中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：磁磚的秘密

關 鍵 詞：正多邊形(正則圖形)、『均勻』密鋪、同頂角

編　　號：030410

學校名稱：

臺南市立民德國民中學

作者姓名：

林靜宜、吳穰蓉、李玟慧

指導老師：

潘宣宏

磁磚的秘密

一、 摘要：

1. 由日常生活中觀察圖形，並決定以正多邊形密鋪平面，且觀察其規則。
2. 我們發現要密鋪平面，關鍵在於每塊正則圖形在接合於一點，其內角和是否相當於同頂角（在一相同頂點上，全部的角總和等於360°）。
3. 使用代數式，首先檢驗符合同頂角之定義與否

   正n邊形每一內角等於$\frac{(n-2)}{n}180°$，可拼成均勻圖形的必要條件為

   $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)=1$，$n_1$、$n_2$、…、$n_k$表正多邊形的邊數
4. 討論上述方程式的k值，進而討論n_1、n_2、…、n_k之可能數值。
5. 圖形滿足以下三個條件，那麼這個圖形就叫『均勻』的：

   （1）每個頂點都是由同樣的幾種正多邊形的頂點聚合而成的；

   （2）各個正多邊形的個數對每一頂點來說也都一樣。

   （3）各個正多邊形除共邊外，彼此均不重疊。
6. 使用『動態幾何』繪圖再判別圖形有符合『均勻』與否。

二、 研究動機：

有一天當我們幾個好同學在走廊行走時，不經意間有人說了這麼一句話，：『走廊的磁磚為什麼看來看去形狀都是那幾種呢？』那時候我們只是開開玩笑，覺得他可能是『平面中的幾何圖形』學到走火入魔了，在事後仔細想想，我們卻都被這個問題給難倒了，難道其他幾何圖形不能當磁磚的形狀嗎？ 於是我們就向老師請教這個問題，於是開始了這趟有趣的數學之旅。

三、 研究目的：（確定題目）

藉由多種幾何圖形的拼湊，尋找能平鋪整個平面的正多邊形，以及不同正多邊形之間的特性，進而探討『均勻』密鋪磁磚的數學奧妙。

四、 研究步驟：

（一）將原問題簡單化：繪出可能圖形並觀察其規則，先考慮同一種正則圖形（正n邊形）。

（二）將問題擴充：使用多種正則圖形，但圖形鋪砌地面時必須『均勻』。

（三）將問題導入代數中並求解。

（四）幾何與代數式是否能相結合。

五、 研究器材：

電腦（使用軟體 Windows 98、IE 5.0、Microsoft Word 2000、The Geometer`s Sketchpad

動態幾何)、紙、筆

六、 研究方法：

（一）繪出可能圖形並觀察其規則：

鋪砌牆壁或地板是指用某些平面圖形組成一個沒有縫隙及重疊整個平面。在日常生活中，我們常為了使牆壁、地板增加美感，而用磁磚填補其空白感，平常我們所看到的磁磚多半為正方形或者是長方形，這裡為了討論方便均使用正多邊形：

步驟：繪製正三角形及正四邊形的圖形觀察

由繪製出的圖形我們可以知道正三角形與正四邊形均可用來密鋪平面。但因為正多邊形實在太多種了，我們無法一一用繪製的方法來判別是否可以密鋪平面。那麼給出某些平面圖形後，能否用數學知識預先知道它是否能拼成整個平面？例如：正三角形可以拼成一個平面圖形，而正五邊形拼在一起不能組成一個平面圖形，因為正五邊形拼在一起後還有一個36°角的縫隙。

（二）使用代數式討論：

由步驟一後，我們發現要密鋪平面，關鍵在於每塊正則圖形在接合於一點，其內角和是否相當於同頂角（在一相同頂點上，全部的角總和等於360°），如：

(1) 6 個正三角形的角之和為360°；

(2) 4 個正方形的角之和為360°；

(3) 2 個正方形的角，1 個正三角形的角和 1 個正六邊形的角，其和也是360°；

(4) 2 個正三角形的角，1 個正方形的角和 1 個正十二邊形的角，其和也是360°。

在這裡我們先考慮其內角和是否相當於同頂角，再由繪圖過程來討論是否能『均勻』密鋪平面。

首先，我們必須先定義何謂『均勻』密鋪平面，如果在鋪砌平面的過程中，所拼成的圖形滿足以下三個條件，那麼這個圖形就叫『均勻』的：

(1) 每個頂點都是由同樣的幾種正多邊形的頂點聚合而成的；

(2) 各個正多邊形的個數對每一頂點來說也都一樣。

(3) 各個正多邊形除共邊外，彼此均不重疊。

由於正n邊形的內角和等於$(n-2)\times 180^\circ$，表示每一內角等於$\dfrac{(n-2)}{n}180^\circ$，即$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right)360^\circ$，所以可拼成均勻圖形的必要條件為

