

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：棋 子 排 列 的 研 究

關 鍵 詞：棋 子、奇偶性

編 號：030415

學校名稱：

臺北市立西湖國民中學

作者姓名：

江怡璇、吳芮祺、陳智揚

指導老師：

陳宏仁



棋子排列的研究

壹、摘要

若 $M_{n \times n}(s)$ 表示在 $n \times n$ 的正方形棋盤中，棋子總數為 s ； $V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 表示在 $n \times n \times n$ 的正方體棋盤中，每層個數為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ，且 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 。本研究即在 $M_{n \times n}(s)$ 和 $V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 中探討若要排成每行、列或高的棋子個數均為奇數時 s 的變化情形、解答分析並找出其排列方法，最後才推廣到長方形 $M_{m \times n}(s)$ 、長方體 $V_{n \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 。並以上面研究結果為根據設計遊戲。

貳、研究動機

有一天，我在「娛樂數學 100」一書中發現了這個問題：

在 6×6 的正方形棋盤中佈滿 36 顆棋子，如圖(一)，你能否從中去掉 22 顆棋子，使剩餘部分每一行、每一列的棋子個數皆為奇數？

○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○
○	○	○	○	○	○

圖(一)

當時看到這個問題，突然愣住，不知從何下手，但仔細想想這個題目，因 $36 - 22 = 14$ ，反推回來，這個題目就可以變成：

14 顆棋子排列在正方形 36 格內，使得每行每列皆為奇數。

這學期，即在第四冊第二章「簡單的幾何圖形」單元中，我們學到長方形、正方形、長方體及正方體的特性。再加上第一冊 2-1「因數與倍數」單元中，我們學過 2 的倍數判別法（即奇偶數）。因此，想藉著這些基礎，將這個有意思的問題好好研究一番。另外，對於立體棋盤也很想了解，於是就在好奇心的驅使下，便找幾位同學一起研究這個問題。

參、 研究目的

一、 正方形棋盤的探討

$M_{n \times n}(s)$: 在 $n \times n$ 的正方形棋盤中, 棋子總數為 s

- (一) 在 $M_{n \times n}(s)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。
- (二) 探討在 $M_{n \times n}(s)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數皆為奇數的解答分析。

二、 長方形棋盤的探討

$M_{m \times n}(s)$: 在 $m \times n$ 的長方形棋盤中 ($1 < m < n$), 棋子總數為 s

- (一) 在 $M_{m \times n}(s)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。
- (二) 探討在 $M_{m \times n}(s)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數皆為奇數的解答分析。

三、 正方體棋盤的探討

$V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$: 在 $n \times n \times n$ 的正方體棋盤中, 每層的棋子個數分別為 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 且 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 不完全相等

- (一) 在 $V_{n \times n \times n}(a, a, a, \dots, a)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。
- (二) 探討在 $V_{n \times n \times n}(a, a, a, \dots, a)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時的解答分析。
- (三) 在 $V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 探討 s 的最大值、最小值, 並分析 $V_{3 \times 3 \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ 及 $V_{4 \times 4 \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 的變化情形。
- (四) 探討在 $V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時的解答分析。

四、 長方體棋盤的探討

- (一) 在 $V_{n \times n \times k} (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，其 k 的最小值為何？
- (二) 在 $V_{m \times n \times k} (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中 ($1 < m < n$)，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，其 k 的最小值為何？

五、 設計一個「 疊疊樂 」的遊戲，並加以探討。

肆、 研究過程或方法：

一、 正方形棋盤的探討

- (一) 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，排成每行每列的棋子個數均為奇數時，探討 s 的最大值最小值及其變化情形。

為了想了解在不同的棋盤下， s 的變化情形，我們實際排列，試著發現其規律性。

參閱附件（一）

發現與歸納

1. 在附件（一）中，對於不同的 $M_{n \times n}(s)$ ，我們將再進一步整理成表(一)

表(一)

$\begin{matrix} S \\ n \times n \end{matrix}$	最小值	最大值	從最小值到最大值的變化情形
2×2	2	2	2
3×3	3	9	3、5、9
4×4	4	12	4、6、8、10、12
5×5	5	25	5、7、9、11、13、15、17、19、21、25
6×6	6	30	6、8、10、12、14、16、18、20、22、24、26、28、30

2. 在附件（一）中，我們發現 $M_{4 \times 4}(s)$ 若能排列成功，則空格部分為 $M_{4 \times 4}(16-s)$ 之一解。同理， $M_{6 \times 6}(s)$ 若能排列成功，則空白部分為 $M_{6 \times 6}(36-s)$ 之一解。

例 1：

$M_{4 \times 4}(6)$ 的排列方法為圖(二)，則空格部分為 $M_{4 \times 4}(10)$ 之一解。

○	○		○
	○		
		○	
	○		

圖(二)

例 2：

$M_{6 \times 6}(14)$ 的排列結果為圖(三)，則空格部分為 $M_{6 \times 6}(22)$ 之一解。

○	○	○	○	○	
		○			
	○		○		○
			○		
					○
	○	○			○

圖(三)

3. 另外，在 $M_{3 \times 3}(s)$ 中也發現：若能使每行、每列的棋子個數為奇數時，則空格部分為 $M_{3 \times 3}(9-s)$ 能使每行每列的棋子個數為偶數。同理，在 $M_{5 \times 5}(s)$ 中也是如此，即空格部分為 $M_{5 \times 5}(25-s)$ 能使每行、每列的棋子個數為偶數。

例 3：

$M_{3 \times 3}(3)$ 排成每行、每列為奇數如圖(四)，但空格部分為 $M_{3 \times 3}(6)$ 能使行列為偶數。

○		
	○	
		○

圖(四)

例 4：

$M_{5 \times 5}(7)$ 排成行列為奇，如圖(五)，但空格部分為 $M_{5 \times 5}(18)$ 為能使行列為偶。

	○			
			○	
			○	
○				
		○	○	○

圖(五)

3. 在表(一)中，我們發現在 $M_{n \times n}(s)$ ， s 從最小值到最大值每增加 2 子必有答案。但 n 為奇數時， n^2-2 無解。 $n=2,3,4,5,6$ 。

猜想

從發現與歸納中，我們形成了下列猜想：

1. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
2. 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 n 。
3. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2n+1)^2$ ；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $2n(2n-1)$ 。
4. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功。但 $s=(2n+1)^2-2$ 除外。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。
5. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2n+1)(2n+1)}((2n+1)^2-s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2n \times 2n}((2n)^2-s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。

舉例檢驗

1. 在 $M_{7 \times 7}(s)$ 中， $s=7,9,11,\dots,43,45,49$ 均能排成行、列為奇，其中：
 - (1) s 為奇數。
 - (2) s 最小值=7。

- (3) s 最大值=49。
- (4) $s=7+2k$ ，且 $7 \leq s \leq 49$ 均能成功，但 $s=47$ 除外。
- (5) 空格部分為 $M_{7 \times 7}(49-s)$ 能使行、列為偶。

2. 在 $M_{8 \times 8}(s)$ 中， $s=8,10,12,\dots,52,54,56$ 均能排成行、列為奇，其中：

- (1) s 為偶數。
- (2) s 最小值=8。
- (3) s 最大值=56。
- (4) $s=8+2k$ ，且 $8 \leq s \leq 56$ 均能成功。
- (5) 空格部分為 $M_{8 \times 8}(64-s)$ 能使行、列為奇。

