

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：環保鬼腳 § 一個新函數的發現 §

關 鍵 詞：

編 號：030409

學校名稱：

基隆市立中正國民中學

作者姓名：

林 玓、陳 品、王玉如

指導老師：

林耀南



摘 要

壹、 傳統鬼腳的化簡

由 n 腳鬼腳的最簡節數必定小於或等於 $n(n-1)/2$ 節，判定絕大多數的鬼腳圖都應該先化簡再去取對應值。

化簡鬼腳的工具具有「代換版塊」及「化簡版塊」它們的交互運用可很有效率的將複雜的鬼腳圖化簡，最後再透過「棒狀檢驗」可以判斷是否已化到最簡了。

貳、 新型鬼腳的發現與應用

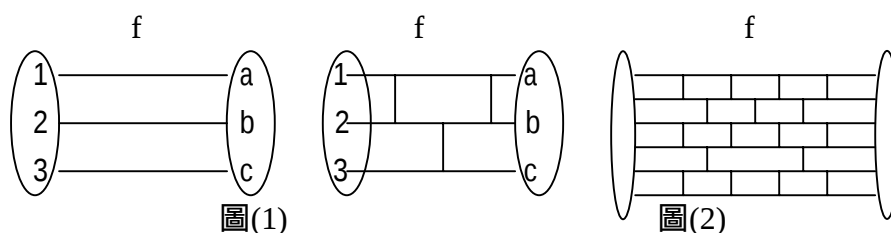
- (一) 傳統鬼腳是一個一對一的函數，若將某一區塊的短節按照事先設定的方式加上單箭頭，這時可做分組抽籤之類的用途，也就是形成一個多對一的函數，若單箭頭加了太多，也有一套化簡的方式。
- (二) 上述的單箭頭鬼腳與傳統鬼腳在當鬼腳圖畫好後，對應的結果立即確定，不論遊戲者採用那一腳先走，但這是一個很糟糕的設計，因為下一群要玩鬼腳的人必須重繪一個鬼腳圖，這既浪費時間也浪費紙張。因此我們引進一種「不可追蹤的行走方式」，這能使採用不同的行走次序，即產生不同的對應結果。這也讓下一群玩此遊戲者，只要改變一下行走次序，即可重覆使用該鬼腳圖。
- (三) 上述單箭頭配上不可追蹤行走方式的鬼腳，並非對任意的行走次序都有不同的對應結果，本文中探討了各種各類的單箭頭陪列方式，如棒狀 V 字型 菱形 剪刀型 金字塔型 鑽石型……等，它們的對應結果種類數各有不同，其中只有「金字塔型」可完全充分的產生不同變化，也就是說行走次序一有更動，對應結果必不一樣。這使「重覆使用」充分發揮。
- (四) 傳統鬼腳為何會一對一，是一個長久以來存在著的一個謎，很多人有不同的解釋方式，不可追蹤的行走方式巧妙的解開了這個謎。

環保鬼腳

§一個新函數的發現 §

壹、研究動機：

學過了線型函數和拋物線函數後，我們被函數的奧妙深深的吸引著，平時就具有超高想像力的臘腸說：『我們可否在一對一函數對應線上多加幾槓改變一下對應方式，也許會有新函數產生。』如圖(1)。



果然這竟然和小學玩的鬼腳遊戲一樣，接著，頑皮的臘腸又密密麻麻的添了無數短槓上去，如圖(2)，於是大家都沿著路線走到眼花撩亂，抱怨連連，後來大家想到：在課本上對較複雜的分數、多項式、方程式等...，不是都告訴我們要先去化簡嗎？化簡整理後再去處理應較方便。因此同學就提議說：『能不能先化簡鬼腳圖再沿路線對應去取值？』大家議論紛紛，心想：要如何去化簡？且化簡後鬼腳圖會有一樣的對應值嗎？詢問老師時，老師說：『這很有意思，值得去試試。』於是大夥兒開始展開一連串的實驗。

貳、研究目的：

- 一、尋找化簡版塊及代換版塊
- 二、尋找最簡鬼腳的判斷方式
- 三、導出一套方法將任一鬼腳化成最簡鬼腳
- 四、設計特殊的鬼腳做分組抽籤
- 五、創造一種新型鬼腳，使其可以重複使用，並推廣其用途

參、研究過程：

我們研究的方向主要分為三方面：

- 一、有時玩遊戲者在圖上加了太多節(即中間的那些短線)，造成操作上的不便，且容易走錯，我們想嘗試是否可以化簡鬼腳圖，使其中的叉路減至最少且仍不改變原先的配置關係。
- 二、遇到一群人想要隨意分成幾組時，是否也可以利用鬼腳圖來完成呢？
- 三、這種鬼腳遊戲很浪費紙張，其中製作的過程也浪費許多時間，因為每個鬼腳圖使用一輪後就不可再使用，想再玩還得重新繪製，我們想創造一種可以重複使用的鬼腳。

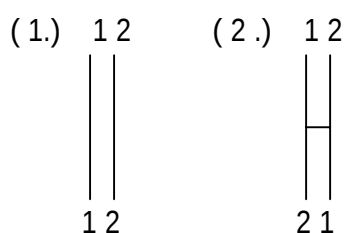
Part1 傳統鬼腳的化簡

平時的鬼腳圖中間總是加了太多短節，以致使用者走起來眼花撩亂，浪費許多時間，甚至還會走錯，這都是因為鬼腳圖過於複雜的緣故。數學上遇到繁雜的分數、方程式、多項式、方根等，我們首要學習的技巧就是要將它們化簡，相同道理，為了方便使用，鬼腳的化簡是我們要研究的第一件事。

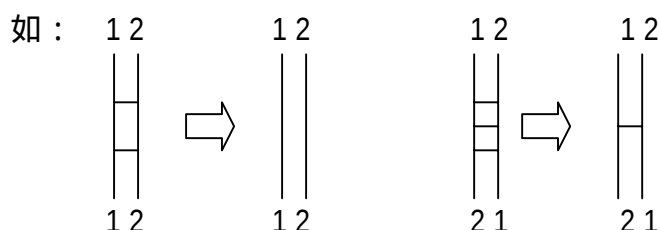
像我們化簡方根時，到底要化到什麼程度才停手？當然是化簡到最簡方根出現為止。化簡鬼腳也是一樣，也必須化簡到最簡鬼腳出現為止。而最簡鬼腳的種類有哪些？我們要如何實行鬼腳的化簡？怎樣才能得知其為最簡鬼腳呢？