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)=1$$

這裡的n_1、n_2、…、n_k表示一些正多邊形的邊數，以下我們就先討論上述方程可能的解，並藉由繪圖過程判別圖形均勻與否。

七、 研究過程與結果：

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)=1$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}-\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\frac{1}{n_k}\right)=1\cdots\cdots\cdots ①$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots\frac{1}{n_k}=\frac{k-2}{2}\cdots\cdots\cdots ②$$

由②我們可以得知n_1、n_2、…、n_k若要有解，則$k\geq 3$；

由①$\because n_1$、n_2、…、$n_k\geq 3$　$\therefore \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_k}\leq\frac{k}{3}$

$$\therefore \frac{k}{2}-\frac{k}{3}\leq 1\Rightarrow k\leq 6$$

綜合以上兩點$3\leq k\leq 6$，且k為自然數，所以

$k=3$，4，5 或 6

1、當$k=3$時， $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$，

其中n_1、n_2、n_3必須滿足兩個基本條件與一個假設：

❶ n_1、n_2、n_3均為正整數，

❷ n_1、n_2、$n_3\geq 3$，

❸ $n_1\leq n_2\leq n_3$（因為$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_1}$，所以本研究規定前項≤後項，以避免混淆。）

（一）假設$n_1=3$

$$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{3}\geq\frac{1}{6}$

因此可能存在n_2、n_3使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$

（1）　若$n_2=n_3$，我們可以解得$n_2=n_3=12$

（2）　若$n_2\neq n_3$，則$n_2<n_3$，因為$n_2\leq n_3$

①假設$n_2<n_3<12$，

則$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}>\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$（不合）

②假設$12<n_2<n_3$，

則$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}<\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$（不合）

【結論】：若 $n_2 < n_3$，且存在 n_2、n_3 使得 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$

則必須 $n_2 < 12$……❶且 $n_3 > 12$，

又∵ $n_1 \le n_2$……❷ 且 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6} \Rightarrow n_2 \ge 7$……❸

由❶❷❸我們可以得到 $7 \le n_2 < 12$

$\therefore n_2 = 7$、8、9、10 或 11

（Ⅰ）當 $n_2 = 7$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$，

我們可以解得 $n_3 = 42$

（Ⅱ）當 $n_2 = 8$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$，

我們可以解得 $n_3 = 24$

（Ⅲ）當 $n_2 = 9$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$，

我們可以解得 $n_3 = 18$

（Ⅳ）當 $n_2 = 10$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$，

我們可以解得 $n_3 = 15$

（Ⅴ）當 $n_2 = 11$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{11}=\frac{5}{66}$，

我們可以解得 $n_3 = \frac{66}{5}$（不合）

（二）假設 $n_1 = 4$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{4} \ge \frac{1}{4}$

因此可能存在 n_2、n_3 使得 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4}$

（1） 若 $n_2 = n_3$，我們可以解得 $n_2 = n_3 = 8$

（2） 若 $n_2 \ne n_3$，則 $n_2 < n_3$，因為 $n_1 \le n_2$，

根據 $k = 3$、$n_1 = 1$ 時的【結論】，n_2 必須滿足 $n_2 \ge 5$ 且 $n_2 < 8$，

所以我們可以得到 $5 \le n_2 < 8$

$\therefore n_2 = 5$、6 或 7

（Ⅰ）當 $n_2 = 5$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

我們可以解得 $n_3 = 20$

（Ⅱ）當 $n_2 = 6$ 時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

我們可以解得$n_3=12$

（III）當$n_2=7$時，$\frac{1}{n_3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$

我們可以解得$n_3=\frac{28}{3}$（不合）

（三）假設$n_1=5$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{5}\geq\frac{3}{10}$

