

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：面積切割

關 鍵 詞：鑲嵌法、對稱法、篩檢法

編 號：030414

學校名稱：

臺北市立士林國民中學

作者姓名：

蘇家霈、江婕瑋、陳蕙文、任芸慧

指導老師：

游志文、劉賢建



面積切割

一、研究動機：

二年級下學期教到『生活中的平面圖形』這個單元時，老師在習作 2-1 中補充『希臘十字切割』以及『對稱法』的圖形。下課後，阿霏在觀察面積切割方式，發現：1、2、4、5 均可切割平鋪為正方形，為何獨獨沒有 3？於是阿霏去找數學老師討論，老師回答：「這是個很有趣的問題，上學期我們學過的『商高定理』，也涉獵了面積切割的問題，你不妨找幾個同學一起去深入探討一番。」隔天阿霏和幾個朋友閒聊時，談到這個問題，小文：「是不是每個數目均可切割成正方形？方法都一樣嗎？」婕瑋觀察完說道：「我覺得這些圖形各有獨特的拼切方式，會不會拼切的方法都不一樣？」，小慧頓時靈光一現：「我們何不實作來探討這個問題？」

二、研究目的：利用面積的切割探索幾何的特質。

三、文獻探討：

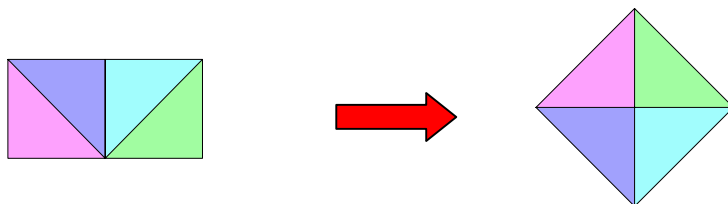
1. 商高定理 第三冊第一章第四節
2. 面積切割 第四冊第二章 生活中的平面圖形
3. 篩檢法 第一冊第二章第一節 質數篩檢法

四、研究設備器材；The Geometer's Sketchpad

五、研究過程或方法：

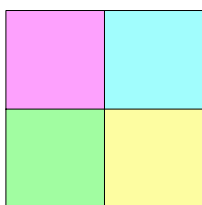
(一) 面積 2 ~ 6 正方形拼切

1. 面積 2 的正方形



將 2 表達成 $4 \times \frac{1}{2}$ 將兩正方形的對角線相連，使其分割成 4 個全等的等腰直角三角形，最後以各直角邊旋轉排列即可拼成一面積 2 的正方形。

2. 面積 4 的正方形

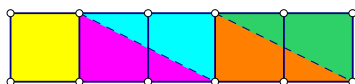
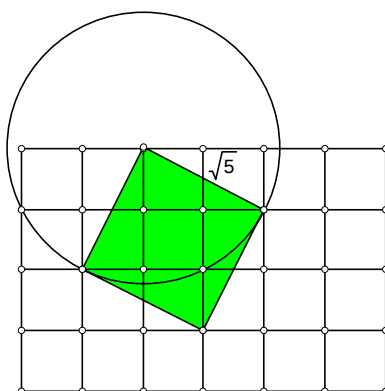
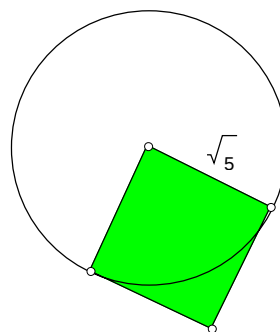
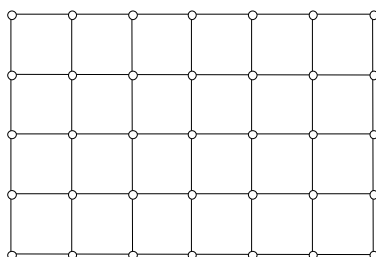


將 4 表達成 2^2 ，將四個正方形組合排列即可拼成一面積 4 的正方形。

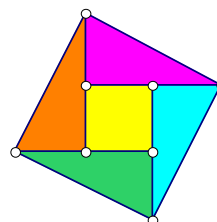
3. 面積 5 的正方形

《方法一》 鑲嵌法

作一個面積 5 的正方形鑲嵌到單位長為 1 之框格上。



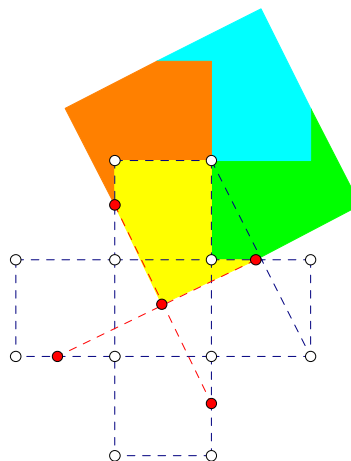
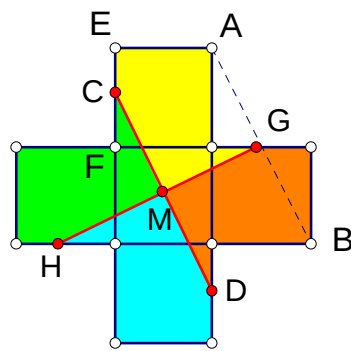
切