以下我們先從較少腳數的最簡鬼腳圖去觀察：

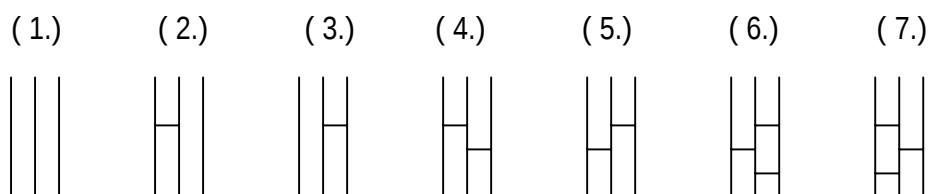
1、二腳：



兩腳最簡的鬼腳僅此兩類更多節數者皆可化簡成這兩種之一。

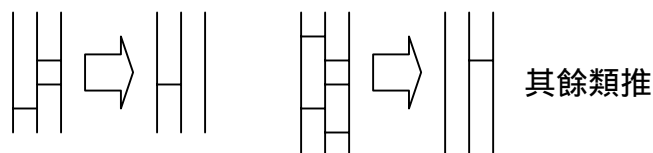


2、三腳：

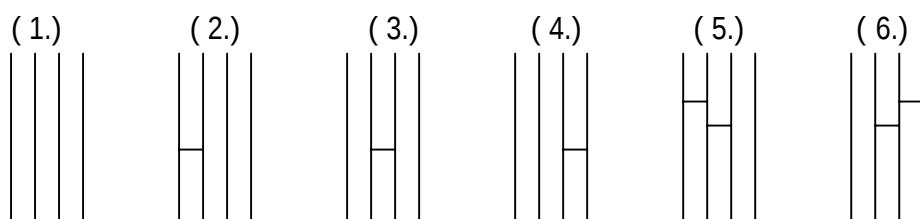


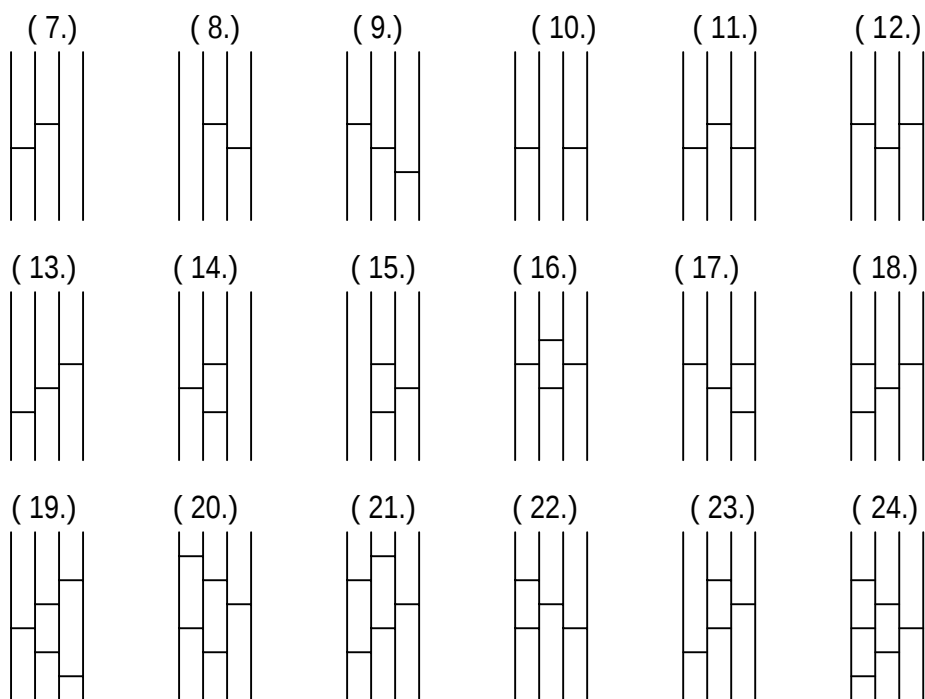
三腳的最簡鬼腳圖就是這七類，其餘圖形均可化簡成這七類之一。

如：



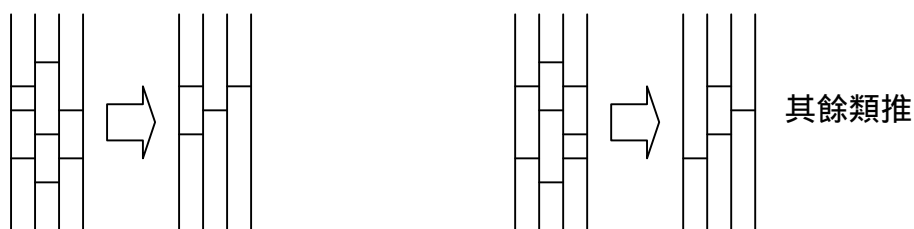
3、四腳：





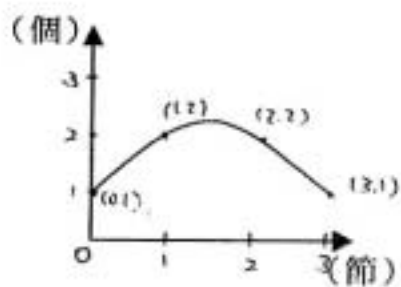
最簡鬼腳有二十四類，其餘都可化簡成這二十四類之一。

如：

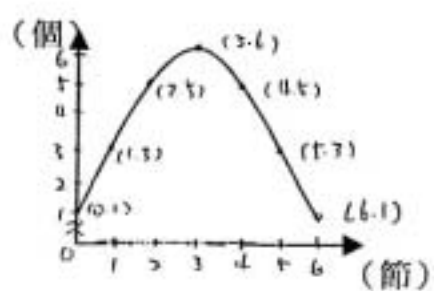


餘此類推，我們甚至嘗試過十二腳，其狀況也類似，現在將上述資料統計歸納如下：

	3 腳			
節數	0	1	2	3
個數	1	2	2	1

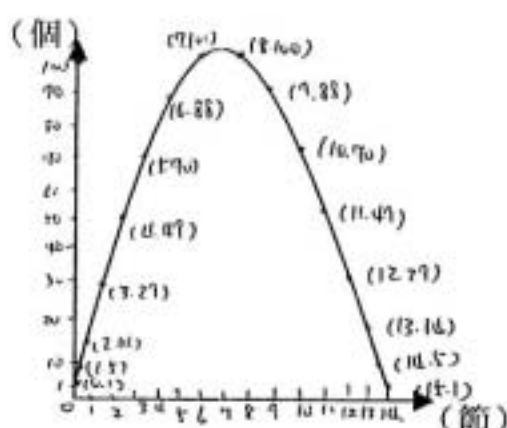
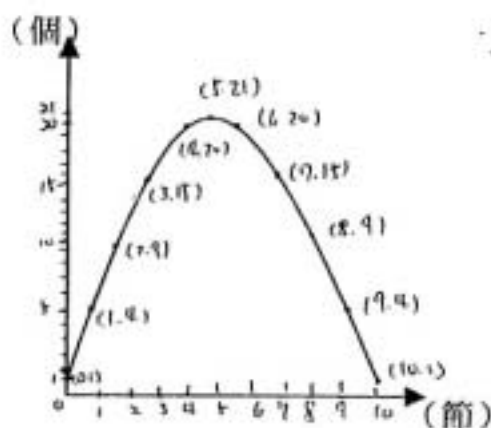


	4 腳						
節數	0	1	2	3	4	5	6
個數	1	3	5	6	5	3	1



	5					腳					
節數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
個數	1	4	9	15	20	21	20	15	9	4	1

	6						腳						
節數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
個數	1	5	14	29	49	70	88	100	100	88	70	49	29
節數	13	14	15										
個數	14	5	1										



由以上幾個圖可得知：3 腳的最簡鬼圖中，最多節有達到 3 節，4 腳則達到 6 節，5 腳達到 10 節，6 腳會達到 15 節，由這些數據我們導出一個公式：

3 腳鬼腳：最簡鬼腳小於或等於 $3 \times (3-1)/2$

4 腳鬼腳：最簡鬼腳小於或等於 $4 \times (4-1)/2$

5 腳鬼腳：最簡鬼腳小於或等於 $5 \times (5-1)/2$

6 腳鬼腳：最簡鬼腳小於或等於 $6 \times (6-1)/2$

其餘類推；都是相同的形式，因此我們可以斷定：

n 腳鬼腳時，最簡圖形的節數必定小於或等於 $n(n-1)/2$ 節

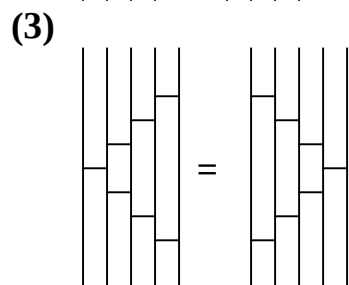
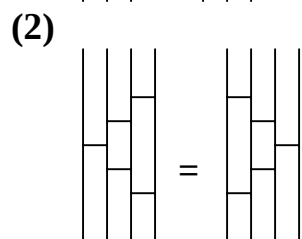
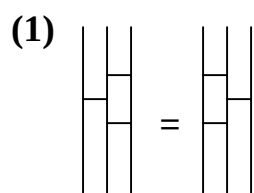
註：由後文中介紹「單純加一節」法的建立最簡鬼腳方式可證明此公式（見 P12）

根據上述公式，我們知道當 n 腳鬼腳時，節數大於 $n(n-1)/2$ 節，絕對不是最簡鬼腳。因此有太多的鬼腳圖，都需要去化簡，有時連節數少於 $n(n-1)/2$ 時，也有再化簡的機會。

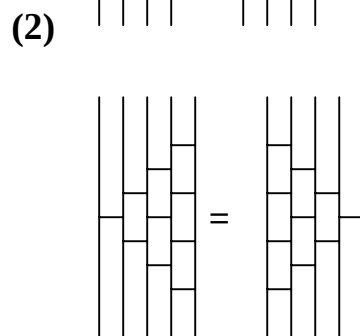
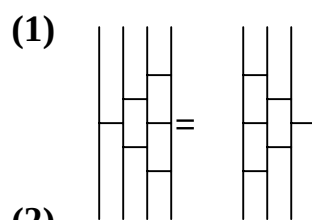
接下來我們要去探討兩種很有用的鬼腳版塊，即代換版塊和化簡版塊。首先我們先來研究代換版塊：

在做前文『最簡鬼腳分布』的探討時，我們已隱約的看到有很多腳數相同而節數不同的鬼腳圖，具有相同的結果，而它們之間可以互相替換，我們把那種鬼腳圖稱為『代換版塊』，如下列圖形：

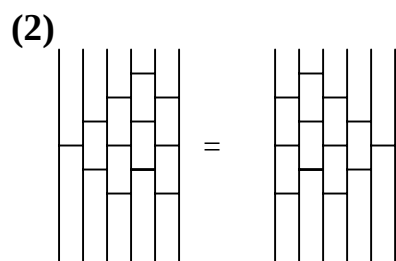
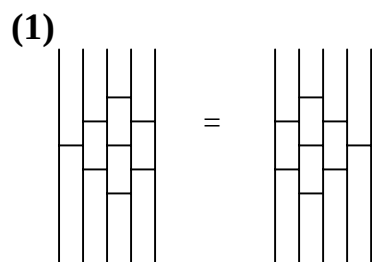
A. V 字型



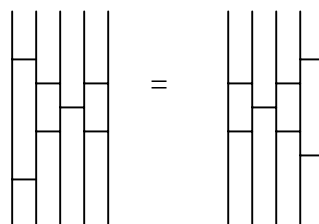
B. 金字塔型



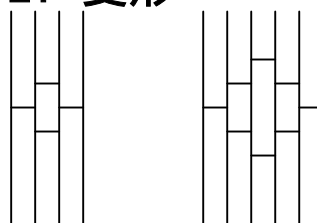
C. 鑽石型



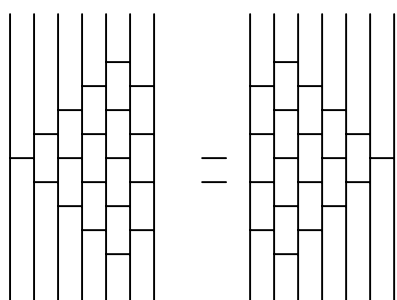
D. 剪刀型



E. 菱形



(3)



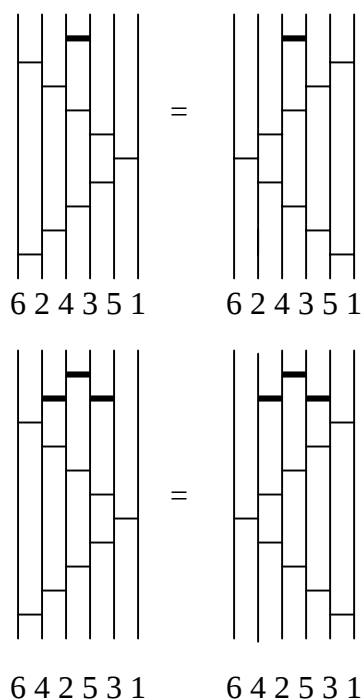
前面的種種實驗和歸納仍有點不足，我們想對代換版塊做更進一步的探討。

首先，是對V字型的研究：經過一再的實驗，我們歸納出V字型本身有左右及上下代替的性質，所以我們實驗出V字型可以加上一些斜排的橫槓，並且能夠加以替換，而結果仍然相同，以下是我們對V字型的探討。

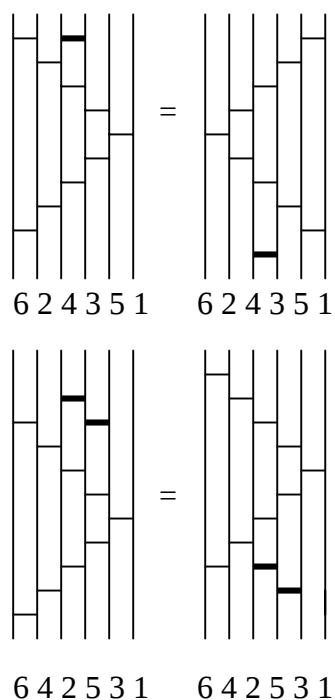
V 字型+連續槓

- (1) 鏡像：所加橫槓不得碰觸兩側鬼腳，且須對稱。(如圖一)
- (2) 連續槓向下平移：凡所加橫槓，不得碰觸兩側鬼腳。(如圖二)

圖一



圖二



在 V 字型的探討結束後，我們更進一步的去探討金字塔型——是否有和 V 字型相同的性質，所以仿造 V 字型的探討，對金字塔加以實驗。我們發現：金字塔的性質有相像的地方，但金字塔可以做 V 字型無法做的上下翻轉，以下是我們歸納出的金字塔性質。

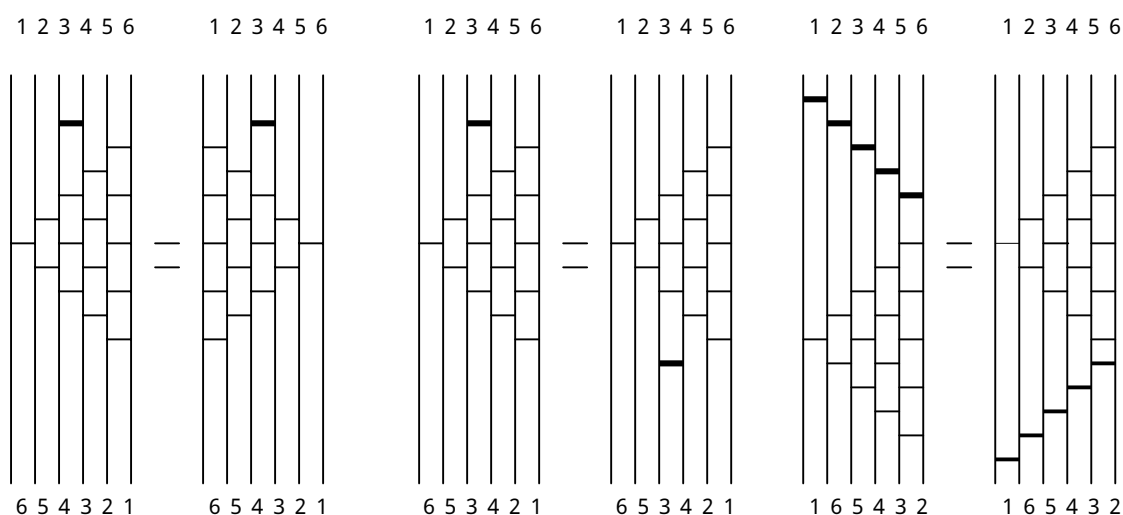
金字塔 + 連續槓

- (1) 鏡像：加槓後，鬼腳圖必須左右對稱，且不可碰觸兩側鬼腳。(如圖一)
- (2) 連續槓向下平移：鬼腳圖必須對稱，且不可碰觸兩側鬼腳。(如圖二)
- (3) 上下翻轉：斜排槓加在鬼腳圖中，須為佈滿狀態和所留空格左右相等即可。(如圖三)

