中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：哈哈鏡前的費馬最後定理 —「多元」畢氏數的研究

關 鍵 詞：多元畢氏數、不定方程、遞迴通解公式

編　　號：030413

學校名稱：

臺北市立金華國民中學

作者姓名：

洪碩甫

指導老師：

郝曉青

哈哈鏡前的費馬最後定理

－「多元」畢氏數的研究

壹、研究摘要

$\boxed{\text{國中數學第三冊 1-4}}$的主題是「商高定理」，或稱「畢氏定理」。三百多年前法國數學家費馬在研究「畢氏定理」的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$後，把它的「次數」（原是二次）提高到三次、四次……直到$(x_1)^n+(x_2)^n=y^n$ （$n\geq 3$），並且猜想說這個方程式在任何情況下都無自然數解。他的猜想在 1994 年被證明正確。

我聯想到：如果不是把「畢氏定理」的方程式的「次數」提高，而是把它的「元數」增加到三元、四元……直到 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$（$t\geq 3$）。就如同把費馬的方程式放在哈哈鏡前一樣，我把一個「高次」的方程式轉變為一個「多元」的、較「長」的方程式。在這種情形下，我想研究下列的不定方程：

$$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$$

在 t 和 n 設任意自然數（但$t\geq 3$）時，有無自然數解 $(x_1,x_2,\cdots,x_t,y)$; 以及若有解，解的形式會是什麼。

我研究的過程分五階段。<u>第一階段</u>－進入題目：先探討一下$n=1$，$t=3$、$t=4$的情形，先熟悉問題。<u>第二階段</u>－證明一般化：嘗試將第一階段的結果推廣一般化到任意$t\geq 3$的情形。<u>第三階段</u>－主題推展：嘗試將第二階段的結果再推展到 n 是完全平方數k^2，以及$n=2$、$n=3$的情形。<u>第四階段</u>－推展一般化：嘗試將第三階段的結果接著推展到任意 n 和$t\geq 3$的情形。我所設計的證明方法只能涵蓋$t\geq 4$，或是$t=3$，但 n 可以分為不超過三個數的平方和的情況。<u>第五階段</u>－解決特例：當$t=3$，且 n 無法分為不超過三個自然數的平方和的情形（是$4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的形式）。

因為我的研究是屬於建設性證明，所以我還研究了求解的方法，並撰寫電腦程式求解，驗證我的研究結果。研究結果大致如下：

（1）$t \geq 4$時，或是$t = 3$，但 n 不為$4^p(8q+7)$（$p \in Z_0$、$q \in N$）的形式時，原方程式有無限多組自然數解，且可依遞迴公式求解。

（2）$t = 3$時，且 n 為$4^p(8q+7)$的形式時，原方程式無自然數解。

這篇研究的應用主要是在立體及高次的抽象幾何。原方程式在$n=1$、$t=3$的時候，$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2 = y^2$其$x_1, x_2, x_3, y$依序正好為一長方體的三邊長及對角線長。根據這篇研究的結果，可知：

只要找一個不小於 3 的自然數，便可找出一個以此為邊長，其他邊長和對角線長也為自然數的長方體。如果再將此結果推展至更高次的話，則在 t次空間中，只要找一個不小於 3 的自然數，便可找出一個以此為邊長，其他邊長和其對角線長也為自然數的 t次長方體。

至於這篇研究的未來推展，則可將原方程式的各指數提高。

貳、研究動機

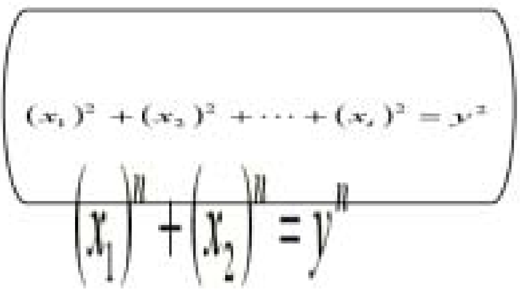
我做這篇研究的動機，以及我對數學的熱誠，都源自於一本書。在 1997 年的時候，「費馬最後定理」不久前才剛被證明正確，引起了數學界的轟動，出了許多相關的書。我父親便買了一本介紹「費馬最後定理」的書，由 Simon Singh 著作的《Fermat’s Last Theorem》。書中說道，費馬在三百多年前提出了一個猜想：

