5，如圖（3-2）



圖（3-1）



圖（3-2）

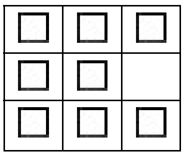
2. 正方體每次往相鄰一格翻轉一步。
3. 在方格棋盤中，任意四格窗均可自由旋轉 90°。

解法分析

1. 在開始狀態時，由於每個正方體狀態不一，故先簡化問題（即特殊化）：假設只有一個正方體狀態錯誤（令其為 W），其他七個正方體均為白色面朝上。
2. 由研究 1 知每格的正方體均可成功翻轉到其他八格，為了平均正方體翻轉到每個位置的路徑，因此將 W 放在位置 5。
3. 探討 W 所有的錯誤類型及與空格位置的關係，並尋求到達目的狀態的翻轉方法。

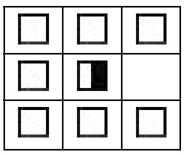
特殊化

類型 1：開始狀態：沒有 W，即八個正方體的白色面均朝上，space＝6，如圖（3-3）
翻轉方法：B（即 523652365）



圖（3-3）

類型 2：開始狀態：W 的白色面朝左，space＝6，如圖（3-4）
翻轉方法：5

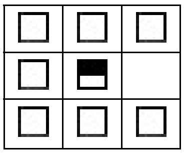


圖（3-4）

類型 3：開始狀態：W 的白色面朝前，space＝6，如圖（3-5）

翻轉方法：〈方法一〉$D\ B^2\ D^{-1}\ 5$

〈方法二〉$C^{-1}DCA7D^2$

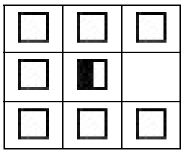


圖（3-5）

類型 4：開始狀態：W 的白色面朝右，space＝6，如圖（3-6）

翻轉方法：〈方法一〉$B\ D^{-1}\ B^{-1}\ 5$

〈方法二〉$A^{-1}\ C^{-1}\ 2\ B^{-1}$

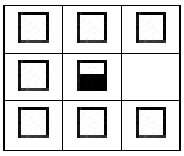


圖（3-6）

類型 5：開始狀態：W 的白色面朝後，space＝6，如圖（3-7）

翻轉方法：〈方法一〉$A^{-1}\ C^2\ A\ 5$

〈方法二〉$BA^{-1}B^{-1}D^{-1}1A^2$

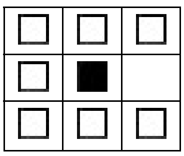


圖（3-7）

類型 6：開始狀態：W 的白色面朝下，space＝6，如圖（3-8）

翻轉方法：〈方法一〉$D\ B\ 8\ D^{-1}\ B\ D\ 5$

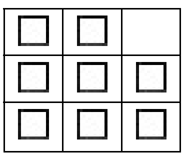
〈方法二〉$D^{-1}\ B\ 4\ B\ D\ 2\ B^{-1}$



圖（3-8）

類型 7：開始狀態：沒有 W，space＝3，如圖（3-9）

翻轉方法：B^2

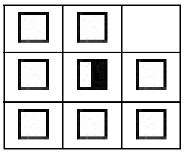


圖（3-9）

類型 8：開始狀態：W 的白色面朝左，space＝3，如圖（3-10）

翻轉方法：〈方法一〉D^{-1} B D 5

〈方法二〉C^{-1} B^{2} 8 C

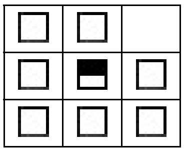


圖（3-10）

類型 9：開始狀態：W 的白色面朝前，space＝3，如圖（3-11）

翻轉方法：〈方法一〉D B^{-1} D^{-1} 5

〈方法二〉A B^{2} 4 A^{-1}

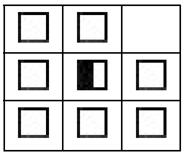


圖（3-11）

類型 10：開始狀態：W 的白色面朝右，space＝3，如圖（3-12）

翻轉方法：〈方法一〉B^{-1} A^{2} B 5

〈方法二〉D B^{2} 8 D^{-1}

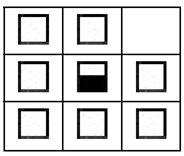


圖（3-12）

類型 11：開始狀態：W 的白色面朝後，space＝3，如圖（3-13）

翻轉方法：〈方法一〉B C^{2} B^{-1} 5

〈方法二〉D^{-1} B^{2} 4 D

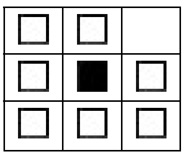


圖（3-13）

類型 12：開始狀態：W 的白色面朝下，space＝3，如圖（3-14）

翻轉方法：〈方法一〉B C^{-1} 2 A C^{-1} A^{-1} 5

〈方法二〉D^{-1} B^{2} 4 B D 2 B^{-1}



圖（3-14）

至於 space＝1，2，4，7，8，9 時，經棋盤旋轉後均與類型 1～12 相同。所以 W 所有的錯誤類型及與空格位置的關係，只有此 12 種類型。另外，類型 7～12 也可以利用 D^{-1} B D 分別轉成類型 1～6，再利用類型 1～6 的轉法來完成目的狀態。

歸納整理

由以上的 12 種類型中，我們對棋盤中任意四格窗均可以任意旋轉 90°的「同色共面」遊戲歸納並整理出以下三點：

1. 在 12 種類型中我們提出兩種方法：

 〈方法一〉的原理是將 W 留在位置 5，使空格轉到 W 能一步完成的位置，如位置 2，4，6，8，然後一步完成。

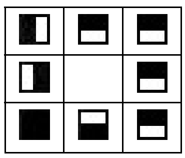
 〈方法二〉的原理是將空格轉到位置 5，W 轉到位置 2，4，6，8，使 W 能一步完成。

2. 在 3x3 的棋盤中，A、B、C、D 四區利用定理一的「L 型旋轉」，可將每個正方體移至位置 5，且所有正方體上面的狀態均未改變。
3. 類型 1～12 的共同特性是將位置 5 的 W 翻轉成功，而其他七個正方體上面的狀態均未改變，但側面狀態及位置已改變。

