

中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：平方根近似值的最新解法 —— 二分逼近法

關 鍵 詞：平方根、十分逼近法、二分逼近法

編 號：030408

學校名稱：

桃園縣立青溪國民中學

作者姓名：

林振倫

指導老師：

石靜淑



平方根近似值的最新解法——二分逼近法

一、摘要

現在有許多求平方根的方法，有精準而麻煩的，如：《十分逼近法》、《直式開方法》。也有簡單而不準的如：《內插法》、《圖解法》。經過我們的研究討論，得到一平方根近似值的最新解法——二分逼近法。此法可以綜合以上的優點，除去以上的缺點，並將它推廣成為一個有用的方法。

二、研究動機

有一天，上數學課時，老師問我們：『一個大於 0，小於 1 的數 $(1+a)$ ，它的平方根的範圍如何？』

我想了想後，便回答：『 $1 > \sqrt{1+a} > 1+a$ 。』

老師又問我：『那麼 $\sqrt{1+a}$ 的值是多少？』

我又想，既然 $1 > \sqrt{1+a} > 1+a$ 的話，那 $\sqrt{1+a}$ 的估計值應是 1 和 $1+a$ 的中間值，於是我回答：『 $1+a/2$ 。』
($[1+(1+a)] \div 2 = (2+a) \div 2 = 1+a/2$)

放學後，我就把這些大於 0 小於 1 的數的平方根，用以上方法求出的估計值和實際值，作成一張表。如下：

$1+a$	$1+a$ 的平方根實際值	$1+a$ 的平方根估計值
0.3	0.54772255...	0.65
0.4	0.63245553...	0.7
0.5	0.70710678...	0.75
0.6	0.77459666...	0.8
0.7	0.83666002...	0.85
0.8	0.89442719...	0.9
0.9	0.94868329...	0.95
0.92	0.95916630...	0.96
0.94	0.96953597...	0.97
0.96	0.97979589...	0.98
0.98	0.98994949...	0.99

表一 1 以下的值的平方根實際值與估計值比較表

由上表，我們發現若 $1+a$ 的值離 1 越近， $1+a$ 平方根的估計值就越接近實際值，就越精確。

同樣的，如果是一個大於 1 的數 ($1+a$) 的話，那它的範圍就是： $1+a > \sqrt{1+a} > 1$ 。而 $\sqrt{1+a}$ 在 1 和 $1+a$ 的中間，所以它的估計值，依然是 $1+a/2$ 。於是，我又把大於 1 的數和它們的估計值和實際值，作成一張表。如下：

$1+a$	$1+a$ 的平方根實際值	$1+a$ 的平方根估計值
1.02	1.00995049...	1.01
1.04	1.01980390...	1.02
1.06	1.02956301...	1.03
1.08	1.03923048...	1.04
1.1	1.04880884...	1.05
1.2	1.09544511...	1.1
1.3	1.14017542...	1.15
1.4	1.18321595...	1.2
1.5	1.22474487...	1.25
1.6	1.26491106...	1.3
1.7	1.30384048...	1.35
1.8	1.34164078...	1.4

表二 1 以上的值的平方根實際值與估計值比較表

由上面兩個表，我們發現，不管 $1+a$ 是大於 1 或小於 1 的數，只要離 1 越近，數值就越準。但是我們希望，能夠有個更精準的算法來證實這個發現是對的，於是開始了這些研究。

三、研究目的

在日常生活中，我們常常會碰到一些面積的問題，如：已知一正方形面積，要求邊長或已知一圓形面積要求其半徑等，都要用到求平方根的方法。所以求平方根的方法是一個很實際而且重要的數學題目。

現在有許多求平方根的方法，有精準而麻煩的，如：

《十分逼近法》【參考資料 1】：在數線上將單位長十等份後再將每一等份平方，經比較後得到最接近的近似值，再依照同樣的方法計算，即可求得更多位數。

《直式開方法》【參考資料 2】：先將要開平方的數於小數點前後每兩位用逗點標示，再利用平方公式作直式開方以求取其平方根的值。

也有簡單而不準的如：

《內插法》【參考資料 3】：若要開平方根的數在表上兩個已知點的中間，便可以利用點與點間的直線特性與等比例的關係，求取中間相關的值為數的平方根。

《圖解法》【參考資料 4】：利用幾何作圖法與畢氏定理量取線段長度，以求取任何數的平方根。此方法最簡單，但用尺來量得之長度所得到的精準度並不高。

如果能夠去蕪存菁，綜合以上的優點，除去以上的缺點的話，就可以算的又快又準了。

但是我們查過了許多過去科展的資料，多半都沒有兩者都達成。要如何有個又快又準的算法，就成為了我們研究的目的。希望能從上一節的推論，將它推廣並證明為一個有用的求平方根方法。