拼

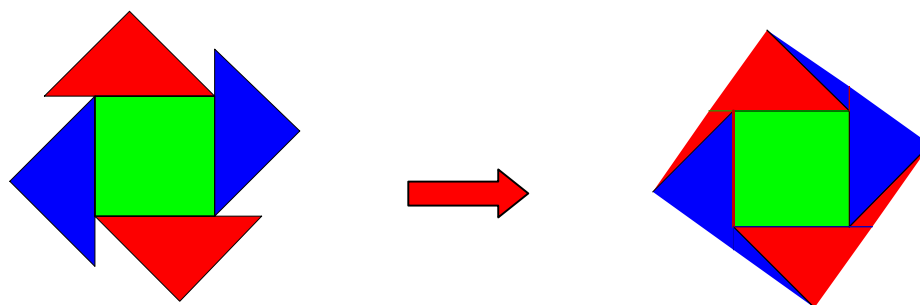
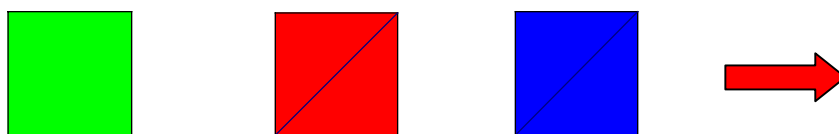
《方法二》希臘十字切割

作一面積為 5 之十字形(如下圖)，在 $\overline{EF}$ 上任取一點 C ，過 C 點作一直線平行 $\overline{AB}$ 交圖形於 D 點，過 $\overline{CD}$ 中點 M 作 $\overline{GH}$ 垂直 $\overline{CD}$ 交圖形於 G 、 H 兩點，以圖中黃色區域為基準，將藍、綠、橙區域平移至相對位置，則可拼成一正方形。



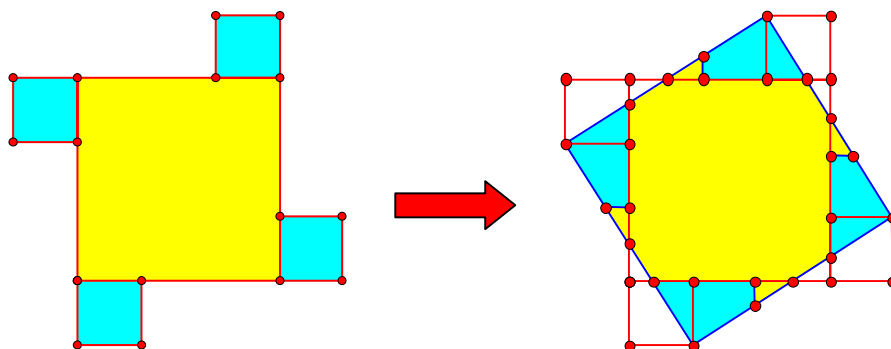
4. 面積 3 的正方形

由上面 2、4、5 單位面積的切割方式 鑲嵌法及希臘十字切割，似乎不能讓我們馬上對單位面積 3 作切拼，但在[建中網站](#)上，提供了下面的方法：



將 3 表達成 $1 + 4 \times \frac{1}{2}$ 將兩正方形的對角線相連，使其分割成 4 個全等的等腰直角三角形 對稱圖形，最後以各直角邊連線並旋轉排列即可拼成一面積 3 的正方形。