圖一

圖二

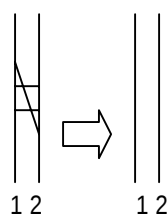
圖三



其他還有鑽石型加連續槓，它可以做鏡像與連續槓向下平移代換，與 V 字型類似，同樣不可上下翻轉，其他的類型也都有不能做到的項目，只有金字塔型它有完全的代換能力，也因此 Part2 部分，我們會特別去注意金字塔型鬼腳在新函數上的表現！

看過代換版塊後，我們將介紹最精彩的化簡版塊。這種版塊可以將複雜的鬼腳圖變得較簡潔。歸納如下：

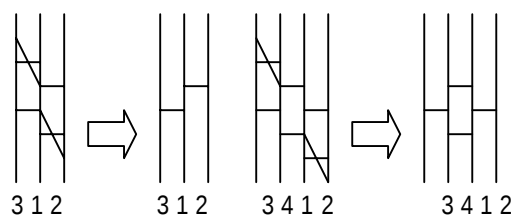
(A) 二腳：



(二字型)

在兩腳之間若有連續的兩節排列，便可以全部刪去。

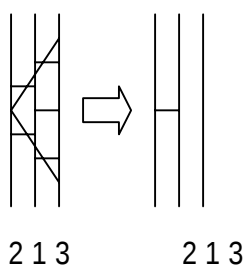
(B) 三腳和四腳：



(樓梯型)

在三腳或更多腳之間的短節若排列像兩排同方向的樓梯，則最上及最下的節可以刪去。

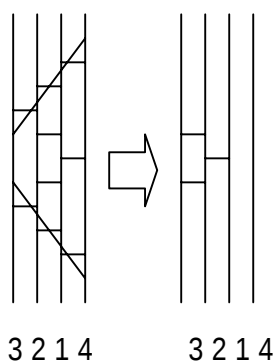
(C) 三腳：



(梯型)

在三腳或更多腳之間若排列像梯形（其中底有兩節短節），先刪去兩邊，再將剩餘部份往空處移

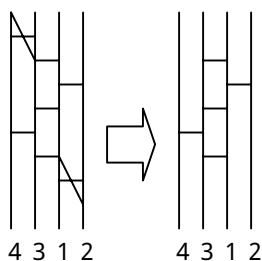
(D) 四腳：



(M 字型)

在四腳或更多腳之間若排列如 M 字形，則先刪去兩邊，剩餘部份再往空處移。

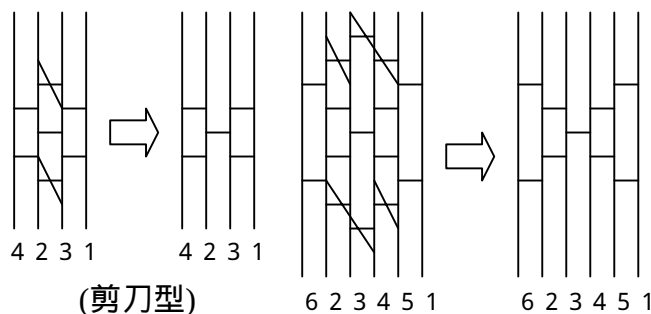
(E)



(閃電型)

在四腳以上的腳之間排列如像閃電則最上及最下節可刪除。

(F)



(剪刀型)

在四腳以上的偶數腳若排列像剪刀，上下加的節又相對，則上下的節都可刪去。

上述基本型化簡版塊，可將原本複雜的鬼腳圖加以巧妙的化簡。為了便於記憶及

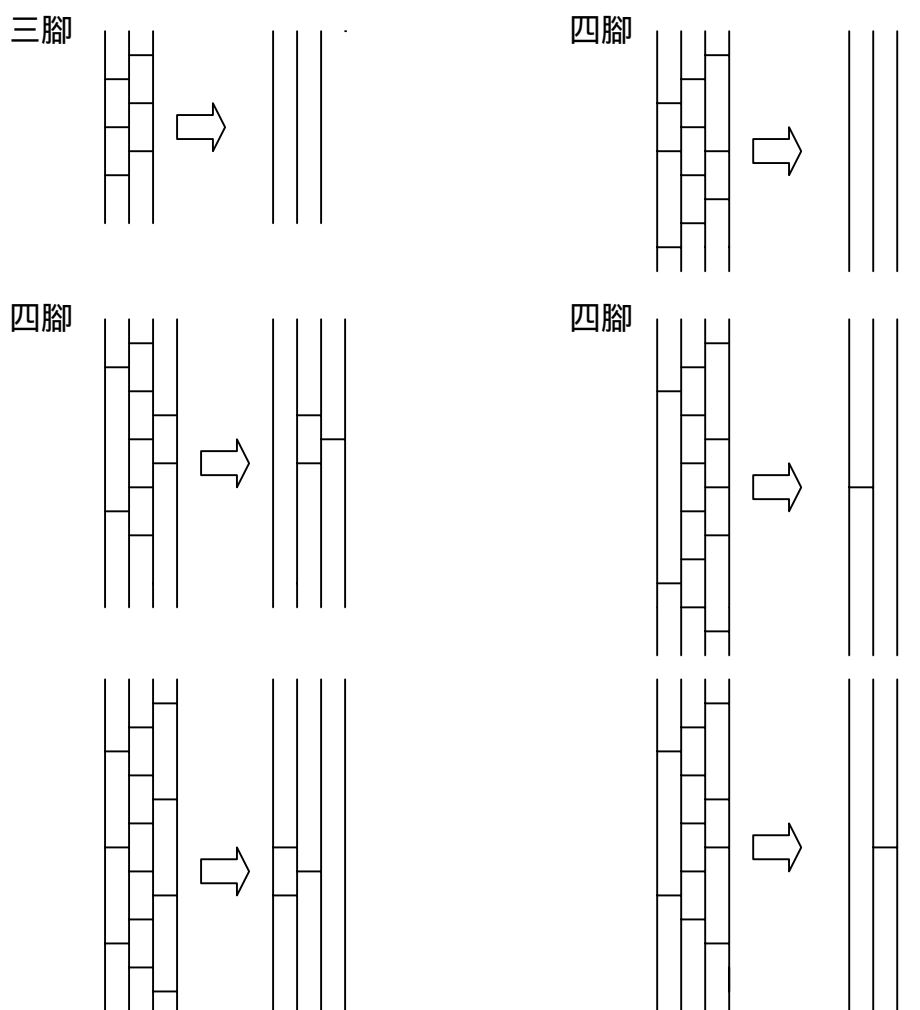
稱呼，我們就其圖形的樣子命名，如此也增加了鬼腳的趣味性。

此外，我們更研究了一些複合型的化簡版塊，如此有助於大面積的化簡。

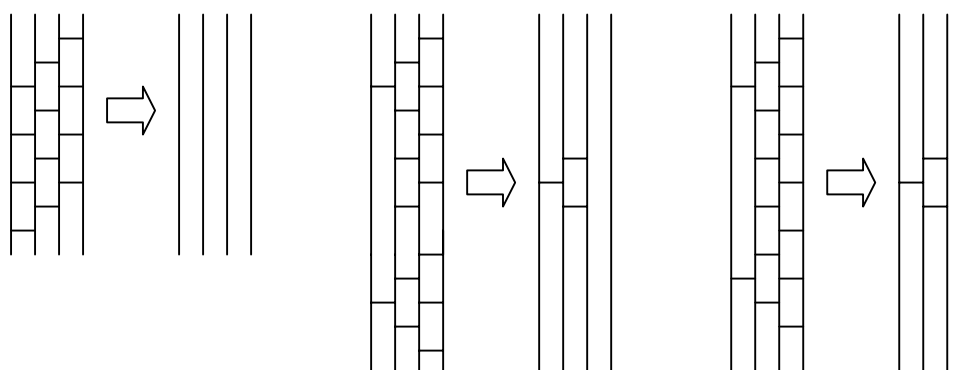
敘述如下：我們發現將偶數個金字塔型或 V 字型同方向或反方向加在一起時，可以互相消除形成空鬼腳。單數個則會剩一些。

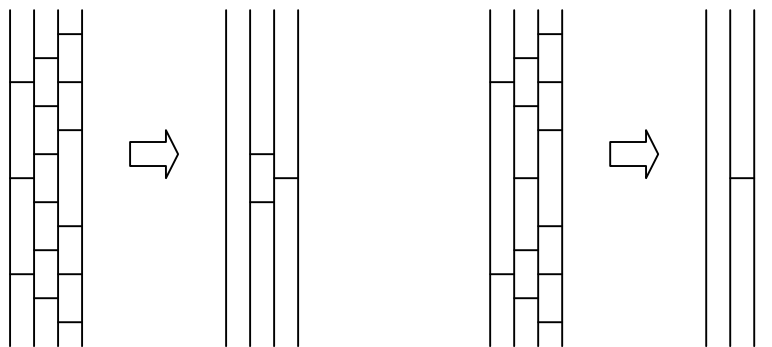
另外我們發現將偶數個金字塔型或 V 字型同方向或反方向加在一起時可以互相消除形成空鬼腳，單數則不行。

(g) 多個 V 字型的組合

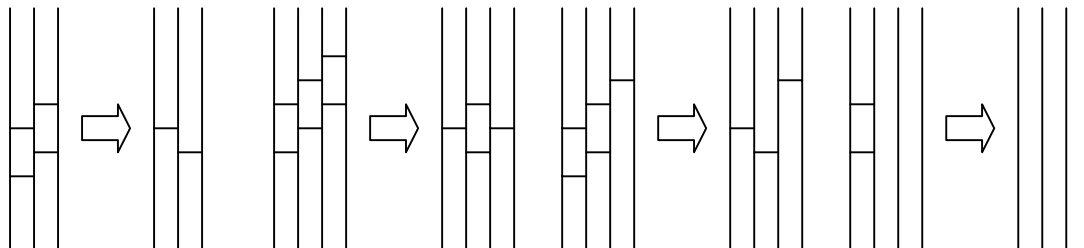


(h) 多個金字塔型的組合

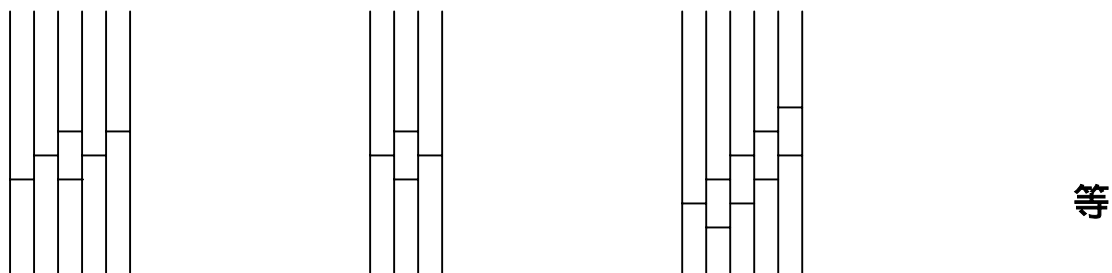




(i) 樓梯型的組合



只要具有獨立且重疊的樓梯即可化簡，但是若造成單菱形或多菱形組合者即不可化簡。如下圖：

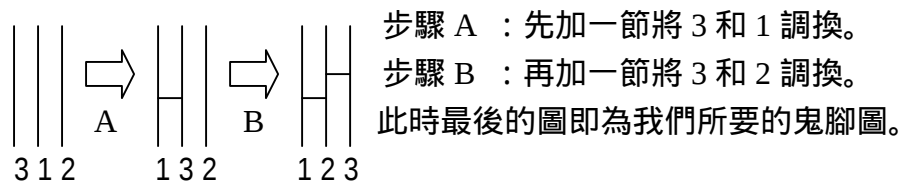


而其實二字形也是一種樓梯，它是只有一階的樓梯。這時即形成完整重疊的樓梯，故可化簡成空鬼腳，如上圖 (i)。

以上探討的都是化簡版塊，與代換版塊相同，我們都蒐錄在結論中，

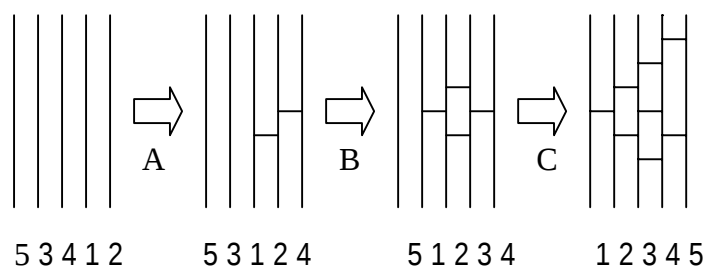
由樓梯組合的化簡版塊探討中，引發我們發現了一種快速有效的最簡鬼腳檢驗法的靈感，即『棒狀檢驗』。為了證明或解釋這種檢驗法的正確性，我們想盡辦法，先利用『單純加一節』的方法，對同一鬼腳結果製造了兩種不同的棒狀來源，由這兩個棒狀圖可充分說明這『棒狀檢驗』的合理性，敘述如下：