因此我們在玩方格棋盤中的四格窗可以自由旋轉 90°之「同色共面」遊戲時，只要將狀態錯誤的正方體逐一解決，最後必能完成此遊戲。

應用

1. 如何將圖（3-15）翻轉成目的狀態？



圖（3-15）

〈方法一〉

步驟 1：4，A^{-1}

步驟 2：6，D，B^2，D^{-1}，5 （利用〔類型 3〕）

步驟 3：4，D

步驟 4：4，D，B^{-1}，D^{-1}，5（利用〔類型 5〕）

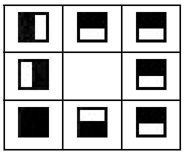
步驟 5：2，C，A，6，C^{-1}，A，C，5（利用〔類型 6〕）

步驟 6：8，A，C^2，A^{-1}，5（利用〔類型 3〕）

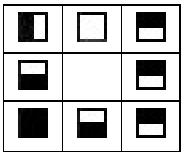
步驟 7；8，C

步驟 8：D，C^2，D，5（利用〔類型 11〕） 遊戲完成！

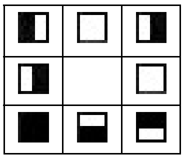
開始狀態



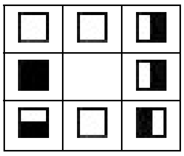
步驟一



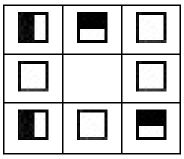
步驟二



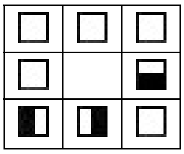
步驟三



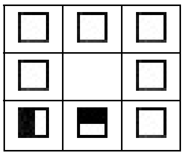
步驟四



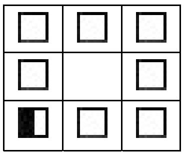
步驟五



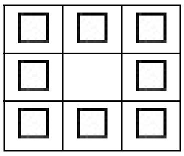
步驟六



步驟七



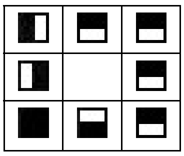
步驟八



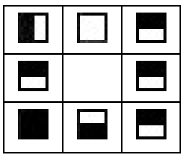
〈方法二〉

步驟 1：4，A^{-1}（利用〔類型 3〕）
步驟 2：6，A，B，4，A^{-1}（利用〔類型 3〕）
步驟 3：4，C，D，6，C^{-1}（利用〔類型 3〕）
步驟 4：4，C^{-1}，A^{-1}，8，C（利用〔類型 5〕）
步驟 5：2，D，A，8，D^{-1}（利用〔類型 3〕）
步驟 6：B^2，D，B^2，8，D^{-1}（利用〔類型 11〕）
步驟 7：A^2，C，A^2，6，C^{-1}（利用〔類型 11〕）
步驟 8：C^2，B，C^2，2，B^{-1}（利用〔類型 9〕）遊戲完成！

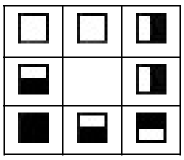
開始狀態



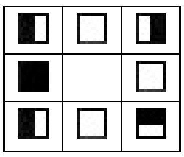
步驟一



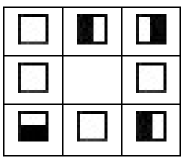
步驟二



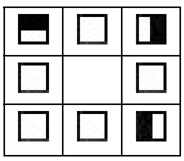
步驟三



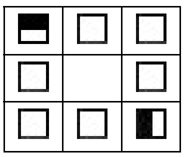
步驟四



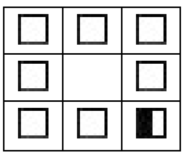
步驟五



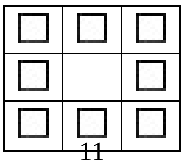
步驟六



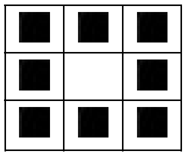
步驟七



步驟八



2. 如圖（3-16），回到「變臉」遊戲的開始狀態，即八個正方體的白色面均朝下



圖（3-16）

〈方法一〉
步驟 1：6，B，D^{-1}，B^{-1}，5 （做四次）
步驟 2：2，A，C^{-1}，A^{-1}，5
步驟 3：6，B，D^{-1}，B^{-1}，5
步驟 4：A^{-1}，B^{-1}，4，D，B^{-1}，D^{-1}，5
步驟 5：4，D，B^{-1}，D^{-1}，5 遊戲完成！

〈方法二〉
步驟 1：6，A^{-1}，C^{-1}，2，A （做四次）
步驟 2：2，D^{-1}，B^{-1}，4，D （做兩次）
步驟 3：A^2，C^{-1}，A^2，8，A，C，4，A^{-1}
步驟 4：D^2，B^{-1}，D^2，6，D，B，8，D^{-1} 遊戲完成！

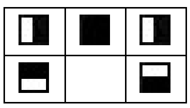
反思

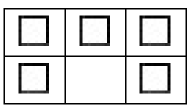
在玩方格棋盤中四格窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲時，事實上開始狀態的空格不一定要留在位置 5，任何位置均可。

推廣

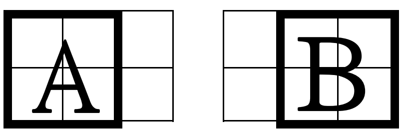
在方格棋盤中的四格窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則中，若將棋盤改為 m×n（2≤m< n ）的長方形棋盤，其結果為何？