由於檢驗 $M_{7 \times 7}(s)$ 與 $M_{8 \times 8}(s)$ 的例子也都符合猜想，於是我們進一步加以證明。

證明

1. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行 每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。

證明：

(1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，排列成行、列為奇。

$$S = \text{每行個數} \times \text{行數}$$

$$= \text{奇} \times \text{奇}$$

$$= \text{奇}$$

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，排成行、列為奇。

$$S = \text{每行個數} \times \text{行數}$$

$$= \text{奇} \times \text{偶}$$

$$= \text{偶}$$

2. 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 n 。

證明：在 $M_{n \times n}(s)$ 中，每行的最小值=1，共 n 行

$$s = n \times 1 = n$$

3. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2n+1)^2$ ；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $M_{2n(2n-1)}$ 。

證明：

(1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，因行列為奇時，所以 s 最多為全滿，

$$\text{即 } s \text{ 的最大值} = (2n+1)^2$$

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，因行列為奇時，每行最大值= $2n-1$ ，共 $2n$ 行，

$$s \text{ 的最大值} = 2n(2n-1)$$

4. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功。但 $s = (2n+1)^2 - 2$ 除外。

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每加 2 子也均能排列成功。

證明:

(1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中, s 從最小值到最大值之間, 當 $s=(2n+1)+2$, 即為可排列成功的最少棋子再加 2 子, 結果可以排列成功(排法說明詳見(二)~1~(3))

同理, $s=(2n+1)+4, s=(2n+1)+6, s=(2n+1)+8, \dots$ 均可以排列成功。

因此, $s=(2n+1)+2k$ 均可以排列成功。

但 $s=(2n+1)^2-2$ 無法成功。

$s=(2n+1)^2$ 可成功, 少兩子有 3 種狀況。

A 同時在同行少兩子, 則其中兩列會變成偶數。

B 同時在同列少兩子, 則其中兩行會變成偶數。

C 在不同行不同列少兩子, 則其中會有兩行、兩列變成偶數。

故 $s=(2n+1)^2-2$ 無法成功。

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中, s 從最小值到最大值之間

理由同(1), 因此, $s=2n+2k$ 均可以排列成功。

5. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 則空格部分為 $M_{(2n+1)(2n+1)}((2n+1)^2-s)$, 能使每行、每列的棋子個數均為偶數。

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中, 若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時, 則空格部分為 $M_{2n \times 2n}((2n)^2-s)$, 能使每行每列的棋子個數均為奇數。

證明:

(1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中, 若能使行、列為奇, 則

在行的部分:

令 $s=a_1+a_2+\dots+a_{2n+1}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ 為奇數

空格 $(2n+1)^2-s=(2n+1-a_1)+(2n+1-a_2)+\dots+(2n+1-a_{2n+1})$

$=\text{偶}+\text{偶}+\dots+\text{偶}$

在列的部分:

令 $s=b_1+b_2+\dots+b_{2n+1}$, 其中 $b_1, b_2, \dots, b_{2n+1}$ 為奇數

空格 $(2n+1)^2-s=(2n+1-b_1)+(2n+1-b_2)+\dots+(2n+1-b_{2n+1})$

$=\text{偶}+\text{偶}+\dots+\text{偶}$

故 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中, 若能使行列為奇, 則空格部分 $M_{(2n+1)(2n+1)}((2n+1)^2-s)$ 能使行列為偶。

(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中, 若能使行、列為奇, 則

在行的部分:

令 $s=a_1+a_2+\dots+a_{2n}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 為奇數

空格 $4n^2-s=(2n-a_1)+(2n-a_2)+\dots+(2n-a_{2n})$

$=\text{奇}+\text{奇}+\dots+\text{奇}$

在列的部分:

令 $s=b_1+b_2+\dots+b_{2n}$, 其中 $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ 為奇數

空格 $4n^2-s=(2n-b_1)+(2n-b_2)+\dots+(2n-b_{2n})$

$=\text{奇}+\text{奇}+\dots+\text{奇}$

故 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，若能使行、列為奇，則空格部分 $M_{2n \times 2n}(4n^2 - s)$ 能使行列為奇。
經由以上的證明，證實猜想均無誤，所以：

一般化

1. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
2. 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 n 。
3. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2n+1)^2$ ；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $M_{2n(2n-1)}$ 。
4. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子，均能排列成功。但 $s = (2n+1)^2 - 2$ 除外。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。
5. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2n+1)(2n+1)}((2n+1)^2 - s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2n \times 2n}((2n)^2 - s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。

二、長方形棋盤的探討

(一) 在 $M_{m \times n}(s)$ 中，排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，探討 s 的最大值、最小值及變化情形。

同樣的，一開始我們也是實際排列，試著找出在不同棋盤下 s 的變化情形。參閱附件(二)。

發現與歸納

1. 在附件(二)中，對於不同的 $M_{m \times n}(s)$ ，我們將再進一步整理成表(三)及表(四)。

表(三)：在 $M_{m \times n}(s)$ 中， $(m < n)$ 是否有解(是 $\circ$ ；否)

m \ n	3	4	5	6	7
2		$\circ$		$\circ$	
3			$\circ$		$\circ$
4				$\circ$	
5					$\circ$

表(四)

S m \ n	最小值	最大值	從最小值到最大值的變化情形
2 \ 4	4	4	4
2 \ 6	6	6	6
3 \ 5	5	15	5、7、9、11、15
3 \ 7	7	21	7、9、11、13、15、17、21
4 \ 6	6	18	6、8、10、12、14、16、18
5 \ 7	7	35	7、9、11、13、15、17、19、21、23、25、27、29、31、35

2. 在附件(二)中，我們發現 $M_{2 \times 4}(s)$ 如果可以排列成功，則空格部分為 $M_{2 \times 4}(8-s)$ 之一解。同理 $M_{2 \times 6}(s)$ 、 $M_{4 \times 6}(s)$ 若能排列成功，則空格部分為 $M_{2 \times 6}(12-s)$ 、 $M_{4 \times 6}(24-s)$ 亦為一解。

例 8： $M_{2 \times 4}(4)$ 、 $M_{4 \times 6}(8)$ 的排列結果為圖(二十一)，則空格部分為 $M_{2 \times 4}(4)$ 、 $M_{4 \times 6}(16)$ 之一解。

$\circ$	$\circ$	$\circ$	
			$\circ$

$\circ$		$\circ$			$\circ$
	$\circ$	$\circ$		$\circ$	
			$\circ$		
		$\circ$			

圖(二十一)

3. 另外，在 $M_{3 \times 5}(s)$ 、 $M_{3 \times 7}(s)$ 及 $M_{5 \times 7}(s)$ 中也發現：若能使每行、每列的棋子個數為奇數時，則空格部分為 $M_{3 \times 5}(15-s)$ 、 $M_{3 \times 7}(21-s)$ 及 $M_{5 \times 7}(35-s)$ 能使每行每列的棋子個數均為偶數。

例 9： $M_{3 \times 5}(5)$ 、 $M_{3 \times 7}(7)$ 、 $M_{5 \times 7}(17)$ 排成行列為奇，如圖(二十二)，但空格部分為 $M_{3 \times 5}(10)$ 、 $M_{3 \times 7}(14)$ 、 $M_{5 \times 7}(18)$ 能使行列為偶。

