中華民國第42屆中小學科學展覽會

::: 作品說明書 :::

國中－數學科

科　　別：數 學 科

組　　別：國 中 組

作品名稱：從「4＝3」的圖形數談起

關 鍵 詞：「4＝3」切割法、最佳分數、誤差估計

編　　號：030407

學校名稱：

高雄市立三民國民中學

作者姓名：

黃寶璉、王貞之、邱絹絜、盧致宇

指導老師：

蔡震珊、黃昭勳

作品摘要：從“ 4=3 ”圖形數談起

在一次五子棋的廝殺中，為了避免弟妹干擾玩耍的興致，因此隨便抓了一把棋子讓他們玩玩，沒想到他們用了相同多的棋子，排成了三角形與四邊形的圖形。我們覺得蠻有趣的，因此我們想到一個研究的問題：「在移動最少棋子的條件限制下，將三角形數移成平行四邊形數」。我們稱這一個方法為「4＝3 切割法」，運用這個切割法的結論我們知道：

一、 所有的三角形數皆等於平行四邊形數(合數)。

二、 「三角形數＝菱形數」等價於「$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」的問題，而且在一億個 n 值當中，只有 10 個數值滿足「三角形數＝菱形數」。

三、 求$\sqrt{2}$的有理逼近分數並估計誤差。

四、 比較「4＝3 切割法」所求逼近$\sqrt{2}$的分數與連分數展開所計算的分數，展現有趣的關係。

綜合這些性質，我們發現研究主題皆與“ $\sqrt{2}$ ”息息相扣，在此不得不讚嘆「數」的美妙。

【從”4＝3”的圖形數談起】

壹、研究動機：

在一次五子棋的廝殺中，為了避免弟妹干擾玩耍的興致，因此隨便抓了一把棋子讓他們把玩，沒想到他們用了同樣多的棋子，排成了正三角形，然後又移動棋子排成了平行四邊形（第四冊『幾何圖形』)。突然靈感一來：「這種圖形的轉換可能和因數分解（第一冊）有關，若再配合數的性質探討如：質數、合數、完全平方數（第一冊與第三冊）可能就是解開這個問題的方向」。於是我們展開了奇妙的” 4＝3”的數學世界。

貳、研究目的：

一、從「4＝3」的圖形數轉換，定義「4＝3」切割法並證明。

二、利用「4＝3」切割法，求解「$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」的問題。

三、運用「4＝3」切割法，找$\sqrt{2}$的有理逼近分數。

四、運用「4＝3」切割法，找$\sqrt{2}$的有理逼近分數並估計誤差。

五、比較「4＝3」切割法計算$\sqrt{2}$」與「連分數展開計算$\sqrt{2}$」，所得數列的關係。

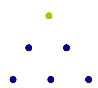
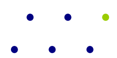
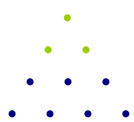
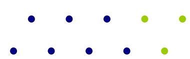
六、找其他逼近$\sqrt{2}$的有理數列，並證明電腦所提供的資訊。

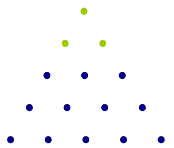
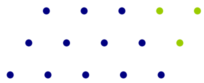
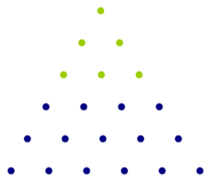
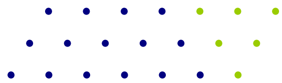
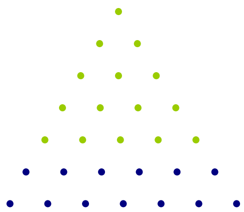
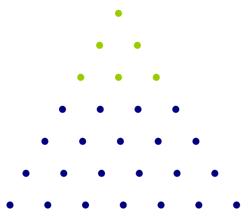
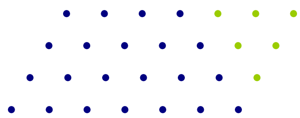
參、研究過程：

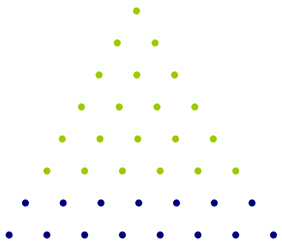
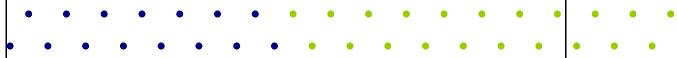
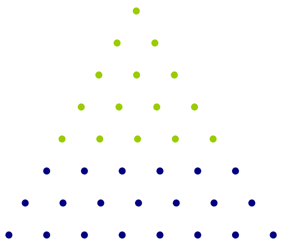
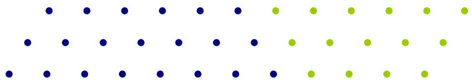
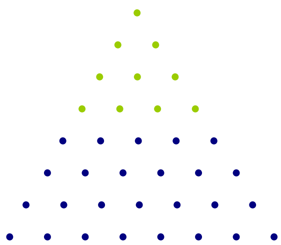
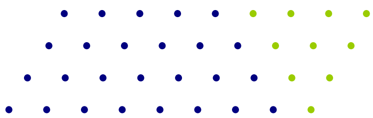
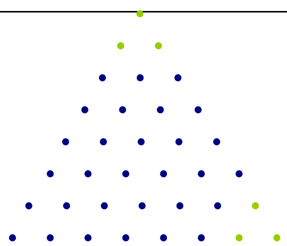
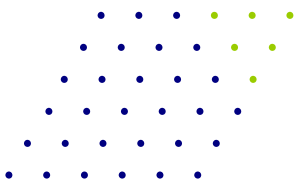
一、從「4＝3」的圖形數轉換，定義「4＝3」切割法並證明。

定義「4=3」切割法：在移動最少個數的條件下，將三角形數切割重排成平行四邊形數的圖形，稱為「4=3」切割法。我們一開始的動機就是要找移動個數最少的規律，我們令 n 為三角形數邊長個數，從 n=3~50 開始，透過實做收集資料。因為老師說啊…數學就是不斷觀察產生的喔！下表中綠色為移動的棋子，藍色為保留不動的棋子，我們利用因數分解得出結果，並將部分列於下表：

（表一）

n 值	原圖形（三角形數）	移動結果（平行四邊形數＝寬×長）	最少移動個數
3		 （6＝2×3）	$\sum_{i=1}^{1} i=1$
4		 （12=2×6）	$\sum_{i=1}^{2} i=3$

n 值	原圖形（三角形數）	移動結果（平行四邊形數＝寬×長）	最少移動個數
5		 （15=3×5）	$\sum_{i=1}^{2} i = 3$
6		 （21＝3×7）	$\sum_{i=1}^{3} i = 6$
7		 （28=2×14）	$\sum_{i=1}^{5} i = 15$
		 （28=4×7）	$\sum_{i=1}^{3} i = 6$

n 值	原圖形（三角形數）	移動結果（平行四邊形數＝寬x長）	最少移動個數
8		 (36=2×18)	$\sum_{i=1}^{6} i=21$
		 (36=3×12)	$\sum_{i=1}^{5} i=15$
		 (36＝4x9)	$\sum_{i=1}^{4} i=10$
		 (36=6×6)	$2\sum_{i=1}^{2} i=6$

根據上面之移動方式，我們從 $n\geq 9$ 開始只列出最少移動個數後所排成之平行四邊形（或菱形）的"寬×長"，並將 n 分成奇數及偶數表列如下：

（表二）

n 值	三角形數＝平行四邊形數＝寬×長	最少移動個數
9	45=5×9	$\sum_{i=1}^{4} i=10$
11	66=6×11	$\sum_{i=1}^{5} i=15$
13	91=7×13	$\sum_{i=1}^{6} i=21$
15	120=10×12	$\sum_{i=1}^{5} i+\sum_{j=1}^{3} j=21$
17	153=9×17	$\sum_{i=1}^{8} i=36$
19	190=10×19	$\sum_{i=1}^{9} i=45$
….	…	…
49	1225=35×35	$2\sum_{i=1}^{14} i=210$
10	55=5×11	$\sum_{i=1}^{5} i=15$
12	78=6×13	$\sum_{i=1}^{6} i=21$
14	105=7×15	$\sum_{i=1}^{7} i=28$
16	136=8×17	$\sum_{i=1}^{8} i=36$
18	171=9×19	$\sum_{i=1}^{9} i=45$
20	210=14×15	$\sum_{i=1}^{6} i+\sum_{j=1}^{5} j=36$
…	…	…
24	300=15×20	$\sum_{i=1}^{9} i+\sum_{j=1}^{4} j=55$
….	…	…
50	1275=25×51	$\sum_{i=1}^{25} i=325$

由實做所得的資訊，我們體認到：「將三角形數移成平行四邊形數」的問題，等價於「$\frac{n(n+1)}{2}=a\times b$」因數分解的形式（其中，$a\leq b$，$a$、$b$ 均為 $\frac{n(n+1)}{2}$ 之因數）。而

且我們更發現到最少移動棋子的方法是由 $\frac{n(n+1)}{2}$ 正因數所”分佈”的情形來決定。為了更清楚闡明此一事實，我們利用因數分解的對偶性將 $\frac{n(n+1)}{2}$ 所有正因數”定位”。

