



國中-數學科

科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：眾裏尋他千百度——常寬圖形的探討與研究

關 鍵 詞：常寬圖形、寬 度

編 號：030406

學校名稱：

高雄市立民族國民中學

作者姓名：

洪蕙晴、周 昀、于洪杰、朱繹中

指導老師：

施世隆、陳重榮



眾裏尋他千百度 —— 常寬圖形的探討與研究



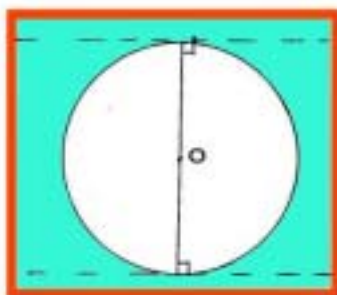
一. 摘要

1. 過平面上一幾何圖形上的二個點，作兩平行線而能把此圖形夾住，若夾住此圖形的任二平行線其距離皆相等，則稱此圖形為「常寬圖形」。這時，此距離就稱為常寬圖形的「寬度」。
2. 一般常見的幾何圖形只有「圓」是常寬圖形，其餘皆非。經反覆研究，得知由正奇數多邊形所造出的正奇數拱亦為常寬圖形。
3. 進一步，一個多邊形所造出的多角拱是否為常寬圖形，取決於一個充要條件。
4. 掌握上述充要條件的精髓，我們也能造出平滑封閉曲線（沒稜角）的常寬圖形。
5. 任何同寬度的常寬圖形都是等周長，其周長恰等於寬度 $\times \pi$ 。
6. 同寬度的常寬圖形中，以圓面積為最大，正三角拱的面積為最小。
7. 寬度為 a 的所有常寬圖形和兩平行邊的距離亦為 a 的正六邊形，二者的關係頗富趣味。

二. 研究動機

數學課上到「圓」這一單元時（第五冊第二章），老師補充告訴我們說，過平面上一幾何圖形上的二個點，作兩條平行線而能把此圖形夾住，若夾住

此圖形的任兩條平行線其距離皆相等，則稱此幾何圖形為「常寬圖形」。這時，此距離就稱為此常寬圖形的「寬度」。例如，「圓」即為最標準的常寬圖形，如圖(一)，任何能夾住此圓的二平行線，其寬度都等於圓之直徑。



圖一

這個補充，引起了我們莫大的興趣，想探究除了圓以外，還有那些圖形是常寬圖形，以及這些常寬圖形有何特殊而迷人的性質。

三研究目的

1. 除了圓以外，還能找到那些圖形是常寬圖形？
2. 常寬圖形周長的研究。
3. 常寬圖形面積的研究。
4. 常寬圖形其他有趣性質的研究

四.研究器材

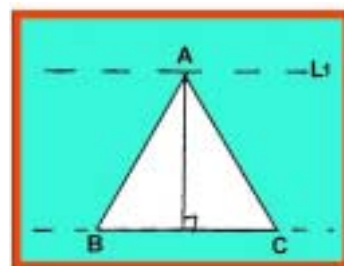
直尺、圓規、量角器

五.研究過程

我們先從最簡單的圖形 — 正三角形

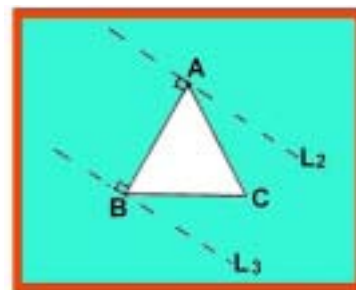
著手，經仔細檢驗，發現正三角形並
非常寬圖形，理由如下：

圖(二)中夾住正三角形的兩平行線
分別為 L_1 和 $\overleftrightarrow{BC}$ ，其距離為正三角
形的高。



圖(二)

圖(三)中夾住正三角形的兩平行線
分別為 L_2 , L_3 ，其距離為正三角形
的邊長。二者並不相等，所以正三
角形並非常寬圖形。



圖(三)

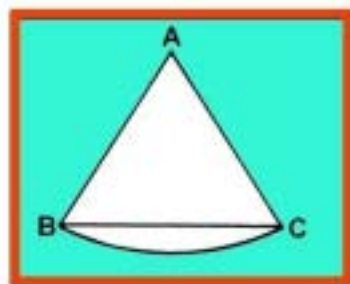
2. 接著我們列出一般常見的幾何圖形，仔細檢驗其是否為常寬圖形，結果
如下表：

圖形	圓形	正三 角形	正 方形	矩形	菱形	平行 四邊形	梯形	正五 邊形	正六 邊形	不規則 四邊形	不規則 五邊形
是否為 常寬圖形	是	否	否	否	否	否	否	否	否	否	否