因此可能存在n_2、n_3使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{5}$

（1） 若$n_2=n_3$，我們可以解得$n_2=n_3=\frac{20}{3}$

（2） 若$n_2\neq n_3$，則$n_2<n_3$，因為$n_1\leq n_2$

根據$k=3$、$n_1=1$時的【結論】，n_2必須滿足$n_2\geq 5$且$n_2<\frac{20}{3}$，

所以我們可以得到$5\leq n_2<6\frac{2}{3}$

$\therefore n_2=5$或 6

（I）當$n_2=5$時，$\frac{1}{n_3}=\frac{3}{10}-\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$，

我們可以解得$n_3=10$

（II）當$n_2=6$時，$\frac{1}{n_3}=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=\frac{4}{30}$，

我們可以解得$n_3=\frac{15}{2}$（不合）

（四）假設$n_1=6$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{6}\geq\frac{1}{3}$

因此可能存在n_2、n_3使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{3}$

（1） 若$n_2=n_3$，我們可以解得$n_2=n_3=6$

（2） 若$n_2\neq n_3$，則$n_2<n_3$，因為$n_1\leq n_2$

根據$k=3$、$n_1=1$時的【結論】，n_2必須滿足$n_2\geq 6$且$n_2<6$，

所以我們可以得到$6\leq n_2<6\Rightarrow n_2$不存在

（五）假設$n_1=7$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{2}{7}<\frac{5}{14}$

我們可以確定不存在 n_2、n_3 使得 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{5}{14}$

（六）結論：當 $n_1 \geq 7$， $\frac{1}{n_1}$ 逐漸變小 $\Rightarrow 1-\frac{1}{n_1}$ 逐漸變大，且 $\Theta\; n_1 \leq n_2 \leq n_3$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}$ 亦會逐漸變小　$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}<1-\frac{1}{n_1}$

因此當 $n_1 \geq 7$ 時，我們可以確定不存在 n_1、n_2、n_3

使得 $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$

2、當 $k=4$ 時， $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$，

其中 n_1、n_2、n_3、n_4 必須滿足兩個基本條件與一個假設：

❶ n_1、n_2、n_3、n_4 均為正整數，

❷ n_1、n_2、n_3、$n_4 \geq 3$，

❸ $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$

（一）假設 $n_1=3$，

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$

（1） 假設 $n_2=3$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1 \geq \frac{2}{3}$

因此可能存在 n_2、n_3、n_4 使得 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$

$\because n_2=3$　$\therefore \frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$

①若 $n_3=n_4$，我們可以解得 $n_3=n_4=6$

②若 $n_3 \neq n_4$，則 $n_3<n_4$，因為 $n_2 \leq n_3$，

根據 $k=3$、$n_1=1$ 時的【結論】，n_3 必須滿足 $n_3>3$ 且 $n_3<6$，

所以我們可以得到 $3<n_3<6 \Rightarrow n_3=4,5$

（Ⅰ）當 $n_3=4$ 時，$\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，

我們可以解得 $n_4=12$

（Ⅱ）當 $n_3=5$ 時，$\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

我們可以解得 $n_4=\frac{15}{2}$（不合）

（2） 假設$n_2=4$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}\geq\frac{2}{3}$

因此可能存在n_2、n_3、n_4使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$

$\because n_2=4$ $\therefore \frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{5}{12}$

①若$n_3=n_4$，我們可以解得$n_3=n_4=\frac{24}{5}$（不合）

②若$n_3\neq n_4$，則$n_3<n_4$，因為$n_2\leq n_3$，

根據$k=3$、$n_1=1$時的【結論】，n_3必須滿足$n_3\geq 4$且$n_3<\frac{24}{5}$，

所以我們可以得到$4\leq n_3<\frac{24}{5}\Rightarrow n_3=4$

當$n_3=4$時，$\frac{1}{n_4}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，

我們可以解得$n_4=6$

（3） 假設$n_2=5$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{5}<\frac{3}{4}$

因此當$n_2\geq 5$時,

我們可以確定不存在n_2、n_3、n_4使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}$

（二）假設$n_1=4$，

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}$

（1） 假設$n_2=4$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

因此可能存在n_2、n_3、n_4使得$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}$

$\because n_2=4$ $\therefore \frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{4}$