不可能將一個完全立方數寫成兩個完全立方數之和，或是將一個完全四次方數寫成兩個完全四次方數之和。總歸不可能將一個高於二次方的數寫成兩個高於二次方的數的和。（換句話說，就是說方程式$(x_1)^n+(x_2)^n = y^n$（$n \geq 3$）無自然數解。）

費馬在研究畢氏定理的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$後，想到可以把它的次數（二次）提高到三次、四次……，看看結果怎樣，才會想出這個定理。

「費馬最後定理」在經過三百多年的嘗試後，終於在 1994 年由美國普林斯頓大學數學家 Andrew Wiles 確實證明$(x_1)^n+(x_2)^n=y^n$（$n\geq 3$）無自然數解。我看了書中敘述各數學家三百年來的嘗試與失敗，自己便也想證明看看。不過在多次的失敗後，我突然想到，如果不是把畢氏定理的方程式提高到更高次，而是擴展成更多元的$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$、$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2=y^2$等……到任意個（$t$個）$x_j$項的情形$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$，會是怎樣的情形呢？這正是$\boxed{\textbf{國中數學第三冊單元 1-4}}$的主題「商高定理」（即「畢氏定理」）的應用及推展。

因為費馬最後定理的方程式$(x_1)^n+(x_2)^n=y^n$是「高次」的，而我是把畢氏定理的方程式增加很多項，把它變成很長的「多元」方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$，所以兩個方程式比較之下，就像把費馬的方程式放到「哈哈鏡」前面，讓原來很「高」的方程式變成很「長」的方程式。我想要看看費馬最後定理在哈哈鏡的效果下，會有怎樣值得注意的結果。



參、研究內容與目的

我把畢氏定理的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$等號左邊增為任意個未知數，再在等號右邊任意乘上一個自然係數n：

$$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2 \qquad (t\geq 3)(1)$$

研究看在哪些 t 和 n 的組合有解？有幾個解？

肆、研究過程

（研究流程請參閱附件一）

一、論證

（一）第一階段－進入題目

我剛開始研究時，想先藉由研究兩個比較簡單的特例：$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$、$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2=y^2$，也就是畢氏定理的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$最基本的推廣，來進入題目，熟悉題目。

（1）$t=3$、$n=1$，$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$

因為$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$很早以前就被人證明有無限多組自然數解（附件二），也就是國中數學提到的「畢氏數」（也叫「勾股數」），所以我就猜說它最簡單的推展$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$也有無限多組自然數解。

我想要找出一個通解，是可以讓一個已知x_1的任意畢氏數(x_1,x_2,y)，推展出(x_2,y)。我稍微研究了一下$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$這個方程式。我發現只要移項，再利用國一教的「因式分解」，就可以求出通解。我這方面的研究請參照附件三。

如果知道x_1的值，只要遵循其步驟就可以求出x_2、y的值。這是一個通解形式，可以表示為$(\lambda,T_1(\lambda),T_2(\lambda))$（$\lambda$可以是任何數）：在是$\lambda$奇數時，$T_1(\lambda)=\dfrac{(\lambda)^2-1}{2}$，$T_2(\lambda)=\dfrac{(\lambda)^2+1}{2}$；而在$\lambda$偶數時，$T_1(\lambda)=\dfrac{(\lambda)^2-4}{4}$，$T_2(\lambda)=\dfrac{(\lambda)^2+4}{4}$。但是，這種方法

有一點要注意，λ 的值不能隨便代一個自然數。如果代入 $\lambda = 1,2$，就會出現不符合我們的要求的 x_2 和 y（不是自然數）。所以要規範 $\lambda \geq 3$。

如此一來，可以將方程式 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = y^2$ 拆成兩個方程式 $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (s_1)^2$、$(s_1)^2 + (x_3)^2 = y^2$，只要選擇任一 $x_1 \geq 3$ 的值，再按照 $(\lambda, T_1(\lambda), T_2(\lambda))$ 的通解公式將 $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (s_1)^2$、$(s_1)^2 + (x_3)^2 = y^2$ 兩個方程式依序求出解，一組 (x_1, x_2, x_3, y) 就出爐了。