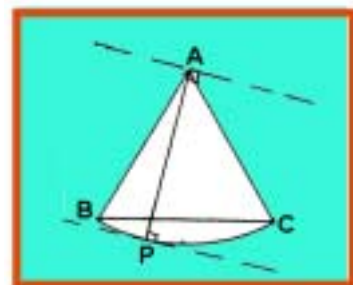
這個結果令我們大吃一驚，日常所見的幾何圖形，竟然只有「圓」是常寬圖形，其他皆非。看來，要在茫茫圖海中找尋常寬圖形，可不是一件簡單的任務喔！

討論

我們一再嘗試，一再深思，累積了經驗之後，突然間靈感湧現，找到了研究的新方向。我們想，既然要夾住圖形的任兩條平行線，其距離皆相等，則此圖形一定要兼具「圓」和「正多邊形」的一般性質，例如以正三角形 ABC 之頂點 A 為圓心， $\overline{AB}$ 長為半徑畫弧，得一圖形，如圖(四 A)。則在此圖形中，過 A 和 $\widehat{BC}$ 上任一點 P 作二平行線，來把圖形夾起，則其距離都會相等，都等於 $\overline{AB}$ ，如圖(四 B)此和常寬圖形的要求甚為接近。所以欣喜之餘，我們的研究就由此切入。

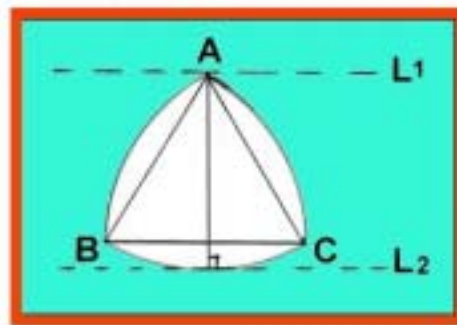


圖(四A)



圖(四B)

3. 我們再從正三角形著手。圖（五）中， $\triangle ABC$ 為正三角形，各以 A, B, C 為圓心，三角形之邊長為半徑畫弧，得一圖形，老師指導我們說，這樣作出的圖形稱之為正三角拱。



圖五

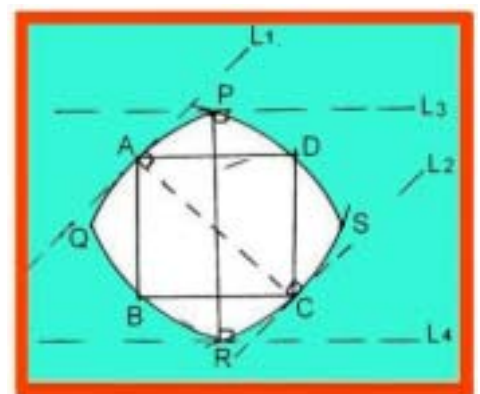
經仔細檢驗，發現能夾起此三角拱的任二條平行線，如圖(五)中的 L_1 , L_2 ，其距離皆等於 60° 圓弧的半徑，亦即等於正三角形之邊長。換句話說，正三角拱不折不扣是除了圓以外，另一個常寬圖形。

4. 這個發現使我們大為振奮，於是我們再接再厲，又立刻著手作一正四角拱。

圖（六） ABCD 為正方形，各以 A, B, C, D 為圓心，對角線 $\overline{AC}$ 為半徑畫弧，得一拱形 PQRS，即為正四角拱。

仔細檢驗，發現正四角拱並非常寬圖形

，理由如下：



圖六

圖(六)中夾起 PQRS 四角拱的二平行線如 L_1 , L_2 其距離為 $\overline{AC}$ ，另二平

行線 L_3, L_4 ，其距離為 $\overline{PR}$ ，但顯然 $\overline{AC} \neq \overline{PR}$ ，所以正四角拱並非常寬圖形。

討論

為什麼正三角拱是常寬圖形，而正四角拱不是呢？我們反覆思索，終於窺破了其中奧秘。圖（七）正三角形 ABC 和正方形 $PQRS$ 中，在三角形方面， A, B, C 任一頂點到對邊兩端點都等距離，即 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ 所以造出來的正三角拱為常寬圖形。在正方形方面， P 到對邊（即 $\overline{QR}$ ）兩端點不等距，即 $\overline{PQ} \neq \overline{PR}$ 所以造出的正四角拱不是常寬圖形，於是我們推想，一正多邊形的任一頂點，到最遠對邊兩端點若都是等距離，則所造出的正多角拱必為常寬圖形，否則為非。