○		○	○	
	○			
				○

○		○	○			
	○			○	○	
						○

○		○	○			
	○			○	○	
○	○	○		○		○
	○	○			○	
○				○	○	

圖(二十二)

- 在表(三)中發現，在 $M_{m \times n}(s)$ 中，若 m 與 n 之奇偶數不同，則為無解。如 $M_{2 \times 3}(s)$ 、 $M_{2 \times 5}(s)$ 、 $M_{2 \times 7}(s)$
- 在表(四)中，我們發現：在 $M_{m \times n}(s)$ 中，若 m 與 n 均為奇數時，則 $(m \times n) - 2$ 無解。如 $M_{3 \times 5}(13)$ 、 $M_{3 \times 7}(19)$ 、 $M_{5 \times 7}(33)$ 無解。

猜想

從發現與歸納中，我們形成了下列猜想：

- 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
- 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列，的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 $2n+1$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最小值為 $2n$ 。
- 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2m+1)(2n+1)$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $2n(2m-1)$ 。
- (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功，但 $s \neq (2m+1)(2n+1) - 2$ 。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。
- (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2m+1)(2n+1)}((2m+1)(2n+1)-s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2m \times 2n}(4mn-s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。
- 在 $M_{m \times n}(s)$ 中，若 m 與 n 之奇偶數不同，則為無解。

舉例檢驗

- 在 $M_{6 \times 8}(s)$ 中， $s=6,8,10,12,\dots,38,40$ 均能排成行、列為奇，其中：
 - s 為偶數。
 - s 最小值=6。
 - s 最大值=40。
 - $s=6+2k$ ，且 $6 \leq s \leq 40$ 均能成功。
 - 空格部分為 $M_{6 \times 8}(48-s)$ 能使行、列為奇。

2. 在 $M_{7 \times 9}(s)$ 中, $s=7,9,11,\dots,57,59,63$ 均能排成行、列為奇, 其中:

- (1) s 為奇數。
- (2) s 最小值=7。
- (3) s 最大值=63。
- (4) $s=7+2k$, 且 $7 \leq s \leq 63$ 均能成功, 但 $s=61$ 除外。
- (5) 空格部分為 $M_{7 \times 9}(63-s)$ 能使行、列為偶。

3. 在 $M_{7 \times 12}(s)$ 、 $M_{8 \times 11}(s)$ 均無解。

由於檢驗 $M_{6 \times 8}(s)$ 與 $M_{7 \times 9}(s)$ 均符合猜想, 於是我們將進一步證明。

證明

1. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中, 若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 則 s 必為奇數; 若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中, 則 s 必為偶數。

證明:

(1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中, 排成行、列為奇,

$s = \text{每行個數} \times \text{行數}$

$= \text{奇} \times \text{奇}$

$= \text{奇}$

(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中, 排成行、列為奇,

$s = \text{每行個數} \times \text{行數}$

$= \text{奇} \times \text{偶}$

$= \text{偶}$

2. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中, 若排成每行、每列, 的棋子個數均為奇數時, 則 s 的最小值為 $2n+1$; 若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中, 則 s 的最小值為 $2n$ 。

證明:

$$(1) \quad \begin{array}{c} 2n+1 \\ \boxed{\text{A}} \\ 2m+1 \end{array} = \begin{array}{c} 2m+1 \\ \boxed{\text{B}} \\ 2m+1 \end{array} + \begin{array}{c} 2n-2m \\ \boxed{\text{C}} \\ 2m+1 \end{array}$$

B: 行、列為奇, s 最小值=2m+1

C: 行為奇, 列為偶(包含 0), s 最小值=2n-2m

在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中, 排成行、列為奇的最小值

$= B + C$

$= 2m+1 + 2n-2m$

$= 2n+1$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|} \hline 2n \\ \hline \boxed{A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2m \\ \hline \boxed{B} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2n-2m \\ \hline \boxed{C} \\ \hline \end{array}$$

B：行為奇，列為奇，s 最小值=2m

C：行為奇，列為偶(包含 0)，s 最小值=2n-2m

在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，排成行、列為奇的最小值

$$= B + C$$

$$= 2m + 2n - 2m$$

$$= 2n$$

3. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2m+1)(2n+1)$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $2n(2m-1)$ 。

證明：

- (1) 很明顯，在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，排成行、列為奇，s 最大值= $(2m+1)(2n+1)$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|} \hline 2n \\ \hline \boxed{A} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 2m \\ \hline \boxed{B} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2n-2m \\ \hline \boxed{C} \\ \hline \end{array}$$

B：行為奇，列為奇，s 最大值= $2m(2m-1)$

C：行為奇，列為偶(包含 0)，s 最大值= $(2m-1)(2n-2m)$

在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，排成行、列為奇的最大值

$$= B + C$$

$$= 2m(2m-1) + (2m-1)(2n-2m)$$

$$= (2m-1)(2m+2n-2m)$$

$$= 2n(2m-1)$$

4. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功，但 $s \neq (2m+1)(2n+1)-2$ 。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。

證明：

理由均與 $M_{n \times n}(s)$ 情形相同。

5. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2m+1)(2n+1)}((2m+1)(2n+1)-s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2m \times 2n}(4mn-s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。

證明：

理由均與 $M_{n \times n}(s)$ 情形相同。

6. 在 $M_{m \times n}(s)$ 中，若 m 與 n 之奇偶數不同，則為無解。

證明：

$M_{2m \times 2n}(s)$ 使行列為奇有解，

$M_{2m(2m+1)}(s)$ 、 $M_{2m(2m+3)}(s)$ 、 $M_{2m(2m+5)}(s)$ 、……、 $M_{2m(2m+2k+1)}(s)$ 均無解。

即 $M_{2m(2m+2k+1)}(s)$

$= M_{2m(2(m+k)+1)}(s)$

$= M_{2m(2n+1)}(s)$ ，令 $n=m+k$ 無解

一般化

以上猜想，經證明無誤後，所以

1. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
2. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 $2n+1$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最小值為 $2n$ 。
3. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2m+1)(2n+1)$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $2n(2m-1)$ 。
4. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功，但 $s \neq (2m+1)(2n+1)-2$ 。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。
5. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2m+1)(2n+1)}((2m+1)(2n+1)-s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2m \times 2n}(4mn-s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。
6. 在 $M_{m \times n}(s)$ 中，若 m 與 n 之奇偶數不同，則為無解。

三、 正方體棋盤的探討

- (一) 在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。

由於我們已經知道 $M_{n \times n}(s)$ 之情形，因此我們從 $M_{n \times n}(s)$ 發展所形成的正方體

$V_{n \times n \times n}(a, \dots, a), s=na$ 實際排列，試著找出在不同立體棋盤下 s 的變化情形。其排列結果參閱附件(三)。

發現與歸納

1. 在附件(三)中，由於不同的 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a), s=na$ 中，我們將再進一步整理成表(五)：

表(五)

$n \times n \times n \backslash s$	最小值	最大值	從最小值到最大值的變化情形
$2 \times 2 \times 2$	2×2	$1 \times 2 \times 2$	4
$3 \times 3 \times 3$	3×3	$3 \times 3 \times 3$	9, 15, 27
$4 \times 4 \times 4$	4×4	$3 \times 4 \times 4$	16, 24, 32, 40, 48
$5 \times 5 \times 5$	5×5	$5 \times 5 \times 5$	25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 125
$6 \times 6 \times 6$	6×6	$5 \times 6 \times 6$	36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180