得到兩個結論：

$\boxed{\text{結論一}}$（證明見附錄一）

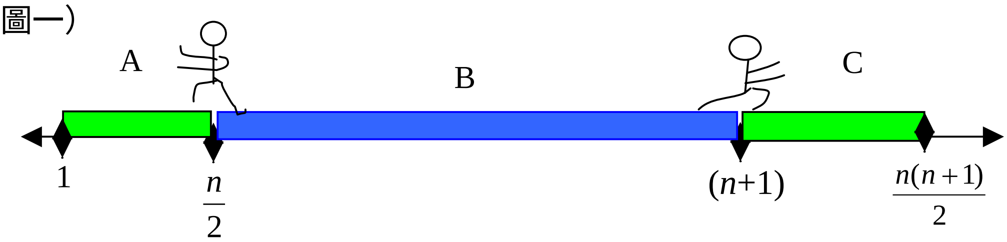
第一、若 a 點在 A 區，b 點必落在 C 區。

第二、若 a 點在 B 區，b 點必落在 B 區。

第三、若 a 點等於 $\frac{n}{2}$，則 b 點必等於 $(n+1)$ （n 為偶數，如圖一）

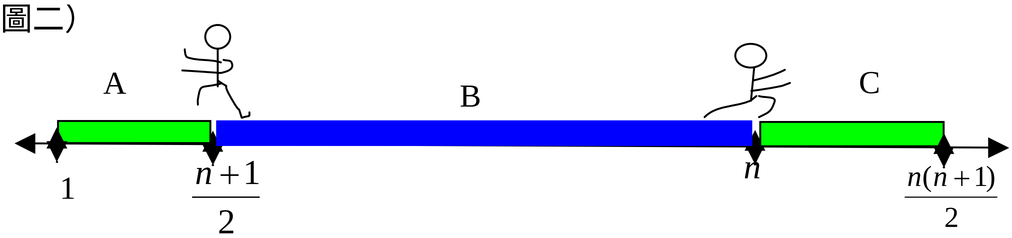
第四、a 點等於 $\frac{n+1}{2}$，則 b 點必等於 n（n 為奇數，如圖二）

（圖一）



A 區範圍 $[1, \frac{n}{2})$，B 區範圍 $(\frac{n}{2}, n+1)$，C 區範圍 $(n+1, \frac{n(n+1)}{2}]$

（圖二）



A 區範圍 $[1, \frac{n+1}{2})$，B 區範圍 $(\frac{n+1}{2}, n)$，C 區範圍 $(n, \frac{n(n+1)}{2}]$

由上述的數線圖與「端點守門員」所形成的「門檻」，我們可以得到「4=3」切割法的四點論證：

$\boxed{\text{結論二}}$（證明見附錄二）

第一、$n \geq 3$ 時，所有的三角形數皆可移動重排成平行四邊形。

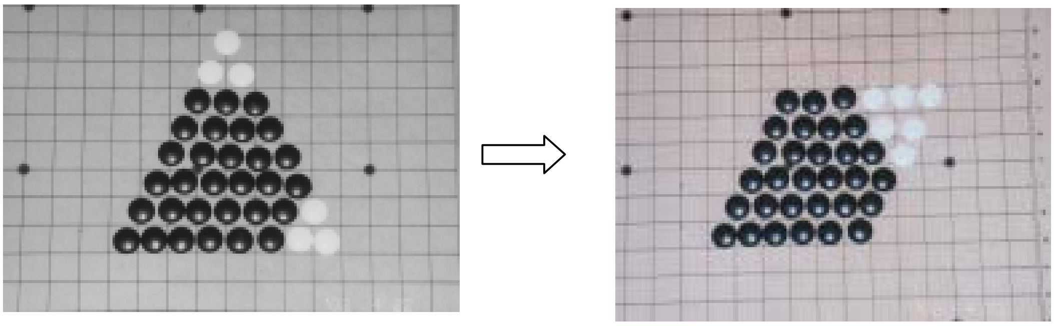
第二、若 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的因數完全被「擋在」B 區之外（門檻守得很好），則以寬和長落在兩「門檻」的因數分解形式，所移成的平行四邊形，移動個數最少。

第三、若 $\frac{n(n+1)}{2}$ 有因數進入 B 區（門檻守得不好），則在 B 區中的因數分解形式，一定比落在門檻上的因數分解形式要好（也就是移動個數較少）。

第四、$\frac{n(n+1)}{2}$進入 B 區的因數不只一組，則以「對偶因數」中，差距最小的那一組移動最少。利用實際圖形說明上面的移動方法：

$\frac{n(n+1)}{2}$有因數落在 B 區：其移動的方式，不管 n 為偶數還是奇數，皆是切掉上面及右下角兩個三角形後，往「右側中間」移動。移動總個數為[1+2+3+…..+(n-a)]＋[1+2+3+…+（n-b）] $=\sum_{i=1}^{n-a} i+\sum_{j=1}^{n-b} j=\frac{(n-a)^2+(n-a)}{2}+\frac{(n-b)^2+(n-b)}{2}$

（如圖三，以 n=8 舉例）。

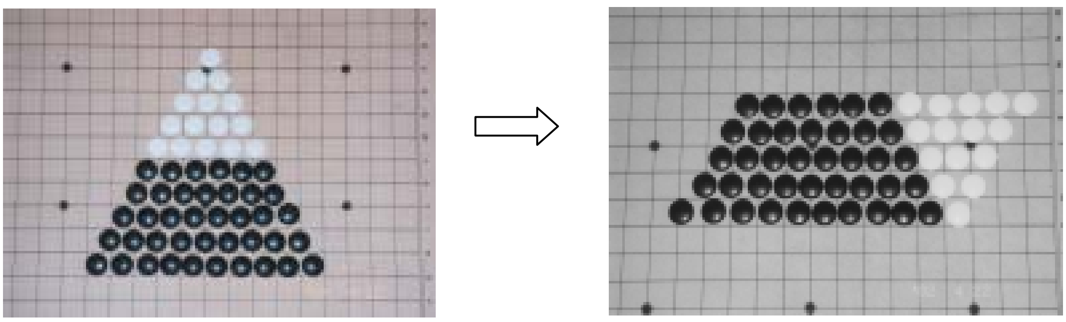


（圖三）

B 區沒有$\frac{n(n+1)}{2}$的因數：移動的方式是切掉頂端的一個三角形，整個往右下角補齊

n 為偶數：所形成之長方形的寬為 $a=\frac{n}{2}$、長為 $b=n+1$，移動總個數為：

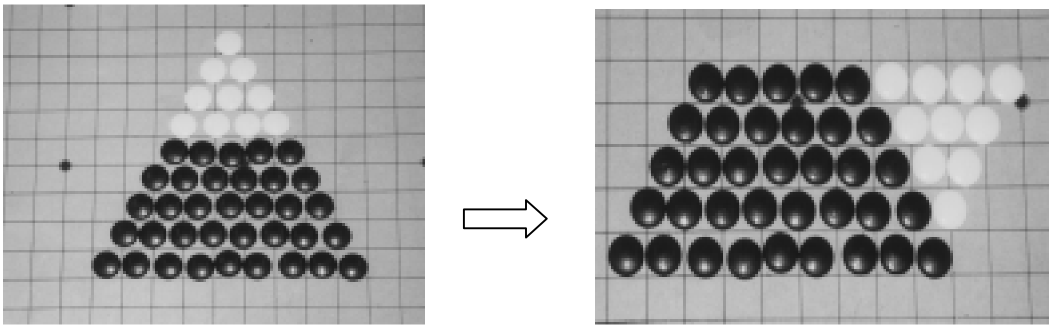
$\sum_{i=1}^{n/2} i=1+2+3+\ldots+\frac{n}{2}=\frac{n(n+2)}{8}$。（圖四，以 n=10 舉例）。



（圖四）

n 為奇數：所形成之長方形的寬為 $a=\frac{n+1}{2}$、長為 $b=n$，移動總個數為

$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i=1+2+3+\ldots+\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{8}$。（如圖五，以 n=9 舉例）。



（圖五）

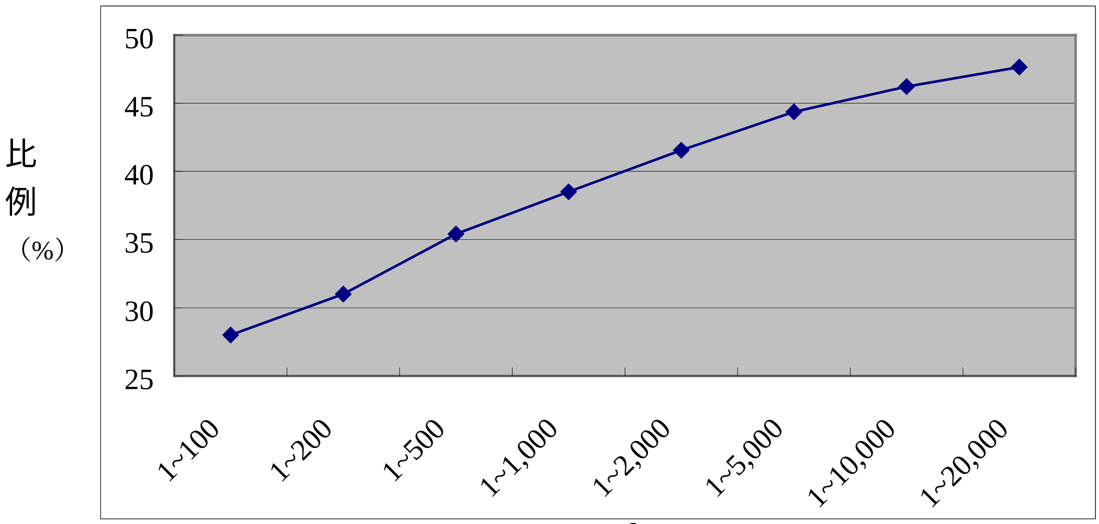
在實做過程中，我們產生了兩個疑問：

第一個：在「4=3」切割法中，切掉兩塊小三角形後，向「右側中間」移動，而排成平行四邊形的三角形總個數，應該比只能切掉一塊小三角形這一類的總數少吧？（會提出這個猜想是因為在 n=1~100 中，只有 28 個 n 值是可切成兩個三角形。）（數值資料見附錄三）

第二個：在「4=3」切割法中，「三角形數=菱形數」個數，應該不會太多？（在 $n=1$~100 中才找到 8 與 49 兩個）。

針對猜想一，我們目前無法證明出誰多誰少，故求助於電腦的計算幫我們做判斷，從數據中整理表格及圖顯示如下：(表三)

n 的範圍	需切成兩塊三角形者之個數	所佔比例（%）
1~100	28	28
1~200	62	31
1~500	177	35.4
1~1,000	385	38.5
1~2,000	831	41.55
1~5,000	2218	44.36
1~10,000	4622	46.22
1~20,000	9528	47.645