1. 若為 2×3 的棋盤

開始狀態：

目的狀態：

(1) 先將棋盤分 A、B 兩區，且各位置編號如下：



1	**2**	**3**
4	**5**	**6**

(2) 解法：

步驟 1：6，A^2，B^{-1}，A，2

步驟 2：A，B^{-1}，A^{-1}，5

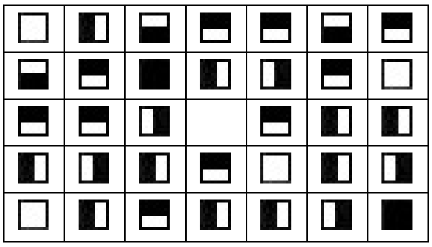
步驟 3：B^{-1}，A^{-1}，5

步驟 4：2，B^{-1}，A^2，B^2，2，3，B^2

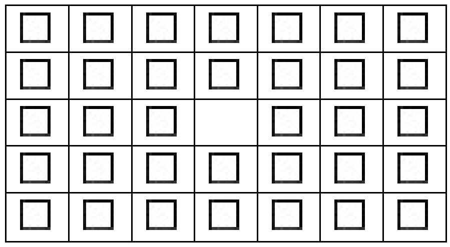
2. 若 m、n≥3，則可利用多次的 3×3 來完成

如：5×7

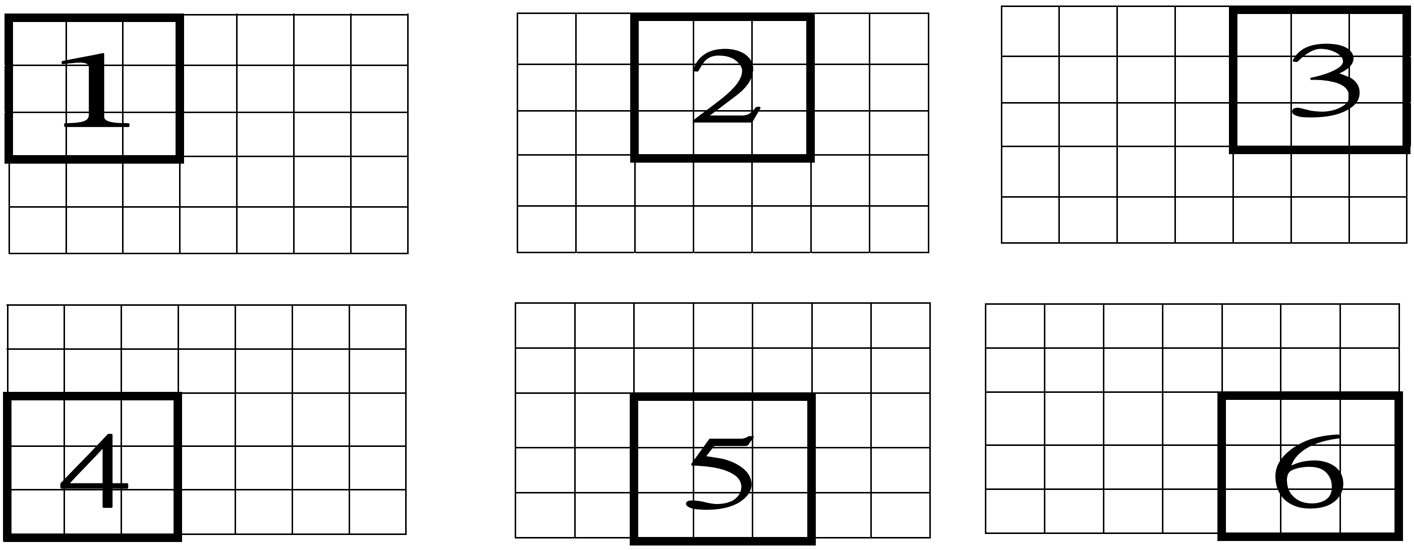
開始狀態：



目的狀態：



(1) 先將棋盤分爲 1、2、3、4、5、6 區，如下：



(2) 然後各區逐一完成

解法：

① 完成第一區

步驟一：A^2（中央），C^{-1}（第一區）

步驟二：D，B^{-1}，5

步驟三：C^{-1}，A，5

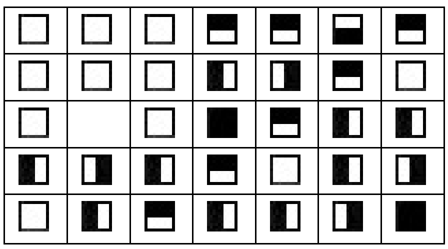
步驟四：D^{-1}，1

步驟五：A，3

步驟六：B^{-1}，A^2，B^2，5

步驟七：C^{-1}，7

步驟八：C，8



② 完成第四區

步驟一：A（第四區）

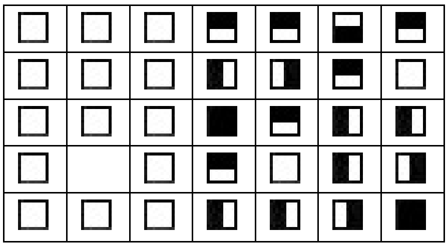
步驟二：6

步驟三：9

步驟四：C，A^2，5

步驟五：D^{-1}，1

步驟六：A^2，B^{-1}，A^{-1}，5



③ 完成第五區

步驟一：B^{-1}（第四區），A^{-1}（第五區）

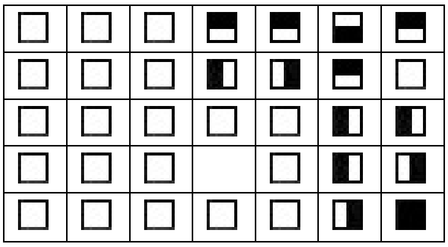
步驟二：B，C，5

步驟三：8

步驟四：A^2，5，A^2，D^2，4

步驟五：D^{-1}，C，8

步驟六：B^2，5



④ 完成第二區

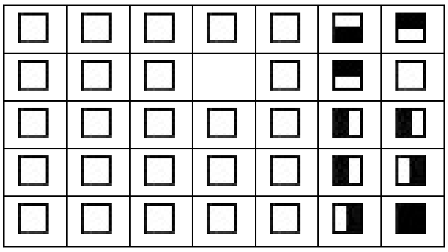
步驟一：B（第五區）

步驟二：B，5（第二區）

步驟三：C^2，B，6

步驟四：C，B，6

步驟五：C^2，A，5



⑤ 完成第三區

步驟一：C（第二區），D（第三區）

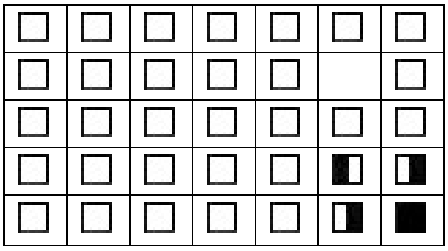
步驟二：2

步驟三：A^2，7

步驟四：D^{-1}，9

步驟五：C，B^2，5

步驟六：D，B^{-1}，5



⑥ 完成第六區

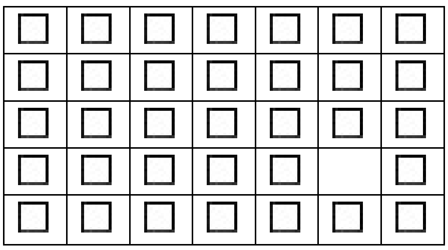
步驟一： C^{-1}（第三區）

步驟二：D^{-1}，5（第六區）

步驟三：C，A^{-1}，5

步驟四：8，A，C，4

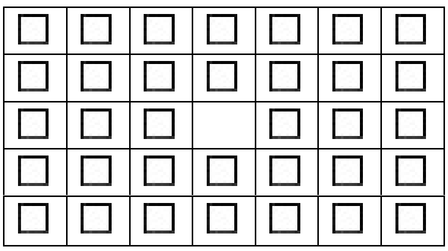
步驟五：A^2，C，5



⑦ 將空格移回中央

步驟一：A^2（第六區）

步驟二：C（第二區）



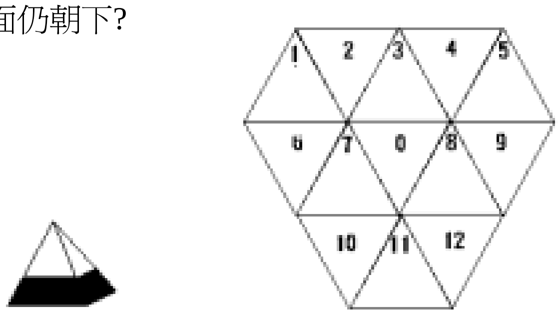
二、 正四面體與三角格棋盤的探討