『單純加一節』法即是由鬼腳結果一節一節的加上去,反推到 1 至 n 排列的原始鬼腳。
 例如：若某三腳鬼腳的結果為 312，則反推法如下：

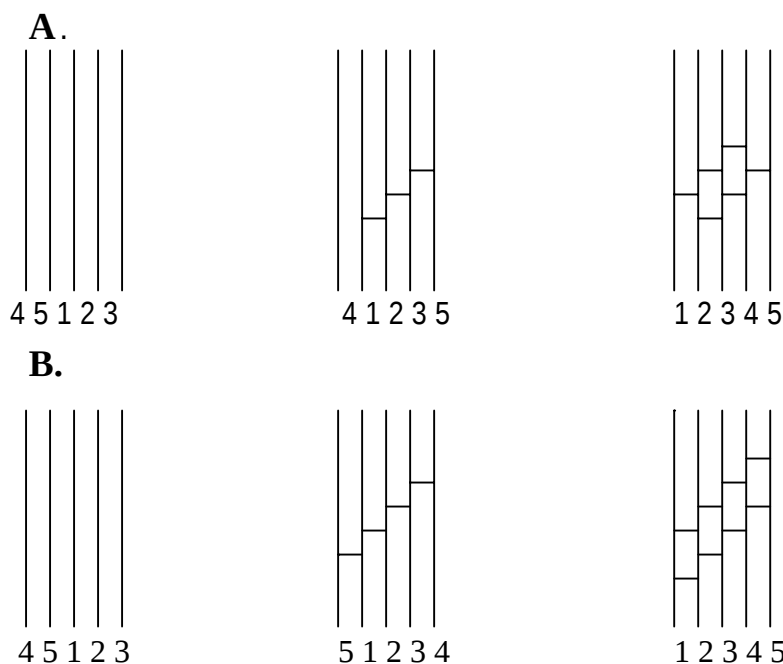


當然我們也可以一次加很多節上去，將某一數字往前推進好幾步，而將其他數字按原排列順序擠下來。

例如：若某 5 腳鬼腳的結果是 53412，則反推法如下：



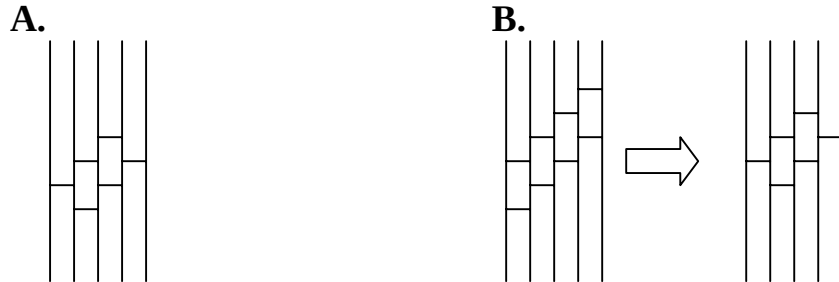
這時最後的圖即為 53412 的最簡鬼腳圖，當然若移動的步數不是最少就不會是最簡鬼腳圖，這時就可以用棒狀檢驗看出來，我們舉一個例子來說明。



例如結果是：45123

在方法 A 中，共移動 6 步，步驟為最少，是最簡鬼腳。

在方法 B 中，共移動 8 步，我們故意使移動次數不為最少，所以不是最簡鬼腳。現在我們使用「棒狀檢驗」來觀察它們兩者之間有何不同。



在方法 B 中，兩支鬼腳棒形成樓梯型，故可以化簡。

在方法 A 中，兩支鬼腳棒既不成完整的樓梯型，也無局部性獨立的樓梯，故已無法化簡，此時必為最簡鬼腳。

更進一步的推想，如果使用右斜向上的棒狀檢測還不放心時，我們可以用左斜向上的棒狀檢驗法再試一遍，此時通過檢驗的鬼腳必為最簡鬼腳。

順便一提，這「單純加一節法」還可說明為何 n 腳最簡鬼腳的節數必小於或等於 $n(n-1)/2$ 節，原因是一個移動次數最多的最簡鬼腳必定是將鬼腳結果完全倒反的狀態，此時由「單純加一節法」知共需 $n(n-1)/2$ 節

證明如下：

將 $(n, n-1, n-2, n-3, \dots, 1)$ 調換成 $(1, 2, 3, \dots, n)$

共需 $(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{(n-1) + 1}{2} * (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ 節。

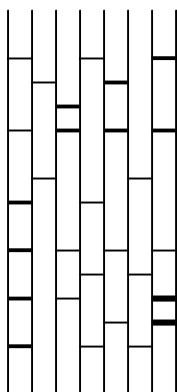
以上我們探討了化簡版塊及代換版塊各別的用法，還有最簡鬼腳判別的方法，接著我們以實際的三個例子來說明：

甲原圖

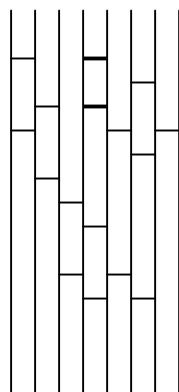
(1)

(2)

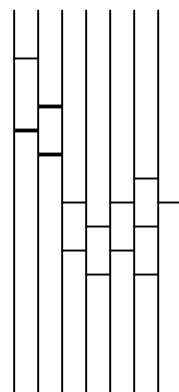
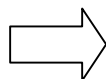
(3)



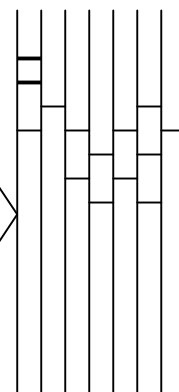
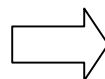
二字型消除



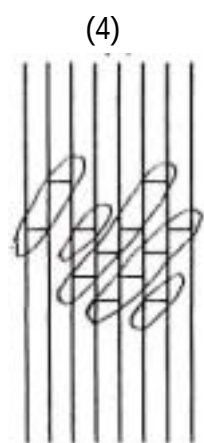
二字型消除



V 字型替換

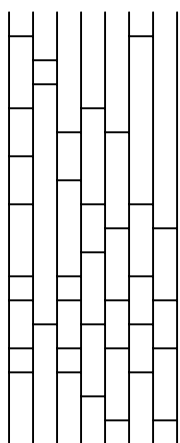


二字型消除

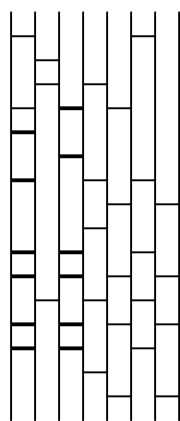


棒狀檢驗 (都無完整或局部性獨立的樓梯型，故已是最簡鬼腳)

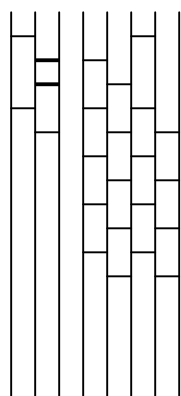
乙原圖



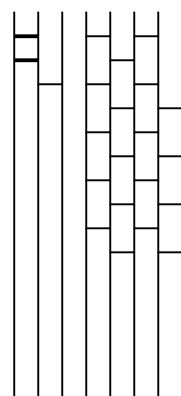
(1)



(2)



(3)

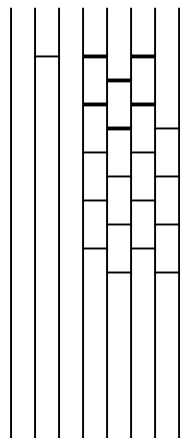


二字型消除

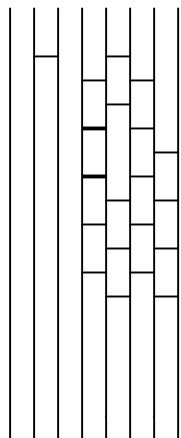
二字型消除

二字型消除

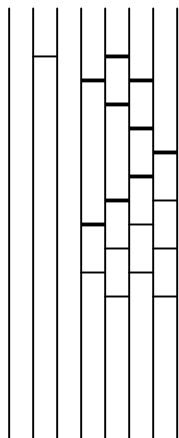
(4)



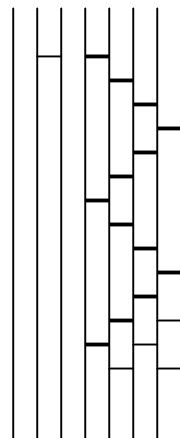
(5)



(6)



(7)

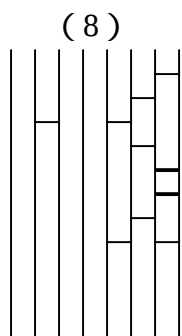


剪刀型代換

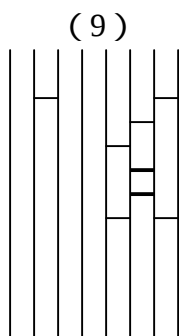
二字型消除

V 字型代換

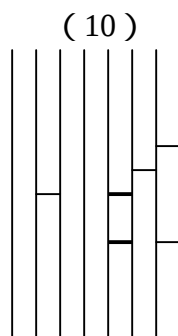
M 字型消除



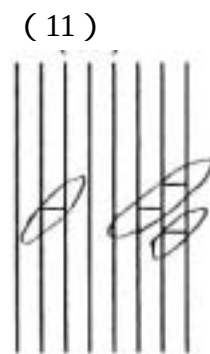
二字型消除



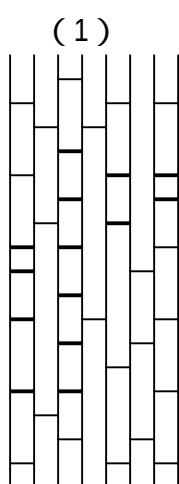
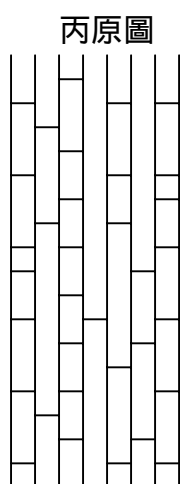
二字型消除