四、研究內容

(一) 1 附近的數的平方根求法——公式 $1+a/2$ 的證明

經過一些的研究和推論，我們發現：平方根的近似值為 $1+a/2$ ，而且 $|a|$ 的值越小，平方根的值就越準。

假設：

$$\sqrt{1+a} = 1+b \quad \dots\dots (1)$$

證明：

先設 $|a|$ 比 1 小很多，即 $1+a$ 很接近 1

當 $a > 0$ 時， $1+a > 1+b > 1$

同減 1 後 $\rightarrow a > b > 0$

$\because 1$ 比 a 大很多

$\therefore 1$ 也比 b 大很多

當 $a < 0$ 時， $1+a < 1+b < 1$

同減 1 後 $\rightarrow a < b < 0$

$|a| > |b| > 0$

由此可知，1 比 $|b|$ 大很多

將(1)式平方後，可得：

$$1+a = 1+2b+b^2 \quad \dots\dots (2)$$

$\because 1$ 比 $|b|$ 大很多

$\therefore 1$ 比 b^2 大更多

因此 b^2 可以不討論，並可將(2)式化簡為：

$$1+a \quad 1+2b \quad \dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} a & 2b \\ b & a/2 \end{aligned} \quad \dots\dots (4)$$

將(4)式代入(1)式後，可得：

$$\sqrt{1+a} \quad 1+a/2 \quad \dots\dots (5)$$

因為當 $|a|$ 的值越小， $|b|$ 也跟著變小， b^2 也變的更小，從(2)式簡化所得到的(3)式就越準確，且由(5)式得到的值也就越準確。

(二) A 的平方根求法——公式 $1+a/2$ 的應用

雖然上一小節的公式，只能運用在 1 附近的數而已，但若將它延伸使用後，仍然可以算出其他數字的平方根。

步驟如下：

1：若有一數為 A，求 A 的平方根

2：找一數 B 為離 A 最近，且已知其 B 平方根的數(可由查表或完全平方數代入)

$$\begin{aligned} 3: \sqrt{A} &= \sqrt{B} \times \sqrt{A/B} \\ &= \sqrt{B} \times \sqrt{1+a} \\ &= \sqrt{B} \times (1+a/2) \end{aligned} \quad \dots\dots (6)$$

(a 為 $A/B-1$ 後得到的數)

在這裡我們設定：

$$\text{誤差} = |\text{估計值} - \text{實際值}| \quad \dots\dots (7)$$

(在我們國中第二冊的數學課本中，所附錄的平方開方表中，可以查到 1~100 的平方開方，所以如果有 >0 的純小數，或 >100 的數的話，可以將它乘(除)以 10^n ($n \geq 1$)，使它成為 1~100 之間的數後代入公式(6)，之後再將它算出來的值除以或乘以 10^n ，然後就可以得知此數的平方根值了。)

例題一：求 $\sqrt{81.2} = ?$ ，估計方法如下：

$$\begin{aligned} \sqrt{81.2} &= \sqrt{81} \times \sqrt{81.2/81} \\ &= \sqrt{81} \times \sqrt{1+0.002469135} \\ &= 9 \times (1+0.00123456) \\ &= 9.01111111 \\ \therefore \sqrt{81.2} &\approx 9.01111111 \end{aligned}$$

而 $\sqrt{81.2}$ 的實際值約為 9.01110426，估計值與實際值的差為 0.00000685。

由這個方法求出的值，可算是又準確又快速的了。

例如比起《十分逼近法》：

我們知道 $9^2=81$ 、 $10^2=100$ ，所以其平方根值應該是九點多，首先將 9 和 10 中間分成十分求其平方得： $9.1^2=82.81$ 、 $9.2^2=84.64$ 、 $9.3^2=86.49$ 、 $9.4^2=88.36$ 、 $9.5^2=90.25$ 、 $9.6^2=92.16$ 、 $9.7^2=94.09$ 、 $9.8^2=96.04$ 、 $9.9^2=98.01$ ，經過比較知其平方根值應該是九點零幾。再將 9.0 和 9.1 中間分成十分求其平方後比較求小數第二位之值。雖然準，但卻相當麻煩。