如果再選其他 $x_1 \geq 3$ 的值，就會算出不同的解 (x_1, x_2, x_3, y)。而因為有無限多個 a_1 的值可以選擇，所以解 (x_1, x_2, x_3, y) 當然也有無限多組。

定理 1.1 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = y^2$ 有無限多組自然數解。

（2）$t = 4$、$n = 1$，$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = y^2$

我猜說這個方程式有無限多組自然數解。我試著將以上 $t = 3$、$n = 1$ 的證明方式修改，看看能不能在現在的情形下套用。我發現也可以將 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = y^2$ 分成三個方程式：$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (s_1)^2$、$(s_1)^2 + (x_3)^2 = (s_2)^2$、$(s_2)^2 + (x_4)^2 = y^2$。這三個方程式也可以組成方程式組：

$$\begin{cases} (x_1)^2 + (x_2)^2 = (s_1)^2 \\ (s_1)^2 + (x_3)^2 = (s_2)^2 \\ (s_2)^2 + (x_4)^2 = y^2 \end{cases}$$

和 $t = 3$、$n = 1$ 的情形相同的是，這個方程式組也能用 $(\lambda, T_1(\lambda), T_2(\lambda))$ 的通解形式求解，只是要多進行一步驟，因為有多一個方程式在裡面。如此一來，同樣可以證明 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = y^2$ 有無限多組自然數解。

定理 1.2 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = y^2$ 有無限多組自然數解。

（二）第二階段－證明一般化

從$t=2$推展到$t=3$、$t=4$，都有無限多組自然數解。我已經摸出個規律，可以試著推展到 t 為任意自然數的情形（$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$）我猜想這個方程式在無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

$$(x_1)^2+(x_2)^2=y^2$$
$$\downarrow$$
$$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$$
$$\downarrow$$
$$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2=y^2$$
$$\downarrow$$
$$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$$

在研究特例的時候，我發現了一個「規律」－就是證明時先把一個長的方程式分成很多小的方程式，再將這些小方程式組合成和原來長方程式等價的方程式組。這麼一來，就只需要證明兩件事情：

①第一個方程式有無限多組自然數解。

②從每一個方程式的一個解都可以推展出下一組方程式的一組解。

這樣就知道，只要找到第一組方程式的一組解，依據②，就可以一個一個地往下推展，直到整個解全都出來。而又依據①，第一個方程式有無限多組自然數解，所以方程式組可以推展出來的自然數解也就有無限多組。這也像一列很長的骨牌，只要能推倒地一個骨牌，並

且使「只要有一個倒了，下一個一定也會被撞倒」，整列骨牌就應聲而下了。這就是「數學歸納法」的威力。

我現在試著把我的「規律」和數學歸納法結合。我先假設說有一個方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$，已經知道 t 的值了。我便按照那個「規律」把它分成很多小方程式：$(x_1)^2+(x_2)^2=(s_1)^2$、$(s_1)^2+(x_3)^2=(s_2)^2$、$(s_2)^2+(x_4)^2=(s_3)^2$、（都是 $(s_{j-2})^2+(x_j)^2=(s_{j-1})^2$ 的形式）……$(s_{t-2})^2+(x_t)^2=y^2$。

再將這些小方程式組合成一個方程式組：

$$\begin{cases}(x_1)^2+(x_2)^2=(s_1)^2\\(s_1)^2+(x_3)^2=(s_2)^2\\\vdots\\(s_{t-2})^2+(x_t)^2=y^2\end{cases}$$

這樣一來就可以按照的通解公式 $(\lambda,T_1(\lambda),T_2(\lambda))$ 來求解。我只需要隨便代入一個 $x_1\geq 3$，就可以得到一組自然數解 $(x_1,x_2,\cdots,x_t,y)$。因為有無限多個 $x_1\geq 3$ 的值可以代入，所以原方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$ 也有無限多組自然數解。

定理 2.1 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$ 在無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

這也符合數學歸納法證明的兩個條件。

①第一個方程式有無限多組自然數解：第一個方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2=(s_1)^2$ 是畢氏數的方程式，有無限多組自然數解（因為畢氏數有無限多組）。