此次我們除了將「變臉」遊戲做一全面性的探討之外，我們也將再繼續研究其他的「變化型變臉」遊戲。

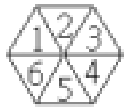
同樣的，為了想了解「變化型變臉」遊戲，我們需先了解一個正四面體翻轉時的特性。

（五） 探討一個正四面體在三角格棋盤中翻轉的情形。

如圖（5-1），正四面體若以位置 1 為起點，且黑色面朝下，是否能翻轉至位置 0.2.3.4…12 時，其黑色面仍朝下?



圖（5-1）



圖（5-2）

1.經由我們實際翻轉後發現：

正四面體只能成功的翻轉至位置 0.5.11，其餘的位置均無法成功到達。

分析

由於在正六邊形窗的棋盤中，如圖（5-2），無論從那一個位置當起點，一個正四面體往順時針或逆時針方向連續翻轉 3n 步後的狀態都會相同，其餘均會改變。即位置 1.4 狀態相同；位置 2.5 狀態相同；位置 3.6 狀態相同。

所以，在圖（5-1）中，正四面體若以位置 1 當起點，只能成功的翻轉至位置 0.5.11。即一個正四面體翻轉時，位置 0.1.5.11 的狀態是相同的。

2. 同理，一個正四面體翻轉時，位置 2.7.12 的狀態相同。

位置 3.6.9 的狀態相同。

位置 4.8.10 的狀態相同。

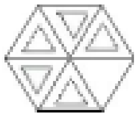
發現

從以上的探討中，我們發現與「變化型變臉」遊戲相關的特性：

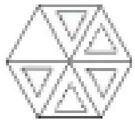
1. 在三角格棋盤中，並不是任何位置當起點，均可以成功的翻轉至其他 11 個位置。

2. 從分析的正四面體能由位置 1 成功的翻轉至位置 4 中發現：

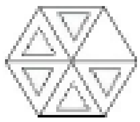
定理 13：



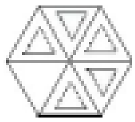
32165
經 43216
54321

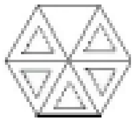


（數字 X 表示位置 X 的正四面體翻轉至空格）

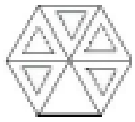


21654
經 32165
43216





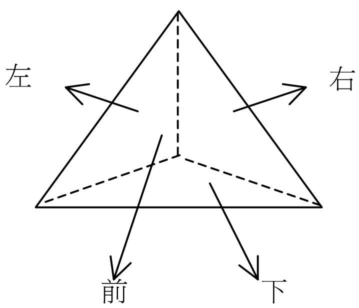
16543
經 21654
32165

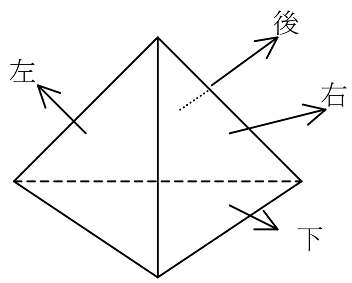


（六） **名詞解釋及定義：**

為了方便我們的研究，我們必須有一些定義：

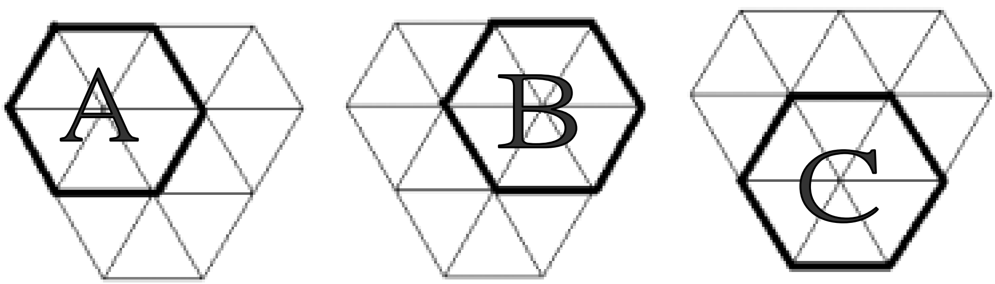
1. 我們將正四面體的面標示的方式如圖（6-1）





圖（6-1）

2. 我們將三角格棋盤分為 A.B.C 三區，如圖（6-2）



圖（6-2）

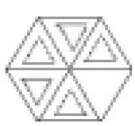
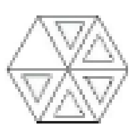
3. 若某區之正六邊形窗可以自由旋轉 180 度時，我們以代號表示：