2. 在表(五)中，我們發現 $V_{4 \times 4 \times 4}(a, a, a, a), s=4a$ ，若能排列成功，則空格部份為 $V_{4 \times 4 \times 4}(16-a, 16-a, 16-a, 16-a), s=64-4a$ 之一解。同理， $V_{6 \times 6 \times 6}(a, a, a, a, a, a), s=6a$ 若能排列成功，則空格部份為 $V_{6 \times 6 \times 6}(36-a, 36-a, 36-a, 36-a, 36-a, 36-a)$ 之一解。
3. 另外，在 $V_{3 \times 3 \times 3}(a, a, a)$ 中也發現：若能排列成功，則空格部份為 $V_{3 \times 3 \times 3}(9-a, 9-a, 9-a)$ 能使行、列、高為偶數。同理，在 $V_{5 \times 5 \times 5}(a, a, a, a, a)$ 中也是如此，即空格部份為 $V_{5 \times 5 \times 5}(25-a, 25-a, 25-a, 25-a, 25-a)$ 能使行、列、高都是偶數。
4. 在表(五)中，我們發現在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a), s=na, n=2, 3, 4, 5, 6$ ，從最小值到最大值之間，每層同時加 2 子，共加 $2n$ 子必有答案。但 $n=3, 5$ 時，每層為 n^2-2 子，即 $s=n(n^2-2)$ 無解。

猜想

從發現與歸納中，我們形成了下列猜想：

- 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a), s=(2n+1)a$ 中，若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a), s=2na$ 中，則 s 必為偶數。
- 在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a), s=na$ 中，若排列成行、列、高的棋子均為奇數時，則 s 的最小值為 n^2 。
- 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a), s=(2n+1)a$ 中，若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2n+1)^3$ 。
 - 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a), s=2na$ 中，若排列成行、列、高的棋子均為奇數時，則 s 的最大值為 $4n^2(2n-1)$ 。
- 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a), s=(2n+1)a$ 中， s 從最小值到最大值之間，每層同時加 2 子，共加 $2(2n+1)$ 子必有答案。但每層為 $(2n+1)^2-2$ 子，即 $s=(2n+1)^3-2(2n+1)$ 時無解。
 - 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a), s=2na$ 中， s 從最小值到最大值之間，每層同時加 2 子，共加 $4n$ 子必有答案。

舉例檢驗

1. 在 $V_{7 \times 7 \times 7}(a, \dots, a)$, $s=7a$ 中, $a=7, 9, 11, \dots, 43, 45, 49$ 均能排成行、列、高的棋子個數為奇數, 其中:
 - (1) s 為奇數。
 - (2) s 的最小值=49。
 - (3) s 的最大值=343。
 - (4) $a=7+2k$, $7 \leq a \leq 49$ 必能成功, 但 $a=47$ 除外。
2. 在 $V_{8 \times 8 \times 8}(a, \dots, a)$, $s=8a$, $a=8, 10, 12, \dots, 56$ 均能排成行、列、高的棋子個數為奇數, 其中:
 - (1) s 為偶數。
 - (2) s 的最小值=64。
 - (3) s 的最大值=448。
 - (4) $a=8+2k$, $8 \leq a \leq 56$ 必能成功。

由於檢驗 $V_{7 \times 7 \times 7}(a, \dots, a)$ 與 $V_{8 \times 8 \times 8}(a, \dots, a)$ 的例子也都符合猜想, 於是我們加以證明。

證明

1. 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 必為奇數; 若在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 則 s 必為偶數。

證明:

- (1) 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高均為奇數時:

$$\begin{aligned} s &= \text{每行個數} \times \text{行數} \times \text{層數} \\ &= \text{奇} \times \text{奇} \times \text{奇} \\ &= \text{奇} \end{aligned}$$

- (2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 排列成行、列、高均為奇數時:

$$\begin{aligned} s &= \text{每行個數} \times \text{行數} \times \text{層數} \\ &= \text{奇} \times \text{偶} \times \text{偶} \\ &= \text{偶} \end{aligned}$$

2. 在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$, $s=na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最小值為 n^2 。

證明:

在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$, $s=na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, s 的最小值即在不同行不同列與不同高各排一子。

$$s \text{ 最小值} = 1 \times n \times n = n^2$$

3. (1) 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 的最大值為 $(2n+1)^3$ 。
(2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最大值為 $4n^2(2n-1)$ 。

證明:

- ① 在 $V_{(2n+1) \times (2n+1) \times (2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 排列成行、列、高均為奇數時
行、列、高均為奇數
 s 最大值 $= (2n+1)^3$, 即全滿。

② 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 排列成行、列、高的棋子均為奇數時, s 的最大值=每行個數最多 $\times$ 行數 $\times$ 層數

$$=(2n-1) \times 2n \times 2n$$

$$=4n^2(2n-1)$$

4. (1) 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $2(2n+1)$ 子必有答案。但每層為 $(2n+1)^2-2$ 子, 即 $s=(2n+1)^3-2(2n+1)$ 時無解。
- (2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $4n$ 子必有答案。

證明：

- ① 1° 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 且 $(2n+1)^2 \leq s \leq (2n+1)^3$, 當 $s=(2n+1)^2+2$ 時, 即在可排列成功的最少棋子個數中, 於任一層同時再加 2 子, 結果可以排列成功(排法說明詳見(二)~3)
- 2° 同理, 在任一層同時再加 2 子反覆操作, 即 $s=(2n+1)^2+4, (2n+1)^2+6, (2n+1)^2+8, \dots$ 均可排列成功。
- 3° 因此, $s=(2n+1)^2+2(n+1)$
即 s 從最小值到最大值之間, 於每層同時加兩子, 共加 $2(2n+1)$ 子均可以排列成功。
- 4° $M_{(2n+1)(2n+1)((2n+1)^2-2)}$ 排成行、列為奇時無解。
在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 當 $a=(2n+1)-2$ 即 $s=(2n+1)^3-2(2n+1)$ 時無解。
- ② 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 且 $4n^2 \leq s \leq 4n^2(2n-1)$
理由同①, 因此, 每層同時加兩子, 共加 $4n$ 子必可成功。

一般化

1. 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 必為奇數; 若在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 則 s 必為偶數。
2. 在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$, $s=na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最小值為 n^2 。
3. (1) 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 的最大值為 $(2n+1)^3$ 。
(2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最大值為 $4n^2(2n-1)$ 。
4. (1) 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $2(2n+1)$ 子必有答案。但每層為 $(2n+1)^2-2$ 子, 即 $s=(2n+1)^3-2(2n+1)$ 時無解。
(2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $4n$ 子必有答案。

四、長方體棋盤的探討

1. 在 $V_{n \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，其 k 的最小值為何？

在 $V_{n \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中，令 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ ， $s - n^2 \geq 0$ 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 符合 $M_{n \times n}(a)$ 能排列成功。

由排列方法四發現：

- (1) 若 n 是奇數時， $k=3$ 為排列成功的最小值，也就是說， $V_{n \times n \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ 即可排列成功。
證明：

- ① 先證明當 n 為奇數， $V_{n \times n \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ 有解。