（圖六 n值範圍及比例的關係圖）

因為電腦一直當機，所以囉！我們只列出 20,000 以內需切掉兩塊小三角形重排成平行四邊形的個數。不過我們仍然發現了：範圍較小時，果然是切掉一塊的贏，但隨著所取 n 的範圍越大，切掉兩塊三角形的比例就慢慢追上了。研判電腦所獲得的資訊，我們的第一個猜想被電腦呈現的數據給顛覆了。雖然上面的統計圖並未呈現切掉兩塊三角形的總個數超過 50%，但可看出所佔的比例是呈上升趨勢。針對這種增加的趨勢，我們提出這樣的解釋：

「隨著 n 越大，兩門檻之間的距離就越大，在這麼一大段的距離當中 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的因數落入 B 區的機會也隨之增加」。

配合電腦所提供的資料與我們的解釋，重新修正了猜想一的想法了：

修正猜想一：

在「4=3」切割法中，切掉兩塊小三角形，向「右側中間」移動排成平行四邊形的三角形總數，應該比切掉一塊三角形而排成平行四邊形的總數多！如果不會比較多，兩者之間的比值應趨近於 1。

當然這一個猜想也未證出，那到底對不對？需配備更好的電腦或找到良好的證明方向才得知了。

猜想二：「三角形數等於菱形數」的個數應該不多？

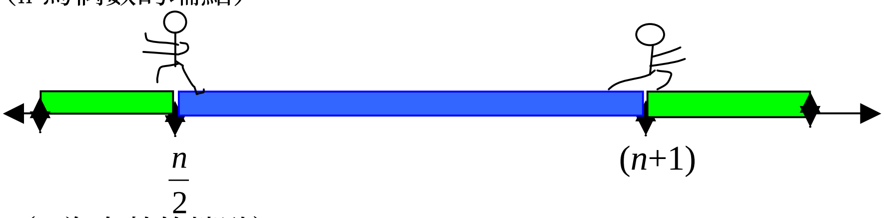
根據電腦所提供的數據得知：「切兩塊三角形拼成平行四邊形的個數」實在太多了，不好掌控，因此我們把焦點集中「三角形數等於菱形數」在的問題上，也就是

探討：『$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數』的問題。

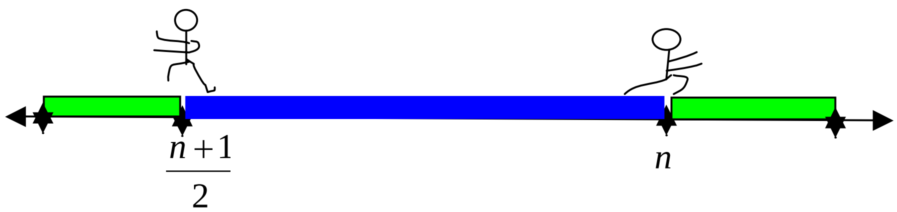
二、利用「4＝3」切割法，求解「$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數」的問題

我們利用「4=3」的四個切割結論，來解『$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數』的問題。原理如下：

(n 為偶數的端點)



(n 為奇數的端點)



第一：採用第五頁的結論，n 為偶數時我們令左端點＝$\frac{n}{2}$，右端點＝$n+1$；n 為奇數時我們令左端點＝$\frac{n+1}{2}$，右端點＝n。

第二：做因數分解：$\frac{n(n+1)}{2}=a\times b$，$a$＝左門檻、$b$＝右門檻（$a<b$）。將 a、b 再做因數分解得 $a=x_1y_1$、$b=x_2y_2$（令 $x_1\ge y_1, x_2\ge y_2$）。

第三：如果 $x_1<x_2$、$y_1<y_2$，取 $a_1=x_1y_2$、$b_1=x_2y_1$，則 a_1、b_1 兩數亦為 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的因數，且 a_1 與 b_1 兩因數「突破防守」，進入 B 區。(證明見附錄四)

第四：當 $a=x_1^2$（$x_1=y_1$）與 $b=x_2^2\ (x_2=y_2)$ 皆為完全平方數時，則 $a_1=b_1=x_1x_2$ 一定在 B 區，且切割重排後的圖形就是菱形。

經由上面的思考，我們得到一個相當有用的結論：

結論三

『三角形數=菱形數（完全平方數)』的問題等價於：
「門檻」的兩個端點皆為完全平方數。

利用上述的結論求解「$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數」的問題：

第一類：n 為偶數：兩端點分別為 $\frac{n}{2}$、$(n+1)$，令

$$\begin{cases}\dfrac{n}{2}=x^2\\ n+1=y^2\end{cases}$$ …………（∗）其中 x，y 為正整數

將（∗）整理得出方程式：$2x^2+1=y^2$（∗1），我們將利用它幫我們解出『$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數』的問題。但這個方程式國中沒有教如何求解，因此我們用”土法煉鋼”的方式，代入試驗，找出（∗1）解答。還好有電子計算機幫忙，起步還不算太難，再加上 y 一定是奇數，因此我們將 y=1、3、5、7、9……99 等逐一代入（∗1）中，用電子計算機計算 x 的值，再將 x 也是正整數的數對 (x,y) 找出，整理如下：

（表四）

y		x		附註
y_0	1	x_0	0	不是正整數解但有助於觀察故一併列出
y_1	3	x_1	2	第一組解
y_2	17	x_2	12	第二組解
y_3	99	x_3	70	第三組解

由表四，我們發現：x,y 第二、三組解滿足下面的形式：

$\begin{cases} x_2 = 6x_1 - x_0, & x_3 = 6x_2 - x_1 \\ y_2 = 6y_1 - y_0, & y_3 = 6y_2 - y_1 \end{cases}$，換句話說，整數解滿足$\square_{k+2}=6\square_{k+1}-\square_k$，的形式。

我們透過$\square_{k+2}=6\square_{k+1}-\square_k$ 的遞迴關係，求出（x_4, y_4）＝（408，577）再代入 $2x^2+1=y^2$ 中驗算，等號成立。透過這樣的方法，利用電腦收集正整數解，並計算 $\frac{y}{x}$ 之值，整理如表五：

(表五)

y_k	x_k	y_k/x_k 比值	y_k/x_k 數值	準確位數（小數點後）$\sqrt{2}\approx 1.41421356237310$
1	0	Inf	Inf	不是正整數解
3	2	$3/2$	1.50000000000000	0
17	12	$17/12$	1.41666666666667	2
99	70	$99/70$	1.41428571428571	4
577	408	$577/408$	1.41421568627451	5
3363	2378	$3363/2378$	1.41421362489487	6
19601	13860	$19601/13860$	1.41421356421356	8
114243	80782	$114243/80782$	1.41421356242727	9
665857	470832	$665857/470832$	1.41421356237469	11
3880899	2744210	$3880899/2744210$	1.41421356237314	13

由表五，我們得到一個結論：

$2x^2+1=y^2$ 之整數解(x_k, y_k)，滿足一個二階遞迴關係式

$$\begin{cases} y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k \\ x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k \end{cases},\quad 其中 \begin{matrix} y_1 = 3, y_2 = 17 \\ x_1 = 2, x_2 = 12 \end{matrix} \quad k = 1,2,3\ldots$$

老師說，試驗法所得的結論並不能當作是證明，需用數學歸納法證明這個結論為真，才可說完成證明。經過幾番的努力終於完成證明。(證明詳見附錄五)

到此我們透過 $2x^2+1=y^2$，解出『$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數』『一半』的解答：

結論四

當 $n = y_k^2 - 1$　　其中 $y_1 = 3, y_2 = 17$，　$y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k$，　k=1,2,3…時，

$\frac{n(n+1)}{2}$ 就為一完全平方數，此時三角形數=菱形數。(哈哈，解決一半了！！！)

第二類：n 為奇數：兩端點分別為 $\frac{n+1}{2}$、n，令

$$\begin{cases} \frac{n+1}{2} = x^2 \\ n = y^2 \end{cases}$$ …………（＊＊）其中 x，y 為正整數，

將（＊＊）整理得到方程式：$2x^2 = y^2 + 1$（＊＊2）。有了 n 為偶數的方法做基礎，我們如法炮製，運算後發現 n 為奇數的結論和偶數一模一樣。

利用電腦收集正整數解，並計算 $\frac{y}{x}$ 值整理如表六： （表六）

y_k	x_k	y_k/x_k 比值	y_k/x_k 數值	準確位數（小數點後）$\sqrt{2} \approx 1.41421356237310$
1	1	1	1.00000000000000	0
7	5	$7/5$	1.40000000000000	1
41	29	$41/29$	1.41379310344828	2
239	169	$239/169$	1.41420118343195	4
1393	985	$1393/985$	1.41421319796954	6
8119	5741	$8119/5741$	1.41421355164605	7
47321	33461	$47321/33461$	1.41421356205732	9
275807	195025	$275807/195025$	1.41421356236380	10

同樣的，我們得到一個結論：

方程式 $2x^2 = y^2 + 1$ 之整數解 (x_k, y_k)，分別滿足一個二階遞迴關係式

$$\begin{cases} y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k \\ x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k \end{cases}$$，其中 $\begin{matrix} y_1 = 1, y_2 = 7 \\ x_1 = 1, x_2 = 5 \end{matrix}$ $k = 1,2,3\ldots$（證明方法同附錄五，略）

透過上面的討論，我們利用 $2x^2 = y^2 + 1$ 之方程式，將『$\frac{n(n+1)}{2}$ ＝完全平方數』『另一半』解答出來了。

$\boxed{\text{結論五}}$

當 $n = y_k^2$ 其中 $y_1 = 7, y_2 = 41$，$y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k$，k=1,2,3….時，