又例如比起《內插法》來求得的數：

先由查表知 81 與 82 的平方根值如下：

$$\sqrt{81}=9$$

$$\sqrt{82}=9.0553851$$

再用《內插法》求得：

$$9.0553851-9=0.0553851$$

$$0.0553851 \div 5=0.01107702$$

$$\sqrt{81}+0.01107702=9+0.01107702=9.01107702$$

$$\sqrt{81.2} \quad 9.01107702$$

由《內插法》求出的值與實際值的差為 0.00002724。由此可知雖然兩種方法同樣非常簡便，但是由公式(6)求得的數，卻比《內插法》精準許多。

但是，只舉一個例子，或許不能代表它的準確性，所以我們在表三列了一些數，以及它所算出來的值。

	81.2 的平方根	81.4 的平方根	81.5 的平方根	81.6 的平方根	81.8 的平方根
實際值	9.01110426	9.02219485	9.02773504	9.03327183	9.04433524
內插法	9.01107702	9.02215404	9.02769255	9.03323106	9.04430808
誤差	0.00002724	0.00004081	0.00004249	0.00004077	0.00002716
令 B=81 代入公 式(6)	9.01111111	9.02222222	9.02777777	9.03333333	9.04444444
誤差	0.00000685	0.0000274	0.00004274	0.00006147	0.00010901
令 B=82 代入公 式(6)	9.01121252	9.02225552	9.02777725	9.03329883	9.04434199
誤差	0.00010827	0.00006067	0.00004221	0.00002700	0.00000674

表三 公式(6)與內插法對於實際值的比較

由此表可見，81.2、81.4 的平方根是以 $B=81$ 代入公式比較準確；而 81.6、81.8 的平方根是以 $B=82$ 代入公式比較準確；從表三我們證明了 B 的值離 A 越近，所算出來的估計值越準。但 81.5 的平方根則以內插法較為準確，所以在下一節裡，我們還會提到關於減少誤差的方法。

(三) 二分逼進法

前面所談到的平方根解法，最好是能知道它的誤差。而誤差所用到的實際值，是因為在舉例證明而用計算機算的，真正計算時只能知道它的估計值，而不知道它的實際值，所以無法得知它的誤差。

但是可將估計值平方後，與 A 相比，可大略知道它的準確度，在這裡我們設定：

$$\begin{aligned} \text{相差的值} &= | \text{平方根估計值}^2 - A | && \dots\dots (8) \\ &= | [\sqrt{B} \times (1 + a/2)]^2 - [\sqrt{B} \times \sqrt{1+a}]^2 | \\ &= | B(1 + a/2)^2 - B(1 + a) | \\ &= B(a^2/4) \end{aligned}$$

若覺得相差的值可以接受的話，那平方根的估計值也可以接受，若是相差的值不可接受的話，我們可以繼續將 $B(1 + a/2)^2$ 代入公式 (6) 的 B ，重新計算一次，如此反覆計算到可以接受的估計值為止。

例題二：表三的 81.5 的平方根值

(由 $B = 81$ 求得之值的平方代入新的 B)

$$\begin{aligned} \sqrt{81.5} &= \sqrt{81.500770} \times \sqrt{81.5/81.500770} \\ &= 9.0277777 \times \sqrt{0.99999055} \\ &= 9.0277777 \times [1 + (-0.00000473)] \\ &= 9.02773504 \end{aligned}$$

與實際值 9.02773504 相差 0.0，此時與 81.5

$$\text{相差的值} = | 9.02773504^2 - 81.5 | = 0.00000005$$

是可以接受的。

(由 $B=82$ 求得之值的平方代入新的 B)

$$\begin{aligned} \sqrt{81.5} &= \sqrt{81.500726} \times \sqrt{81.5/81.500726} \\ &= 9.0277725 \times \sqrt{0.99999065} \\ &= 9.0277725 \times [1 + (-0.00000468)] \\ &= 9.02773504 \end{aligned}$$