①若$n_3=n_4$， 我們可以解得$n_3=n_4=4$

②若$n_3\neq n_4$，則$n_3<n_4$，因為$n_2\leq n_3$，

根據$k=3$、$n_1=1$時的【結論】，n_3必須滿足$n_3>2$且$n_3<4$

所以我們可以得到$4\leq n_3<4\Rightarrow n_3$無解

（2） 假設$n_2=5$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{5}<\frac{3}{4}$

因此當$n_2 \ge 5$時,

我們可以確定不存在n_2、n_3、n_4使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4}$

（三）假設$n_1=5$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{4}{5}$

（1） 假設$n_2=5$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$

因此當$n_2 \ge 5$時,

我們可以確定不存在n_2、n_3、n_4使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{4}{5}$

（四）結論：當$n_1 \ge 5$，$\frac{1}{n_1}$變小$\Rightarrow 1-\frac{1}{n_1}$變大，且$\because n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$亦會變小 $\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}<1-\frac{1}{n_1}$

因此當$n_1 \ge 5$時，我們可以確定不存在n_1、n_2、n_3、n_4

使得$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$

3、當$k=5$時, $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$

其中n_1、n_2、n_3、n_4、n_5必須滿足兩個基本條件與一個假設：

❶ n_1、n_2、n_3、n_4、n_5均為正整數,

❷ n_1、n_2、n_3、n_4、$n_5 \ge 3$,

❸ $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le n_5$

（一）假設$n_1=3$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6}$

（1） 假設$n_2=3$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{4}{3}\ge\frac{7}{6}$

因此可能存在n_2、n_3、n_4、n_5使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6}$

$\because n_2=3$ $\therefore \frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

①假設$n_3=3$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=1\ge\frac{5}{6}$

因此可能存在n_3、n_4、n_5使得$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{5}{6}$

$\because n_3 = 3 \quad \therefore \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

（Ⅰ）若 $n_4 = n_5$，我們可以解得 $n_4 = n_5 = 4$

（Ⅱ）若 $n_4 \neq n_5$，則 $n_4 < n_5$，因為 $n_3 \leq n_4$

根據 $k = 3$、$n_1 = 1$ 時的【結論】，n_2 必須滿足 $n_4 \geq 3$ 且 $n_4 < 4$，

所以我們可以得到 $3 \leq n_4 < 4 \Rightarrow n_4 = 3$

當 $n_4 = 3$ 時，$\frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

我們可以解得 $n_5 = 6$

②假設 $n_3 = 4$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$

因此當 $n_3 \geq 4$

我們可以確定不存在 n_3、n_4、n_5 使得 $\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{6}$

（2）　假設 $n_2 = 4$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = 1 < \frac{7}{6}$

因此當 $n_2 \geq 4$ 時，

我們可以確定不存在 n_2、n_3、n_4、n_5 使得 $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{7}{6}$

（二）假設 $n_1 = 4$

$\therefore \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{4}$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{4}{4} < \frac{5}{4}$

我們可以確定不存在 n_2、n_3、n_4、n_5 使得 $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{5}{4}$

（三）結論；當 $n_1 \geq 4$，$\frac{1}{n_1}$ 變小 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{n_1}$ 變大，且 $\because n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$

$\therefore \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5}$ 亦會變小　$\therefore \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} < 1 - \frac{1}{n_1}$

因此當 $n_1 \geq 4$ 時，

我們可以確定不存在 n_1、n_2、n_3、n_4、n_5

使得 $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$

4、*當 $k = 6$ 時，* $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6} = 2$

其中 n_1、n_2、n_3、n_4、n_5、n_6 必須滿足兩個基本條件與一個假設：

❶ n_1、n_2、n_3、n_4、n_5、n_6 均為正整數，

❷ n_1、n_2、n_3、n_4、n_5、$n_6 \ge 3$，

❸ $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le n_5 \le n_6$

（一）假設 $n_1 = 3$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{3}$

（1） 假設 $n_2 = 3$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{3}\ge\frac{3}{5}$

因此可能存在 n_2、n_3、n_4、n_5、n_6

使得 $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{3}$

$\because n_2 = 3$ $\therefore \frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{4}{3}$

（Ⅰ）假設 $n_3 = 3$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{4}{3}\ge\frac{4}{3}$

因此可能存在 n_3、n_4、n_5、n_6 使得 $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{4}{3}$

$\because n_3 = 3$ $\therefore \frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1$