利用排列方法四之原理：先決定高的棋子數，由於其三層，故若有解，高的棋子數為一子或三子

在列方面

- 1° 若一~三層，第 i 列的棋子完全不重複(即每個高均有 1 子)

當第一層的第 i 列排奇數子

第二層的第 i 列排奇數子

則三層的第 i 列之棋子數 $= n - (\text{奇} + \text{奇}) = \text{奇}$

- 2° 若一~三層第 i 列的棋子有奇數子(b 子)重複(即 b 個高有 3 子)

當第一層的第 i 列排奇數子

當第二層的第 i 列排奇數子

則第三層的第 i 列之棋子數 $= n - (\text{奇} + \text{奇} - b) + b = \text{奇}$

- 3° 若一~三層第 i 列的棋子有偶數子(c 子)重複(即 c 個高有 3 子)

當第一層的第 i 列排奇數子

當第二層的第 i 列排奇數子

則第三層的第 i 列之棋子數 $= n - (\text{奇} + \text{奇} - c) + c = \text{奇}$

- 4° 由 1°、2°、3° 知，若高為 1 子或 3 子，則每層列的棋子個數均為奇數。

- 5° 同理，在行方面也符合三層行的棋子個數均為奇數，因此，每層的行、列，高的棋子個數均為奇數。

故當 n 為奇數 $V_{n \times n \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ ， $s = a_1 + a_2 + a_3$ ， $s - n^2 \geq 0$ 。且 a_1, a_2, a_3 符合 $M_{n \times n}(s)$ 使行列為奇，排成行列高的棋子個數為奇時，有解。

- ② 再來證明 $k=3$ 為成功最小值。

- 1° 當 $k=1$ 時(即 1 層)

除了 $M_{n \times n}(n^2)$ 外，其餘均無法成功。

- 2° 當 $k=2$ 時(即 2 層)

令第 i 列完全不重複，則奇+奇=偶(不合)

- 3° 由 1°、2° 知， $k=3$ 為成功的最小值。

例 19

在 $V_{5 \times 5 \times 3}$ (9, 11, 13) 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數。

○	○	○	○	○
		○		
		○		
○				
○				

○	○	○		
○				
○	○	○		
	○			
		○	○	○

○	○	○		
	○		○	○
		○	○	○
		○	○	○
	○			

(2) 若 n 為偶數時

① 當 $a_1=a_2=\frac{n^2}{2}$, 則 $k=2$ 為排列成功的最小值, $V_{n \times n \times 2}(\frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2})$ 即可排列成功。

② 當不存在 2 個 a 均為 $\frac{n^2}{2}$, 則 $k=4$ 為排列成功的最小值, 也就是說 $V_{n \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 即可排列成功。

證明：

① 若 n 為奇數時, $V_{n \times n \times 2}(\frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2})$ 即高的棋子數完全不重複,

當第一行行列為奇, 則第二行的行列均為 n -奇=奇,

故 $V_{n \times n \times 2}(\frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2})$ 可排列成功, 且 $k=2$ 為最小值。

② a. 若 n 為偶數時, $V_{n \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 若有解, 即高的棋子數為 1 子或 3 子, 理由同(1)

故 $V_{n \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $s - n^2 = 0$ 且將合 $M_{n \times n}(s)$ 使行、列為奇排成還列高的棋子個數為奇數時, 有解。

b. 證明 $k=4$ 為最小值

1° 當 $k=1, 2$ 時明顯不成立

2° 當 $k=3$ 時, 令第 i 列完全不重複, 則奇+奇+奇=奇(不合)

3° 由 1°, 2° 可知: $k=4$ 為成功的最小值。

例 20

在 $V_{6 \times 6 \times 2}$ (18, 18) 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數。

○	○	○	○		○
		○	○		○
		○			
			○		
○		○	○		
○		○	○	○	○

				○	
○	○			○	
○	○		○	○	○
○	○	○		○	○
	○			○	○
	○				

在 $V_{6 \times 6 \times 4}(6, 8, 10, 14)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數。

					○
			○		
		○			
				○	
	○				
○					

○					
		○			
					○
			○		
○					
○	○			○	

	○				
○			○		○
	○				
	○				
		○		○	○
					○

		○	○	○	
	○		○	○	
		○	○	○	
					○
			○		
○		○	○		

反思

1. 既然在 $V_{n \times n \times k}(a, \dots, a)$ 中，排成行列高的棋子個數為奇時，
當 n 為奇數， $k=3$ 為最小值

n 為偶數， $a_1=a_2=\frac{n^2}{2}$ 時， $k=2$ 為最小值，

不存在兩個 a 同時為 $\frac{n^2}{2}$ 時， $k=4$ 為最小值。

因此，對於 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$ 的排列方法，亦可利用

- (1) 當 n 為奇數，先排 3 層，其他層可相同。

例 21

$V_{5 \times 5 \times 5}(9, 9, 9, 9, 9)$

○				
○				
○	○	○		
		○	○	○
		○		

○	○	○		
				○
				○
	○			
	○		○	○

○			○	○
	○	○	○	
			○	
○				
○				

○			○	○
	○	○	○	
			○	
○				
○				

○			○	○
	○	○	○	
			○	
○				
○				

- (2) 當 n 為偶數，且 $a_1=a_2=\frac{n^2}{2}$ 時，先排兩層，其他層可相同。

例 22

$V_{6 \times 6 \times 6}(18, 18, 18, 18, 18, 18)$

○	○	○			
		○	○	○	
			○	○	○
				○	
○	○	○	○		○
○	○				○

○	○	○			
		○	○	○	
			○	○	○
				○	
○	○	○	○		○
○	○				○

○	○	○			
		○	○	○	
			○	○	○
				○	
○	○	○	○		○
○	○				○

			○	○	○
○	○				○
○	○	○			
○	○	○	○		○
				○	
		○	○	○	

			○	○	○
○	○				○
○	○	○			
○	○	○	○		○
				○	
		○	○	○	

			○	○	○
○	○				○
○	○	○			
○	○	○	○		○
				○	
		○	○	○	

(3) 當 n 為偶數且不存在兩個 a 同時為 $\frac{n^2}{2}$ 時，先排 4 層，其他層可相同。

例 23

$V_{6 \times 6 \times 6}(10, 10, 10, 10, 10)$

○	○	○			
○					
○	○			○	
	○				
			○		
					○

				○	
					○
		○	○	○	
		○			
○		○		○	
	○				

					○
		○			
				○	
○				○	○
	○		○		○
				○	

			○		
	○		○	○	
					○
			○		
			○		
○		○	○		

			○		
	○		○	○	
					○
			○		
			○		
○		○	○		

			○		
	○		○	○	
					○
			○		
			○		
○		○	○		

2. 在 $V_{m \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中 ($1 < m < n$)，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，其 k 的最小值為何？

在 $V_{m \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中 ($1 < m < n$)

令 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ， $m+n$ 為偶數，

$s - mn \equiv 0$ 且 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ 符合 $M_{m \times n}(s)$ 使行、列為奇