$\frac{n(n+1)}{2}$ 就為一完全平方數，此時三角形數=菱形數。（哈哈，全部解出來了！！！）

到此我們完全解決猜想二的問題：<三角形數＝菱形數>，藉由上面的方法我們可以算出，$3 \le n \le 100{,}000{,}000$ 中產生菱形數的地方為：

『8、49、288、1,681、9800、57,121、332,928、1,940,449、11,309,768、65,918,161』

此結果頗讓我們感到驚訝，雖然預期很少（因為 1~50 有兩個），但研究的結果竟然發現「一億之中才十個而已」，猜中的機率比中『樂透』彩的五百四十萬分之一還小。

真想不到！！

三、運用「4＝3」切割法，找 $\sqrt{2}$ 的有理逼近分數

上一個研究中，我們利用「4=3」的切割理論，完全解出『$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數』的問題。在解題個過程中，我們發現一種計算 $\sqrt{2}$ 近似值得方法，而這種計算方法的可行性，是架構在我們先前所定的門檻中，「右門檻幾乎是左門檻的兩倍上，而且兩門檻距離越遠，比值越接近 2」。

第一類：n 為偶數

$$\begin{cases} \dfrac{n_k}{2} = x_k^2 \text{-------}(1) \\ n_k + 1 = y_k^2 \text{----}(2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \left(\frac{y_k}{x_k}\right)^2 = \frac{2(n_k+1)}{n_k}$$

$$\Rightarrow \frac{y_k}{x_k} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{n_k+1}{n_k}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1+\frac{1}{n_k}} \text{-----} \quad (3)$$

根據上個研究，我們知道 $\frac{y_k}{x_k}$ 為 $2x^2+1=y^2$ 之整數解的比值，且由（3）得知分母 x_k 越大，$\frac{y_k}{x_k}$ 越接近 $\sqrt{2}$，所以$\{\frac{y_k}{x_k}\}$為逼近 $\sqrt{2}$ 遞減數列。

（數列：$\{\frac{y_k}{x_k}\} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70} \cdots\right\}$）。

第二類：n 為奇數

$$\begin{cases} \dfrac{n_k+1}{2} = x_k^2 \text{-------}(1') \\ n_k = y_k^2 \text{----}(2') \end{cases}$$

$$\frac{(2')}{(1')} \Rightarrow \left(\frac{y_k}{x_k}\right)^2 = \frac{2n_k}{(n_k+1)}$$

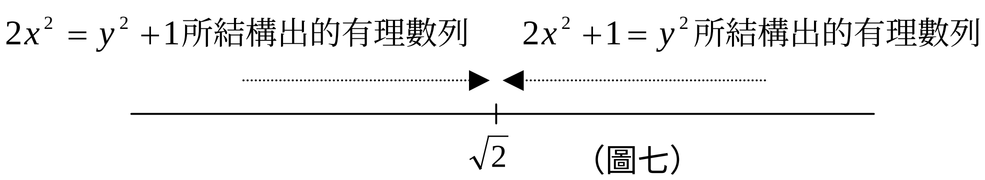
$$\Rightarrow \frac{y_k}{x_k} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{n_k}{n_k+1}} = \sqrt{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{n_k+1}} \text{ ----- } (3')$$

同樣的，我們知道$\frac{y_k}{x_k}$為$2x^2 = y^2 + 1$之整數解的比值，且由（3'）知道分母x_k越大，$\frac{y_k}{x_k}$越近$\sqrt{2}$，所以$\{\frac{y_k}{x_k}\}$為逼近$\sqrt{2}$遞增數列。(數列：$\{\frac{y_k}{x_k}\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169} \cdots\right\}$)。

透過上面的推導我們可得到下面五個論證：

$\boxed{\text{結論六}}$（證明見附錄六）

第一：兩數列皆逼近$\sqrt{2}$。圖示如下：



(圖七)

第二：「分母越大，離$\sqrt{2}$越近」。

第三：每個分數均為最簡分數。

第四：$2x^2 + 1 = y^2$整數解的比值：分子為奇數、分母為偶數 。

第五：$2x^2 = y^2 + 1$整數解的比值：分子為奇數、分母為奇數。

透過我們的方法，可找到兩串分數數列，皆逼近$\sqrt{2}$。再回到我們遇到的遞迴關係，這是我們頭一次碰到的新概念。故上網搜尋資料，在師大的網站上找到了二階遞迴數列通解的表現式（見附錄七），我們直接套用求出數列$\{x_k\}$通解，並估算數列中每一項與$\sqrt{2}$的誤差範圍。

四、「4＝3」切割法，找$\sqrt{2}$的有理逼近分數並估計誤差

透過方程式$2x^2 + 1 = y^2$得到一逼近$\sqrt{2}$的遞減數列：，$\left\{\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70} \cdots\right\}$ 取分母成一新的數列$\{x_k\}$＝{2、12、70、……}，它為二階遞迴數列，透過在網站所查的資料，計算x_k的通解表現式：$x_k = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k]$，k=1，2，3…。

利用上面的數值做 $\frac{y_k}{x_k}$ 與 $\sqrt{2}$ 之誤差估計，（過程見附錄八）得：

$$\left|\frac{y_k}{x_k}-\sqrt{2}\right|<\frac{1}{3\times 5^{k-2}}$$

k=1,2,3....由此誤差估計的形式可以得到下列結論：

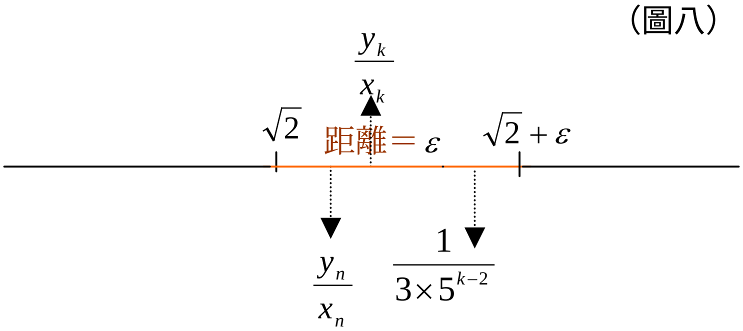
結論七

第一：在 $\sqrt{2}$ 的右側任取一小段距離 ε，我們一定可以找到足夠大的 k，使得 $\frac{1}{3\times 5^{k-2}}<\varepsilon$，故可看出不管 ε 多小，一定可以一個找到 $\frac{y_k}{x_k}$ 在此距離之中。

第二：當 $n>k$ 時，$\frac{y_n}{x_n}<\frac{y_k}{x_k}<\varepsilon$。所以不管距離取的多小，皆存在無窮多個 $\frac{y_n}{x_n}$ 逼近 $\sqrt{2}$。

圖示如下：

（圖八）



再透過方程式 $2x^2=y^2+1$ 所得到逼進 $\sqrt{2}$ 的數列，取分子成一新的數列：

$\{y_k\}$＝{1、7、41、239……}，它為二階遞迴數列，計算 $\{y_k\}$ 的通解表現式：

$$y_k=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{k-1}-(2-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{k-1}],\ k=1,2,3\cdots。$$

同樣，我們可推得 $\sqrt{2}-\frac{y_k}{x_k}<\frac{1}{4\times 5^{k-2}}$，k=1、2、3…。由此誤差估計的形式可以得到下列結論由此誤差估計的形式可以看出：

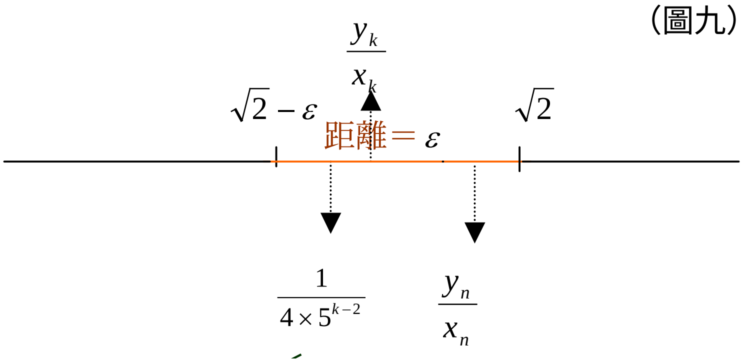
結論八

第一：在 $\sqrt{2}$ 的左側取任一小段距離 ε，我們一定可以找到足夠大的 k，使得 $\frac{1}{4\times 5^{k-2}}<\varepsilon$，因此不管 ε 多小，一定可以找到一個 $\frac{y_k}{x_k}$ 在此距離之中。

第二：當 $n>k$ 時，$\frac{y_k}{x_k}<\frac{y_n}{x_n}<\varepsilon$。故不管距離取的多小，皆存在無窮多個 $\frac{y_n}{x_n}$ 逼近 $\sqrt{2}$

圖示如下：

（圖九）



透過上面的誤差估計，我們很清楚的知道，$\sqrt{2}$ 這一個數值的「附近」，有無窮多個有理數靠近它，而且這些有理數最後幾乎是「擠成一團」。所以 $\sqrt{2}$ 不會孤單，它的身旁永遠有無窮多個朋友陪伴它。

五、「4＝3」切割法計算 $\sqrt{2}$ 」與「連分數展開計算 $\sqrt{2}$ 」，所得數列的關係。

由探討「4=3」圖形數的轉換，我們發展出計算 $\sqrt{2}$ 近似值的方法，但針對無理數逼近的問題，一般常使用的方法為「連分數展開」。我們想了解一下，用我們的方法來逼近 $\sqrt{2}$，有沒有比「連分數展開」法「快」呢？

（一）比較連分數展開法與「4=3」切割法所得數列

$\sqrt{2}$ 表為連分數：$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$ ，記為[1，2，2，2，2.........]