根據這個想法，我們也找到另外一個對稱法

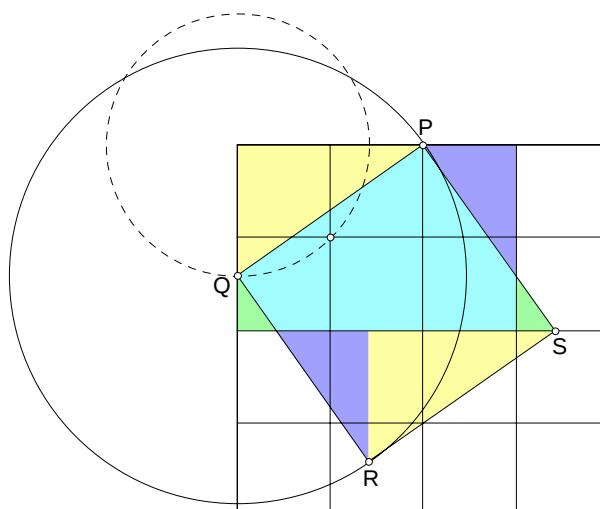


5. 面積 6 的正方形

現在面積 2 ~ 5 的正方形已經都找到方法可以切拼，那麼面積為 6 的正方形呢？

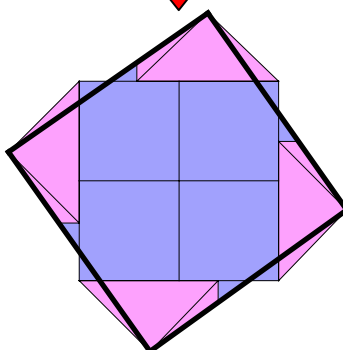
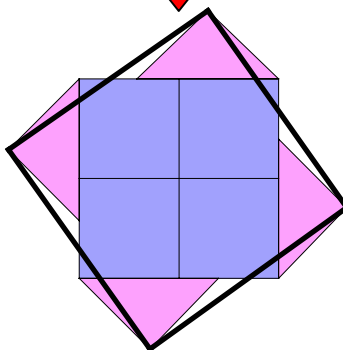
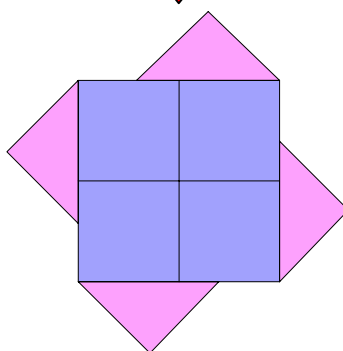
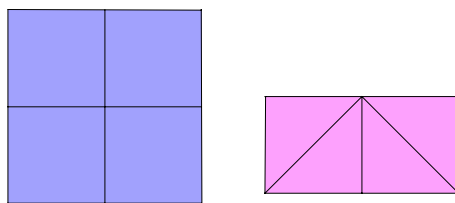
《方法一》鑲嵌法

作一個邊長為 $\sqrt{6}$ 的正方形，鑲嵌到框格上，找到切割方法。(如圖所示)