由排列方法四發現：

(1) 若 m, n 為奇數時， $k=3$ 為排列成功的最小值，也就是說，

$V_{m \times n \times 3}(a_1, a_3)$ 即可排列成功。

理由同四~(一)~1

例 24

在 $V_{3 \times 5 \times 3}(7, 9, 11)$ 中，排成行列高的棋子個數均為奇數。

○			○	○
	○	○	○	
			○	

○			○	○
○	○		○	
○		○	○	

○	○	○	○	○
	○		○	○
	○		○	○

(2) 若 m, n 為偶數時

① 當 $a_1 = a_2 = \frac{mn}{2}$ ，則 $k=2$ 為排列成功的最小值，也就是說 $V_{m \times n \times 2}(\frac{mn}{2}, \frac{mn}{2})$ 即可排列成功。

② 當不存在兩個 a 均為 $\frac{mn}{2}$ 時，則 $k=4$ 為排列成功的最小值，也就是說， $V_{m \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 即可排列成功。

同樣，理由同四~(一)~1

例 25

在 $V_{4 \times 6 \times 2}(12,12)$ 中，排成行、列、高的棋子均為奇數。

○			○	○	
○			○	○	
○	○	○			
			○	○	○

	○	○			○
	○	○			○
			○	○	○
○	○	○			

例 26

在 $V_{4 \times 6 \times 4}(6,8,10,12)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數。

○					
	○				
		○			
			○	○	○

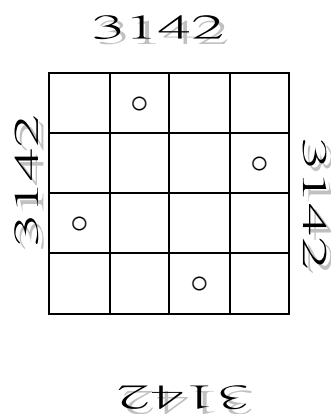
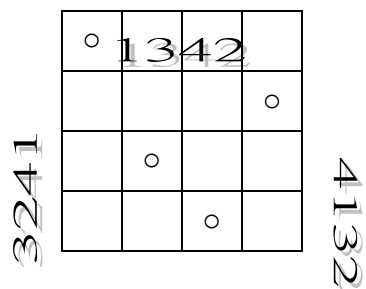
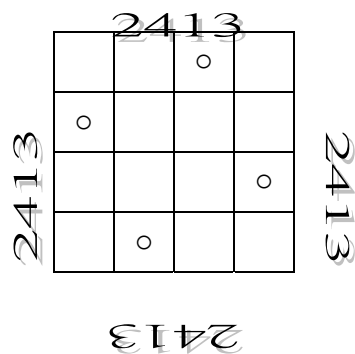
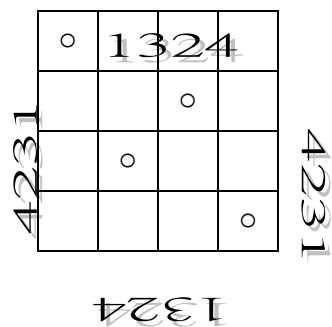
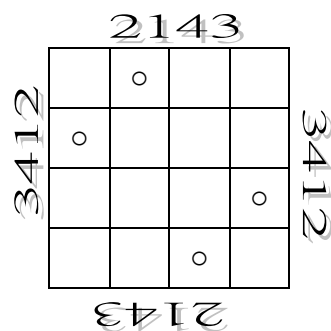
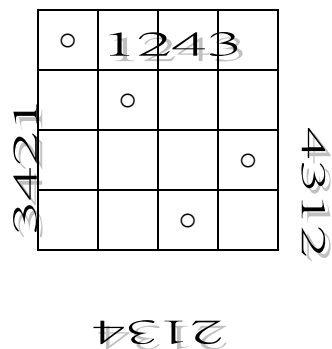
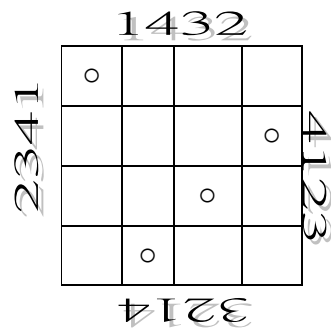
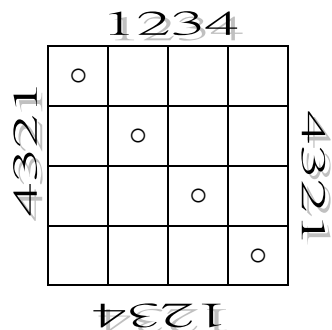
○					
	○	○			○
					○
			○	○	○

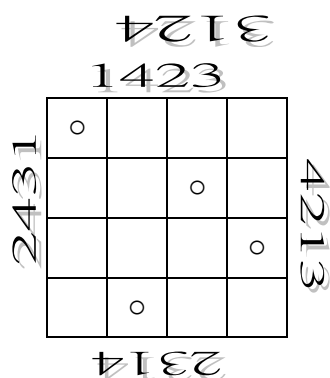
○					
	○		○	○	
		○	○	○	
			○	○	○

	○	○	○	○	○
○					
○	○	○			
○	○	○			

五、設計一個「疊疊樂」的遊戲，並加以探討

- 根據本研究結果發現在 $M_{4 \times 4}(4)$ 中,排成行、列的棋子個數均為奇數時,共有 24 種情形,如附件(五)。若將其旋轉後會相同者視為同一種情形,則 24 種情形可簡化成以下 9 種情形：





圖(二十六)

2. 「疊疊樂」遊戲。

我們將圖(二十六)的 9 種排列結果分別製成 9 張透明片,透過此 9 張卡片,如何經重疊而組合出最後結果分別為沒有棋子、1 顆棋子、2 顆棋子 3 顆棋子, ,16 顆棋子?
遊戲規則：

- (1) 組合時,卡片可旋轉,但不能翻面。
- (2) 每次組合的結果,不一定要用完此八張卡片。
- (3) 每兩張卡片組合後,相同位置若都有棋子,則會抵消。

分析

1. 由於每一張卡片均有 4 顆棋子,且若有抵消一定是 $2n$ 子,所以,最後不論重疊幾張卡片,結果一定不會是奇數顆棋子。故結果是 1,3,5,7,9,11,13,15 顆棋子時無解。
2. 接下來探討結果為偶數顆棋子。

- (1) 結果為 4 顆棋子：即任選一張卡片。亦可利用兩張來組合,其方式如：

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2

- (2) 結果為 6 顆棋子：
組合方式如：

1 2 3 4	1 2 3 4	4 3 2 1	1 2 4 3
1 3 4 2	1 4 2 3	1 4 2 3	3 2 1 4

- (3) 結果為 8 顆棋子：
組合方式如：

1 2 3 4	1 2 3 4	2 4 1 3	2 4 1 3
2 3 4 1	3 1 4 2	3 1 4 2	4 2 3 1

(4) 結果為 10 顆棋子：

組合方式如：

4 3 2 1	1 2 3 4	2 3 4 1	4 2 3 1
1 2 4 3	1 4 2 3	3 4 1 2	3 1 2 4
2 4 3 1	2 3 4 1	2 1 3 4	3 4 1 2

(5) 結果為 12 顆棋子：

組合方式如：

1 2 3 4	1 3 4 2	1 4 2 3	2 3 4 1
3 4 2 1	4 2 3 1	4 2 3 1	3 4 1 2
2 1 4 3	2 4 1 3	3 1 4 2	1 2 3 4