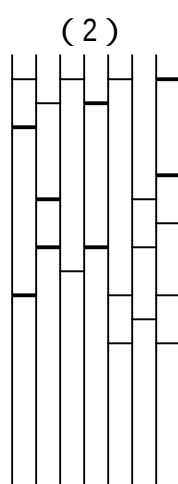
二字型消除



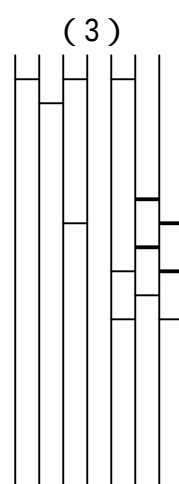
棒狀檢驗



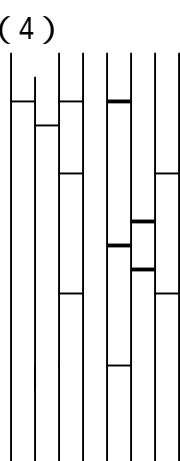
二字型消除



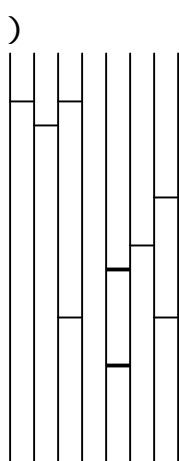
二字型消除



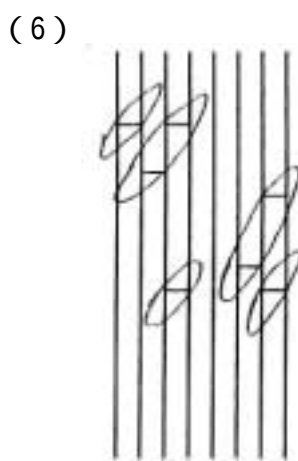
樓梯型消除



樓梯型消除



二字型消除



棒狀檢驗

Part2 新型鬼腳的發現與應用

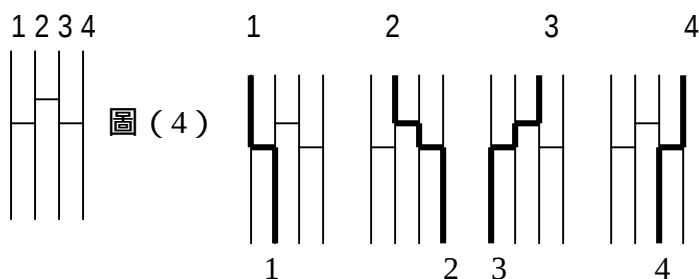
一、分組鬼腳的發現：

以上探討的是可雙向行走的傳統鬼腳，不管使用者如何行走，同一鬼腳圖都會只具有一種對應結果，且此結果必定會填滿所有鬼腳（如圖 4）。

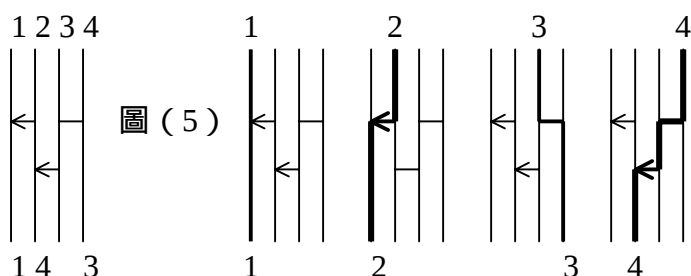
接著我們要探討的是在鬼腳圖上面加進單向箭頭，經過我們設計其中的配置方式，便可將鬼腳的對應結果拿來分組。因為有了單向箭頭的限制，所以一腳可能擁有多種對應結果或根本沒有對應結果，如此一來，我們可以多個對應結果分組，也許是兩個兩個一組，三個三個一組，或一組三個一組兩個等等。

如圖（5）

更進一步，我們可以利用 n 腳鬼腳圖來表示有 n 個人在進行分組抽籤，透過鬼腳圖可以將所有人均勻地分成幾組，這就好像用猜拳來分隊，只不過利用鬼腳會更具公平性，而且更方便。



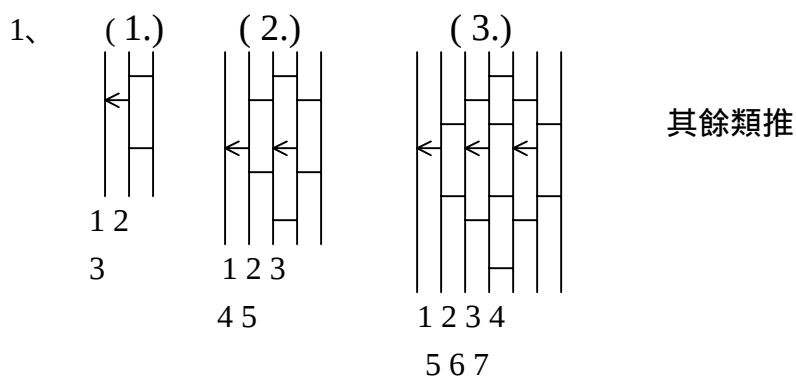
因為中間短節可供雙向行走，所以每個數字的落點不同，會填滿所有腳。（後文中有解釋這個現象）



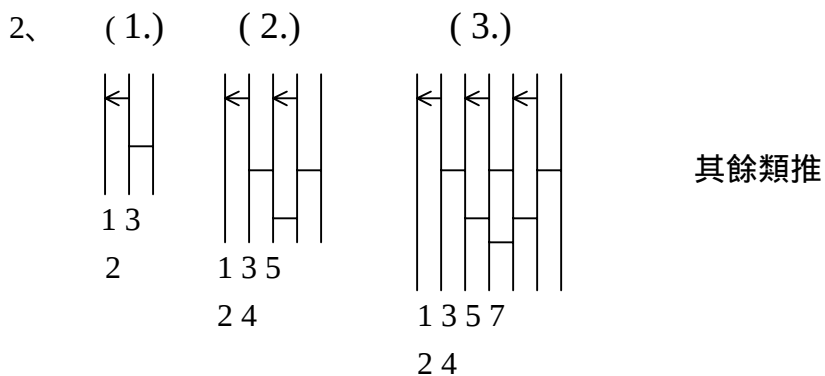
因有了單向箭頭的限制，可能會出現多個數字在同一落點的情況。

以下茲列出一些基本的分組鬼腳圖形：

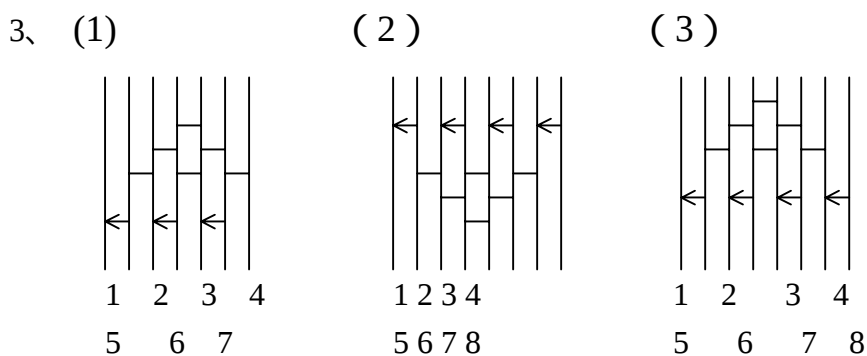
甲 加入短單向箭頭做分組，箭頭成一字型排列



★ 由結果顯示，若一字型排法的鬼腳中加一個單箭頭即有一腳為空鬼腳。



★ 它們的結果排列是由單數在上面那一排，而雙數在下面那一排。

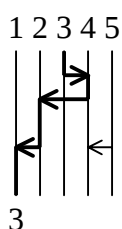


★ 上述例子說明我們要做怎樣的分組可利用事先設定的單箭頭排列方式再上，下各加許多短槓，使遊戲者可做隨機公平的分組。

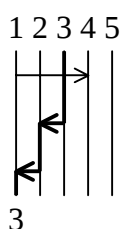
乙. 加入長單向箭頭做分組

以上談到了一些基本的分組鬼腳圖形，利用加入單向箭頭的鬼腳圖就可以將對應數字結果分組，但是這些圖形所加的單向箭頭只是在兩腳之間的短箭頭，我們在想能不能把這些單向箭頭畫得長一點，長箭頭與短箭頭相間的鬼腳圖，是否也能達到分組的效果？

說明：行走的路徑一樣是順著箭頭的方向前進，如圖（6）。但是遇到長箭頭時必須碰到它的兩端才順著它的方向前進，而接觸到它中間的線段，就直接穿越往下，如圖（7）。這就好像前面有座橫跨兩地的大橋，我們就從橋下通過。



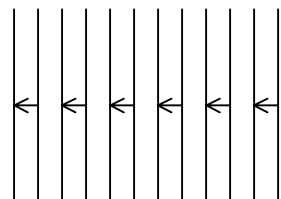
圖（6）



圖（7）

短箭頭的鬼腳圖可以分組，如果再加進長箭頭呢？我們以 12 腳的鬼腳圖為例，12 的正因數有 1、2、3、4、6、12，我們就根據它的因數來做出分組鬼腳：

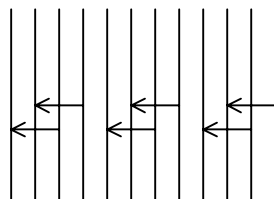
(1) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 3 5 7 9 11
2 4 6 8 10 12

or

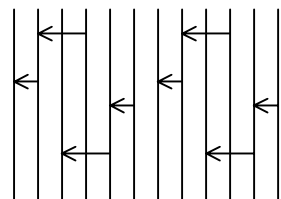
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 2 5 6 9 10
3 4 7 8 11 12

以上的分組鬼腳可將對應數字結果兩個兩個分成一組

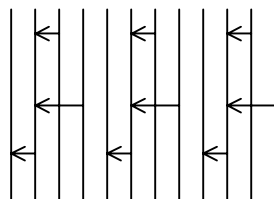
(2) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 3 7 9
2 5 8 11
4 6 10 12

以上的分組鬼腳可將對應數字結果三個三個分成一組

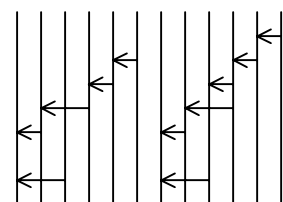
(3) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 5 9
2 6 10
3 7 11
4 8 12

以上的分組鬼腳可將對應數字結果四個四個分成一組

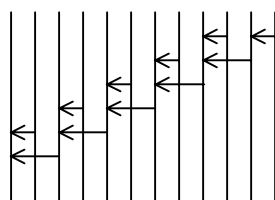
(4) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1 7
2 8
3 9
4 10
5 11
6 12