《方法二》對稱法

因為 $6 = 2^2 + 4 \times \frac{1}{2}$,



(二) 2~6 切拼成正方形方法

根據以上的經驗，我們得到些有用的切拼方法，並且觀察出各種切拼方法

與使用刀數之關係如下：

1. 鑲嵌法：鑲嵌法有兩種，如

$$(1) 5 \rightarrow 2 \text{ 刀}$$

$$(2) 6 \rightarrow 3 \text{ 刀}$$

2. 希臘十字切割：2 刀

3. 對稱法：對稱法亦有兩種，如

$$(1) 3 \rightarrow 6 \text{ 刀}$$

$$(2) a^2 + 4b^2 \rightarrow 4 \text{ 刀}$$

我們將試著以這些切拼方法來探討 1~100 的切拼及較少刀數。

(三) 根據前面的經驗方法，探索面積 1~100 切割的較少刀數

每種切割方法我們將提供兩個表格：

第一個表格中的紅色數字表該切割可篩檢出的數字

第二個表格為篩檢後剩餘的數字

任意 n 平方單位的矩形，可分為下列幾種形式表達：

$$1. a^2 \rightarrow$$

是完全平方數，可直接拼為正方形。

→ 定義切割刀數：0 刀

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100



剩下數字列表

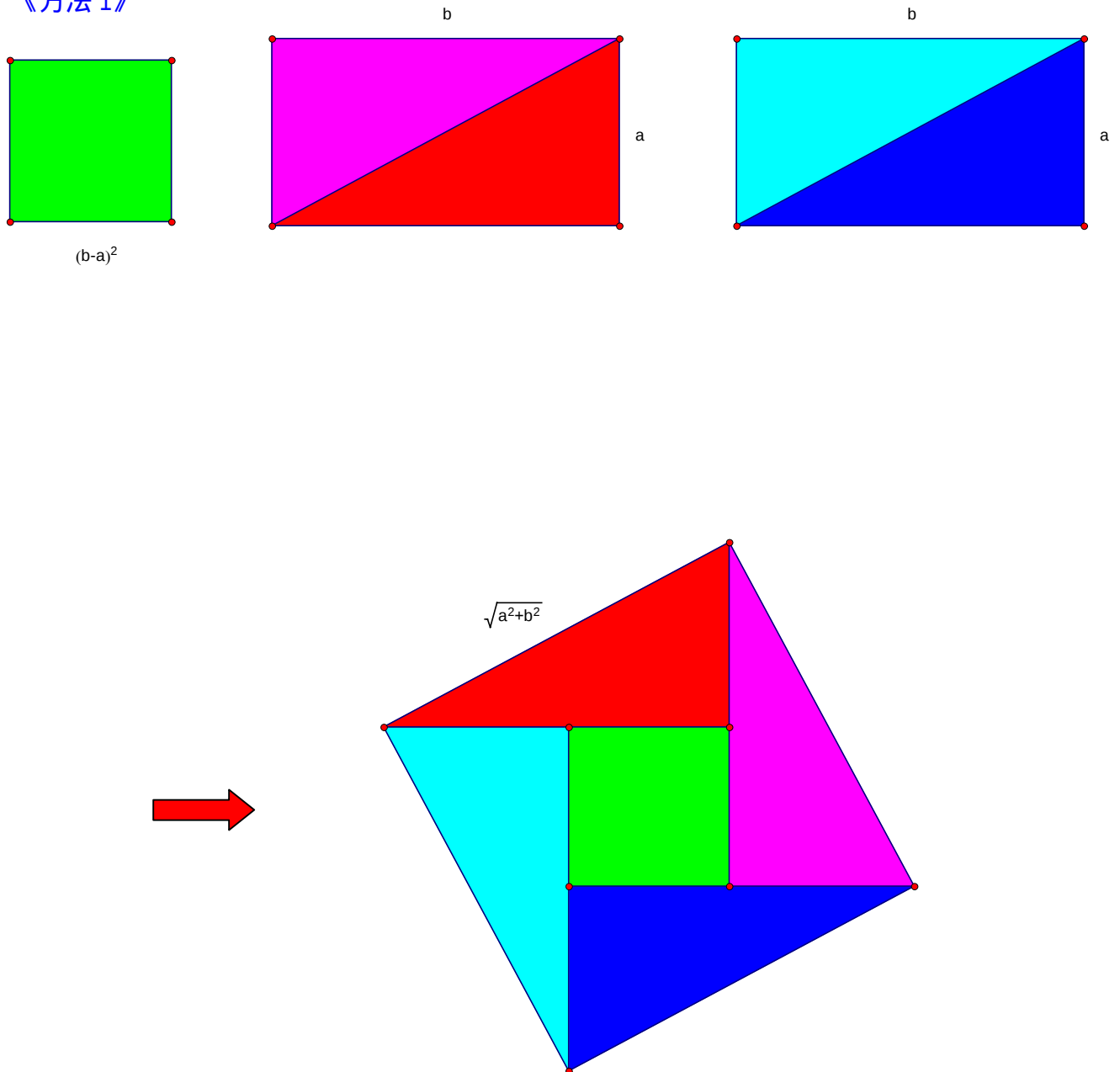
	2	3		5	6	7	8		10
11	12	13	14	15		17	18	19	20
21	22	23	24		26	27	28	29	30
31	32	33	34	35		37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48		50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63		65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

2. $a^2 + b^2 \rightarrow$

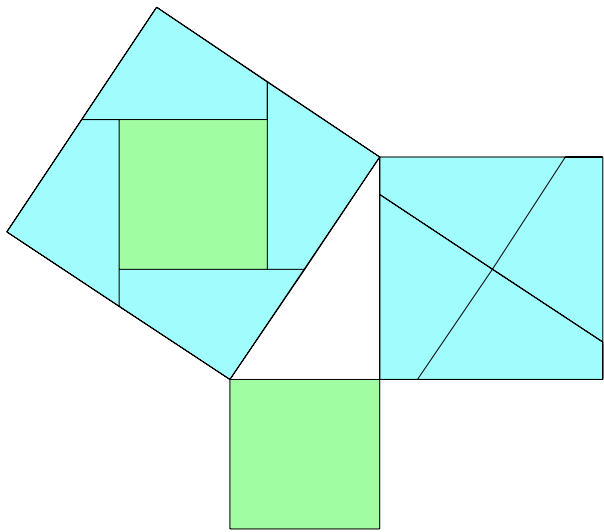
兩平方和，利用商高定理可將之拼成一大正方形。

→ 切割刀數：2 刀

《方法 1》



《方法 2》



$\begin{matrix} a^2 \\ \backslash \\ b^2 \end{matrix}$	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1^2	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2^2		8	13	20	29	40	53	68	85
3^2			18	25	34	45	58	73	90
4^2				32	41	52	65	80	97
5^2					50	61	74	89	106
6^2						72	85	100	117
7^2							98	113	130
8^2								128	145
9^2									162



剩下數字列表

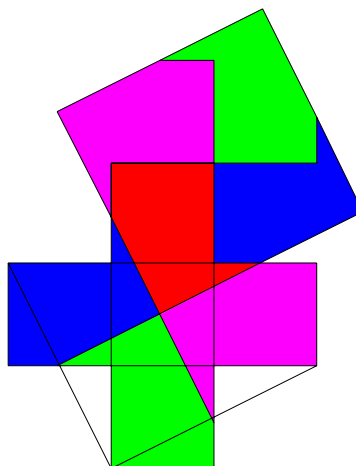
		3			6	7			
11	12		14	15				19	
21	22	23	24			27	28		30
31		33		35			38	39	
	42	43	44		46	47	48		
51			54	55	56	57		59	60
	62	63			66	67		69	70
71				75	76	77	78	79	
		83	84		86	87	88		
91	92	93	94	95	96			99	