即第一項=$\frac{1}{1}$，

第二項[1，2]$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

第三項[1，2，2]$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}$，

第四項：[1，2，2，2]$=\frac{17}{12}$，

第五項：[1，2，2，2，2]＝$\frac{41}{29}$，

……依此類推，可得到連分數展開的漸進分數數列。

利用前面我們所得之$\sqrt{2}$的兩個漸近分數數列，與$\sqrt{2}$用連分數展開所得的漸進分數做比較，令人驚訝的是，我們用「4=3」切割法所得的兩個數列，恰好構成用連分數展開所得的漸進分數。即：

$\boxed{\text{結論九}}$

第一：利用方程式 $2x^2+1=y^2$，得到之整數解比值$\frac{y}{x}$，恰為$\sqrt{2}$利用連分數展開之 2，4，6，8，10…項。（n 為偶數時）

第二：利用方程式 $2x^2=y^2+1$，得之整數解比值$\frac{y}{x}$，恰為$\sqrt{2}$利用連分數展開之 1，3，5，7，9…項。（n 為奇數時）

將上述的關係以對照表呈現如下：

連分數數列：

$\frac{1}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{17}{12}$、$\frac{41}{29}$、$\frac{99}{70}$、$\frac{239}{169}$、$\frac{577}{408}$、$\frac{1393}{985}$、$\frac{3363}{2378}$、$\frac{8119}{5741}$、$\frac{19601}{13860}$、$\frac{47321}{33461}$..

偶數：$\frac{3}{2}$、$\frac{17}{12}$、$\frac{99}{70}$、$\frac{577}{408}$、$\frac{3363}{2378}$、$\frac{19601}{13860}$…

奇數：$\frac{1}{1}$ $\frac{7}{5}$、$\frac{41}{29}$、$\frac{239}{169}$、$\frac{1393}{985}$、$\frac{8119}{5741}$、$\frac{47321}{33461}$..

（二）誰收斂的快：

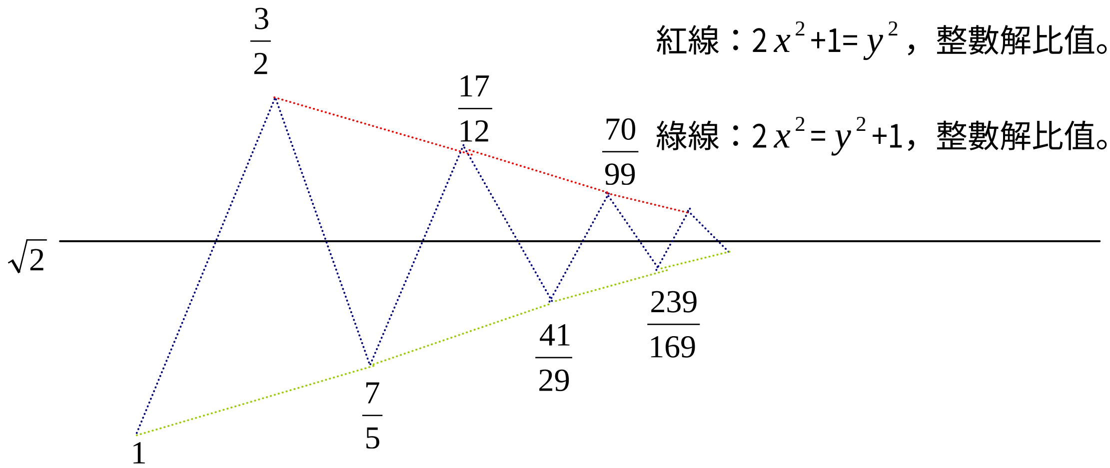
因此回到開頭我們所問的問題：「哪一種方法逼近的比較快？」，由上面的對照表我們可清楚的看出，我們的方法逼近到$\sqrt{2}$的數度較快。（圖示說明如圖十）

（圖十）

藍線：連分數展開法。

紅線：$2x^2+1=y^2$，整數解比值。

綠線：$2x^2=y^2+1$，整數解比值。



（三）「為什麼這麼巧？」

結論九是一個有趣的現象，從對照表來看，我們不得不讓我們佩服”數的奧妙”：「由三個不同的計算式子，竟然有著類似『遺傳性質：後代保有父母親的特徵』」。這種『情節』和好像在尋找多年失散的親人一樣，會心一笑！

這是一個巧合嗎？經過一段時間的思考，再和老師討論，尋取有用的資料之後，我們發現，這不是一個「巧合」，它是一個「必然」的結果。它是由

第一、有理逼近的兩個定理。

第二、$\sqrt{2}$ 數展開所成部分商的結構。

第三、「4=3」切割結論。

三個「數學性質」所決定。在說明這個「巧合」之前，先介紹何謂最佳分數：

「最佳分數」：$\frac{p}{q}$ 比一切分母不大於 q 的分數，都更接近無理數 x，稱 $\frac{p}{q}$ 為<u>最佳分數</u>。

現在開始為說明$\boxed{\text{結論九}}$鋪路，分三個部分說明如下：

1、有理逼近的兩個定理：

將無理數展開成連分數 x=$[a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,\Lambda\ ]$，得各漸進分數分別為：

$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}$，$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1}$，$\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_3}{q_3}\cdots$等。其中 $\frac{p_i}{q_i}=\frac{a_ip_{i-1}+p_{i-2}}{a_iq_{i-1}+q_{i-2}}$。

定理一：在分母不大於 $q_1=a_1$ 的一切分數中，只有：

$a_0+\frac{1}{q}$ 是最佳分數。（其中 $\frac{a_1+1}{2}\le q\le a_1$）

定理二：設 $n\ge 2$，在分母大於 q_{n-1}，但不大於 q_n 的一切分數中，只有

$\frac{t_ip_{i-1}+p_{i-2}}{t_iq_{i-1}+q_{i-2}}$ 是最佳分數。（其中 $\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)<t_i\le a_n$）。

$x_n=[a_n,a_{n+1},a_{n+2}\cdots]$

「（節錄自「數學歷史典故　梁宗巨著」之 p.216~217）」

2、連分數展開 $\sqrt{2}$ ＝[1，2，2，2，2……….]，套用有理逼近理論定理一、定理二，可將 $\sqrt{2}$ 的所有最佳分數寫出（加框者是用上述定理算出的項，未加框者是 $\sqrt{2}$ 連分數展開的漸進分數）如下

$\frac{1}{1}$、$\frac{3}{2}$、$\boxed{\frac{4}{3}}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{17}{12}$、$\boxed{\frac{24}{17}}$、$\frac{41}{29}$、$\frac{99}{70}$、$\boxed{\frac{140}{99}}$、$\frac{239}{169}$、$\frac{577}{408}$、$\boxed{\frac{816}{577}}$、$\frac{1393}{985}$、$\frac{3363}{2378}$、$\boxed{\frac{4756}{3363}}$、$\frac{8119}{5741}$、$\frac{19601}{13860}\cdots$

為了討論方便，我們把 $\sqrt{2}$ 之最佳分數依分子與分母奇偶性分成三大類：得到結論十

$\boxed{\text{結論十}}$

令集合 A={$\sqrt{2}$ 之最佳分數所成的集合}，$\mathrm{I}(A)$ 、$\Phi(A)$、$\Psi(A)$為 A 之子集合：

$\mathrm{I}(A)$={$\frac{1}{1}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{41}{29}$、$\frac{239}{169}$、$\frac{1393}{985}$、$\frac{8119}{5741}$、…}。(分子與分母皆奇數)

$\Phi(A)$={$\frac{3}{2}$、$\frac{17}{12}$、$\frac{99}{70}$、$\frac{577}{408}$、$\frac{3363}{2378}$、$\frac{19601}{13860}$…}。(分子為奇數、分母為偶數)

$\Psi(A)$={$\boxed{\frac{4}{3}}$、$\boxed{\frac{24}{17}}$、$\boxed{\frac{140}{99}}$、$\boxed{\frac{816}{577}}$、$\boxed{\frac{4756}{3363}}$…}。(分子為偶數、分母為奇數)

滿足兩個性質：A=$\mathrm{I}(A)\cup\Phi(A)\cup\Psi(A)$、$\mathrm{I}(A)\cap\Phi(A)\cap\Psi(A)=\psi$。

3、由「4=3」切割法我們知道下面的事實：

$\boxed{\text{結論十一}}$(說明見附錄九)

設集合 $R(A)$={$2x^2+1=y^2$整數解的比值}所成的集合。

集合 $L(A)$={$2x^2=y^2+1$整數解的比值}所成的集合。

則 $R(A)$、$L(A)$中的元素，皆為 $\sqrt{2}$ 的最佳分數。

到此，我們可以開始說明「產生」$\boxed{\text{結論九}}$的原因了：

(四)「原來如此」

1、求證：$R(A)=\Phi(A)$

($2x^2+1=y^2$ 整數解比值 $\frac{y}{x}$，恰為 $\sqrt{2}$ 利用連分數展開之偶數項)

證明：因為 $R(A)$中的元素，皆為 $\sqrt{2}$ 的最佳分數，且分子為奇數、分母為偶數。

所以任意 $\alpha\in R(A)$，則 $\alpha\in\Phi(A)$，故 $R(A)\subseteq\Phi(A)$。

另一方面 $\Phi(A)$={$\frac{3}{2}$、$\frac{17}{12}$、$\frac{99}{70}$、$\frac{577}{408}$、$\frac{3363}{2378}$、$\frac{19601}{13860}$…}之中。

第一個解：$\frac{3}{2}$、第二個解 $\frac{17}{12}$ x,y 帶入 $2x^2+1=y^2$ 等號成立，再用歸納法證明 $\Phi(A)$中所有的解帶入都對(證明見附錄五)。所以 $\alpha\in\Phi(A)$，則 $\alpha\in R(A)$，$\therefore\Phi(A)\subseteq R(A)$。故 $R(A)=\Phi(A)$。

2、求證：$L(A)=\mathrm{I}(A)$。

($2x^2=y^2+1$ 整數解比值 $\frac{y}{x}$，恰為 $\sqrt{2}$ 利用連分數展開知奇數項)