(6) 結果為 16 顆棋子：

組合方式如：

1 3 4 2	1 2 4 3
2 1 4 3	1 2 3 4
3 4 2 1	1 3 2 4
4 2 3 1	2 4 3 1
2 3 1 4	3 2 1 4
2 3 4 1	4 1 3 2

(7) 結果為沒有棋子：

- ① 因為此 9 張卡片中,任兩張卡片均不相同。
- ② 9 張卡片無法同時作出 2 個 16 顆棋子的結果來抵消。
故結果為沒有棋子時亦無解。

(8) 結果為 2 顆棋子：

- ① 此 9 張卡片中,任兩張的組合可能：不重複(結果 8 子)、重複 1 子(結果 6 子)、重複 2 子(結果 4 子),但不可能重複 3 子(即不可能重複 4 子)。
- ② 同理,若繼續組合下去,因不可能重複 3 子,所以做不出結果為 2 子。
故結果為 2 顆棋子時,亦無解。

(9) 結果為 14 顆棋子：

理由同 2 顆棋子一樣無解。(可於現場說明)

因此,可以作出的結果為 4 顆,6 顆,8 顆,10 顆,12 顆,16 顆棋子。

伍、研究結果

一、正方形棋盤的探討

(一) 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，排成每行每列的棋子個數皆為奇數時，探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。

1. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
2. 在 $M_{n \times n}(s)$ 中，若排成每行、每列，的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 n 。
3. 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2n+1)^2$ ；若在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $M_{2n(2n-1)}$ 。
4. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子均能排列成功。但 $s=(2n+1)^2-2$ 除外。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中， s 從最小值到最大值之間，每加 2 子也均能排列成功。
5. (1) 在 $M_{(2n+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{(2n+1)(2n+1)}((2n+1)^2-s)$ ，能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
(2) 在 $M_{2n \times 2n}(s)$ 中，若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時，則空格部分為 $M_{2n \times 2n}((2n)^2-s)$ ，能使每行每列的棋子個數均為奇數。

(二) 探討在 $M_{n \times n}(s)$ 中，排成每行每列的棋子個數皆為奇數的解答分析。

1. 排列方法之探討

《方法一》詳見參~一~(二)~1~(3)

《方法二》詳見參~一~(二)~1~(4)

2. 解答類型之分析

原題 $M_{6 \times 6}(14)$ 中，排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，共有四種類型：

【類型 1】：(551111 , 333311)

【類型 2】：(533111 , 533111)

【類型 3】：(533111 , 333311)

【類型 4】：(333311 , 333311)

二、長方形棋盤的探討

(一) 在 $M_{m \times n}(s)$ 中 ($1 < m < n$)，排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，探討 s 的最大值、最小值及變化情形。

1. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 必為奇數；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 必為偶數。
2. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列，的棋子個數均為奇數時，則 s 的最小值為 $2n+1$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最小值為 $2n$ 。
3. 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中，若排成每行、每列的棋子個數均為奇數時，則 s 的最大值為 $(2m+1)(2n+1)$ ；若在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中，則 s 的最大值為 $2n(2m-1)$ 。

4. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每加 2 子均能排列成功, 但 $s \neq (2m+1)(2n+1)-2$ 。
 (2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每加 2 子時也均能排列成功。
5. (1) 在 $M_{(2m+1)(2n+1)}(s)$ 中若能使排列成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 則空格部分為 $M_{(2m+1)(2n+1)}((2m+1)(2n+1)-s)$, 能使每行、每列的棋子個數均為偶數。
 (2) 在 $M_{2m \times 2n}(s)$ 中, 若能排列每行、每列的棋子個數均為奇數時, 則空格部分為 $M_{2m \times 2n}(4mn-s)$, 能使每行每列的棋子個數均為奇數。
6. 在 $M_{m \times n}(s)$ 中, 若 m 與 n 之奇偶數不同, 則為無解。

(二) 探討在 $M_{m \times n}(s)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數皆為奇數的解答分析。

1. 排列方法之探討

《方法一》詳見參~一~(二)~1~(3)

《方法二》詳見參~一~(二)~1~(4)

2. 解答類型之分析

原題 $M_{6 \times 8}(14)$ 中, 排成每行、每列的棋子個數均為奇數時, 共有八種類型:

【類型 1】: (53111111 , 731111) 【類型 5】: (33311111 , 731111)

【類型 2】: (53111111 , 551111) 【類型 6】: (33311111 , 551111)

【類型 3】: (53111111 , 533111) 【類型 7】: (33311111 , 533111)

【類型 4】: (53111111 , 333311) 【類型 8】: (33311111 , 333311)

三、 正方體棋盤的探討

(一) 在 $V_{n \times n \times n}(a, a, a, \dots, a)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 探討 s 的最大值、最小值及其變化情形。

1. 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 必為奇數; 若在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 則 s 必為偶數。
2. 在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$, $s=na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最小值為 n^2 。
3. (1) 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, 若排列成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 則 s 的最大值為 $(2n+1)^3$ 。
 (2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, 若排列成行、列、高的棋子均為奇數時, 則 s 的最大值為 $4n^2(2n-1)$ 。
4. (1) 在 $V_{(2n+1)(2n+1)(2n+1)}(a, \dots, a)$, $s=(2n+1)a$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $2(2n+1)$ 子必有答案。但每層為 $(2n+1)^2-2$ 子, 即 $s=(2n+1)^3-2(2n+1)$ 時無解。
 (2) 在 $V_{2n \times 2n \times 2n}(a, \dots, a)$, $s=2na$ 中, s 從最小值到最大值之間, 每層同時加 2 子, 共加 $4n$ 子必有答案。

(二) 探討在 $V_{n \times n \times n}(a, a, a, \dots, a)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時的解答分析。

<方法一> 同一層加 2 子。詳見參~三~(二)~2、3。

<方法二> 任兩層的相同位置各加 2 子(即加 4 子)。

詳見參~三~(二)~4、5。

<方法三> 先排各層的行列,再調整高的個數。詳見參~三~(二)~6。

<方法四> 先決定各個高的棋子個數,再調整行列、高的位置。

詳見參~三~(二)~7。

以上四個排列方法,我們可以歸納以下幾點：

1. <方法一>、<方法二> 屬累積性排法,而<方法三>、<方法四> 為全面性排法。

2. (1) 由<方法三>知：

當各層行、列排列完畢後,錯誤高必為偶數,且可化為矩形框。

(2) 由<方法四>知：

棋子總數需大於或等於一層的棋盤格子總數。

重複棋子需小於或等於重複層的各層棋子數。

(3) 再加上各層棋子數需符合 $M_{n \times n}(s)$ 能排列成功的棋子數。

(1)、(2)、(3)可成為在 $V_{n \times n \times n}(a, \dots, a)$ 中判斷棋子排列是否有解的方法。

(三) 在 $V_{n \times n \times n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 中，排成行、列、高的棋子個數均為奇數時，探討 s 的最大值、最小值，並分析 $V_{3 \times 3 \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ 及 $V_{4 \times 4 \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 的變化情形。