3. $5a^2 \rightarrow$

利用希臘十字切割,可將十字形的 5 塊等面積正方形切拼正

方形

→ 切割刀數 : 2 刀



5×1^2	5×2^2	5×3^2	5×4^2
5	20	45	80



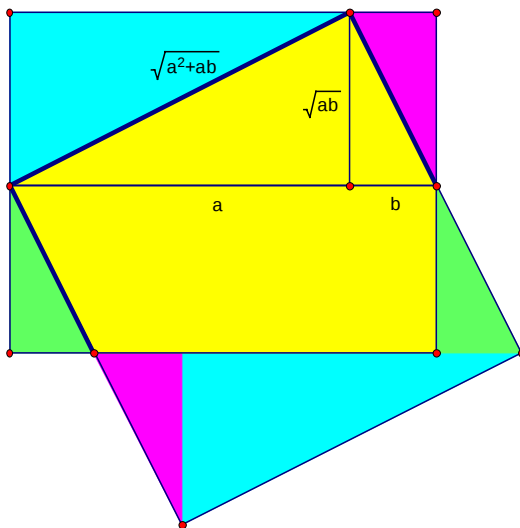
剩下數字列表

		3			6	7			
11	12		14	15				19	
21	22	23	24			27	28		30
31		33		35			38	39	
	42	43	44		46	47	48		
51			54	55	56	57		59	60
	62	63			66	67		69	70
71				75	76	77	78	79	
		83	84		86	87	88		
91	92	93	94	95	96			99	

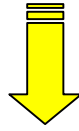
4. $a^2 + ab$ ($a > b$) $\rightarrow$

利用邊長，做出要的面積，再把原圖形一一補過來。

$\rightarrow$ 切割刀數：3 刀



a^2 b	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
1	2	6	12	20	30	42	56	72	90
2		8	15	24	35	48	63	80	99
3			18	28	40	54	70	88	108
4				32	45	60	77	96	117
5					50	66	84	104	126
6						72	91	112	135
7							98	120	144
8								128	153
9									162



剩下數字列表

		3				7			
11			14					19	
21	22	23				27			
31		33					38	39	
		43	44		46	47			
51				55		57		59	
	62					67		69	
71				75	76		78	79	
		83			86	87			
	92	93	94	95					

4. 鑲嵌 $a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 2 倍 →

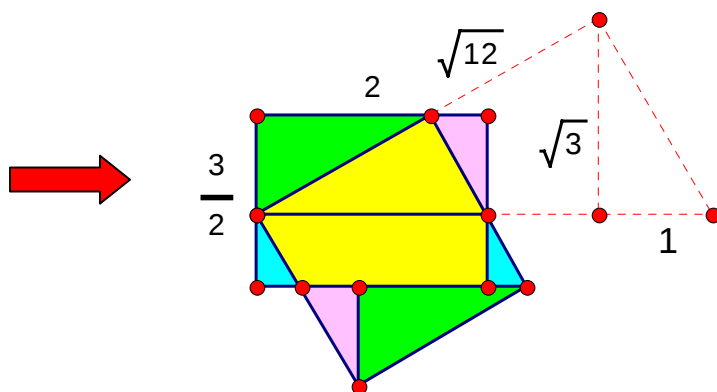
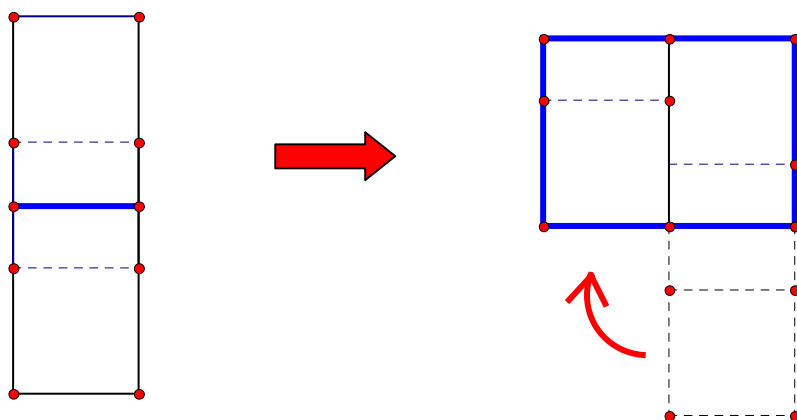
有一些數字用其他的方法都頗為複雜，因此將這數先放大，