證明：因為 $L(A)$中的元素，皆為 $\sqrt{2}$ 的最佳分數，且分子為奇數、分母為奇數 。

所以任意 $\alpha\in L(A)$，則 $\alpha\in\mathrm{I}(A)$，故 $L(A)\subseteq\mathrm{I}(A)$。

另一方面 $\mathrm{I}(A)$={$\frac{1}{1}$、$\frac{7}{5}$、$\frac{41}{29}$、$\frac{239}{169}$、$\frac{1393}{985}$、$\frac{8119}{5741}$、…}。

第一個解：$\frac{1}{1}$、第二個解：$\frac{7}{5}$的 x, y 帶入$2x^2 = y^2 + 1$中等號成立，再用歸納法證明$\mathrm{I}(A)$所有的解帶入都對。所以 $\alpha \in \mathrm{I}(A)$，則$\alpha \in L(A) \therefore \mathrm{I}(A) \subseteq L(A)$。故$L(A)=\mathrm{I}(A)$。
因此可以證明出結論九的結果：「會崁的剛剛好」。

（五）「$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」與$\sqrt{2}$的關係

從$\sqrt{2}$用連分數展開所成的漸進分數中，取出分子得到一個新的數列{1、3、7、17、41、99、239、577、1393、3363、8119、19601、47321、……}，配合上頁的對照表，我們可以看到：「讓$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」n 的解答，隱藏在$\sqrt{2}$用連分數展開所成的漸進分數的分子中。也就是：

> 奇數項分子平方，與偶數項分子的平方-1，
> 恰恰組成使$\frac{n(n+1)}{2}$＝完全平方數的所有解答，神奇吧！！

再換另一個角度：為了解決「$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」的問題，利用「4=3」切割法，將問題轉換成「端點是兩個完全平方數的問題」來計算，得到兩個數列他們的極限值皆等於$\sqrt{2}$。換句話說由$\frac{n(n+1)}{2}=$完全平方數」的問題出發可得$\sqrt{2}$的近似值，且要多近就有多近。到此真的佩服「數」本身巧妙的安排。

六、找其他逼近$\sqrt{2}$的有理數列，並證明電腦所提供的資訊。

在上一個研究中，我們將$\sqrt{2}$的最佳分數可分成三個子集合：

$\mathrm{I}(A)=\{\frac{1}{1}、\frac{7}{5}、\frac{41}{29}、\frac{239}{169}、\frac{1393}{985}、\frac{8119}{5741}、\cdots\}$。(分子與分母皆奇數)

$\Phi(A)=\{\frac{3}{2}、\frac{17}{12}、\frac{99}{70}、\frac{577}{408}、\frac{3363}{2378}、\frac{19601}{13860}\cdots\}$。(分子為奇數、分母為偶數)

$\Psi(A)=\{\boxed{\frac{4}{3}}、\boxed{\frac{24}{17}}、\boxed{\frac{140}{99}}、\boxed{\frac{816}{577}}、\boxed{\frac{4756}{3363}}\cdots\}$。(分子為偶數、分母為奇數)

且知道$\mathrm{I}(A)$、$\Phi(A)$與方程式的對應關係：

$\mathrm{I}(A) \Leftrightarrow 2x^2+1=y^2$。

$\Phi(A) \Leftrightarrow 2x^2=y^2+1$。

我們想，那$\Psi(A)$能不能找到一個方程式和它對應呢？答案是：「有」。我們找到：

$\Psi(A) \Leftrightarrow 2x^2 = y^2 + 2$，的對應關係。

　　我們發現三個子集合所對應的不定方程皆為 $2x^2 + k = y^2$ 的形式，$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$。

因此我們將計算 $2x^2 + 1 = y^2$ 電腦程式中的 1，改成其它常數 2，3，4，5…後，用電腦

計算發現此法也可得到逼近 $\sqrt{2}$ 的其它分數數列：

$\{\frac{2}{1}, \frac{10}{7}, \frac{58}{41}, \frac{338}{239}, \Lambda\Lambda\}$（用 $2x^2 + 2 = y^2$ 計算）

$\{\frac{3}{1}, \frac{5}{3}, \frac{13}{9}, \frac{27}{19}, \frac{75}{53} \Lambda\Lambda\}$（用 $2x^2 + 7 = y^2$ 計算）。

但由電腦所呈現的資訊發現在 k＝3、5、6、…等時，$2x^2 + k = y^2$ 無正整數解。

（見附錄十）

因此我們思考另一個問題：「如何證明電腦所展現的訊息呢？」。在第六冊數學課本中提到一個觀念：「用『同餘』可將正整數分成幾個公差相等的等差數列」，例如：取 2 作為除數可簡單的將正整數分成兩大類，奇數與偶數；取 3 作為除數可將正整數分成餘 0、1、2 三大類；依此類推。另一方面，在日常生活的經驗中，我們用濾網過濾雜質，濾網越密濾的越乾淨。運用同樣的想法，我們可以證明電腦所提供的資訊。方法就是把除數比喻為「濾網密度」，除數越大代表濾網越密，因此我們我們自己訂作「數學濾網」如下：

第一個濾網：2^1，（2 條格線）

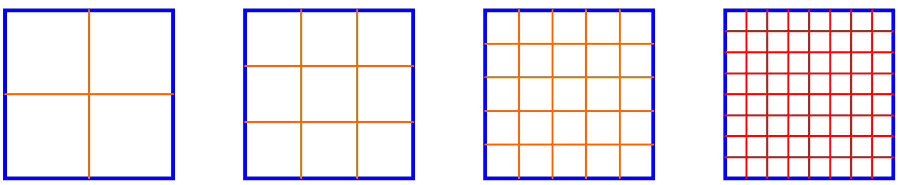
第二個濾網：2^2，（4 條格線）

第三個濾網：2^3，（8 條格線）

第四個濾網：2^4，（16 條格線）…依此類推。（次方越大，濾網越密）。

如圖十一：

濾網：2^1　　濾網：2^2　　濾網：2^3　　濾網：2^4



（圖十一）

利用我們自訂的「濾網」，去「過濾」不定方程 $2x^2 + k = y^2$ 無正整數的「雜質」。

（證明過程見附錄十一）上頁測量的結果整理如表七：

（表七）

度量 $2x^2 + k = y^2$ 方程式	
濾網	過濾結果
2^1	間隙太大，無法量出。
2^2	間隙太大，無法量出。
2^3	濾出：k=3+8t、k=5+8t，t=0,1,2,3…時 $2x^2 + k = y^2$ 方程式沒有正整數解。

2^4	濾出：k=3+16t、k=5+16t、k=6+16t、k=10+16t、k=11+16t、k=13+16t, k=0,1,2,3…時 $2x^2$+k=y^2方程式沒有正整數解。

由上表可看出，用2^3量出的值，用2^4也可量出，而且2^4量出更多的數值出來，也就是說量的越準，當然用$2^5,2^6,2^7,\cdots$當濾網又可量出更多無解的「雜質」。

肆、結論

為了解決"4=3"的問題，我們利用了幾個國中課程中學過的因數分解及互質的定義（第一冊)、方程式解的定義（第二冊)、因式分解（第三冊）與老師額外補充的概念，得到一些令我們覺得相當驚訝的結果。我們一致有種默契：『數學並非為天才而存在』，數學也可以這麼有趣，如果多用一點心，一樣可以享受研究的樂趣。

終於到了最後總結的部分，我們再提供一件有趣的性質，呼應一開始所討論的方程式：

$2x^2+1=y^2$整數解的二階遞迴關係：

$$\begin{cases} y_{k+2}=6y_{k+1}-y_k \\ x_{k+2}=6x_{k+1}-x_k \end{cases} \text{，其中} \begin{matrix} y_1=3, y_2=17 \\ x_1=2, x_2=12 \end{matrix} \quad k=1,2,3....$$

透過簡單的推導還可得到其他有趣的關係式，有興趣的讀者你也可動筆寫寫，相信你一定可以再找出其他的遞迴關係，拜拜！！！

有趣的遞迴關係：(1) $x_n+y_n+x_{n+1}=y_{n+1}$、(2) $3x_n+2y_n=x_{n+1}$、(3) $4x_n+3y_n=y_{n+1}$

伍、參考資料：

一、國民中學教科書： 國立編譯館　第一冊：因數與倍數、第二冊：聯立方程式、近似值與方根、第四冊：簡單幾何圖形。

二、梁宗巨：數學歷史典故 九章出版社。

三、張景中：從$\sqrt{2}$談起 凡異出版社。

四、鄭錦聰：MATLAB 入門引導 全華科技圖書公司。

五、費氏數列二階遞迴網址：www.ntnu.edu.tw/~maco/arith17.htm1

六、遠山啟：我的數學入門（下）異出版社。

附錄一：求證：

第一、若 a 點在 A 區，b 點必落在 C 區。
第二、若 a 點在 B 區，b 點必落在 B 區。
第三、若 a 點等於 $\frac{n}{2}$，則 b 點必等於 $(n+1)$ 。
第四、a 點等於 $\frac{n+1}{2}$，則 b 點必等於 n。

證明：當 n 為偶數時：

（一）A 區範圍 $[1, \frac{n}{2})$，B 區範圍（$\frac{n}{2}$，n+1)，C 區範圍（n+1，$\frac{n(n+1)}{2}$]

$\because \frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}\times(n+1)=a\times b$

$\therefore$ 當 $a<\frac{n}{2}$，$\frac{n(n+1)}{2}\div a=k(n+1)=b$

$\because k>1$，$\therefore b>(n+1)$，故 b 點必落在 C 區。

（二）當 $a\in\left(\frac{n}{2},n+1\right)$ 時，則

$\frac{n(n+1)}{2}\div a=b$，$b\in\left(\frac{n}{2},n+1\right)$，故 b 點必落在 B 區。

（三）$\because \frac{n}{2}\times(n+1)=a\times b$，$\therefore$ a 點等於 $\frac{n}{2}$，則 b 點必等於 $(n+1)$ 。