以上的分組鬼腳可將對應數字結果六個六個分成一組

(5) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



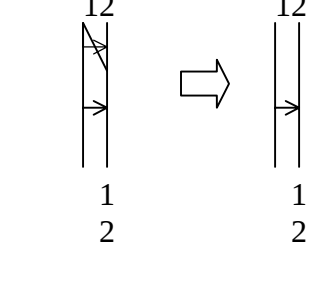
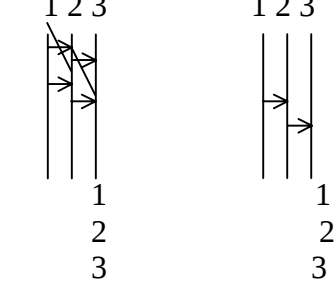
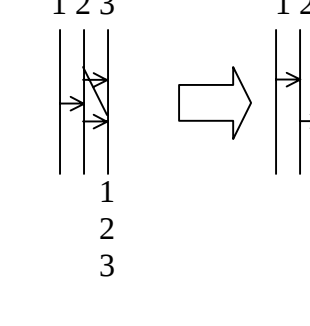
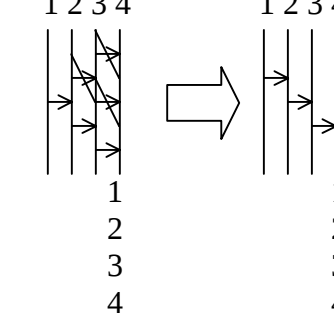
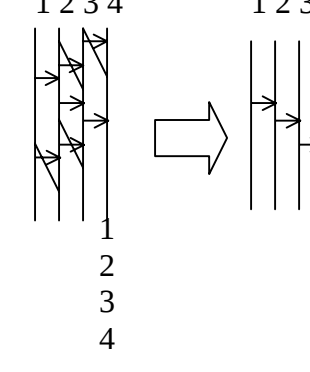
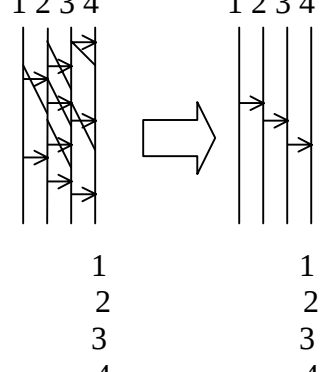
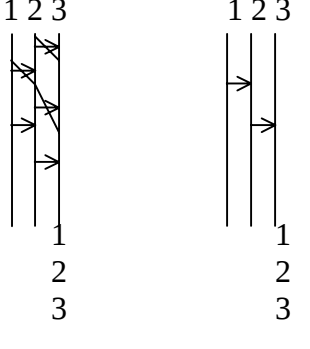
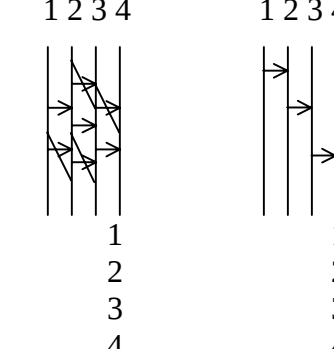
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

以上的分組鬼腳可將十二個對應數字結果全分在一組

★ 我們發現即使鬼腳圖加入長一點的單向箭頭，一樣也可以把對應數字結果分組。

若再在箭頭區之外的上下各腳之間加入一些短槓，即更能使遊戲者隨機且公平的分組，至於單箭頭鬼腳是否也可以化簡呢？我們也花了好多時間去實驗並整理如下表：

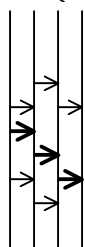
單箭頭鬼腳的化簡與代換

 a. (二字型)	 b. (樓梯型)
 c. (V 字型)	 d. (金字塔)
 e. (閃電型)	 f. (M 字型)
 g. (梯型)	 h. (剪刀型)

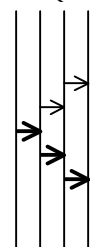
在不斷的努力嘗試之下，我們發現單箭頭的化簡版塊與代換版塊中，有一種規律適用於以上的圖形（鑽石型除外）：以連接兩端鬼腳的斜排為界，斜排上的單箭頭可全部消除，斜排以下的單箭頭，則要視斜排的箭頭方向而定，以圖（1）為例，斜排下的箭頭並無碰觸到最右端之鬼腳，所以可以化簡。也就是說如果斜排的箭頭向右，且斜排下的箭頭無碰觸到最右端之鬼腳，則斜排下的箭頭全部消除。我們稱此法為「斜排消去法」，而鑽石型因無碰觸到兩端之鬼腳，所以不能以此種方法消除。

另外，我們在實驗的過程中，還發現了一個疑惑，如圖（2）的 V 字型，到底要消去左斜向下的斜排還是右斜向下的斜排？後來，我們發現這和箭頭的方向有很大的關聯，如果箭頭向右，則以右斜向下的斜排為界，如果向左，則以左斜向下的斜排為界，如果將方向弄反，結果也就不正確了！

圖（1）



圖（2）



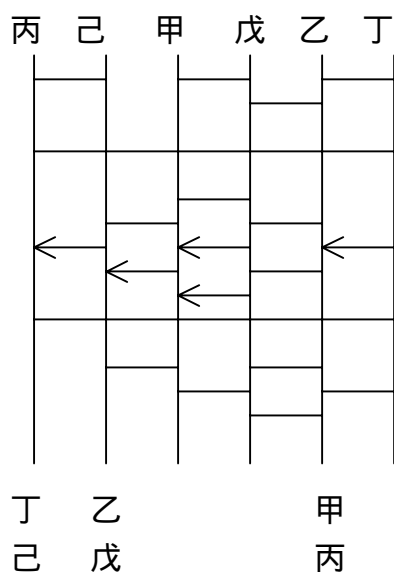
二、分組鬼腳的應用：

（一）人群分組應用

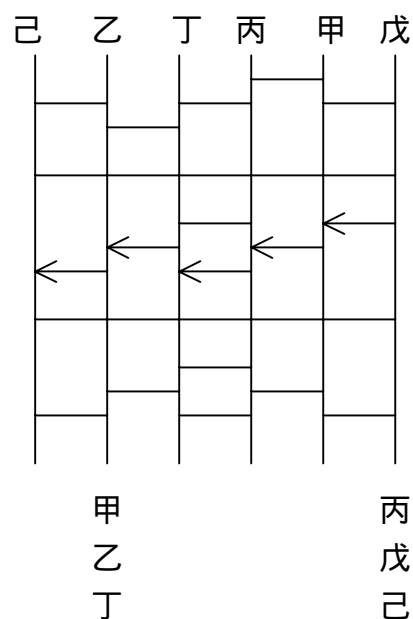
假定現在有甲、乙、丙、丁、戊、己六人要分成三隊，有人會覺得自己分隊會不公平，猜拳決定又太麻煩了，這時就可以利用鬼腳圖來進行分組。

如下圖(8)。

說明：六人隨意在鬼腳圖上方選一個位置，走下來就可以分好組了。



圖(8)



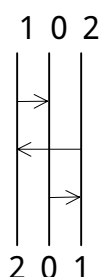
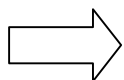
圖(9)

如果他們覺得兩個人一隊太少了，一隊要三個人才夠，沒關係，只要使用圖(9)就好了。

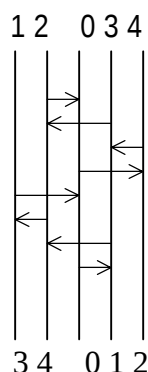
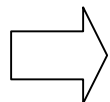
（二）「一維換位遊戲」的最短步驟分析應用

首先我們以一個黑棋和白棋對調為例：

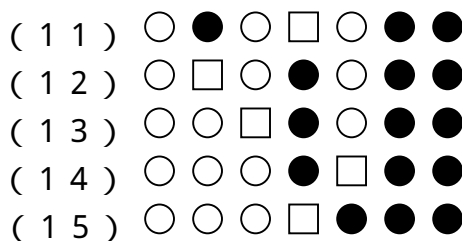
黑 空 白
 ● □ ○



★總共移動了 3 步，經過我們的嘗試，發現這已經為最簡步數。



● ● ● □ ○ ○ ○



(圖 17)

由以上的試驗結果，我們導出了一個計算最簡移動步數的公式：當 n 個黑棋和 n 個白棋要對調時，則最簡移動步數為 $n*(n+2)$ 步。

當 $n=1$ 時，則 $1*(1+2)=3$ (步)

當 $n=2$ 時，則 $2*(2+2)=8$ (步)

當 $n=3$ 時，則 $3*(3+2)=15$ (步)

之前三個鬼腳圖的建構，必須先實際去移動棋子，再根據棋子移動的情況慢慢畫成其對應的鬼腳圖，我們在想：既然可以用公式算出最簡移動步數，是否可以直接畫出其對應的最簡鬼腳圖呢？

以下 4 個黑棋和 4 個白棋對調，我們直接畫出鬼腳圖，再用公式檢驗其移動步數是否已最簡：

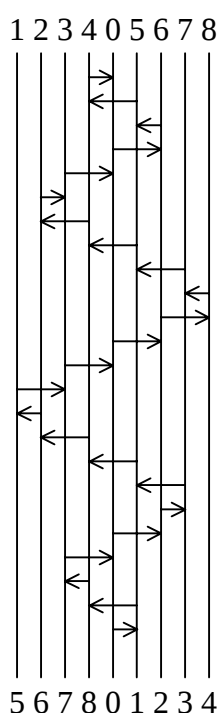


圖 (18)

$$n * (n+2)$$

$n = 4$ 代入

$$4 * (4+2) = 24 \text{ (步)}$$

★ 檢驗的結果證實圖 (18) 為最簡移動步數的對應鬼腳圖。按照這鬼腳圖，再去實際移動黑白棋就輕鬆無比了。

★ 因為黑白棋子是對稱的，所以也可以畫成與以上圖形完全對稱的鬼腳圖。

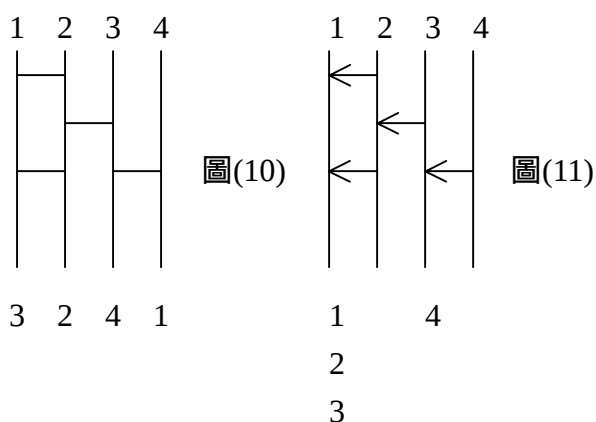
這個遊戲在很多書籍都有研究。看了書上的方法，你一定會覺得很複雜，而且若棋子的數目變得更多，又得重新將棋子移動一次，麻煩死了！

所以將來在「一維換位遊戲」中，我們就不必再浪費時間和精力去移動棋子，只需繪出最簡移動步數的對應鬼腳圖。利用有單向箭頭的鬼腳圖，不但可以表示棋子最簡移動的情況，還可以直接推算出最簡移動步數，另外鬼腳圖也可以成功應用在其它方面。

三、環保鬼腳的發現：

★ 經過一再的思考，我們發現：以上終究還是傳統鬼腳的走法，鬼腳圖再怎麼變換，行走順序再如何改變，同一個鬼腳終究只有一種對應結果，所以我們想要突破傳統的鬼腳走法，創造並採用新走法的新型鬼腳。

普通的傳統鬼腳走法有兩種，第一種為雙向箭頭的鬼腳，如圖(10)，此種鬼腳不論以什麼順序走，每一腳都剛好有一個對應結果，且每個結果都一樣，第二種為單向箭頭的鬼腳，如圖(11)，此種鬼腳每一腳都不一定會有一個對應結果。

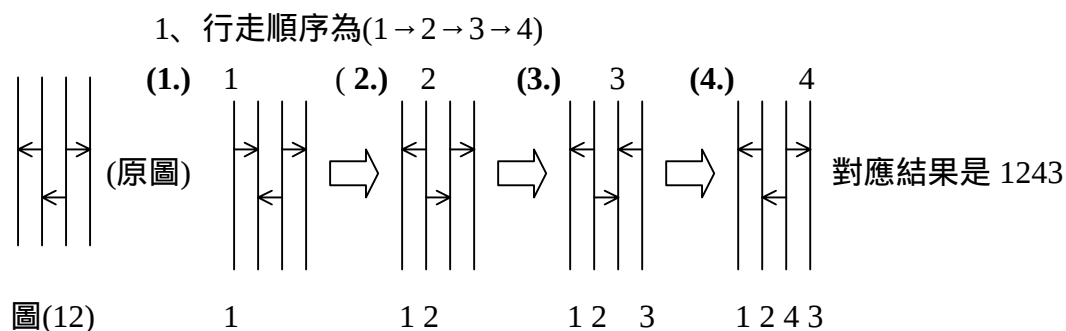


圖(10): 由於四個腳所走的路徑已經固定，所以即使順序改變，對應結果仍然不變。

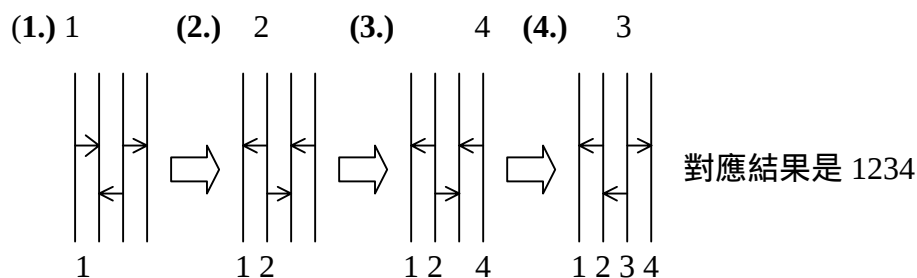
圖(11): 由於箭頭單向的限制，因此一腳可能出現多個數字結果，也可能都沒有數字結果。