找到可行的方法後再調整回原來的比例。這裡是利用 $a^2 + ab$

的原理，做出面積 2 倍的圖形，最後再縮小為 $\frac{1}{2}$

→ 切割刀數：4 刀

例如面積為 3 時



3	7	14	21	22	27
33	39	44	51	55	57
69	75	76	78	92	95



剩下數字列表

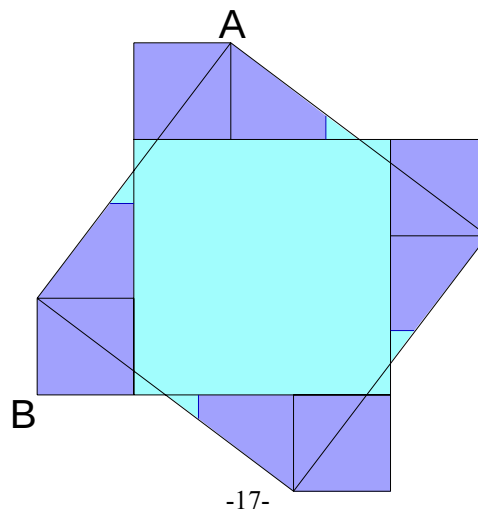
11								19	
		23							
31							38		
		43			46	47			
								59	
	62					67			
71								79	
		83			86	87			
		93	94						

6. $a^2 + 4b^2 \rightarrow$

中間一塊正方形，再加上四邊各一塊等面積正方形所成的圖

形，其切割線為兩正方形之相異頂點連線。

→ 切割刀數：4 刀



$a^2 \backslash 4 \times b^2$	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
4×1^2	5	8	13	20	29	40	53	68	85
4×2^2	17	20	33	32	41	52	65	80	97
4×3^2	37	40	45	52	61	72	85	100	
4×4^2	65	68	73	80	89				



剩下數字列表

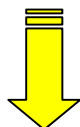
11								19	
		23							
31							38		
		43			46	47			
								59	
	62					67			
71								79	
		83			86	87			
		93	94						

7. $(a^2 + b^2) + c^2 \rightarrow$

先利用 $a^2 + b^2$ (商高定理) 做出一正方形, 再將此正方形與 c^2 作成大正方形即可。

→ 切割刀數 : 4 刀

3	6	7	9	10	11	12	13	14	16
17	18	19	20	21	22	24	25	26	27
29	30	32	33	34	35	36	37	38	40
41	42	43	44	45	46	48	49	50	51
52	53	54	56	57	58	59	61	62	64
65	66	67	68	69	70	72	73	74	75
76	77	78	80	81	82	83	84	85	86
88	89	90	91	93	94	96	97	98	99
100									



剩下數字列表

		23							
31									
						47			
71								79	
						87			

8. $(5a^2) + b^2 \rightarrow$

先利用 $5a^2$ （十字切割法）做出一正方形，再將此正方形與 b^2

作成大正方形即可。

→切割刀數：4 刀

b^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
$5a^2$									
5	5	9	14	21	30	41	54	69	96

20	21	24	29	36	45	56	69	84	101
45	46	49	54	61	70	81	94	89	126
80	81	84	89	96	105	116	129	144	161



剩下數字列表

		23							
31									
						47			
71								79	
						87			

9. 鑲嵌 $a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 3 倍 →

利用 $a^2 + ab$ 的原理，做出面積 3 倍的圖形，最後再縮小為 $\frac{1}{3}$

→ 切割刀數 : 5 刀

例如面積為 87 時

⇒ 放大三倍 $9 \times 87 = 9 \times 3 \times 29 = 27(27 + 2)$

11	38	46	62	87	93
----	----	----	----	----	----



剩下數字列表

		23							
31									
						47			
71								79	

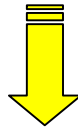
10. $(a^2 + ab) + c^2$ ($a > b$) $\rightarrow$