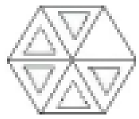
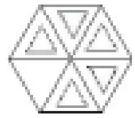
   A 區順（逆）時針轉 180 度，以 A 表示。

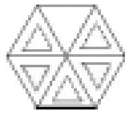
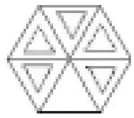
   B 區順（逆）時針轉 180 度，以 B 表示。

   C 區順（逆）時針轉 180 度，以 C 表示。

4. 由定理 13 中，我們得知：某 X 區

某 X 區  可成功翻轉成 

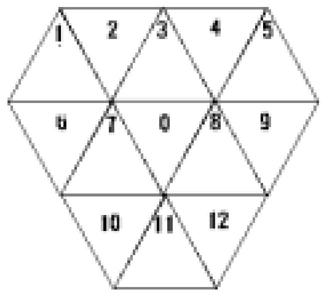
 可成功翻轉成 

 可成功翻轉成 

均相當於 X 區旋轉 180 度，以 X 表示

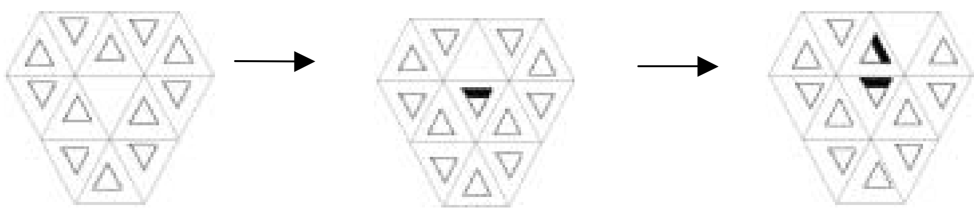
此種模式我們稱之爲「迴旋」。

5. 若以數字 0~12 表示各方格的位置



則

3　　　　4



（數字 X 表示位置 X 的正四面體往空格翻轉一步）

6. {（a,b,c）（d,e）}：表示正四面體經翻轉後

①位置 a 的正四面體移到位置 b
位置 b 的正四面體移到位置 c
位置 c 的正四面體移到位置 a
但正四面體的底面不變。

②位置 d 的正四面體移到位置 e
位置 e 的正四面體移到位置 d
但正四面體的底面不變。

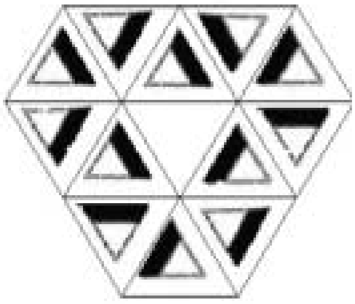
7. 空格部份以 space 表示，space＝0 爲空格位置在 0。

（七）在三角格棋盤中，任意正六邊形窗可以＂自由旋轉 180 度＂情形之探討。

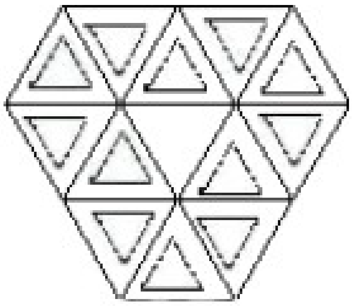
● 遊戲五：在三角格棋盤中，正六邊形窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。

遊戲規則

1. 開始狀態：十二個正四面體不完全爲黑色面朝下，space＝0，如圖（7-1）
   目的狀態：十二個正四面體均爲黑色面朝下，space＝0，如圖（7-2）



圖（7-1）

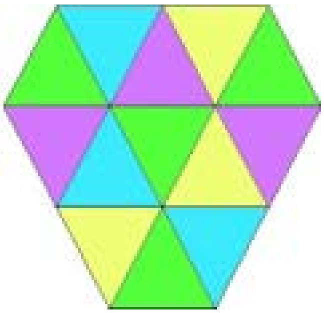


圖（7-2）

2. 正四面體每次往相鄰一格翻轉一步。
3. 在三角格棋盤中，任意正六邊形窗均可以自由旋轉 180°

解法分析

1. 由（二）～1 中，我們知道一個正四面體在三角格棋盤中翻轉時，位置 0,1,5,11 的狀態是相同的，此四個位置以綠色表示；位置 2,7,12 的狀態是相同的，此三個位置以藍色表示；位置 3,6,9 的狀態是相同的，此三個位置以紫色表示；位置 4,8,10 的狀態是相同的，此三個位置以黃色表示。
   但翻轉時，不同顏色的位置之狀態都不相同，如圖（7-3）



圖（7-3）

所以，遊戲五開始狀態的每個正四面體，若經過翻轉至黑色面朝下時的位置必須綠色、藍色、紫色、黃色各 3 個，若不符合，則遊戲五必無解。此方法亦可以作爲遊戲五是否有解的判斷方法。

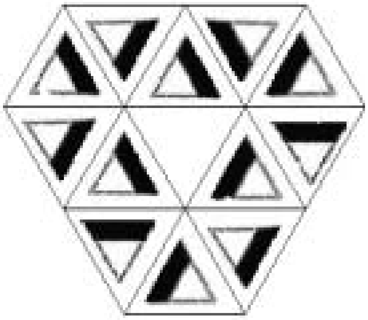
例：

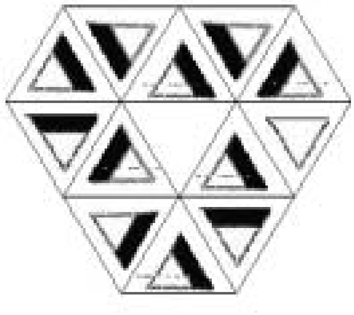
如圖（7-4），若將每個正四面體經過翻轉至黑色面朝下的位置，其綠色、藍色、紫色、黃色各 3 個，故有解！