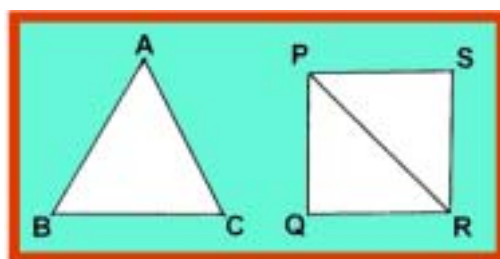
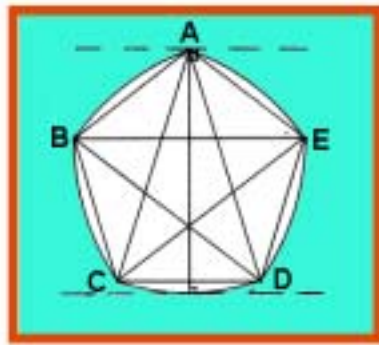
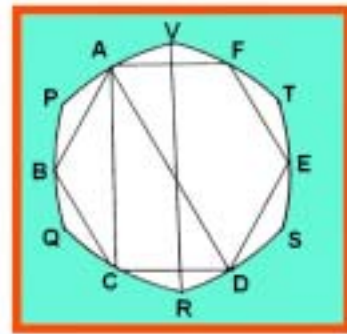


圖 七

5. 為了驗證上述推想，我們分別作出正五角拱（圖八）和正六角拱（圖九）。



圖八



圖九

在（圖八）中，正五角拱 ABCDE 是由正五邊形 ABCDE 所造出，因為任一頂點到最遠對邊兩端點皆等距（即 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BE} = \overline{CE}$ ），所以經仔細檢驗，**正五角拱 ABCDE 確為常寬圖形**，所有能夾住此五角拱的任二平行線，其寬度都等於圓弧的半徑（即 $\overline{AC}$ ）。

圖（九）中，正六角拱 PQRSTV 是由正六邊形 ABCDEF 所造出，因為頂點 A 到最遠對邊兩端點不等距（ $\overline{AC} \neq \overline{AD}$ ），所以**正六角拱不是常寬圖形**，理由是夾住此六角拱的兩平行線，有的距離等於 $\overline{AD}$ ，有的等於 $\overline{VR}$ ，但顯然 $\overline{AD} \neq \overline{VR}$ 。

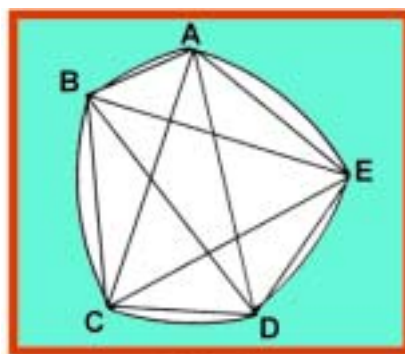
討論

依此同樣思維，我們推定由正七邊形所造出的正七角拱應是常寬圖形，而正八邊形所造出的正八角拱則不是。進一步，我們獲致了一個漂亮的

結果, 所有正奇數多邊形所造出的正奇數拱為常寬圖形, 正偶數拱則非。

6. 對前述研究, 我們經多次反思, 突然間雲開見日出, 大夥兒驚喜的叫了出來:「哈! 竟是這樣」。究竟是怎樣呢? 原來推翻了我們最初的想法, 常寬圖形不一定要由正多邊形所造出的正多角拱才是, 即使不是正的多邊形, 也有可能造出是常寬圖形的非正拱形。換句話說, 一個多邊形所造出的多角拱是否為常寬圖形取決於一個條件: 若此多邊形的任一頂點, 到最遠對邊兩端點的距離處處相等, 則此多邊形所造出的多角拱必為常寬圖形, 否則為非。

為了驗證這個推論, 我們作出一個不規則的五邊形, 如圖 (十), 但合乎上述條件, 即 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BE} = \overline{CE}$ 則造出的五角拱 ABCDE, 經仔細檢驗, 確為常寬圖形, 因為任何能夾住此五角拱的兩平行線, 其距離皆等於圓弧的半徑 (即 $\overline{AC}$ 等)。

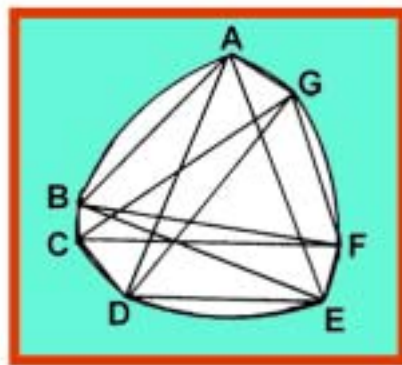


圖十

欣喜之餘, 我們又作了另一個不規則的七邊形, 如圖 (十一), 此七邊

形也合乎上述條件

即 $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{BE} = \overline{CG} = \overline{CF} = \overline{DG}$ ，則所造出的七角拱 ABCDEFG 經仔細檢驗，又確為常寬圖形，因為任何能夾住此七角拱的二平行線，其寬皆等於圓弧的半徑（即 $\overline{AD}$ 等）。