（a）假設 $n_4 = 3$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1\ge 1$

因此可能存在 n_4、n_5、n_6 使得 $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1$

$\because n_4 = 3$ $\therefore \frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{2}{3}$

（α）若 $n_5 = n_6$，我們可以解得 $n_5 = n_6 = 3$

（β）若 $n_5 \ne n_6$，則 $n_5 < n_6$，因為 $n_4 \le n_5$

根據 $k=3$、$n_1 = 1$ 時的【結論】，n_5 必須滿足 $n_5 \ge 3$ 且 $n_5 < 3$，所以我們可以得到 $3 \le n_5 < 3 \Rightarrow n_5$ 不存在

（b）假設 $n_4 = 4$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{3}{4}<1$

我們可以確定不存在 n_4、n_5、n_6 使得 $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1$

（Ⅱ）假設 $n_3 = 4$

我們可以找到最大值 $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=1<\frac{4}{3}$

我們可以確定不存在n_3、n_4、n_5、n_6使得$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{4}{3}$

（2） 假設$n_2=4$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{4}<\frac{5}{3}$

我們可以確定不存在n_2、n_3、n_4、n_5、n_6

使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{3}$

（二）假設$n_1=4$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{7}{4}$

我們可以找到最大值$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{5}{4}<\frac{7}{4}$

我們可以確定不存在n_2、n_3、n_4、n_5、n_6

使得$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=\frac{7}{4}$

（三）結論：當$n_1\geq 4$，$\frac{1}{n_1}$變小$\Rightarrow 1-\frac{1}{n_1}$變大，且 $\because n_1\leq n_2\leq n_3\leq n_4\leq n_5\leq n_6$

$\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}$亦會變小 $\therefore \frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}<1-\frac{1}{n_1}$

因此當$n_1\geq 4$時，我們可以確定不存在n_1、n_2、n_3、n_4、n_5、n_6

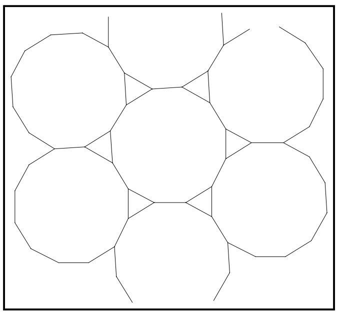
使得$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$

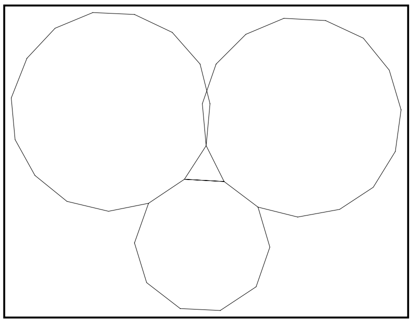
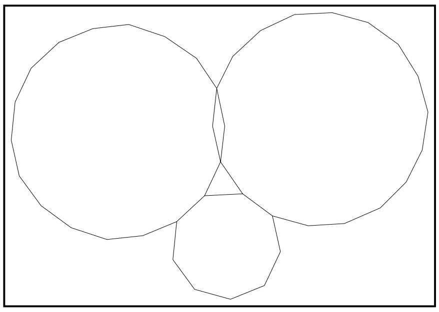
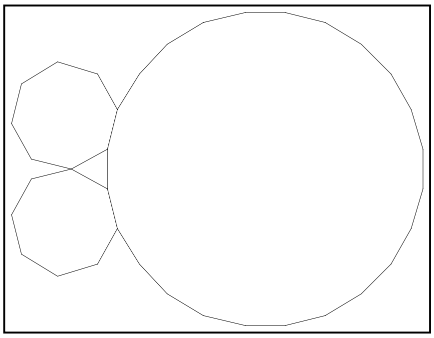
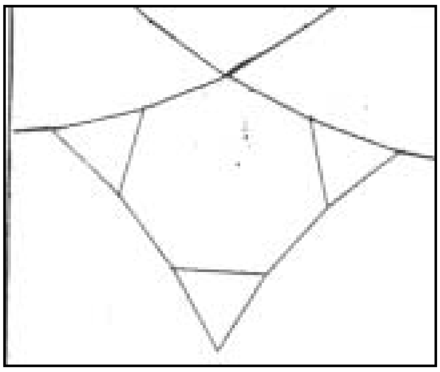
八、 結論：