例：

如圖（7-5），若將每個正四面體經過翻轉至黑色面朝下的位置，其綠色 3 個，藍色

2 個，紫色 4 個，黃色 3 個，故無解。





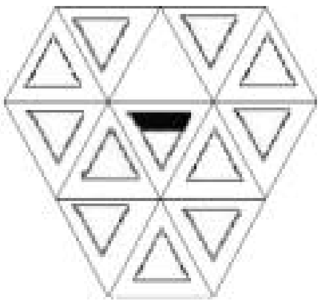
圖（7-4）　　　　　　　　　　　　　圖（7-5）

因此，對於遊戲五的開始狀態，我們常常會先排成目的狀態，在利用翻轉將其打亂，其目的是保證一定有解。

2. 在有解時的開始狀態，由於每個正四面體狀態均不一，故先簡化問題（即特殊化）：假設只有一個正四面體狀態錯誤（令其爲 W），其他 11 個正四面體均爲黑色面朝下。
3. 探討 W 所有錯誤類型及與空格位置關係，並尋求到達目的狀態的翻轉方法。

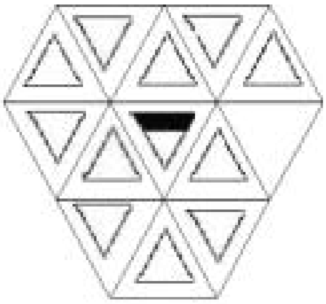
特殊化

類型 1：開始狀態：W 在位置 0 且黑色面朝後，space＝3，如圖（7-6）
翻轉方法：0



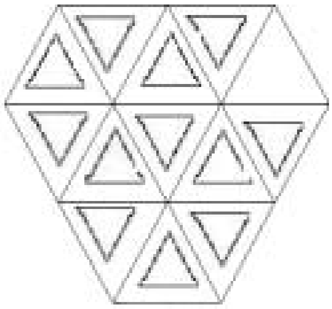
圖（7-6）

類型 2：開始狀態：W 在位置 0 且黑色面朝後，space＝9，如圖（7-7）
翻轉方法：C，B，C，0



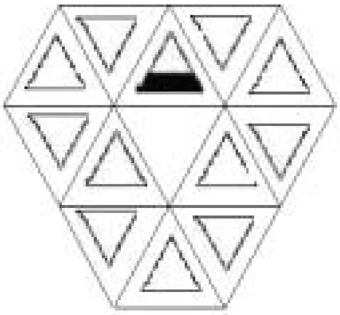
圖（7-7）

類型 3：開始狀態：沒有 W，即 12 個正四面體的黑色面均朝下，space＝5，如圖（7-8）
翻轉方法：B



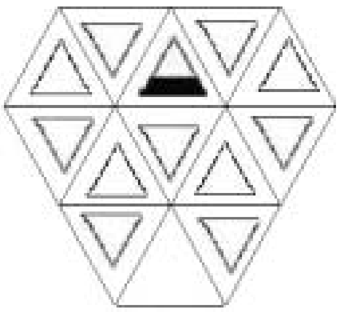
圖（7-8）

類型 4：開始狀態：W 在位置 3 且黑色面朝前，space＝0，如圖（7-9）
翻轉方法：3



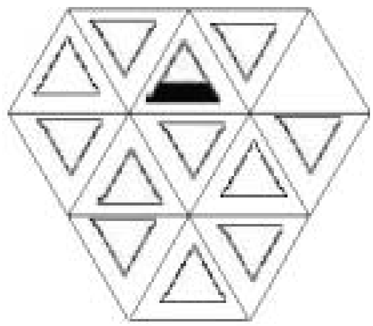
圖（7-9）

類型 5：開始狀態：W 在位置 3 且黑色面朝前，space＝11，如圖（7-10）
翻轉方法：C，3



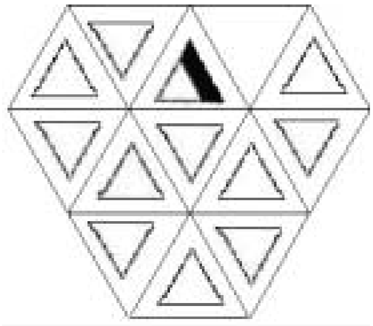
圖（7-10）

類型 6：開始狀態：W 在位置 3 且黑色面朝前，space=5，如圖（7-11）
翻轉方法：A，B，C，A，C，3



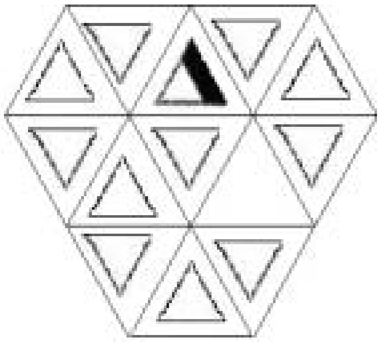
圖（7-11）

類型 7：開始狀態：W 在位置 3 且黑色面朝右，space＝4，如圖（7-12）
翻轉方法：3



圖（7-12）

類型 8：開始狀態：W 在位置 3 且黑色面朝右，space＝8，如圖（7-13）
翻轉方法：A，B，A，3



圖（7-13）

至於 W 在位置 7，8 的黑色面方向與 space 位置的各種關係，經棋盤旋轉或翻轉後，均與類型 1～8 相同。所以 W 所有的錯誤類型與 space 位置的關係，只有此 8 種類型。

整理歸納

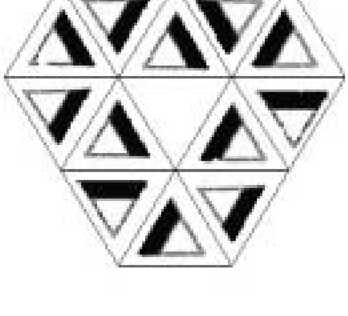
由以上 8 種類型中，我們對棋盤中的任意六邊形窗均可以任意旋轉 180°的「同色共面」遊戲中在有解的情況下，可以歸納並整理出以下三點：