②從每一個方程式的一個解都可以推展出下一組方程式的一組解：從其中任何一個方程式 $(s_{j-2})^2+(x_j)^2=(s_{j-1})^2$ 的一組解 (s_{j-2},x_j,s_{j-1})，都可以依照的 $(\lambda,T_1(\lambda),T_2(\lambda))$ 通解公式推展出下一個方程式 $(s_{j-1})^2+(x_{j+1})^2=(s_j)^2$ 的一組解 $(s_{j-1},x_{j+1},s_j)=(s_{j-1},T_1(s_{j-1}),T_2(s_{j-1}))$。

（三）第三階段－主題推展

（1）當 n 是完全平方數時，$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=(k^2)\cdot y^2=(ky)^2$

我想到說可以從最簡單的「n 是完全平方數」開始推廣。我之所以會有這樣的構想，是因爲我原來在研究 $n=1$ 的方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$ 的時候，發現只要把一個方程式的一組解 $(a_1,a_2,\cdots,a_t,b)$，同乘以同樣的自然數倍數 l，就可以得到一個方程式 $(la_1)^2+(la_2)^2+\cdots+(la_t)^2=(lb)^2$，這時候再把這個方程式等號右邊 $(lb)^2$ 項拆解掉，方程式就會變成 $(la_1)^2+(la_2)^2+\cdots+(la_t)^2=(l^2)\cdot b^2$。現在我再把 $(la_1)^2+(la_2)^2+\cdots+(la_t)^2=(l^2)\cdot b^2$ 還有 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=(k^2)\cdot y^2$ 這兩個方程式放在一起比對。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(la_1)^2 & + & (la_2)^2 & + \cdots + & (la_t)^2 & = & (l^2) & \cdot & b^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(x_1)^2 & + & (x_2)^2 & + \cdots + & (x_t)^2 & = & (k^2) & \cdot & y^2
\end{array}
$$

如果我們依照上圖一樣把兩個方程式的各個項一對一配對，這麼一來 $(la_1,la_2,\cdots,la_t,b)$ 就成爲了方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$ 在 n 是完全平方數 l^2 時的一組解：

$$
\begin{cases}
x_1=la_1 \\
x_2=la_2 \\
\\
x_t=la_t \\
y=b
\end{cases}
$$

假如在一開始選擇了 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$ 的另一組解 $(a_1,a_2,\cdots,a_t,b)$，把 $(la_1,la_2,\cdots,la_t,b)$ 代入 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=(l^2)\cdot y^2$ 中，等式仍然是成立的。所以對於任一個 l 值，因爲有無限多組 $(a_1,a_2,\cdots,a_t,b)$ 可以代入，求得出無限多組

$(la_1, la_2, \cdots, la_t, b)$，有無限多組自然數解。

定理 3.1 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = ny^2$ 在 n 爲任意完全平方數時都有無限多組自然數解。

（2）$n = 2$，$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 2y^2$

以上 n 是完全平方數時的部分，是倚賴推理的過程中所併發出的聯想（從「$n=1$的解同乘以自然數倍數…」聯想出「…和$n = k^2$的解差不多」）。

不過，當我把以上的部分做完以後，我決定先嘗試幾個 n 值。其中最先嘗試的是$n=1$的下一個－$n=2$的情況。我想，既然以上已經研究了$n=1$的情形，我不妨試著把$n=2$的方程式分解成許多個$n=1$的方程式。

可是，一次求兩個方程式的解很麻煩，所以我又再想了一下。如果把$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 2y^2$拆成只有一個長的方程式就比較好求解了：

$$\begin{cases} (x_1)^2 = y^2 \\ (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots + (x_t)^2 = y^2 \end{cases}$$

這樣就只要求下面那個方程式$(x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots + (x_t)^2 = y^2$的解，就可以得到$(x_2, x_3 \cdots, x_t, y)$的值；再把它的 y 值代入$(x_1)^2 = y^2$，x_1的值便輕而易舉的求出了。

這麼一來，也證明了原方程式$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 2y^2$有無限多組自然數解。因爲$(x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots + (x_t)^2 = y^2$可以求出無限多組自然數解，而每一組$(x_2, x_3 \cdots, x_t, y)$都可以相對的求出一個$x_1$。這樣，原方程式不是就有無限多組自然數解了嗎！

定理 3.2 $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 2y^2$ 在無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