圖十一

研究至此，我們獲得了一個極漂亮的結論：

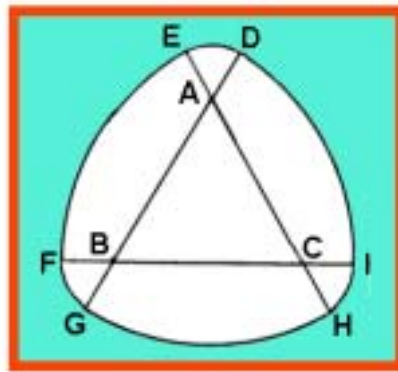
一個多邊形所造出的多角拱為常寬圖形的充要條件是：此多邊形任一頂點到最遠對邊的兩端點之距離全都相等。

討論

依此充要條件，偶數多邊形沒有一個符合的，怪不得偶角拱形沒有一個是常寬圖形，這又驗證了研究過程 5 的結論。且依此充要條件，三角拱中只有正三角拱為常寬圖形，其他皆非。

7. 研究愈深入，我們愈得心應手，找到的常寬圖形也愈多。然而上述研究所找到的常寬圖形全是有稜角的拱形，我們突發奇想，能否找到沒有稜角的常寬圖形（圓，當然就是一例）？掌握前述充要條件的精髓，這個問題很快就獲得解決。

圖（十二），從正三角形之三邊各向外延伸使 $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{BF} = \overline{BG} = \overline{CH} = \overline{CI}$ ，各以 A, B, C 為圓心， $\overline{AD}$ 為半徑畫出小弧 $\widehat{DE}$, $\widehat{FG}$, $\widehat{HI}$ ，再各以 A, B, C 為圓心， $\overline{AG}$ 為半徑畫出大弧 $\widehat{GH}$, $\widehat{DI}$, $\widehat{EF}$ ，則得一平滑封閉曲線的圖形，有點近乎圓，可據以推斷的，若邊數愈多（奇數邊方可），愈趨近於圓。

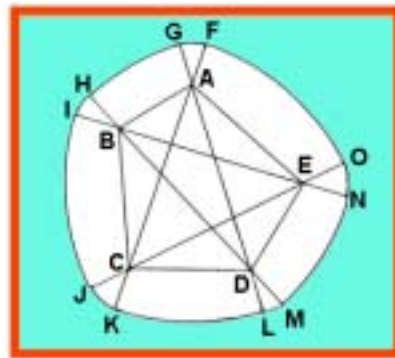


圖十二

仔細檢驗，此形亦為常寬圖形，理由是夾起此圖形的任兩平行線，其寬度都等於小弧半徑 + 大弧半徑，（即 $\overline{AD} + \overline{AG}$ ）。

即使是不規則的奇數多邊形，但合乎常寬圖形充要條件的，也是能作出沒有稜角的常寬圖形。

圖（十三）， $ABCDE$ 為不規則五邊形，但 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BE} = \overline{CE}$ ，
把 $\overline{AC}$ 等五線段向外延伸，使 $\overline{AF} = \overline{AG} = \overline{BH} = \dots = \overline{EN} = \overline{EO}$ 。



圖十三

今各以 A ， B ， C ， D ， E 為圓心，分別以 $\overline{AF}$ ， $\overline{AK}$ 為半徑各畫一小弧及大弧，得一平滑的封閉曲線圖形。仔細檢驗，此圖形為常寬圖形，理由是夾起此圖形的任兩平行線，其寬度都等於大小兩弧半徑的和，即 $\overline{AF} + \overline{AK}$ 。

討論

至此，天地愈來愈寬，常寬圖形並非我們原先想像的孤家寡人一個，相反的，卻是子孫眾多。歸納起來，包含下列三類：

- ①圓形
- ②由正奇數多邊形造出的有稜角正奇數拱，及沒稜角的平滑曲線圖形。
- ③由非正多邊形，但合乎造出常寬圖形充要條件的奇數多邊形所造出的

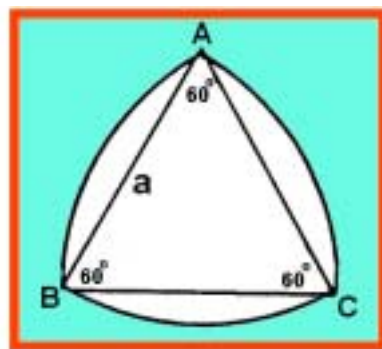
有稜角奇數拱，及沒稜角的平滑曲線圖形。

以上三類，我們又從而發現，所有的常寬圖形其周界全都由弧線所構成。

8. 接著我們欲研究的是常寬圖形的周長。因為「圓」是最標準的常寬圖形，而圓周長 = 直徑 $\times \pi$ ，另一方面夾起圓之任二平行線其距離（即我們前述的寬度）亦為直徑，換句話說，圓周長 = 寬度 $\times \pi$ 。