1. 若 W 經翻轉後黑色面朝下的位置顏色與 space 相同，則 W 與 space 的所在位置需不同區。
2. 在三角格棋盤中，A、B、C 三區利用「迴旋」翻轉，可完成（1）的部分。
3. 類型 1～8 的共同特性是將 W 翻轉成功，而其他 11 個正四面體下面的狀態均未改變，但側面狀態及位置已改變。

因此我們在玩三角格中任意六邊形窗可以自由旋轉 180°之「同色共面」遊戲時，只要在眾多的中，選擇符合類型 1～7，再逐一解決，最後必能完成此遊戲。

應用

如何將圖（7-14）翻轉成目的狀態？



圖（7-14）

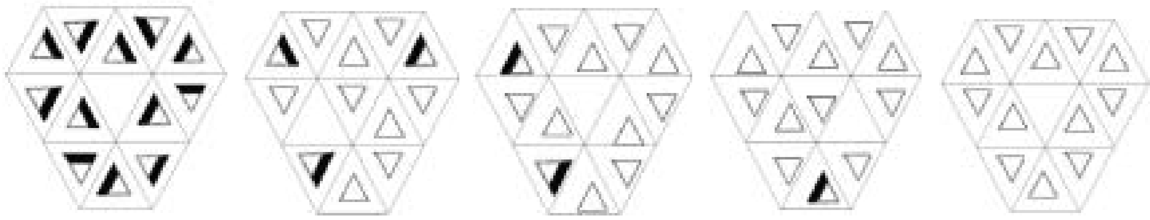
步驟 1：7，10，11，C，3，4，5，9，B，2，1，6，7

步驟 2：A，B，A，B，0

步驟 3：A，C，A，8

步驟 4：C，A，C，A，0

開始狀態　　步驟一　　步驟二　　步驟三　　步驟四

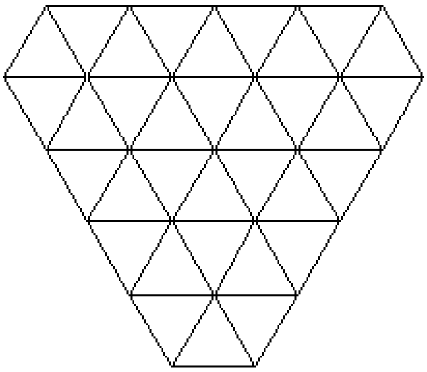


反思

在玩正三角格中六邊形窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲時，事實上 space 不一定要留在位置 0，只要有解，位置 0,1,5,11 均可。