（3）$n = 3$，$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 3y^2$

我想說可以依照以上（2）中的證明把$(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_t)^2 = 3y^2$重寫成

$(x_1)^2=y^2$、$(x_2)^2=y^2$、$(x_3)^2+(x_4)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$的方程式組：

$$\begin{cases} (x_1)^2=y^2 \\ (x_2)^2=y^2 \\ (x_3)^2+(x_4)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2 \end{cases}$$

這樣的方程式組也可以按照上面（2）中的求解方法求出無限多組自然數解。這麼一來，$n=3$的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=3y^2$也有無限多組自然數解。

定理 3.3 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=3y^2$在無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

（四）第四階段－推展一般化

我在第三階段中研究特殊的 n（$n=k^2$、$n=2$、$n=3$）在無論 t 的值是多少的時候的情形，結果都是有無限多組自然數解。我在其中也發現了一些「規律」，所以我決定可以試著用這些「規律」，一次涵蓋所有的情形。

其中一個規律就是說，若給予$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$一個方程式（已知 t 和 n 的值），只需要把它分成方程式組：

$$\begin{cases} (x_1)^2=y^2 \\ \vdots \\ (x_{n-1})^2=y^2 \\ (x_n)^2+(x_{n+1})^2+\cdots+(x_t)^2=y^2 \end{cases}$$

這時候，求出最下面的方程式$(x_n)^2+(x_{n+1})^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$的解，再將它的 y 值代入上面的$(x_1)^2=y^2$至$(x_{n-1})^2=y^2$，就可以求出原方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$的一組解。

這個方法可以順利的解決部分的 t 和 n 的值。只要方程式中$t\geq n$就可以成功的證明說這個方程式有無限多組自然數解。但是萬一$t<n$就沒辦法了。

我想找一個能涵蓋所有情形的證明方式。我在一本數論的教科書－David M. Burton 所著的《Elementary Number Theory》（附件四）中找到了一個 Lagrange 的定理，剛好我可以使用作爲引理：

引理 4.1 Lagrange 每個非負整數皆可分解爲四個非負整數之和。（換句話說，每個自然數一定可以表示爲不超過四個自然數的平方和。）（例如：$7=2^2+1^2+1^2+1^2$、$9=3^2$、$13=3^2+2^2$）

證明 請參閱附件四。

我現在有一個方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$。我先把 n 分成不超過四個自然數的平方和：$n=(m_1)^2+(m_2)^2+\cdots+(m_r)^2$（$r\le 4$、$r\le t$）。這時候就可以把$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$拆解、組合成一個方程式組：

$$\begin{cases} (x_1)^2=y^2 \\ \vdots \\ (x_{r-1})^2=y^2 \\ (x_r)^2+(x_{r+1})^2+\cdots+(x_t)^2=y^2 \end{cases}$$

不過，這時候就要運用上$n=(m_1)^2+(m_2)^2+\cdots+(m_r)^2$。爲了使等號兩邊相等，我就將 m_1、m_2、…、m_r 以係數的形式放到方程式組裡面：

$$\begin{cases} (x_1)^2=(m_1y)^2 \\ \vdots \\ (x_{r-1})^2=(m_{r-1}y)^2 \\ (x_r)^2+(x_{r+1})^2+\cdots+(x_t)^2=(m_ry)^2 \end{cases}$$

（兩個是等價的，因爲把方程式組中的方程式加起來就可以得到方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$。）

這個時候只要求$(x_r)^2+(x_{r+1})^2+\cdots+(x_t)^2=(m_ry)^2$這最後一個方程式的解，把它的 y 值代入前面的方程式$(x_1)^2=(m_1y)^2$至$(x_{r-1})^2=(m_{r-1}y)^2$，這樣就可以求出原方程式的一組

解。進而可以證明方程式 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$ 有無限先多組自然數解。

在妄下結論前，我突然發現－<u>如果 ①$t=3$，且 ②***n*** 是不能分為不多於三個自然數的平方和的數（例如說像 7 就是其中之一），一定要分成四個自然數的平方和，那麼我的證明方式就不適用</u>，因為分配到方程式組的時候，就無法正常進行：

$$\begin{cases}(x_1)^2=(m_1y)^2\\(x_2)^2=(m_2y)^2\\(x_3)^2=(m_3y)^2\\????=(m_4y)^2\end{cases}$$