先利用 $a^2 + ab$ (鑲嵌法) 做出一正方形, 再將此正方形與 c^2 作成大正方形即可。

$\rightarrow$ 切割刀數 : 5 刀

例如面積為 31 時 $31 = 30 + 1 = 5(5 + 1) + 1$

31	71	79
----	----	----



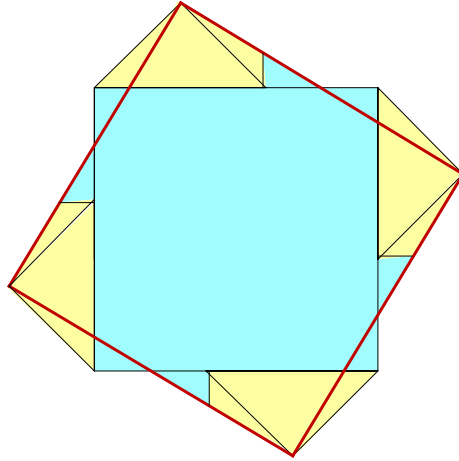
剩下數目列表

		23							
						47			

11. $a^2 + 2b^2 \rightarrow$

中間一塊正方形,再加上四邊各一塊同面積的等腰直角三角形所組成,其切割線為等腰直角三角形之頂點兩兩相連。

→切割刀數: 6 刀



$\begin{array}{c} a^2 \\ \hline 2 \times b^2 \end{array}$	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2
2×1^2	3	6	11	18	27	38	51	66	83
2×2^2	9	12	25	24	33	44	57	72	89
2×3^2	19	22	27	34	43	54	67	82	99
2×4^2	33	36	41	48	57	68	81	96	
2×5^2	51	54	59	66	75	86	99		
2×6^2	73	76	81	88	97				
2×7^2	99								



剩下數字列表

		23							
						47			

12. 鑲嵌 $a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 4 倍 →

利用 $a^2 + ab$ 的原理，做出面積 4 倍的圖形，最後再縮小為 $\frac{1}{4}$ 。

→ 切割刀數：6 刀

例如面積為 23 時

⇒ 放大四倍 $16 \times 23 = 16(16 + 7)$

19	23	31
----	----	----



剩下數字列表

						47			

下列我們試著以三種切拼方式篩檢 47

13. $(a^2 + b^2) + 4c^2 \rightarrow$

先利用 $a^2 + b^2$ (鑲嵌法) 做出一正方形，再將此正方形與 $4c^2$ 作成大正方形即可。

→ 切割刀數：6 刀

14. $(5a^2) + 4b^2 \rightarrow$

先利用 $5a^2$ (十字切割法) 做出一正方形 , 再將此正方形與 $4b^2$ 作成大正方形即可。

→ 切割刀數 : 6 刀

15. $(a^2 + 4b^2) + c^2 \rightarrow$

先利用 $a^2 + ab$ (鑲嵌法) 做出一正方形 , 再將此正方形與 c^2 作成大正方形即可。

→ 切割刀數 : 6 刀

六、討論

由上列各種方法篩檢後，仍剩下的數字為 47。這個數不能用上列方法處理，因此我們嘗試把之前的方法加以組合，再從這些方法中找出最少切割刀數，或是延伸之前的範圍，繼續推論下去：