（四）$\because \frac{n}{2}\times(n+1)=a\times b$，$\therefore$ a 點等於 $\frac{n}{2}+1$，則 b 點必等於 n 。

附錄二：

第一、$n\geq 3$ 時，所有的三角形數皆可移動重排成平行四邊形。

第二、若 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的因數完全被「擋在」B 區之外（門檻守得很好），則以寬和長落在兩「門檻」的因數分解形式，所移成的平行四邊形，移動個數最少。

第三、若 $\frac{n(n+1)}{2}$ 有因數進入 B 區（門檻守得不好），則在 B 區中的因數分解形式，一定比落在門檻上的因數分解形式要好（也就是移動個數較少）。

第四、$\frac{n(n+1)}{2}$ 進入 B 區的因數不只一組，則以「對偶因數」中，差距最小的那一組移動最少。利用實際圖形說明上面的移動方法：

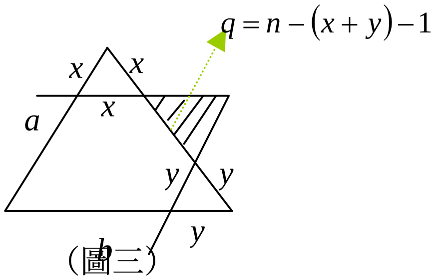
證明：

（1）$n\geq 3$ 時，若 n 為偶數，則 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{2}\times(n+1)$；$n$ 為奇數，則 $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}\times n$，故得知三角形數皆可移動排成平行四邊形。

（2）明顯的看出切掉一塊的方法以落在兩端點的方法最好。（證明略）

(3) 在同一個三角形中若能切掉兩個三角形排成一個平行四邊形，此方法一定比切掉一塊三角形的好。【以 n 為偶數為例】。

令：三角形數之邊長為 n，切掉兩塊之正三角形之邊長分別 x、y，保留的邊長分別為 a、b，要填補三角形的邊成為 q。(如右圖三)



(圖三)

若 $x+y<\frac{n}{2}$，則切掉的兩個三角形根本不可能補滿斜線部分。所以如果想切掉兩塊三角形排成平行四邊形，必需滿足 $(x+y) \geq \frac{n}{2}$。最壞的情形 $q=\frac{n}{2}-1$。又切掉一塊最好的方法是切掉 $\frac{n}{2}$，$\frac{n}{2}-1<\frac{n}{2}$。故切掉兩塊三角形的方法一定比切掉一塊的好。(n 為奇數時證法同上，略)

(4) 在切掉兩塊之中以邊長差距越小，所需移動的棋子最少。

$\because$ $(a+b)+(x+y)=2n$,

$\Rightarrow$ $(a+b)$ 越小，$(x+y)$ 越大,

$\Rightarrow$ $(x+y)$ 越大，$q=n-(x+y)$ 越小,

$\Rightarrow$ q 越小，所移動的棋子就越少。

又因 ab 為一定值(等於三角形數)，故由 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

可得知 $|a-b|$ 越小則 $(a+b)$ 越小，故得證。

附錄三：1~100 中可切掉兩塊三角形的有：

8、15、20、24、27、32、35、39、44、48、49、51、54、55、56、63、64、65、68、75、80、84、87、90、92、95、98、99

附錄四：

因數分解：$\frac{n(n+1)}{2}=a\times b$, a=左門檻、b=右門檻 ($a<b$)。且 $a=x_1y_1$、$b=x_2y_2$ (令 $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2$)。若 $x_1<x_2$、$y_1<y_2$，取 $a_1=x_1y_2$、$b_1=x_2y_1$，則 a_1、b_1 亦為 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的因數，且 a_1 與 b_1 兩因數「突破防守」，進入 B 區。

證明：當 n 為偶數時，$a=\frac{n}{2}=x_1y_1$，$b=n+1=x_2y_2$

$\therefore \frac{n}{2}=x_1y_1<x_1y_2<x_2y_2=b$，故 $a_1=x_1y_2$ 進入 B 區。

$\therefore \frac{n}{2}=x_1y_1<x_2y_1<x_2y_2=b$，故 $b_1=x_2y_1$ 進入 B 區。

附錄五：方程式 $2x^2+1=y^2$ 的解以二階遞迴的方式表出：

$$\begin{cases} x_{k+2}=6x_{k+1}-x_k \\ y_{k+2}=6y_{k+1}-y_k \end{cases}$$ 其中 k=1，2，3.....

證明：已知（x_1,y_1）、(x_2,y_2) 為 $2x^2+1=y^2$ 的解，則 (x_3,y_3) 時，滿足

$$\begin{cases} x_3=6x_2-x_1=6\times 12-2=70 \\ y_3=6y_2-y_1=6\times 17-3=99 \end{cases}$$ 代入 $2x^2+1=y^2$

$2\times 70^2+1=9801=99^2$ 成立；

設 (x_n,y_n) 為 $2x^2+1=y^2$ 的解，其中 $\begin{cases} x_n=6x_{n-1}-x_{n-2} \\ y_n=6y_{n-1}-y_{n-2} \end{cases}$。

可得：

$$2x_n^2+1=2(6x_{n-1}-x_{n-2})^2+1$$

$$=2(36x_{n-1}^2-12x_{n-1}x_{n-2}+x_{n-2}^2)+1$$

$$=72x_{n-1}^2-24x_{n-1}x_{n-2}+\underline{2x_{n-2}^2+1}$$

$$=72x_{n-1}^2-24x_{n-1}x_{n-2}+y_{n-2}^2 \text{----------------------} \quad (1)$$

$$y_n^2=(6y_{n-1}-y_{n-2})^2=36y_{n-1}^2-12y_{n-1}y_{n-2}+y_{n-2}^2 \text{----------} \quad (2)$$

(2) － (1) $=36y_{n-1}^2-12y_{n-1}y_{n-2}+\cancel{y_{n-2}^2}-72x_{n-1}^2+24x_{n-1}x_{n-2}-\cancel{y_{n-2}^2}$

$$=36(2x_{n-1}^2+1)-12y_{n-1}y_{n-2}-72x_{n-1}^2+24x_{n-1}x_{n-2}$$

$$=12(\underline{2x_{n-1}x_{n-2}}-\underline{y_{n-1}y_{n-2}}+3)$$

=0

$$\therefore 2x_{n-1}x_{n-2}-y_{n-1}y_{n-2}+3=0 \text{-----} \quad (*)$$

則當 (x_{n+1},y_{n+1}) 時,

$$2x_{n+1}^2+1=2(6x_n-x_{n-1})^2+1$$

$$=2(36x_n^2-12x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2)+1$$

$$=72x_n^2-24x_nx_{n-1}+2x_{n-1}^2+1$$

$$=72x_n^2-24x_nx_{n-1}+y_{n-1}^2 \text{----------------------} \quad (a)$$

$$y_{n+1}^2=(6y_n-y_{n-1})^2=36y_n^2-12y_ny_{n-1}+y_{n-1}^2 \text{----------} \quad (b)$$

(b) — (a) $=36y_n^2-12y_ny_{n-1}+\cancel{y_{n-1}^2}-72x_n^2+24x_nx_{n-1}-\cancel{y_{n-1}^2}$

$$=36(2x_n^2+1)-12y_ny_{n-1}-72x_n^2+24x_nx_{n-1}$$

$$=12(2x_nx_{n-1}-y_ny_{n-1}+3)$$

$$=12[2(6x_{n-1}-x_{n-2})x_{n-1}-(6y_{n-1}-y_{n-2})y_{n-1}+3]$$

$$=12[12x_{n-1}^2-2x_{n-1}x_{n-2}-6y_{n-1}^2+y_{n-1}y_{n-2}+3]$$

$$=12[12x_{n-1}^2-2x_{n-1}x_{n-2}-6(2x^2{}_{n-1}+1)+y_{n-1}y_{n-2}+3]$$

$$=12[y_{n-1}y_{n-2}-2x_{n-1}x_{n-2}-3]$$

=0（由＊）

根據數學歸納法，證明完畢。

附錄六：

第一：兩數列皆逼近$\sqrt{2}$。

第二：「分母越大，離$\sqrt{2}$越近」。

第三：每個分數均為最簡分數。

第四：$2x^2+1=y^2$整數解的比值：分子為奇數、分母為偶數 。

第五：$2x^2=y^2+1$整數解的比值：分子為奇數、分母為奇數。

證明：

第一、第二略。

第三、當 n_k 為偶數時：

n_k和n_k+1互質

$\Rightarrow \frac{n_k}{2}$與$n_k+1$ 互質，

$\Rightarrow x_k^2, y_k^2$ 互質，

$\Rightarrow x_k, y_k$ 互質，

故 $\dfrac{y_k}{x_k}$ 為最簡分數。當 n 為奇數時，證法相同，略。

第四、$2x^2+1=y^2$ 整數解 $\dfrac{y_k}{x_k}$ 之分子為奇數，分母為偶數

$$\Theta \begin{cases} \dfrac{n_k}{2}=x_k^2 \\ n_k+1=y_k^2 \end{cases}, \quad n_k \text{ 為偶數。}$$

$\therefore n_k+1=y_k^2$ 為奇數，

$\Rightarrow y_k$ 為奇數。

另一方面 $n_k+1=y_k^2$ 為一完全平方數，所以

n_k 具有 $4k$ 的形式，所以 $\dfrac{n_k}{2}=\dfrac{4k}{2}=2k=x_k^2$，

所以 x_k 為偶數。第五、證法同上，略。

附錄七：定理：若數列 $\{f_n\}$ 滿足

$$f_{n+2}=af_{n+1}+bf_n$$

其中 a、b 為實數且令 α_0、β_0 為二次方程式 $x^2=ax+b$ 的兩個相異實根，則

存在 α 及 β 使得 $f_n=\alpha\alpha_0^n+\beta\beta_0^n$。

$$\text{其中：}\begin{cases} \alpha=\dfrac{\beta_0 f_0-f_1}{\beta_0-\alpha_0} \\ \beta=\dfrac{f_1-\alpha_0 f_0}{\beta_0-\alpha_0} \end{cases}$$