<u>不過，如果$t\geq 4$的話，我的證明方式就沒有問題。我決定把特例的情況分開到第五階段討論。</u>

定理 4.1 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$在$t\geq 4$時，無論 n 是多少都有無限多組自然數解。

（五）第五階段－解決特例

我在第四階段的研究中發現了我要研究的方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$在 $t=3$（$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=ny^2$），且 n 是不能分為不多於三個自然數的平方和的數的情形中，我的證明方式並無法應用。所以我決定把這個特殊的情況分開來研究，希望能有突破。

在《Elementary Number Theory》（附件四）中有提到－Gauss 和 Legendre 有證明說：能分為不多於三個自然數的平方和的數只有某種特定形式的自然數，其他的自然數都不能分為不多於三個自然數的平方和。我便上網向一個數學網站「Dr. Math」（mathforum.org/dr.math/）提出問題，想尋找它的證明。Dr. Math 的 Doctor Rob 回信說，證明太難了，請我到書中去找。於是，我找了他介紹的其中一本，Gauss 的《Disquisitiones Arithmeticae》－來看；證明果然很難，沒有辦法從中間找出任何可以輔助我的研究的東西。我只能把這個定理當作引理使用。

（與 Dr. Math 的電子通信的內容，請參閱附件五。）

引理 5.1 只有形式為$4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的自然數不能分解成三個非負整數的平方和，一定要分為四個自然數的平方和；換句話說，只有形式為$4^p(8q+7)$的自然數一定要分成四個自然數的平方和，其他的自然數數皆可表示為不超過三個自然數的平方和。

證明 請參閱參考資料《Disquisitiones Arithmeticae》。

我先假設$n=4^a(8b+7)$，原方程式就變成$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=4^a(8q+7)\cdot y^2$。因為它不能用我「通用」的證明方法來證明，我決定先嘗試證明說它沒有自然數解。

我發現如果方程式$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=4^a(8q+7)\cdot y^2$沒有自然數解，則$4^a(8q+7)\cdot y^2$在無論$y$代入多少都也必須是$4^p(8q+7)$的形式;因為如果$4^a(8q+7)\cdot y^2$在無論$y$代入多少都是$4^p(8q+7)$的形式，則根據引理 5.1，$4^a(8q+7)\cdot y^2$不可能分成不多於三個數的平方和，則$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=4^a(8q+7)\cdot y^2$必定沒有解。所以，現在只需要證明「$4^a(8q+7)\cdot y^2$在無論$y$代入多少都也必須是$4^p(8q+7)$的形式」。

我注意到，每個自然數都能以$2^p(2q+1)$的形式表示（如果是奇數，則$p=0$；如果是偶數，則$2q+1$是它所有奇因數的乘積）。我便以$y=2^c(2d+1)$代入$4^a(8q+7)\cdot y^2$，看看能不能把$4^a(8q+7)\cdot y^2$轉移成$4^p(8q+7)$的形式：

$$\begin{aligned}ny^2&=\left[4^a(8b+7)\right]\cdot\left[2^c(2d+1)\right]^2\\&=\left(4^a\cdot 2^{2c}\right)(8b+7)(2d+1)^2\\&=4^{a+c}\left(32bd^2+32bd+8b+28d^2+28d+7\right)\end{aligned}$$

$$ny^2=4^{a+c}\left\{8\cdot\left[4bd^2+4bd+b+\frac{7d(d+1)}{2}\right]+7\right\}$$

（$\frac{7d(d+1)}{2}$是自然數，因為$d(d+1)$是偶數。）

這麼一來，$4^a(8q+7)\cdot y^2$也是$4^p(8q+7)$（$p=a+c$、

$n=\left[4bd^2+4bd+b+\dfrac{7d(d+1)}{2}\right]$）的形式，而且進而證明了$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=ny^2$在 n 是形式為$4^p(8q+7)$的自然數時沒有自然數解。

定理 5.1 $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=ny^2$在 n 是形式為$4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的自然數時無自然數解。