其他的常寬圖形呢？其周長會和寬度有關嗎？

我們先以正三角拱為例，圖（十四）為正三角拱，



圖十四

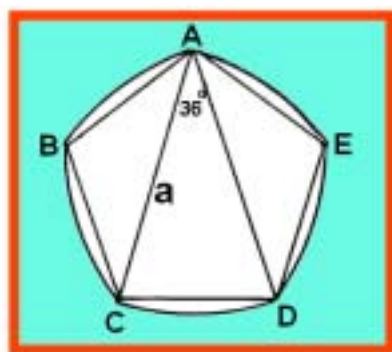
其寬度為 a （即 $\overline{AC}$ ）

$$\text{周長} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC}$$

$$= 2 \times a \times \pi \times \frac{60}{360} \times 3$$

$$= a\pi$$

再來計算正五角拱，圖（十五）是寬度為 a 的正五角拱形，很容易計算出每個圓弧的圓心角為 36 度。



圖十五

$$\begin{aligned}
 \text{周長} &= \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA} \\
 &= 2 \times a \times \pi \times \frac{36}{360} \times 5 \\
 &= a\pi
 \end{aligned}$$

討論

依同樣的推理，我們可計算出正奇數 n 角拱每一圓弧所對的圓心角恰為

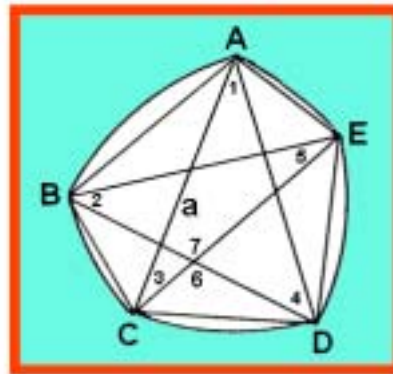
$\frac{180(n-2)}{n} \div (n-2)$ 度，（化簡得 $\frac{180}{n}$ 度）。若其寬度為 a ，則其周長恰等於 $2 \times a \times \pi \times \frac{180}{360} \div n = a\pi$ 。但我們不敢遽下結論，我們還須

計算不規則奇角拱及沒稜角等常寬圖形，求其周長和寬度的關係。

9. 圖（十六）是不規則五角拱，

設 $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{CE} = a$ ，則由前述研究，此五角拱必為常寬圖形，寬度為 a ，且我們學過，任何五角星形，五個頂角的和必為 180° ，證明如下：

圖（十六）中



圖十六

$$\because \angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = \angle 6 = \angle 7$$

$$\text{又 } \angle 2 + \angle 5 + \angle 7 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$$

$$\text{所以五角拱周長} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{EA}$$

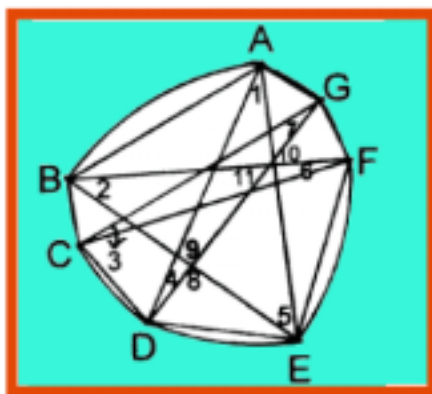
$$= 2 \times a \times \pi \times \frac{1}{360^\circ} (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5)$$

$$= 2 \times a \times \pi \times \frac{180}{360}$$

$$= a\pi$$

進一步，不規則的七角拱又是如何？

圖(十七)，若 $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{CF} = a$ ，則由前述研究，此七角拱必為常寬圖形，寬度為 a 。



圖十七

$$\because \angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 8 = \angle 9$$

$$\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = \angle 10 = \angle 11$$

$$\text{但 } \angle 2 + \angle 9 + \angle 11 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$$

$$\therefore \text{此七角拱周長} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GA}$$

$$= 2 \times a \times \pi \times \frac{1}{360^\circ} (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7)$$

$$= 2 \times a \times \pi \times \frac{180}{360}$$

$$= a\pi$$

又是同樣結果。且依同樣的證明方法，我們得知：任何奇數角星形，其奇數個頂角的和必為 180° 。

於是，依奇數多邊形造出常寬圖形的充要條件，此時此多邊形的任一頂點

到最遠對邊的兩端點連線，恰構成一奇數角星形，而其頂角和為 180° 。所以，若此常寬圖形的寬度為 a ，則其周長恰等於以 a 為半徑的奇數個圓弧長。即常寬圖形的周長