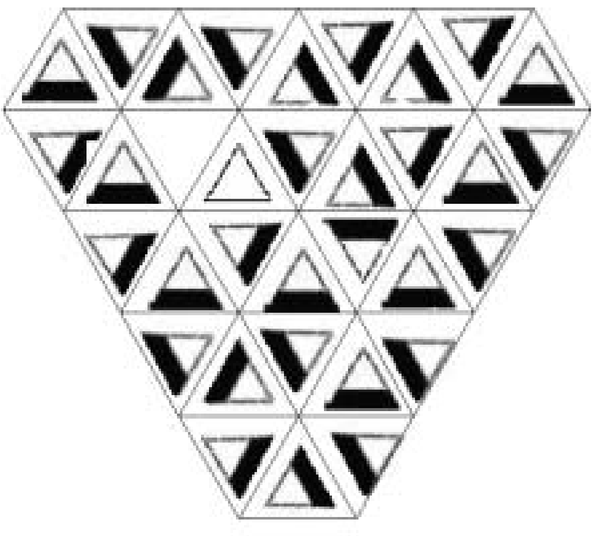
推廣

在三角格棋盤中，正六邊形窗無法旋轉之「數字排序」遊戲規則中，若將棋盤改爲的三角形棋盤如圖（7-15），其結果爲何？

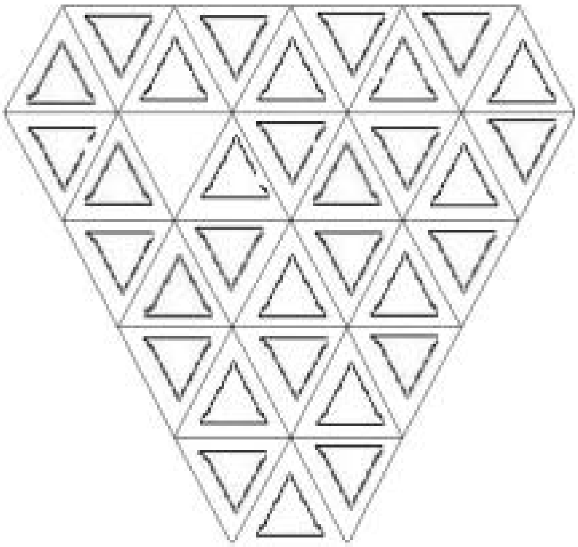


圖（7-15）

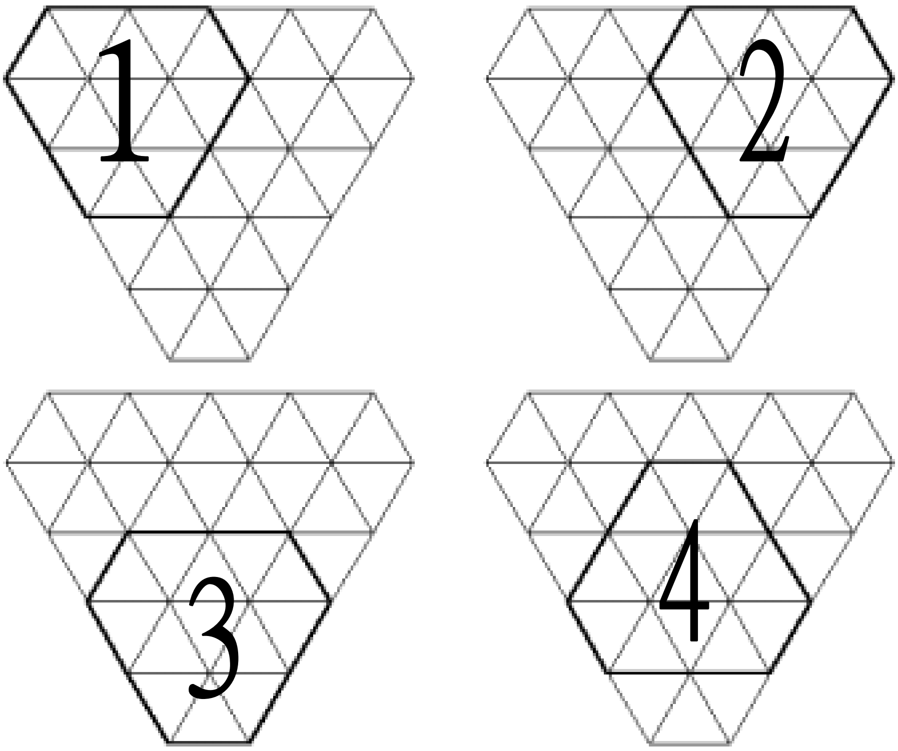
開始狀態：



目的狀態：



1. 先將棋盤分為 1、2、3、4 區，如下：



2. 逐一將數字面翻轉朝下。

解法：

12，20，21，27，26，30，31，32，28，29，23，24，16，17，9，8，7，6，5，13,12，20，21，27，26，25，19，18，11，10，1，2，3，4，5，(四) C（一）B（四）C，12，(一) B（二）A，5，6，(二) A（一）B（四）C（一）B，12，0（一）C，25，26，30（三）C，B，A，21，27。

伍、 研究結果

（一） 正方體與方格棋盤的探討。

1. 探討一個正方體在 3×3 方格中翻轉的情形，如圖（0-1）。

(1) 在 3×3 的方格棋盤中，任何位置當起點時，正方體均可以成功的翻轉到其他

八個位置上。

2. 方格棋盤中，任意四格窗（即 2×2 的正方形）可以 " 自由旋轉 90 度 " 情形之探討。

- 遊戲一：在方格棋盤中，四格窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。

我們在玩方格中四格窗可以自由旋轉 90°之「同色共面」遊戲時，只要將狀態錯誤的正方體逐一解決，最後必能完成此遊戲。

- 遊戲二：在方格棋盤中，四格窗可以自由旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。

在「數字排序」遊戲中，我們分兩階段完成：

第一階段：由「同色共面」遊戲中，可先將八個正方體寫上數字的面翻轉朝上。

第二階段：利用定理 3~8 做「數字排序」

3. 在方格棋盤中，任意四格窗 " 無法旋轉 " 之探討。

- 遊戲三：在方格棋盤中，四格窗無法旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。

我們在玩方格中四格窗無法旋轉「同色共面」遊戲時，只要將狀態錯誤的正方體逐一解決，最後必能完成此遊戲。

- 遊戲四：在方格棋盤中，四格窗無法旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。

在「數字排序」遊戲中，我們分兩階段完成：

第一階段：利用方格中四格窗無法旋轉之「同色共面」遊戲將八個正方體的數字朝上。

第二階段：利用定理 9~12 做「數字排序」

（二） 正四面體與三角格棋盤的探討。

1. 探討一個正四面體在三角格棋盤中翻轉的情形。如圖（0-2）。

一個正四面體若在三角格棋盤中翻轉時，位置 0.1.5.11 的狀態相同。
位置 2.7.12 的狀態相同。
位置 3.6.9 的狀態相同。
位置 4.8.10 的狀態相同。

2. 在三角格棋盤中，任意正六邊形窗可以 " 自由旋轉 180 度 " 情形之探討。

- 遊戲五：在三角格棋盤中，正六邊形窗可以自由旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。

我們在玩三角格中任意六邊形窗可以自由旋轉 180°之「同色共面」遊戲時，只要在眾多的中，選擇符合類型 1～8，再逐一解決，最後必能完成此遊戲。

- 遊戲六：在三角格棋盤中，正六邊形窗可以自由旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。

在「數字排序」遊戲中，我們分兩階段完成：

第一階段：由「同色共面」遊戲中，可將十二個正四面體寫上數字的面翻轉朝下。

第二階段：利用定理 14~17 做「數字排序」

3. 在三角格棋盤中，任意正六邊形窗 " 無法旋轉 " 之探討。

- **遊戲七：在三角格棋盤中，正六邊形窗無法旋轉之「同色共面」遊戲規則探討。**

我們在玩三角格中任意六邊形窗無法旋轉之「同色共面」遊戲時，只要在眾多的 W 中，選擇符合類型 1~37，在逐一解決，最後必能完成此遊戲。

- **遊戲八：在三角格棋盤中，正六邊形窗無法旋轉之「數字排序」遊戲規則探討。**

在「數字排序」遊戲中，我們同樣分兩階段來完成：

第一階段：由「同色共面」遊戲中，可將十二個正四面體寫上數字的面翻轉朝下。

第二階段：做「數字排序」

陸、 討論與結論

1. 本次研究我們從一個網路上的遊戲開始，除了找出不一樣的解法，更在遊戲規則改變下，探討出更多不一樣的結果，真是令人興奮。
2. 未來我們將再繼續研究：

（1） 對於不規則棋盤的探討。

（2） 在「同色共面」遊戲中，若連側面也同色共面，其結果又為何?

柒、 參考資料

1. 「昌爸工作坊」：http://netcity1.web.hinet.net/UserData/lsc24285/
2. 趙文敏 編著（民 75） 寓數學於遊戲第一輯，台北市，九章出版社。
3. 曹亮吉 編著（民 73） 益智集，台中市，科學月刊社。
4. 張遠南 編著（民 85） 使人聰明的智力遊戲，台北市，九章出版社。
5. JOHN MASON WITH LEONE BURTON ＆ KAYE STACEY 著，台北市立建國高級中學 314 班全體同學 譯：數學思考，九章出版社。
6. Brain Bolt 著（黃哲明譯）（民 84）老謀深算，台北，牛頓。

（第三名）

把遊戲的困惑轉化為數學問題並研發定理解決之，內容完整，想法獨特。