二、求解

因為這篇研究中的證明屬於建設性證明（就是會附有求解方法的證明），所以附有求解的方法。我綜合了以上論證中的論點構成求解方法，並且以實例示範。

我研究的方程式是$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$（$t\geq 3$）。

步驟	實例示範（$t=6$、$n=17$）
【1】先確定是否有解：若$t=3$且 n 是形式為$4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的數，無自然數解；否則就有無限多組自然數解。	兩者皆非
【2】將 n 分解成≤四個數的平方和：$n=(m_1)^2+(m_2)^2+\cdots+(m_r)^2$（$r\leq 4$、$r\leq t$）	$17=3^2+2^2+2^2$
【3】將前$r-1$個m_j項配上y代入前$r-1$個x_j項：$\begin{cases}(x_1)^2=(m_1y)^2\\(x_2)^2=(m_2y)^2\\\quad\vdots\\(x_{r-1})^2=(m_{r-1}y)^2\end{cases}$	$\begin{cases}x_1=3y\\x_2=2y\end{cases}$
【4】設剩下的x_j項的平方和等於剩下的m_j項的平方：	$(x_3)^2+(x_4)^2+(x_5)^2+(x_6)^2=(2y)^2$

$(x_r)^2+\cdots+(x_l)^2=(m_r y)^2$	
【5】使： $\begin{cases} x_r = m_r\alpha_1 \\ x_{r+1} = m_r\alpha_2 \\ \vdots \\ x_l = m_r\alpha_{l-r+1} \end{cases}$	$\begin{cases} x_3 = 2\alpha_1 \\ x_4 = 2\alpha_2 \\ x_5 = 2\alpha_3 \\ x_6 = 2\alpha_4 \end{cases}$
【6】再依遞迴公式解方程式： $\begin{cases} (\alpha_1)^2+(\alpha_2)^2=(s_1)^2 \\ (s_1)^2+(\alpha_3)^2=(s_2)^2 \\ (s_2)^2+(\alpha_4)^2=(s_3)^2 \\ \vdots \\ (s_{l-2})^2+(\alpha_{l-r+1})^2=y^2 \end{cases}$ • 任取一$\alpha_1 \geq 3$。 • 每一個小方程式從上到下解。 • 按照以下的公式依序解出右邊二未知數的值： 在α_1是奇數時, $\alpha_2=\frac{(\alpha_1)^2-1}{2}$， $s_1=\frac{(\alpha_1)^2+1}{2}$ ； 在α_1是偶數時, $\alpha_2=\frac{(\alpha_1)^2-4}{4}$， $\alpha_2=\frac{(\alpha_1)^2-4}{4}$。 在$s_1$是奇數時, $\alpha_3=\frac{(s_1)^2-1}{2}$， $s_2=\frac{(s_1)^2+1}{2}$ ； 在α_1是偶數時,	$\alpha_1=5$。 解得： $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,y)$ $=(5,12,84,3612,3613)$

$\alpha_3 = \dfrac{(s_1)^2 - 4}{4}$， $s_2 = \dfrac{(s_1)^2 - 4}{4}$。 以此類推……。	
【7】將其解： $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{t-r+1}, y)$ 代回原方程式，便有原方程式的一解。	解得： $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y) = \begin{pmatrix} 10839,7226,10,24, \\ 168,7224,3613 \end{pmatrix}$

求解方法的其他實例，請見附件六。

求解的過程中，我發現，如果數字太大，計算就會非常複雜、耗費時間。所以我嘗試利用電腦來操作演算的部分，可以簡短計算時間、並減少人為錯誤。有關電腦程式的部分請參閱「陸、討論」或附件七、八。

伍、研究結果

（一）第一階段－進入題目：

研究內容：	$n=1$，$t=3$、$t=4$ 的情形（$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$、$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2+(x_4)^2=y^2$）。
研究結果：	都有無限多組自然數解。

（二）第二階段－證明一般化：

研究內容：	將 $n=1$ 的情形一般化（$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=y^2$），
研究結果：	無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

（三）第三階段－主題推展：

研究內容：	n 是完全平方數 k^2，以及 $n=2$、$n=3$ 的情形： （$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=(k^2)\cdot y^2$、 $(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=2y^2$、$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=3y^2$）
研究結果：	無論 t 是多少的時候都有無限多組自然數解。

（四）第四階段－推展一般化：

研究內容：	任意 n 和 $t\geq 3$ 的情形（$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2$）。
研究結果：	$t\geq 4$ 時無論 n 是多少的時候都有無限多組自然數解。