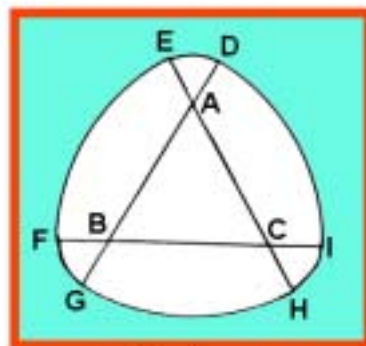
$$\begin{aligned}
 &= 2 \times a \times \pi \times \frac{1}{360^\circ} (\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n, n \text{ 為奇數}) \\
 &= 2 \times a \times \pi \times \frac{180}{360} \\
 &= a\pi
 \end{aligned}$$

即任何奇數角拱的常寬圖形，其周長恆等於 $a\pi$ ，其中 a 為寬度。

再進一步，我們研究平滑曲線所構成常寬圖形的周長，圖(十八)即圖(十二)之形，我們前已指出，其寬度為 $\overline{AD} + \overline{AG}$ ，設 $\overline{AD} + \overline{AG} = a$ （即寬度為 a ），又設 $\overline{AD} = x$ ， $\overline{AG} = y$ ，則 $a = x + y$

圖形周長 = 3 個小弧和 3 個大弧的弧長和

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi x \times \frac{60}{360} \times 3 + 2\pi y \times \frac{60}{360} \times 3 \\
 &= \pi x + \pi y \\
 &= (x + y)\pi \\
 &= a\pi
 \end{aligned}$$



圖十八



依同樣的推理與計算，我們不難得知任何合乎常寬圖形的充要條件之奇數多邊形，其所造出的沒稜角平滑曲線之常寬圖形，由前述的研究及其討論，可推得其周長 = 小弧長的和 + 大弧長的和

$$= \pi x + \pi y$$

$$= (x + y)\pi$$

$$= a\pi$$

其中 x 表小弧的半徑， y 表大弧的半徑， a 為寬度。

從這些結果，我們又獲得了一個漂亮的結論：在同寬度下，所有的常寬圖形其周長都是一個定值，都等於寬度和圓周率的乘積。亦即所有同寬度的常寬圖形都是等周長。

10. 再接著，我們欲研究的是常寬圖形的面積，先前在平面幾何我們學過這條性質：「等周長的正多邊形中，以圓面積最大，正三角形面積最小」，亦即等周長的條件下，邊數愈多，面積愈大(圓可視為無限多邊的多邊形)，那麼在常寬圖形中，是否也是如此嗎？

在同寬度的條件下，試比較圓、正三角拱、正五角拱的面積，依前述研究，其皆為等周長，今設其寬度為 a 。

$$\text{圓面積} = \text{半徑}^2 \times \pi = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = \frac{a^2}{4} \pi \quad 0.785 a^2$$

正三角拱面積(圖十九) , 其中 $\overline{AB} = a$

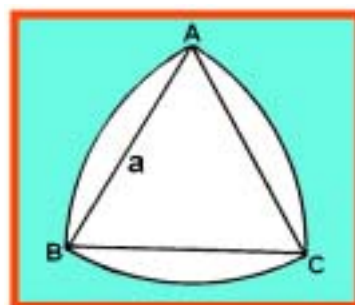
$$= 3 \times (60^\circ \text{扇形面積}) - 2 \text{正三角形面積}$$

$$= 3 \times a^2 \pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 2$$

$$= \frac{1}{2} \times a^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \times a^2$$

$$= \left(\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\right) \times a^2$$

$$0.705 a^2$$



圖十九

正五角拱面積(圖二十),

其中 $\overline{AC} = a = \overline{AD}$

我們查三角函數表, 得

$$\overline{CF} = \sin 36^\circ a \quad 0.588 a$$

而斜線(為一弓形)面積

$$= \text{扇形 CAD 面積} - \triangle ACD$$

$$= a^2 \pi \times \frac{36}{360} - \frac{a \times 0.588a}{2} \quad 0.02 a^2$$

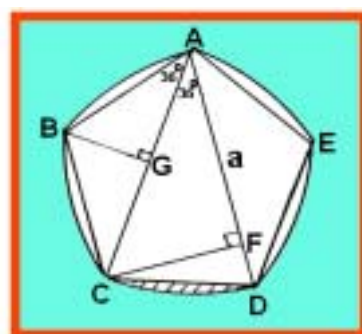
又 $\triangle ABC$ 中, 以 $\overline{AC} = a$ 為底, 查表得知

$$\text{高 } \overline{BG} = \frac{a}{2} \times \tan 36^\circ \quad 0.363a$$

所以正五角拱面積 = $\triangle ABC + \triangle ADE + \triangle ACD + 5$ 個斜線面積

$$\frac{a \times 0.363a}{2} \times 2 + \frac{a \times 0.588a}{2} + 0.02 a^2 \times 5 \quad 0.757 a^2$$