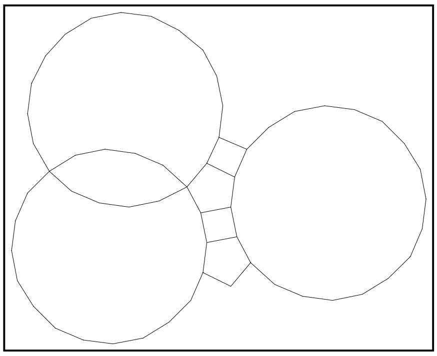
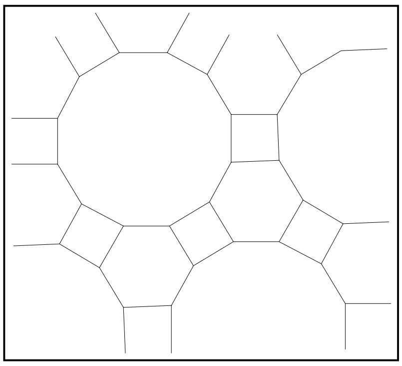
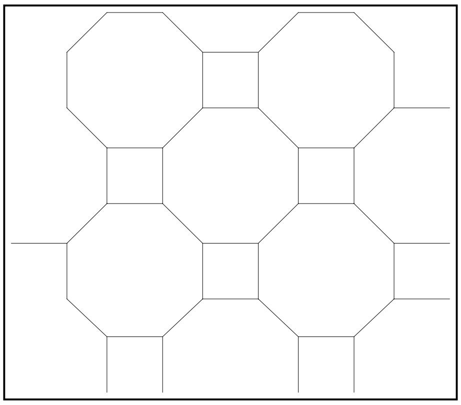
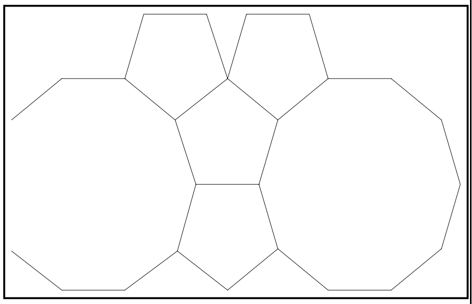
$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_k}\right)=1$$

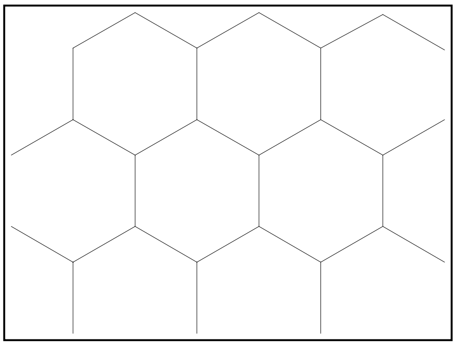
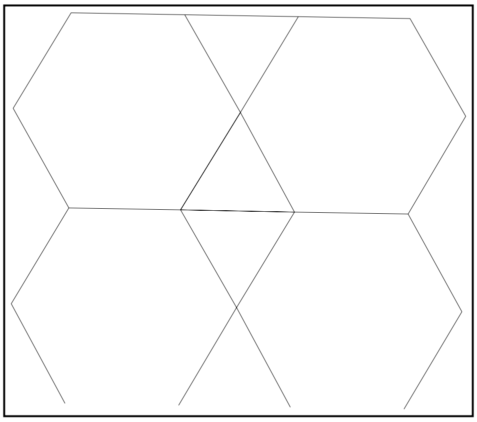
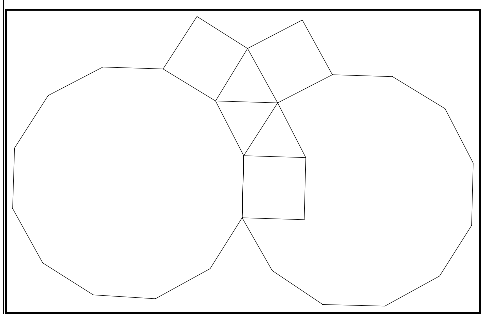
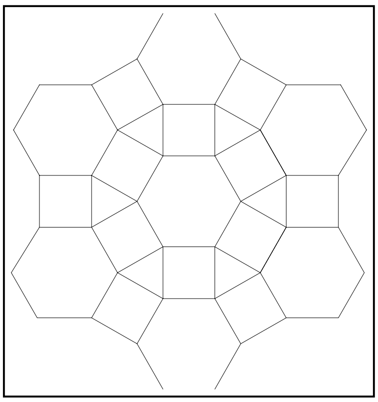
此方程式一共找出 17 組解，我們將解及其圖形列於下表中