（五）第五階段－解決特例：

研究內容：	$t=3$，且 n 無法分為不超過三個自然數的平方和的情形 （$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=ny^2$、$n$ 是 $4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的形式)。
研究結果：	無自然數解。

整理之後，可以分成兩個情形：

（1）$t=3$，且 n 是 $4^p(8q+7)$（$p\in Z_0$、$q\in N$）的形式的數；則方程式無自然數解。

（2）不是（1）的情況；則方程式有無限多組自然數解。

陸、討論

撰寫電腦程式求解

人腦雖然可以求出解來，但是速度太慢、錯誤很多，而且一旦數字過大，就不容易計算。

所以我就撰寫電腦程式來執行這篇作品中的求解演算過程，只要輸入所要求解的方程式的 t 和 n 值，就可以替你找出數組解。

我用了昇陽（Sun Microsystems）的 Java 2，並參照松崗的《最新 JAVA 2 入門與應用》來撰寫程式。用 Java 的優點是 Java 在大部分的電腦上都可以執行（包括伺服器、工作站等），而且用 Java 撰寫的程式是利用網頁的介面來操作的，這表示只要上傳到網頁就可以直接從網路上使用，不用再下載。電腦求解的相關資料，請參閱附件六、七。

柒、結論

這篇研究中所討論的方程式：

$$(x_1)^2+(x_2)^2+\cdots+(x_t)^2=ny^2 \qquad (t\geq 3)$$

其自然數解的數目可以分為兩個情況討論：

（1）當 n 為形式為 $4^p(8q+7)$ 的自然數且 $t=3$，無自然數解。

（2）當 n 和 t 不為符合（1）的條件的自然數，有無限多組自然數解。

在（2）中，解的形式並非由單一公式決定，而是由單一變數的遞迴公式決定。只要任選一不小於 3 的自然數便可以決定出一組自然數解。其遞迴方法請見以上「求解」部分。我也將這個遞迴方法寫成電腦程式，以方便求解。

這篇研究的應用主要是在立體及高次的抽象幾何。方程式（1）在 $n=1$、$t=3$ 的時候：

$$(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=y^2$$

其 x_1,x_2,x_3,y 依序正好為一長方體的三邊長及對角線長。這篇研究最重要的推展部分為：

只要找一個不小於 3 的自然數，便可找出一個以此為邊長，其他邊長和對角線長也為自然數的長方體。如果再將此結果推展至更高次的話，則在 t 次空間中，只要找一個不小於 3 的自然數，便可找出一個以此為邊長，其他邊長和其對角線長也為自然數的 t 次長方體。

捌、未來發展

（1）畢氏數的方程式為三元二次方程式，有無限多組自然數解；

費馬最後定理的方程式為三元高次方程式，無自然數解；

這篇作品研究的方程式多元二次方程式，有無限多組自然數解；

「多元高次方程式」會是怎樣呢？

（2）找出這篇作品的漏解。這篇作品雖然證明有無限多組自然數解，但是還是有漏解，如 $(1,2,2,3)$ 是 $(x_1)^2+(x_2)^2+(x_3)^2=ny^2$ 的一組解，用這篇作品的求解方法未能找出來，所以此部份尚待研究。

玖、參考資料

（1）朱浩偉（1998）；*從畢氏定理談起*。（附件九）

（2）李金財；*深入探討畢氏數*；網址：teacher.tcvs.tcc.edu.tw/leegt/深入探討畢氏數.doc。

（3）榮欽科技主筆室（編著）（2001）；*最新 JAVA 2 入門與應用*；中華民國－松崗電腦圖書資料。

（4）Burton, David M.（1998）；*Elementary Number Theory*，第四版；美國 McGraw Hill；p226~p227、p249~p254。（附件二、四）

（5）Gauss, Carl Friedrich（1986）；（Arthur A. Clarke 譯）；*Disquisitiones Arithmeticae*，英文版；美國 Springer-Verlag。

（6）Singh, Simon（1997）；*Fermat's Last Theorem*；英國 Fourth Estate Limited。

（第二名）

由費瑪定理所引發的聯想，給予所提的延伸問題，一個完整而深入的解答，胸懷遠大，勇於挑戰數學，獨立研究的精神及能力很強。