得出：圓面積 > 正五角拱面積 > 正三角拱面積



圖二十



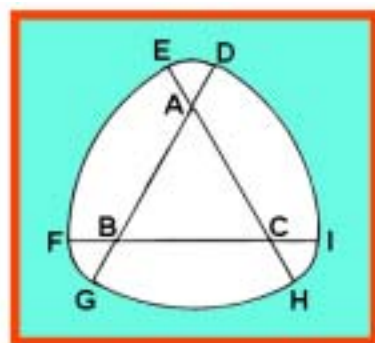
由此研究，和平面幾何等周長的面積性質，幾乎完全相同，但我們為求慎重，再計算由正三角形所造出沒稜角的平滑曲線常寬圖形的面積，（此部份的計算頗為繁複）。

11. 圖(二十一)即圖(十二)之形

其中 ABC 為正三角形，寬度 $a = \overline{AD} + \overline{AG}$ ，現計算其面積：

設 $\overline{AD} = x$ ， $\overline{AG} = y$ ，則 $x + y = a$

且 $\overline{AB} = \overline{AG} - \overline{BG} = \overline{AG} - \overline{AD} = y - x$



圖二十一

圖形面積

= 3 個 60° 小扇形面積 + 3 個 60° 大扇型面積 - 2 個正 $\triangle ABC$ 面積

$$\begin{aligned}
 &= 3\left(\frac{x^2\pi}{6} + \frac{y^2\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} (y - x)^2 \times 2 \\
 &= \frac{\pi}{2} (x^2 + y^2) - \frac{\sqrt{3}}{2} (y - x)^2 \\
 &= \frac{\pi}{2} [(x + y)^2 - 2xy] - \frac{\sqrt{3}}{2} [(y + x)^2 - 4xy] \\
 &= \frac{\pi}{2} (a^2 - 2xy) - \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - 4xy) \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2 + (2\sqrt{3} - \pi) xy \dots\dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

我們學過二次函數，得知若 $x + y = a$ ，則在 $x = y = \frac{a}{2}$ 時， xy 有最大值 $\frac{a^2}{4}$ ，此時 ① 式可化簡為 $(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) a^2 + (2\sqrt{3} - \pi) \times \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\pi$ ，即為寬度同為 a 的圓面積，換句話說，即使 $x = y = \frac{a}{2}$ ，使 xy 有最大值，此圖形面積也不過等於同寬度的圓面積，何況 x 不可能等於 y ，若是如此，則 $\overline{AB} = y - x = 0$ ，那就無意義了。

又①式前半段 $(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) a^2$ 恰等於同寬度的正三角拱面積，由此得知在同寬度下，正三角形所造出的平滑曲線(沒稜角)常寬圖形的面積恆小於圓面積，但大於正三角拱面積。



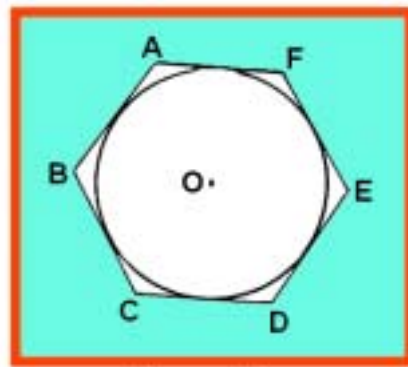
綜合研究過程 10、11，我們又推得了一個漂亮的結果：在同寬度亦即等周長的所有常寬圖形中，以圓面積為最大，而正三角拱的面積為最小。

12. 研究到此階段，老師指導我們說，常寬圖形還有一個頗為有趣的性質，那就是：任何寬度為 a 的常寬圖形都可被一個兩平行邊距離亦為 a 的正六邊形所包含，且正六邊形的每一邊都可和此常寬圖形相接觸。這段話又引起了我們極大的興趣，想驗證其正確性。