仔細觀察上述兩圖，鬼腳一畫好，對應結果就確定了，而既然不能改變圖形，那是否可以改變走法，尤其對單箭頭是否可以更動方向呢？

因此我們嘗試創造一種可以重複使用的新型鬼腳，使產生的對應結果種類不再侷限於固定的同一種。所以我們試著每經過一次中間的短節，就將他的方向轉向，也就是『不可追蹤』的走法，如圖(12)。這就好像有人在跟蹤我們，到了岔路時原本在路口的箭頭指標向左，我們跑向左邊的路後，為了躲開追蹤，順勢將箭頭的指標轉成向右。



2、行走順序為(1→2→4→3)

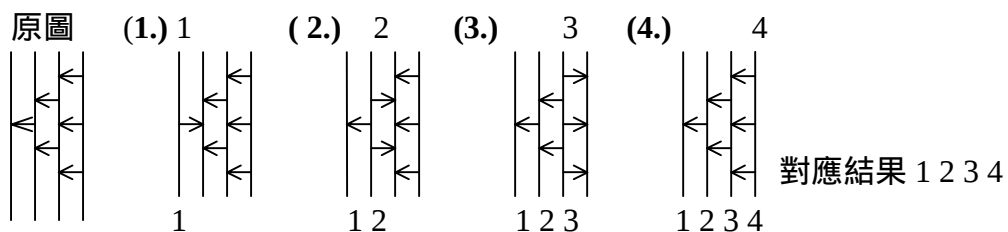


行走的順序不同，造成的對應結果竟然就不一樣！

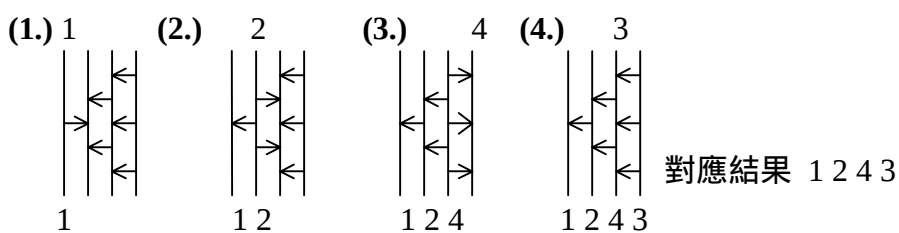
採用『不可追蹤』的新走法，行走的順序不同，所造成的對應結果也有可能不同，但這個時候我們就有了疑問：每一種行走順序都會擁有不同的對應結果嗎？圖形不同，造成的對應結果種類是否也不同呢？

以下我們以『金字塔』這個圖形為例：

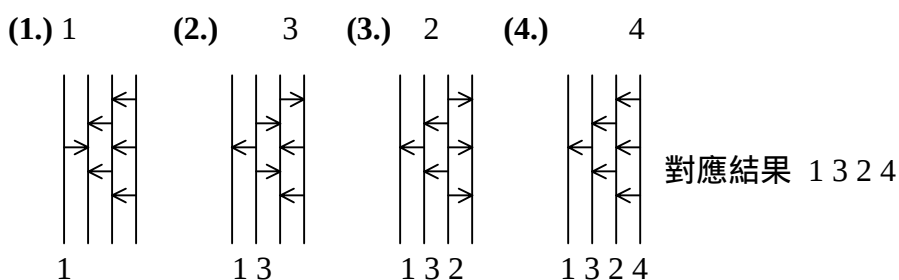
1、行走順序為(1→2→3→4)



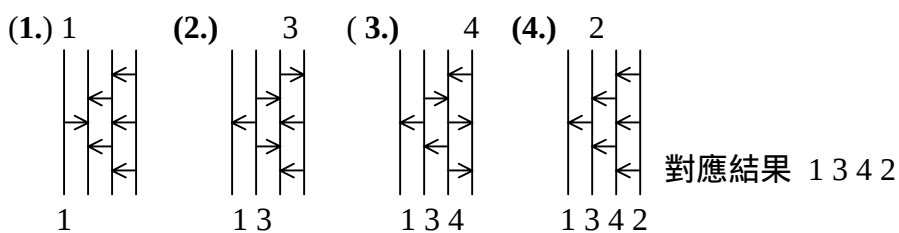
2、行走順序為(1→2→4→3)



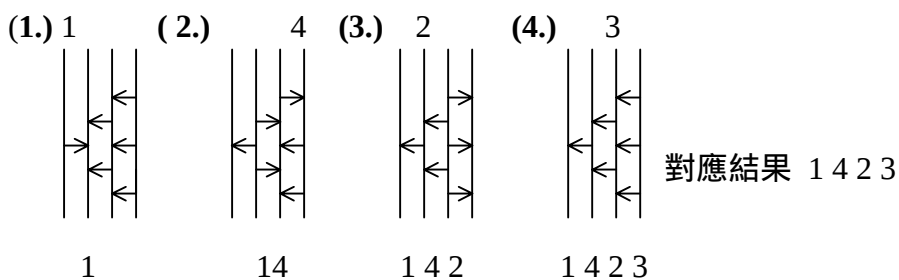
3、行走順序為(1→3→2→4)



4、行走順序為(1→3→4→2)



5、行走順序為(1→4→2→3)

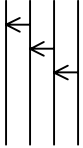
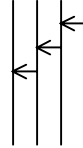
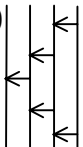
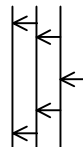
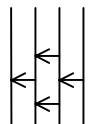
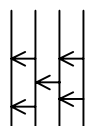
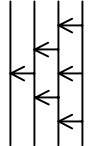
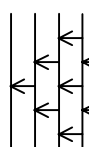


我們也依照此種鬼腳的圖形模樣來命名分類，主要有六類：(1)棒狀(2)V 字型(3)菱型(4)剪刀型(5)金字塔(6)鑽石型。有趣的是：每一種圖形所造成的種類變化都不盡相同，所擁有的自由度也不一樣。

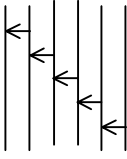
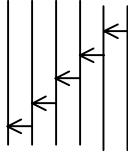
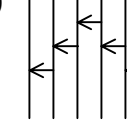
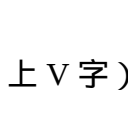
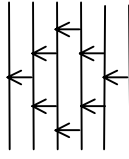
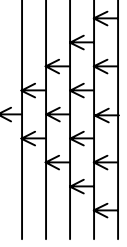
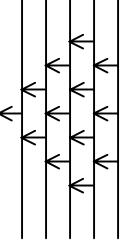
我們將新型鬼腳與傳統鬼腳做個比較並將各類新型鬼腳歸納於下表：

傳統鬼腳：以四腳為例 $4*3*2*1=24$ ，開始的選法有 24 種，但當鬼腳圖被確定時，對應結果只有一種，所以 $24*1=24$ (24 種結果變化)

新型鬼腳：一開始的選法仍有 24 種，但當鬼腳圖被確定後，行走順序不同時，對應結果也不一樣。以金字塔為例，可高達 24 種結果，所以 $24*24=576$ (576 種結果變化)，當腳數增多時，變化的種類也急劇增加。

類 別	對 應 結 果	自 由 度
(1)  (2)  (左上棒) (右上棒)	(1) 7 種 (2) 8 種	(1) $24 \times 7 = 168$ (2) $24 \times 8 = 192$
(1)  (上 V 字) (2)  (下 V 字) (3)  (左 V 字) (3)  (右 V 字)	(1) 8 種 (2) 8 種 (3) 20 種	(1) $24 \times 8 = 192$ (2) $24 \times 8 = 192$ (3) $24 \times 20 = 480$
 (菱型)	14 種	$24 \times 14 = 336$
 (剪刀型)	20 種	$24 \times 20 = 480$
 (金字塔型)	24 種	$24 \times 24 = 576$
 (鑽石型)	96 種	$120 \times 96 = 11520$

上表中的腳數各有不同，不同的行走方式造成的不同對應結果數也不同，我們花了很多時間製作了各種類型的圖版來實驗，發現並不是每一類型都有完全充分的不同對應結果，為了找到能做完全充分變化的類型，我們取相同的鬼腳數（六腳）來做實驗，別小看下面這個表，我們三人花了五天五夜，轉到手腳麻痺才做成。

類 別	對 應 結 果 種 類	自 由 度
(1)  (2)  (左上棒) (右上棒)	(1) 16 種 (2) 32 種	(1) $720 \times 16 = 11520$ (2) $720 \times 32 = 2464$
(1)  (2)  (上 V 字) (右 V 字) (左 V 字)	(1) 33 種 (2) 238 種	(1) $720 \times 33 = 23760$ (2) $720 \times 238 = 171360$
 (菱型)	136 種	$720 \times 136 = 97920$
 (金字塔型)	720 種	$720 \times 720 = 518400$
 (鑽石型)	600 種	$720 \times 600 = 432000$

從上面的兩個總表中我們發現當腳數相同時，以金字塔的變化種類最多，也最完全。

(1) 四腳時變化種類有 24 種，搭配 24 種不同的走法順序，使自由度為 576 種

(2) 六腳時變化種類有 720 種，搭配 720 種不同的走法順序，使自由度為 518400 種

其餘圖形的自由度都遠比金字塔低，所以當我們要製作一副環保鬼腳時，最適宜的圖形

就是「金字塔」。而且當我們真正操作這個環保鬼腳時，還有幾個特色，敘述如下：

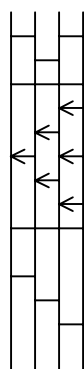
各種圖形若先將箭頭一起指向某一邊，當各腳都走完後，非常神奇的所有箭頭都會回復原狀，又回到同一邊，這樣有兩個好處（1）若中間有人走錯，當全部走完時會出現有的箭頭指向不同邊（2）若有另一批人緊接著要玩這鬼腳時，那就直接走下去，根本不用重新調整箭頭，真是環保中的環保啊！

四、環保鬼腳的應用：

（一）不可追蹤走法的運用－摸彩

現在有 A、B、C、D 四人要進行摸彩，他們走進了圖(13)，而它們摸彩的順序為 C、A、D、B，第一大獎被 A 抱走了。後來又來了四個人 E、F、G、H，順序為 F、G、E、H，其中 A 和 F 是朋友，因此 A 偷偷跟 F 說走第三腳可以抽到電視，結果呢？如圖(14)。

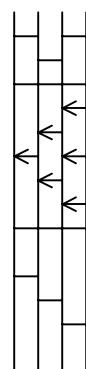
順序 3 4 2 1
人名 D B A C



圖(13)

A D B C
電手吹銘
視表風謝
機惠
顧

順序 2 3 1 4
人名 G E F H



圖(14)