1. s 的最大值與最小值

$n \times n \times n$ \ s	最小值	最大值
$3 \times 3 \times 3$	$(3, 3, 5)$	$(9, 5, 5)$
$4 \times 4 \times 4$	$(4, 4, 4, 6)$	$(12, 12, 12, 10)$
$5 \times 5 \times 5$	$(5, 5, 5, 5, 7)$	$(25, 25, 25, 21, 21)$
$6 \times 6 \times 6$	$(6, 6, 6, 6, 6, 8)$	$(30, 30, 30, 30, 30, 28)$
n	n	n
$2n \times 2n \times 2n$	$(2n, \dots, 2n, 2n + 2)$	$(2n(2n - 1), \dots, 2n(2n - 1), 2n(2n - 1) - 2)$
$(2n + 1)(2n + 1)(2n + 1)$	$((2n + 1), \dots, (2n + 1), (2n + 1) + 2)$	$((2n + 1)^2, \dots, (2n + 1)^2, (2n + 1)^2 - 4, (2n + 1)^2 - 4)$

2. 探討 $V_{3 \times 3 \times 3}(a_1, a_2, a_3)$, $s = a_1 + a_2 + a_3$ 且 a_1, a_2, a_3 不完全相等，排成行、列、高的棋子個數均為奇數的變化情形：符合 (a_1, a_2, a_3) 的有：

$(3, 3, 5)$ $(3, 3, 9)$ $(3, 5, 5)$ $(5, 5, 9)$ 四組

3. 探討 $V_{4 \times 4 \times 4} (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 且 a_1, a_2, a_3, a_4 不完全相等, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數的變化情形。符合 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的有 49 組, 如下表:

(a_1, a_2, a_3, a_4)	(a_1, a_2, a_3, a_4)	(a_1, a_2, a_3, a_4)	(a_1, a_2, a_3, a_4)
(4,4,4,6)	(12,12,10,10)	(4,4,8,12)	(12,10,8,8)
(4,4,4,8)	(12,12,12,6)	(4,4,10,10)	(12,12,8,4)
(4,4,6,6)	(12,12,10,8)	(4,6,6,12)	(12,12,6,6)
(4,4,4,10)	(12,10,10,10)	(4,6,8,10)	(12,10,10,4)
(4,4,6,8)	(12,12,12,4)	(4,4,10,12)	(12,10,8,6)
(4,6,6,6)	(12,12,10,6)	(4,6,8,12)	(12,12,6,4)
(4,4,4,12)	(12,12,8,8)	(4,6,10,10)	(12,10,8,4)
(4,4,6,10)	(12,10,10,8)	(4,8,8,10)	(12,10,6,6)
(4,4,8,8)	(12,12,10,4)	* (4,4,12,12)	(12,8,8,6)
(4,6,6,8)	(12,12,8,6)	○ (4,6,10,12)	* (12,12,4,4)
(4,4,6,12)	(12,10,10,6)	# (4,8,8,12)	○ (12,10,6,4)
(4,4,8,10)	(4,6,6,10)	(4,8,10,10)	# (12,8,8,4)
(12,12,12,10)	(4,6,8,8)	(12,10,10,6)	(12,8,6,6)

註: *、○、# 表示重複

(四) 探討在 $V_{n \times n \times n} (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時的解答分析。

< 方法一 > 同一層加 2 子。詳見參~三~(二)~2、3。

< 方法二 > 任兩層的相同位置各加 2 子(即加 4 子)。

詳見參~三~(二)~4、5。

< 方法三 > 先排各層的行列,再調整高的個數。詳見參~三~(二)~6。

< 方法四 > 先決定各個高的棋子個數,再調整行、列、高的位置。

詳見參~三~(二)~7。

四、長方體棋盤的探討

- (一) 在 $V_{n \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中, 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 其 k 的最小值為何?

在 $V_{n \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中, 令 $s = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $s - n^2 \geq 0$ 且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ 符合 $M_{n \times n}(a)$ 能排列成功。

由排列方法四發現:

1. 若 n 是奇數時, $k=3$ 為排列成功的最小值, 也就是說, $V_{n \times n \times 3}(a_1, a_2, a_3)$ 即可排列成功。
2. 若 n 為偶數時

(1) 當 $a_1 = a_2 = \frac{n^2}{2}$, 則 $k=2$ 為排列成功的最小值, $V_{n \times n \times 2}(\frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{2})$ 即可排列成功

(2) 當不存在 2 個 a 均為 $\frac{n^2}{2}$, 則 $k=4$ 為排列成功的最小值, 也就是說 $V_{n \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 即可排列成功。

- (二) 在 $V_{m \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中 ($1 < m < n$), 排成行、列、高的棋子個數均為奇數時, 其 k 的最小值為何?

在 $V_{m \times n \times k}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ 中 ($1 < m < n$)

令 $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $m+n$ 為偶數,

$s - mn \geq 0$ 且 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 符合 $M_{n \times n}(s)$ 使行、列為奇

由排列方法四發現:

1. 若 m, n 為奇數時, $k=3$ 為排列成功的最小值, 也就是說, $V_{m \times n \times 3}(a_1, a_3)$ 即可排列成功。
2. 若 m, n 為偶數時

(1) 當 $a_1 = a_2 = \frac{mn}{2}$, 則 $k=2$ 為排列成功的最小值, 也就是說 $V_{m \times n \times 2}(\frac{mn}{2}, \frac{mn}{2})$ 即可排列成功。

(2) 當不存在兩個 a 均為 $\frac{mn}{2}$ 時, 則 $k=4$ 為排列成功的最小值, 也就是說, $V_{m \times n \times 4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 即可排列成功。

五、設計一個「疊疊樂」的遊戲, 並加以探討。

- (一) 根據本研究發現在 $M_{4 \times 4}(4)$ 中, 排成行、列的棋子個數均為奇數時, 共有 24 種情形, 如附件(五), 若將其旋轉後會相同者視為同一種情形, 則 24 種情形可簡化成 9 種情形。
- (二) 「疊疊樂」遊戲。
1. 結果是 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 顆棋子時無解。
 2. 可以作出的結果為 4 顆, 6 顆, 8 顆, 10 顆, 12 顆, 16 顆棋子。
 3. 結果是 0, 2, 14 顆棋子時無解。

陸、討論與結論

- 一、 在本次研究中，為了說明棋子在平面或立體中排列的位置及位置之間的關係，我們和老師一起設計了一些表達位置的符號及紀錄方式。這對我們這次的研究來說方便且清楚了許多，也因此讓我們更了解在數學中，以符號來表示，是一件非常重要的事。
- 二、 此次研究，我們大膽且小心的從正方形、長方形、正方體到長方體棋盤去探討，過程雖然辛苦，但卻能得到一系列完整的科學概念及有效且清晰的解決「棋子排列的研究」問題的方法，著時令人感到興奮。我們將再繼續努力且更深入探討**棋子排列變化性的問題**，這都等著我們去挑戰。

柒、參考資料

- 一、 呂民揚 編著（民 75）娛樂數學 100・高雄市，河畔出版社。
- 二、 JOHN MASON WITH LEONE BURTON & KAYE STACEY 著，台北市立建國高級中學 314 班全體同學 譯：數學思考，九章出版社。
- 三、 王芳夫、王登傳 編著（民 80）數學遊戲大觀・高雄市，前程出版社。
- 四、 葉均承 (民 90)：翻棋分類問題，台北市中等學校學生科學研究獎助計畫優勝作品專輯，台北市教育局。

(第一名)

由簡單的奇偶性問題到三維上一般化的判別原則，內容完整，想法獨特，表達能力佳，研究日誌詳實。