我們這樣思考：由前面研究，寬度同為 a 的所有常寬圖形以圓面積為最

大，以正三角拱的面積為最小，設若兩平行邊之距離亦為 a 之正六邊形能同時包含圓和正三角拱，且各邊都和圓或正三角拱有所接觸，則面積介於其間的其他常寬圖形，也一定能被包含於其中，且正六邊形之各邊也都能和其內的常寬圖形相接觸。

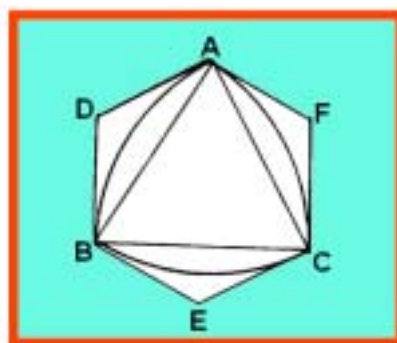
首先，我們學過內切圓，圖（二十二），



圖二十二

圓 O 為正六邊形 $ABCDEF$ 之內切圓，顯然圓之寬度（即直徑）恰等於正六邊形兩平行邊之距離，且各邊都和圓接觸，**所以符合上述性質。**

接著圖（二十三），從正三角拱 ABC ，分別過 A, B 兩點作二直線垂直 $\overline{AB}$ ，同樣方法過 B, C 作二直線垂直 $\overline{BC}$ ，過 A, C 作二直線垂直 $\overline{AC}$ ，則此六直線相交而圍成一正六邊形，



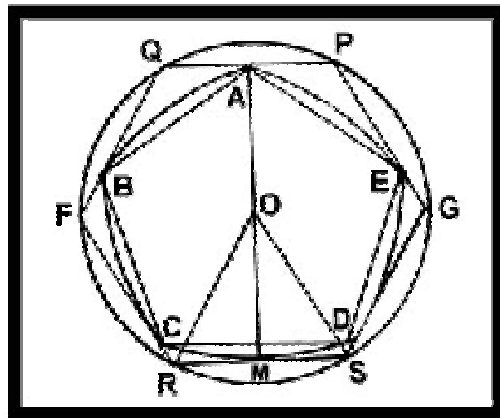
圖二十三

仔細檢驗，此正六邊形兩平行邊之距離恰等於正 $\triangle ABC$ 之邊長，亦即正三角拱之寬度，且各邊都和正三角拱接觸，也是完全符合上述性質。

討論

我們再以正五角拱 $ABCDE$ （為常寬圖形，寬度為 $\overline{AC}$ ）來驗證。

圖（二十四）為一正五角拱。



圖(二十四)

- ①連 A 及對弧之中點 M 。
- ②取 $\overline{AM}$ 之中點 O 。
- ③以 $\overline{OM}$ 為正三角形之高，作正 $\triangle ORS$ 。
- ④以 O 為圓心， $\overline{OR}$ 為半徑作一圓。
- ⑤以 $\overline{RS}$ 為一邊作圓 O 之內接正六邊形 $PQFRSG$ 。

經仔細檢驗，此正六邊形兩平行邊之距離，恰等於 $\overline{AM}$ （即等於 $\overline{AC}$ ），亦即等於正五角拱之寬度，且各邊和正五角拱都有接觸，於是我們高興得跳了起來。

六. 結論

1. 眾裏尋他千百度，在茫茫圖海裏，我們幾經尋尋覓覓，終於找到為數不少的常寬圖形，歸納起來共分為三類：

①圓形

②由正奇數多邊形所衍造出的有稜角正奇數拱形，及沒稜角的平滑曲線圖形。

③由非正多邊形，但合乎造出常寬圖形充要條件的奇數多邊形所衍造出有稜角奇數拱，及沒稜角的平滑曲線圖形。

以上三類，我們從而發現所有的常寬圖形，其周界全都由弧線所構成。

2. 由研究過程 6，獲得了一個極漂亮的結論：一個多邊形所衍造出的多角拱為常寬圖形的充要條件是：此多邊形任一頂點到最遠對邊的兩端點之距離全都相等。進一步，具有此充要條件的多邊形，也能造出沒稜角平滑曲線的常寬圖形。

3. 在同寬度下，所有常寬圖形都是等周長，其周長皆等於寬度 $\times \pi$ 。

4. 在同寬度（亦即等周長）下，所有常寬圖形的面積，以圓面積為最大，正三角拱的面積為最小。

5. 由研究過程 12，得知任何寬度為 a 的常寬圖形，都可被一個兩平行邊之距離亦為 a 的正六邊形所包含，且此正六邊形的每一邊都可和此常寬圖形相接觸。

七.參考資料

1. 國中數學課本第五冊 國立編譯館
2. 國中選修數學所附三角函數表 國立編譯館
3. 數學傳奇第 35 ; 36 頁 張景中著 中國少年兒童出版社出版