G E H F
電手吹銘
視表風謝
機惠
顧

★ 由以上的過程可以得知：不可追蹤走法的鬼腳圖可以重複使用，只要行走的順序不同，所對應的結果就會變動，具有極高的自由度。

(二) 不可追蹤走法的另一運用——密碼鎖

以下我們以 5732 這個數字為例，比較一般密碼鎖與鬼腳號碼鎖的差異：

一般密碼鎖：

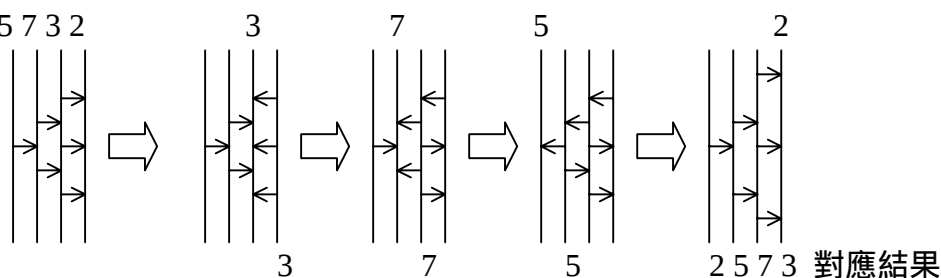
- (1) 從 0~9 選出 2、3、5、7 四個數字，其中有 210 種變化。
- (2) 接著排出正確的順序：5732，其中有 24 種變化。
- (3) 輸入

鬼腳號碼鎖：

- (1) 從 0~9 選出 2、3、5、7 四個數字，其中有 210 種變化。
- (2) 排出鬼腳圖起始數字的位置：5732，有 24 種變化。
(5 在第一腳，7 在第二腳，3 在第三腳，2 在第四腳)
- (3) 知道鬼腳行走的順序，有 24 種變化。
(比方說是：第三腳→第二腳→第一腳→第四腳)
- (4) 假設鬼腳中間的版塊是「金字塔」，其數字對應結果還有 24 種變化，必須找出 3752 這幾個數字對應結果。

行走次序 3 2 1 4

起始數字 5 7 3 2



(5) 輸入

一般密碼鎖： $210 \times 24 = 5040$ (共有 5040 種變化)

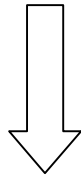
鬼腳號碼鎖： $210 \times 24 \times 24 \times 24 = 2903040$ 種變化 (共有 2903040 種變化)

若再將鬼腳的腳數擴充，或者使鬼腳圖的配置更複雜，其中的變化種類可是很驚人的！

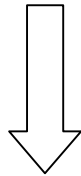
此外，有的時候要是不小心被別人得知自己的密碼，那就完蛋了！用了鬼腳號碼鎖，即使起始數字曝光，但是若不知道鬼腳的行走順序也無法馬上開鎖，要是這小偷想一個一個去試，那可要花上一大把時間呢！

一般密碼鎖：

選出正確的數字



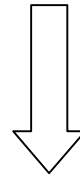
排好這些數字的
先後順序



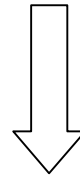
輸 入

鬼腳號碼鎖：

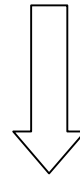
選出正確的數字



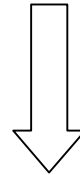
將數字排好先後順
序擺在鬼腳圖的起
始位置上



須得知鬼腳行走的
順序



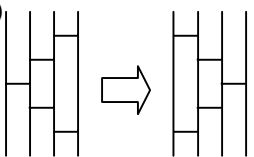
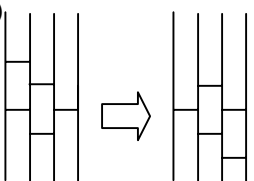
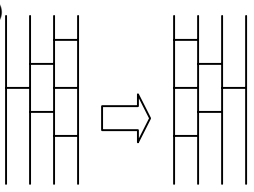
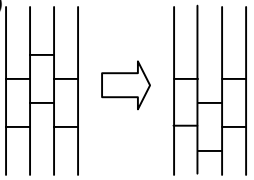
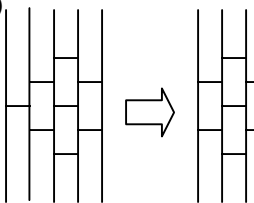
走出的數字對應結
果才是密碼

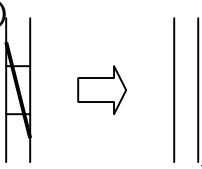
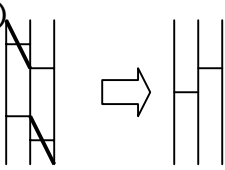
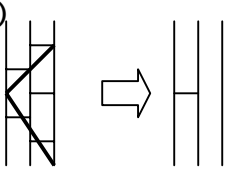
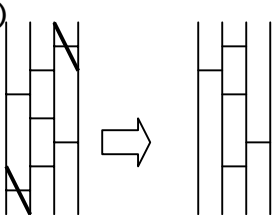
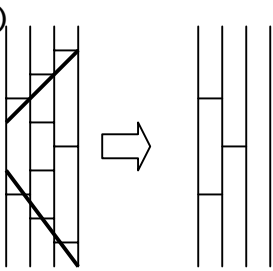
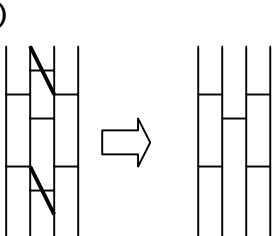


輸 入

肆、結論：

(一) 傳統的基本鬼腳，中間的短節沒有箭頭，可供雙向通行，此種鬼腳常常因為節數過多而顯複雜，我們已尋找出多種化簡版塊及代換版塊來對鬼腳圖施行化簡的工作，最後再畫成棒狀，檢驗是否已是最簡鬼腳圖。

代 換 版 塊		
(1)		(V 字型)
(2)		(菱 型)
(3)		(金字塔型)
(4)		(剪刀型)
(5)		(鑽石型)

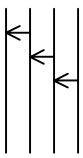
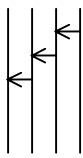
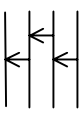
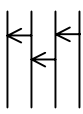
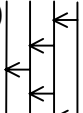
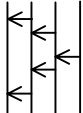
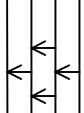
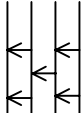
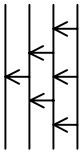
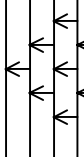
化 簡 版 塊		
(1)		(二字型)
(2)		(樓梯型)
(3)		(梯型)
(4)		(閃電型)
(5)		(M 字型)
(6)		(剪刀型)

除了這些基本型的化簡版塊之外，還有其他大面積的代換版塊及化簡板塊。

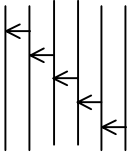
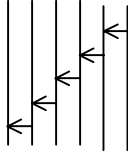
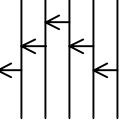
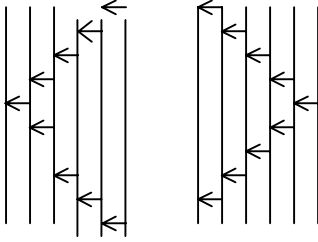
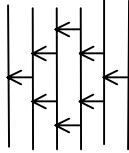
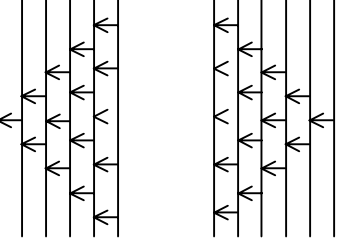
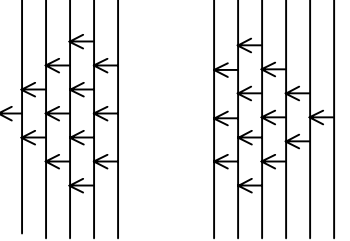
(二) 在鬼腳圖的短節上加入單向箭頭，對應的數字結果會受到單向箭頭的牽制，而達

到分組的效果，若單箭頭加了太多，可依「斜排消去法」建立的化簡版塊施行化簡。

(三) 採用「不可追蹤」走法的新型鬼腳，因為對應結果排列隨著行走順序的不同而產生變化，所以具有極高的自由度，可以重複使用。我們也依照其圖形的形狀分成了幾類：

類 別	對 應 結 果
(1)  (左上棒) (2)  (右上棒)	(1) 7 種 (2) 8 種
(1)  (上 V 字) (2)  (下 V 字) (3)  (左 V 字) (3)  (右 V 字)	(1) 8 種 (2) 8 種 (3) 20 種
 (菱型)	14 種
 (剪刀型)	20 種
 (金字塔型)	24 種
 (鑽石型)	96 種

上表中各類別的腳數不盡相同，箭頭隊形不同都會影響對應結果總數，我們再限定為相同的腳數，觀察如下表：

類 別	對 應 結 果 種 類	自 由 度
(1)  (2)  (左上棒) (右上棒)	(1) 16 種 (2) 32 種	(1) $720 \times 16 = 11520$ (2) $720 \times 32 = 2464$
(1)  (2)  (上 V 字) (左 V 字) (右 V 字)	(1) 33 種 (2) 238 種	(1) $720 \times 33 = 23760$ (2) $720 \times 238 = 171360$
 (菱形)	136 種	$720 \times 136 = 97920$
 (金字塔形)	720 種	$720 \times 720 = 518400$
 (鑽石形)	600 種	$720 \times 600 = 432000$

由以上兩個總表比較得知：各種圖形中，以「金字塔」圖形在相同腳數下，有最完整的變化，所以我們選擇金字塔圖形作為不可追蹤的新型鬼腳代表。當然使用時，單箭頭的起始指向可左右混雜，這樣能更具隨機及公平性。

(四) 我們可以將鬼腳靈活應用在其他方面，例如：

(1) 人群分組。

(2) 一維換位遊戲：

在此遊戲中，我們利用鬼腳的單向箭頭表示出棋子移動的方向及方式，其中我們推算出 n 個棋子要互相對調的最簡移動步數是 $n*(n+2)$ 步，我們還可以直接繪出最簡移動路徑的鬼腳圖。

(3) 摸彩：

我們利用「不可追蹤」走法鬼腳的自由度即可重複使用的特性，設計出可供多人多次摸彩的鬼腳圖，即使起始位置相同，但會因為摸彩順序不同而得到不同的結果。

(4) 號碼鎖：

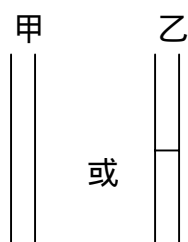
一般需要輸入密碼的鎖，只要將密碼的數字猜出來並輸入就可以成功地打開鎖，其中要克服的數字變化不會太多。但是利用裝有「不可追蹤」走法鬼腳的號碼鎖後，想要成功地解開密碼，可就很難了！由於此種鬼腳的自由度相當高，若是不知道其行走的先後順序，想用數字一個一個去試，困難度就更高了。

(五) 傳統走法的兩個疑點：(1) 會不會走不到出口(即 1 - 無)

(2) 會不會走到同一出口(即 多 - 1)

由不可追蹤的探討知道這種鬼腳絕對不會走到同一出口，也就說必為 1 - 1 解釋如下：

如：傳統兩腳鬼腳



不可追蹤新型鬼腳



當傳統鬼腳，在採甲或乙案時，不可追蹤鬼腳是採那一腳先走來取代？而當確定甲案或乙案後，就像不可追蹤鬼腳已確定了哪一腳先走。所以最重要的疑問是“會不會走到同一出口？”非常明白的，由不可追蹤走法立即予以否決！因此得證傳統鬼腳必為 1 - 1。

伍、參考資料：

- (一) 部頒國民中學數學課本第三冊及第四冊
- (二) 趣味數學 300 題 (凡異出版社)