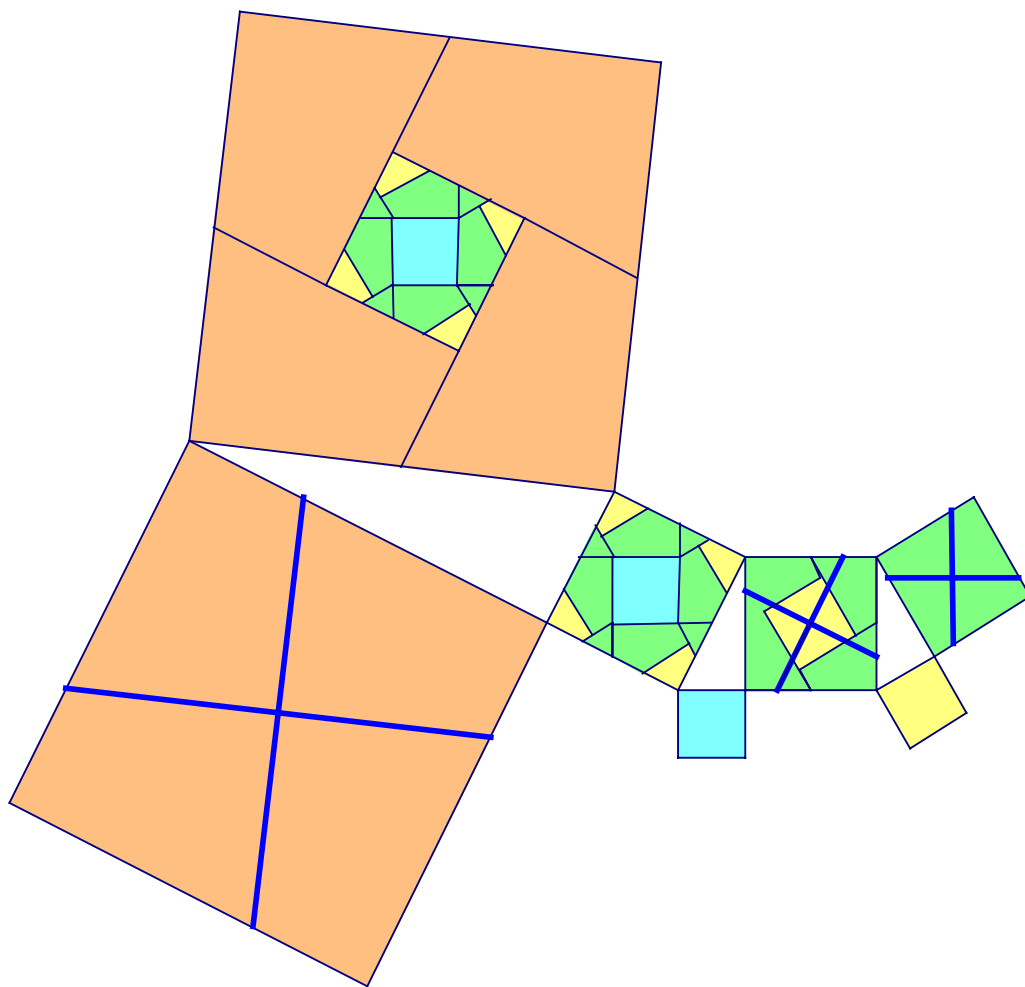
面積 47 的正方形

經討論後，我們將 47 表達成 $(a^2 + b^2 + c^2) + d^2$

其切割刀數 $\rightarrow 4 \text{ 刀} + 2 \text{ 刀} = 6 \text{ 刀}$



$$47=6^2+3^2+1^2+1^2$$



1. 利用商高定理將面積為 1 和 9 的兩小正方形組成一面積為 10 的正方形
2. 將面積為 10 和 1 的兩正方形再組成一面積為 11 的正方形
3. 最後將面積為 11 和 36 的兩正方形組成一面積為 47 的大正方形即可

七、結論：

我們想要找到切割刀數最少的方法，因此在篩檢的過程中均由最簡單的圖形開始

篩，漸次複雜。

結構	切割方式	較少刀數	1~100 數字
a^2	不用切割	0	1.4.9.16.25.36.49.64.81.100
$a^2 + b^2$	利用商高定理，將兩正方形合併，其中一個被兩刀分割成 4 塊等面積圖形，再依序拼入大正方形	2	2.5.8.10.13.17.18.20. 25.26.29.32.34.37.40.41. 45.50.52.53.58.61.65.68.72. 73.74.80.82.85.89.90.97.98
$5a^2$	將 5 塊同面積的正方形排成十字形，切兩刀使其分成 4 塊，再重新排列即可。	2	無
$a^2 + ab$ ($a > b$)	邊長的平方=面積 利用此原理做出邊長再利用它做正方形。	3	6.12.15.20.24.28.30.32. 35.42.48.54.56.60.63.66. 70.77.84.88.91.96.99
$a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 2 倍	先放大 2 倍，利用 $a^2 + ab$ 的原理找到可行的方法後，再調整回原來的比例。	4	03.07.14.21.22.27.33.39.44. 51.55.57.69.75.76.78.92.95
$a^2 + 4b^2$	中間一塊正方形，再加上四邊各一塊等面積正方形所成的圖形。	4	37.89
$(a^2 + b^2) + c^2$	利用商高定理，將 a^2 及 b^2 合併成一正方形，再將此圖形與 c^2 合併。	4	11.19.43.46.59.67.74.83.86.93.94
$(5a^2) + b^2$	先把 $5a^2$ 做十字切割，再將做成的正方形利用商高定理合併。	4	無
$a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 3 倍	先放大 3 倍，利用 $a^2 + ab$ 找到較好的方法後，再調整回原圖的比例。	5	87.
$(a^2 + ab) + c^2$ ($a > b$)	做出邊長為 $\sqrt{a^2 + ab}$ 正方形，再將此圖與 c^2 合併。	5	31.71.79
$a^2 + 2b^2$	中間一塊正方形，再加上四邊各一塊等面積的等腰直角三角形所成的圖。	6	無

$a^2 + ab$ ($a > b$) 放大 4 倍	先放大 4 倍, 利用 $a^2 + ab$ 找到切割線數較少的方法後, 再調整回原圖的比例。	6	23
$(5a^2) + 4b^2$	先做十字切割, 再將所成正方形與 $4b^2$ 合併。	6	無
$(a^2 + 4b^2) + c^2$	做出面積為 $a^2 + 4b^2$ 的正方形, 再將此圖與 c^2 作成大正方形即可。	6	無
$(a^2 + b^2) + c^2 + d^2$	重複利用商高定理, 合併 a^2 、 b^2 、 c^2 、 d^2 成一大正方形	6	47

以上為我們不斷討論、嘗試所得到的較少刀數, 但結果是否為最少刀數尚待各位求證。

八、參考資料及其他：

參考網站

http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/gspst/90107/700.htm

參考書籍

1. 數學教學方法 九章出版社
2. 面積關係幫您解題 九章出版社
3. 算得巧 凡異出版社