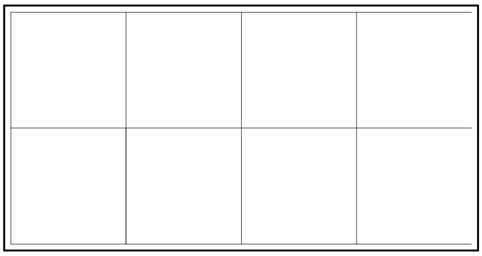
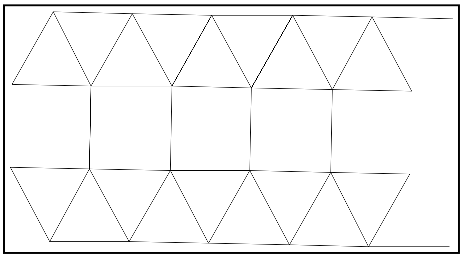
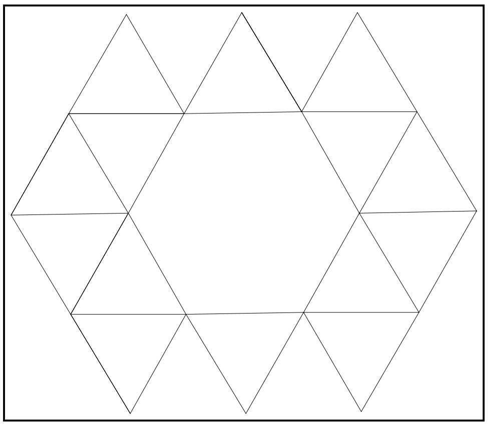
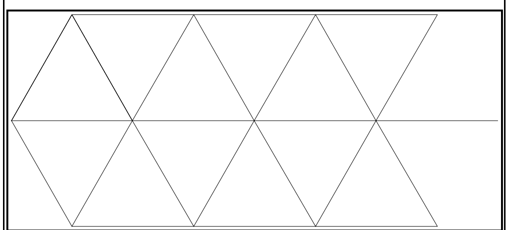
，並判斷是否能『均勻』密鋪平面：(『均勻』定義於 p3)

k	（n_1、⋯、n_k）	圖形	可否『均勻』密鋪平面
3	（3、12、12）		可

k	（n_1、…、n_k）	圖形	可否『均勻』密鋪平面
3	（3、10、15）		否
3	（3、9、18）		否
3	（3、8、24）		否
3	（3、7、42）		否

k	(n_1、⋯、n_k)	圖形	可否『均勻』密鋪平面
3	(4、5、20)		否
3	(4、6、12)		可
3	(4、8、8)		可
3	(5、5、10)		否

k	（n_1、⋯、n_k）	圖形	可否『均匀』密鋪平面
3	（6、6、6）		可
4	（3、3、6、6）		可
4	（3、3、4、12）		否
4	（3、4、4、6）		可

k	（n_1、⋯、n_k）	圖形	可否『均勻』密鋪平面
4	（4、4、4、4）		可
5	（3、3、4、4、4）		可
5	（3、3、3、3、6）		可
6	（3、3、3、3、3、3）		可

我們可以從上表中發現 ***17*** *組解中，只有* ***10*** *組能夠『均勻』密鋪平面。*
下次若你又覺得磁磚的圖形太單調時，你又多了 ***10*** *種選擇，來佈置你的牆壁或地板了。*

九、 參考資料：

1.國中數學課本第四冊 §2-1 生活中的平面圖形

§3-2 多邊形的內角與外角

2.中華民國中小學科展作品展覽第 26 屆到第 30 屆優勝作品專輯數學科合訂本 國立台灣科學教育館編印

3.「波」胡．施坦豪斯著 裘光明譯：數學萬花鏡 湖南教育出版社

4.張奠宙 戴再平主編：生活中的中學數學 九章出版社

5.羅浩源編著：生活的數學 九章出版社