與實際值 9.02773504 相差 0.0，此時與 81.5

相差的值 = $|9.02773504^2 - 81.5| = 0.00000005$ 是可以接受的。

但是，同樣的，這裡只舉一個例子，並不能代表它的準確性，所以由表三中，公式(6)算出的值，再代入算一次。如表四。

	81.2 的平方根	81.4 的平方根	81.5 的平方根	81.6 的平方根	81.8 的平方根
實際值	9.01110426	9.02219485	9.02773504	9.03327183	9.04433524
內插法	9.01107702	9.02215404	9.02769255	9.03323106	9.04430808
誤差	0.00002724	0.00004081	0.00004249	0.00004077	0.00002716
由 B=81 求得之值再代入公式(6)	9.01110426	9.02219485	9.02773504	9.03327183	9.04433524
誤差	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
由 B=82 求得之值再代入公式(6)	9.01110426	9.02219485	9.02773504	9.03327183	9.044333524
誤差	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000

表四 第二次計算的結果與內插法的比較

由表四可知二分逼進法的準確性，如果有一些不太準確的情況時，只要用這種方法來算，重覆個幾遍以後，就準確多了。

(四) 當 $1+a$ 的值離 1 不很近時

在這裡我想到一個問題，如果我們算到一個數，它由所給的條件所算出來的 $1+a$ 的值，離 1 不是很近，那要算幾次才會準呢？

例題三：求 $\sqrt{6} = ?$

若這裡沒有平方開方表，就必須由已知的、最近的數來代入 B 的值，比如 B 的值由 2 的平方——4 來代入：

第一次計算：

$$\sqrt{6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6/4} \quad (\text{此時 } a = 0.5 \text{ 離 } 1 \text{ 不是很近})$$

$$2 \times 1.25 = 2.5$$

第二次計算： $2.5^2=6.25$

$$\sqrt{6} = \sqrt{6.25} \times \sqrt{6/6.25} \quad 2.5 \times 0.98=2.45$$

第三次計算： $2.45^2=6.0025$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= \sqrt{6.0025} \times \sqrt{6/6.0025} \quad 2.45 \times 0.99979175 \\ &= 2.4494898 \end{aligned}$$

相差的值=0.00000028 可以接受

經過了 3 次的重覆計算，最後與實際值的差都非常非常的小如表五。所謂「精，亦求精」，如果想要到更精準的數的話，不妨再多算幾遍吧。

$\sqrt{6}$	第一次計算	第二次計算	第三次計算
實際值	2.4494897	2.4494897	2.4494897
估計值	2.5	2.45	2.4494898
相差的值	0.25	0.0025	0.00000028
誤差	0.0505103	0.0005103	0.0000001

表五 $\sqrt{6}$ 三次求得的值

五、討論與結論

在本文中研究出一個新的開平方根解法：首先我們討論到數目為 1 附近的解法，其次利用其結果推廣到任何數目的平方根的解法，最後運用同樣的方法將答案求的更準。從這個研究過程中，我們體會到由一個觀察到的現象，歸納成為一個計算平方根的規則，實在是受益良多。

因為《直式開方法》計算一次須要利用平方公式經過多次的試除，而且每計算一次，只能算出一位數。比起它，本方法的好處是利用公式(6)與查表法一次計算就得到相當準確的答案，如例題一。

比起《十分逼近法》，每算一位數就要算很多個數的平方，並要在這些數中作比較。本方法的好處便是較為容易運算，如例題一所示。

又比起《圖解法》，我們的方法比較準確。因為它必須藉由直尺來量平方根的值的長度，

而直尺最小的單位刻度是毫米，再小的長度就必須用估計的了。嚴格的來說，十公分的直尺能達到千分之一的精度就算是很好了！由例題一來看，我們的精度是在百萬分之一之內。

而《內插法》雖然是一個非常簡單的方法，但從例題二中我們可以清楚的看出：它的準確度並沒有我們所研究出來的方法好。

從上面的比較，我們可以清楚的知道：我們所研究出來的方法的確是一個兼顧簡易與精確的方法，縱使當 $1+a$ 的值離 1 不很近時，也不需要算得很多次才會得到精確的答案。這從例題三中可以看出。在這裡所研究出來的新方法，我們稱它為《二分逼近法》。

六、參考資料

1 《十分逼近法》：

國中選修數學課本第二冊第三章，國立編譯館，民國九十年一月。

2 《直式開方法》：

國中數學講義——點線面第二冊第四章課外補充，南一書局，民國九十年。

3 《內插法》：

林丕靜 / 著，「數值分析」，儒林圖書公司，西元 2001 年三月九版四刷。

4 《圖解法》：

林寶玉等四人，「大整數 a ， $\sqrt{a}$ 作圖法之探討」，中華民國中小學科學展覽第二十一屆至三十屆，第二十二屆國中組數學科展第一名，民國七十一年。