附錄八

$$\begin{cases} \dfrac{n_k}{2}=x_k^2 \text{ ------}(1) \\ n_k+1=y_k^2 \text{ ----}(2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y_k}{x_k}\right)^2=\frac{2(n_k+1)}{n_k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_k}{x_k} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{n_k+1}{n_k}} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{2x_k^2+1}{2x_k^2}}$$

$$< \sqrt{2} \times \left(\frac{x_k+1}{x_k} \right)$$

$$= \sqrt{2} \times \left(1 + \frac{1}{x_k} \right)$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \frac{1}{x_k}。$$

$$\Theta \ \frac{1}{x_k} < \frac{2\sqrt{2}}{\left[\left(3+2\sqrt{2}\right)^k - 1\right]} < \frac{3+2\sqrt{2}}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^k - 1} < \frac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}}} < \frac{1}{5^{k-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_k}{x_k} - \sqrt{2} < \sqrt{2} \times \frac{1}{x_k} < \frac{\sqrt{2}}{5^{k-1}} < \frac{5}{3} \times \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{1}{3 \times 5^{k-2}}$$

附錄九：

, n_k 為偶數。

$\because \begin{cases} \frac{n_k+1}{2} = x_k^2 \\ n_k = y_k^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 2x^2+1 = y^2$ 之整數解的比值 $\frac{y_k}{x_k}$ 的平方，具有 $\frac{y_k^2}{x_k^2} = \frac{2x_k^2+1}{x_k^2} = 2 + \frac{1}{x_k^2}$ 的形式，故當分母為 $1, 2^2, 3^2, \Lambda, (x_k-1)^2$ 的分數，不會比 $\frac{y_k^2}{x_k^2}$ 更接近 2，所以分母比 x_k 小的分數，不會比 $\frac{y_k}{x_k}$ 更接近 $\sqrt{2}$。故 $2x^2+1 = y^2$ 之整數解的比值 $\frac{y_k}{x_k}$ 為 $\sqrt{2}$ 之最佳分數。

, n_k 為奇數。

$\because \begin{cases} \frac{n_k+1}{2} = x_k^2 \\ n_k = y_k^2 \end{cases}$ $\Rightarrow 2x^2 = y^2+1$ 之整數解的比值 $\frac{y_k}{x_k}$ 的平方，具有 $\frac{y_k^2}{x_k^2} = \frac{2x_k^2-1}{x_k^2} = 2 - \frac{1}{x_k^2}$ 的形式，故當分母為 $1, 2^2, 3^2, \Lambda, (x_k-1)^2$ 的分數，不會比 $\frac{y_k^2}{x_k^2}$ 更接近 2，所以分母比 x_k 小的分數，不會比 $\frac{y_k}{x_k}$ 更接近 $\sqrt{2}$。故 $2x^2 = y^2+1$ 之整數解的比值 $\frac{y_k}{x_k}$ 為 $\sqrt{2}$ 之最佳分數。

附錄十

方程式	x_k	y_k	y_k / x_k	準確位數（小數點後）$\sqrt{2} \approx 1.41421356237310$	
$2x^2+1=y^2$	2	3	1.50000000000000	0	遞迴係數
	12	17	**1.41**666666666667	2	p=6
	70	99	**1.4142**8571428571	4	q=-1
	408	577	**1.41421**568627451	5	
	2378	3363	**1.414213**62489487	6	
	13860	19601	**1.41421356**421356	8	
	80782	114243	**1.414213562**42727	9	
	470832	665857	**1.41421356237**469	11	
	2744210	3880899	**1.4142135623731**4	13	
$2x^2+2=y^2$	1	2	2.00000000000000	0	遞迴係數
	7	10	**1.4**2857142857143	1	p=6
	41	58	**1.414**63414634146	3	q=-1
	239	338	**1.4142**2594142259	4	
	1393	1970	**1.41421**392677674	5	
	8119	11482	**1.4142135**7310014	7	
	47321	66922	**1.414213562**68887	9	
	275807	390050	**1.4142135623**8239	10	
	1607521	2273378	**1.414213562373**37	12	
$2x^2+4=y^2$	4	6	1.50000000000000	0	遞迴係數
	24	34	**1.41**666666666667	2	p=6
	140	198	**1.4142**8571428571	4	q=-1
	816	1154	**1.41421**568627451	5	
	4756	6726	**1.414213**62489487	6	
	27720	39202	**1.41421356**421356	8	
	161564	228486	**1.414213562**42727	9	
	941664	1331714	**1.41421356237**469	11	
$2x^2+7=y^2$	1	3	3.00000000000000	0	
	3	5	1.66666666666667	0	
	9	13	**1.4**4444444444444	1	
	19	27	**1.4**2105263157895	1	
	53	75	**1.41**509433962264	2	
	111	157	**1.414**41441441441	3	
	309	437	**1.4142**3948220065	4	
	647	915	**1.41421**947449768	5	
	1801	2547	**1.41421**432537479	5	
	3771	5333	**1.414213**73640944	6	
	10497	14845	**1.4142135**8483376	7	
	21979	31083	**1.41421356**749625	8	
	61181	86523	**1.41421356**303428	8	
	128103	181165	**1.414213562**52391	9	
	356589	504293	**1.4142135623**9256	10	

$2x^2+8=y^2$	2	4	2.00000000000000		遞迴係數 p=6 q=-1
	14	20	**1.4**2857142857143	1	
	82	116	**1.414**63414634146	3	
	478	676	**1.41422**594142259	5	
	2786	3940	**1.414213**92677674	6	
	16238	22964	**1.4142135**7310014	7	
	94642	133844	**1.414213562**68887	9	
	551614	780100	**1.4142135623**8239	10	
	3215042	4546756	**1.414213562373**37	12	
$2x^2+9=y^2$	6	9	1.50000000000000	0	遞迴係數 p=6 q=-1
	36	51	**1.41**666666666667	2	
	21	297	**1.4142**8571428571	4	
	1224	1731	**1.41421**568627451	5	
	7134	10089	**1.414213**62489487	6	
	41580	58803	**1.41421356**421356	8	
	242346	342729	**1.414213562**42727	9	
	1412496	1997571	**1.41421356237**469	10	
$2x^2+14=y^2$	1	4	4.00000000000000	0	
	5	8	1.60000000000000	0	
	11	16	**1.4**5454545454545	1	
	31	44	**1.41**935483870968	2	
	65	92	**1.41**538461538462	2	
	181	256	**1.414**36464088398	3	
	379	536	**1.4142**4802110818	4	
	1055	1492	**1.41421**800947867	5	
	2209	3124	**1.41421**457673155	5	
	6149	8696	**1.41421**369328346	7	
	12875	18208	**1.4142135**9223301	7	
	35839	50684	**1.41421356**622674	8	
	75041	106124	**1.41421356**325209	8	
	208885	295408	**1.414213562**48654	9	
	437371	618536	**1.4142135623**9897	10	
	1217471	1721764	**1.41421356237**643	11	
	2549185	3605092	**1.414213562373**86	12	

在[1, 9,999,999]無正整數解的方程式有 $2x^2+3=y^2$、$2x^2+5=y^2$、$2x^2+6=y^2$、$2x^2+10=y^2$、$2x^2+11=y^2$、$2x^2+12=y^2$、$2x^2+13=y^2$、$2x^2+15=y^2$ 等。

附錄十一

證明：

濾網為 2：

$x \equiv 0$、1（mod 2）

$\Rightarrow x^2 \equiv 0$、1（mod 2）

$\Rightarrow 2x^2 \equiv 0$（mod 2）

$y^2 \equiv 0$、1（mod 2）

$\therefore y^2 - 2x^2 \equiv 0$、1（mod 2）

$\because k \equiv 0$、1（mod 2）

故「間隙」太大濾不出來。

濾網為 2^2：

$x \equiv 0$、1、2、3（mod 4）

$\Rightarrow x^2 \equiv 0$、1（mod 4）

$\Rightarrow 2x^2 \equiv 0$, 2　（mod 4）

$y^2 \equiv 0$、1（mod 4）

$\therefore y^2 - 2x^2 \equiv 0$、1,2,3　（mod 4）

$\because k \equiv 0$、1、2、3（mod 4）

故「間隙」太大濾不出來。

濾網為 2^3：

$x \equiv 0$、1、2、3…7。　（mod 8）

$\Rightarrow x^2 \equiv 0$、1、4（mod 8）

$\Rightarrow 2x^2 \equiv 0$、2（mod 8）

$y^2 \equiv 0$、1、4（mod 8）

$\therefore y^2 - 2x^2 \equiv 0$、1、2、4、6、7　（mod 8）…（1）

$\because k \equiv 0$、1、2、3…7。。　（mod 8）…（2）

由（1）、（2）兩式可看出濾網為 2^3 時，濾出：

k=3+8t

k=5+8t

t=0,1,2,3…時，$2x^2 + k = y^2$ 方程式沒有正整數解。

濾網為 2^4：

$x \equiv 0$、1、2、3…15。　（mod 16）

$\Rightarrow x^2 \equiv 0$、1、4、9　（mod 16）

$\Rightarrow 2x^2 \equiv$ 0、2、8（mod 16）

$y^2 \equiv$ 0。1。4。9（mod 16）

$\therefore y^2 - 2x^2 \equiv$ 0、1、2、4、7、8、9、12、14、15　（mod 16）…（1）

$\because k \equiv$ 0、1、2、3…15。　（mod 16）…（2）

由（1)、(2）兩式可看出濾網為 2^4 時，濾出：

k=3+16t、k=5+16t、k=6+16t、k=10+16t、k=11+16t、k=13+16t

，t=0,1,2,3…時， $2x^2 + k = y^2$ 方程式沒有正整數解。